CONTRIBUCIONES A LA FUNDAMENTACIÓN DE LA TEORÍA DE LOS CONJUNTOS TRANSFINITOS

POR
G. CANTOR
de Halle a. S.

(PRIMER ARTÍCULO)

[Math. Annalen vol. 46, págs. 481-512 (1895).]
Traducción provisional y comentarios por J. Bares y J. Climent.

"Hypotheses non fingo."
["No forjo hipótesis."]

[*I. Newton,*
Philosophiae naturalis principia mathematica. 2^a *ed.*]

"Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus."
["No le damos leyes al intelecto y a las cosas según nuestro arbitrio, sino que como escribas fieles anotamos y transcribimos las que anuncia y pronuncia la voz de la propia naturaleza."]

[*F. Bacon,*
Scripta in naturali et universali philosophia.]

"Veniet tempus, quo lata quae nunc latent in lucem dies extrahat et longioris aevi diligentia."
["Digo cosas que ahora están ocultas, pero llegará el tiempo en que una persistente diligencia las saque a la luz del día."]

[*Pablo de Tarso,*
Primera Epístola a los Corintios.]

§1
El concepto de potencia o número cardinal.

Por un "conjunto" entendemos toda agrupación M en un todo de objetos determinados y bien diferenciados m, de nuestra intuición o de nuestro pensamiento (que son llamados los "elementos" de M).

En signos expresamos esto así:

$$M = \{m\}. \tag{1}$$

Comentario. [N.T.1] Hay que comparar esta definición (descripción) de conjunto con las otras que propuso Cantor en trabajos anteriores. Poner de manifiesto la naturaleza extensional de los conjuntos; interpretar: (1) "agrupación en un todo", en el sentido de que se consideran sistemas acabados; (2) "objeto determinado" en el sentido de que no se admite la imprecisión; (3) "diferenciado" en el sentido de que hay un criterio que permite discernir a los objetos entre sí; (4) diferencia entre "intuición" y "pensamiento" en Cantor. Desde luego, para Cantor, parece ser que en los conjuntos no se admite la repetición de elementos (lo que hoy llamamos un multiconjunto, i.e., un conjunto junto con una aplicación en el conjunto de los números naturales), ni, por considerar la lógica Aristotélica, la inexactitud, i.e., que no esté unívocamente determinado cuando un elemento dado pertenece o no a un conjunto dado. Tampoco le interesa a Cantor el asunto de la efectividad, en el sentido de si hay, o no, un procedimiento mecánico que permita decidir acerca de la pertenencia de un elemento a un conjunto.

Tomando en consideración los anteriores escritos de Cantor, en particular, aquéllos en los que presenta su construcción de los números reales, así como el actual trabajo de 1895–1897, se llega a la conclusión de que para Cantor los conjuntos no son simplemente entidades desestructuradas, i.e., entidades despojadas de cualquier estructura adicional, sea ésta de tipo métrico, topológico, de orden, o algebraico. Cantor, de manera implícita, considera que un conjunto viene dado junto con una relación de equivalencia, que sirve para determinar la igualdad (no la *identidad*) de los elementos del mismo, y, eventualmente, estructuras métricas, de orden, o algebraicas.

Hay que estudiar las cartas de Cantor a Hilbert de 1898 y hacer una comparación de lo que allí dice, respecto de los conjuntos acabados, y lo que dice aquí Cantor, en su descripción del concepto de conjunto. Además, dichas cartas son importantes porque al decir, por una parte, que la proposición más elevada e importante de la teoría de conjuntos es: “La totalidad de los alephs no puede ser concebida como un conjunto determinado y *a la vez acabado*”, y, por otra parte, que: “Hace ya muchos años que denominé, a las *totalidades* que no podemos concebir como “conjuntos”, totalidades “absolutamente infinitas” (ejemplo de ellas es la totalidad de los alephs, según demostramos arriba), y las diferencié nítidamente de los *conjuntos transfinitos*”, esto no cuadra con lo que dice, en estos trabajos de 1895 y 1897, acerca de los *conjuntos* de las potencias y de los ordinales.

Comentario. [N.T.2] Obsérvese el uso que hace de elementos genéricos, en este caso “m”, para representar a los elementos de los conjuntos, en este caso “M”.

Denotamos la reunión [agregación] de varios conjuntos M, N, P,..., que no tienen ningún elemento [en] común, en un único conjunto con [por]

$$(M, N, P, \ldots). \tag{2}$$

Comentario. [N.T.3] Cantor está considerando uniones de familias de conjuntos formadas por conjuntos dos a dos disjuntos. De manera que, salvo que dispusiera de un mecanismo que le permitiera obtener, a partir de una familia de conjuntos que no fueran dos a dos disjuntos, una nueva familia que cumpliera tal propiedad, no puede considerar uniones de familias de conjuntos arbitrarias. Recordemos que Dedekind, en 1888, considera la unión de una familia arbitraria de conjuntos.

Los elementos de este conjunto son, por consiguiente, los elementos de M, de N, de P, etc., tomados en común.

Llamamos “parte” o “subconjunto” de un conjunto M a *todo* otro conjunto M_1, cuyos elementos son al mismo tiempo elementos de M [N.Z.1].

Comentario. [N.T.4] Tal como usa “parte” parece que ha de interpretarse como “parte propia y no vacía”, i.e., una parte de M es un conjunto N que está incluido en M pero que no es ni M ni $\varnothing$. Hay que ir con cuidado con esto, porque, en particular, usó el conjunto vacío, en trabajos anteriores, y, más adelante, en el trabajo que nos ocupa, lo usará. Hay cierta reticencia, por parte de Cantor, y también de Dedekind, a dar derecho de ciudadanía al conjunto vacío debido a que los conjuntos son las extensiones de los conceptos y a que bajo cualquier concepto se supone que cae al menos un objeto.

Si M_2 es una parte de M_1, y M_1 una parte de M, entonces M_2 es también una parte de M.

A todo conjunto M le corresponde una determinada "potencia", que también denominamos su "número cardinal".

Llamamos "potencia" o "número cardinal" de M al concepto general, que con la ayuda de nuestra capacidad activa del pensamiento surge del conjunto M, al hacer abstracción de las características de sus diferentes elementos m y del orden en que se dan.

Comentario. [N.T.5] Si tiene la necesidad de hacer un doble acto de abstracción, para obtener el cardinal de un conjunto, esto pudiera indicar que los conjuntos no son para él, en principio, independientes ni de la naturaleza de sus elementos, lo cual involucra cuestiones de definibilidad, del modo como son dados, ni del orden en el que se den los mismos.

Debemos preguntarnos si "concepto general" es sinónimo de conjunto, o de conjunto despojado de toda estructura. Qué es la "capacidad activa del pensamiento".

---

[482] El resultado de este doble acto de abstracción, el número cardinal o la potencia de M, lo denotamos con [por]

$$\overline{\overline{M}}. \tag{3}$$

Puesto que a partir de cada elemento particular m, si se prescinde de sus características, se tendrá una "unidad", el número cardinal $\overline{\overline{M}}$ es él mismo un conjunto determinado compuesto sólo de unidades, que tiene existencia en nuestra mente como imagen intelectual o proyección del conjunto M dado.

Comentario. [N.T.6] Hacer referencia a Frege sobre el asunto de la "unidad" como resultado de prescindir de las características. Cantor distingue entre igualdad e identidad, la igualdad viene dada por una relación de equivalencia. Insistir sobre el hecho de que Cantor antes ha dicho que el cardinal de un conjunto es un concepto general (¿un universal?) y ahora dice que el cardinal de un conjunto es, simplemente, un conjunto, y no otra cosa, pero, pudiera decirse, que es un conjunto en estado puro. Decir algo sobre que los cardinales tienen existencia en la mente como imagen intelectual o proyección ...

Llamamos "equivalentes" a dos conjuntos M y N y denotamos esto con [por]

$$M \sim N \text{ o } N \sim M, \tag{4}$$

si es posible poner a los mismos en una relación tal que cada elemento de uno de ellos corresponda a uno y sólo un elemento del otro. A cada parte M_1 de M le corresponde entonces una determinada parte equivalente N_1 de N y viceversa.

Comentario. [N.T.7] Observemos que extiende, automáticamente, una biyección entre dos conjuntos, hasta otra biyección entre, lo que actualmente llamaríamos, sus conjuntos de partes. Por otra parte, considera evidente, en virtud de la notación usada, que la relación binaria definida es simétrica. Más adelante demuestra que la misma es reflexiva y transitiva, por lo tanto que tiene las propiedades *formales* de una relación de equivalencia. Si embargo no es una relación de equivalencia propiamente dicha, porque el universo de discurso sobre el que se aplica, el sistema de todos los conjuntos, no es un conjunto.

Si se tiene una tal ley de coordinación de dos conjuntos equivalentes, entonces ésta puede modificarse de múltiples maneras (prescindiendo del caso en que cada uno de éstos sólo consista en un elemento). Por ejemplo, siempre pueden tomarse [medidas] para que a un elemento particular m_0 de M le corresponda algún elemento particular n_0 de N. Puesto que, si los elementos m_0 y n_0 no se corresponden aún entre sí, sino que más bien corresponde al elemento m_0 de M el elemento n_1 de N, y al elemento n_0 de N el elemento m_1 de M, entonces se modifica la ley, de modo que m_0 y n_0, así como m_1 y n_1 sean elementos correspondientes de ambos conjuntos, mientras que en los restantes elementos se mantiene [subsiste] la primera ley. Con esto se logra el objetivo propuesto.

Cada conjunto es equivalente a sí mismo:

$$M \sim M. \tag{5}$$

Si dos conjuntos son equivalentes a un tercero, entonces son también equivalentes entre sí:

$$\textit{de } M \sim P \textit{ y } N \sim P \textit{ se sigue } M \sim N. \tag{6}$$

Es especialmente significativo que *dos conjuntos M y N tienen el mismo número cardinal si, y sólo si, son equivalentes*:

$$\textit{de } M \sim N \textit{ se sigue } \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}, \tag{7}$$

y

$$\textit{de } \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}} \textit{ se sigue } M \sim N. \tag{8}$$

La equivalencia de conjuntos conforma por lo tanto el criterio necesario e infalible para la igualdad de los números cardinales.

Comentario. [N.T.8] Reemplaza, en virtud del doble acto de abstracción, una relación de equivalencia (*formal*), la que subsiste entre dos conjuntos cuando entre los mismos existe una biyección, por la relación de igualdad.

De hecho, desde el punto de vista de la teoría de categorías, lo que acaba de hacer Cantor es definir una subcategoría plena de la categoría de conjuntos, la de los cardinales, que es esquelética, i.e., si dos cardinales son isomorfos, entonces son iguales, y tal que el functor de inclusión es, además de fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo, i.e., una equivalencia.

---

[483] De hecho el número cardinal $\overline{\overline{M}}$ permanece inalterado según la definición anterior de la potencia, si en lugar de un elemento, o también en lugar de varios se sustituyen incluso todos los elementos de M por otra cosa en cada caso.

Si se da $M \sim N$, entonces subyace una ley de coordinación, por la cual M y N están relacionados [coordinados] recíprocamente entre sí de manera unívoca; por ello corresponde al elemento m de M el elemento n de N. Podemos entonces substituir en el pensamiento en lugar de cada elemento m de M el elemento correspondiente n de N, y se transforma así M en N sin cambio del número cardinal; se da por consiguiente

$$\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}.$$

El inverso del teorema se obtiene de la observación de que entre los elementos de M y las diferentes unidades de su número cardinal $\overline{\overline{M}}$ se mantiene [subsiste] una relación de coordinación recíproca y unívoca. Pues $\overline{\overline{M}}$ surge en cierto modo, como hemos visto, de M, de manera que entonces de cada elemento m de M surge una unidad particular de $\overline{\overline{M}}$. Por ello podemos decir que

$$M \sim \overline{\overline{M}}. \tag{9}$$

Igualmente se da $N \sim \overline{\overline{N}}$. Por lo tanto, si se da $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, entonces se sigue por (6) $M \sim N$.

Destacamos aún el siguiente teorema que se sigue directamente del concepto de equivalencia:

Si M, N, P,... son conjuntos, que no tienen ningún elemento común, y M', N', P',... conjuntos correspondientes a ellos y del mismo tipo que ellos [conjuntos con la misma propiedad], y se da que

$$M \sim M',\ N \sim N',\ P \sim P', \ldots,$$

entonces siempre se da también que

$$(M, N, P, \ldots) \sim (M', N', P', \ldots).$$

§2
Lo "mayor" y lo "menor" en las potencias.

Si para dos conjuntos M y N con los números cardinales $\mathfrak{a} = \overline{\overline{M}}$ y $\mathfrak{b} = \overline{\overline{N}}$ se cumplen las *dos* condiciones:

1) *No hay ninguna parte de M que sea equivalente a N,*
2) *Hay una parte N_1 de N, tal que $N_1 \sim M$,*

entonces se advierte en primer lugar que las mismas siguen quedando satisfechas, cuando se reemplazan en ellas M y N por dos conjuntos equivalentes a éstos M' y N'; por ello, *éstas expresan una determinada relación de los números cardinales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ entre sí.*

Comentario. [N.T.9] Observemos la insistencia en demostrar que la relación definida es independiente de los representantes elegidos (i.e., es uniforme).

---

[484] Además, *la equivalencia de M y N, y por tanto la igualdad de $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ está excluida*; pues si se tuviera $M \sim N$ se tendría también $N_1 \sim N$, porque $N_1 \sim M$, y dado que $M \sim N$, debería también existir una parte M_1 de M, de modo que se daría que $M_1 \sim M$, y por lo tanto también $M_1 \sim N$, lo que contradice la condición 1).

En tercer lugar, *la relación de $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ es tal que hace imposible la misma relación de $\mathfrak{b}$ a $\mathfrak{a}$*; pues si se intercambiaran en 1) y 2) los papeles de M y N, se producirían a partir de ahí dos condiciones, que se opondrían de manera contradictoria a las ya mencionadas.

Expresamos la relación de $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ caracterizada por 1) *y* 2) *diciendo: $\mathfrak{a}$ es menor que $\mathfrak{b}$, o también: $\mathfrak{b}$ es mayor que $\mathfrak{a}$*, en signos

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \quad \text{o} \quad \mathfrak{b} > \mathfrak{a}. \tag{1}$$

Se demuestra fácilmente que

$$\text{si } \mathfrak{a} < \mathfrak{b},\ \text{y } \mathfrak{b} < \mathfrak{c},\ \text{entonces siempre } \mathfrak{a} < \mathfrak{c}. \tag{2}$$

Igualmente se sigue sin más de aquella definición que, *si* P_1 *es parte de un conjunto* P*, de* $\mathfrak{a} < \overline{\overline{P}}_1$ *se obtiene siempre también que* $\mathfrak{a} < \overline{\overline{P}}$ *y de* $\overline{\overline{P}} < \mathfrak{b}$ *siempre también que* $\overline{\overline{P}}_1 < \mathfrak{b}$.

Hemos visto que de las tres relaciones

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b} < \mathfrak{a}$$

cada una de ellas en particular excluye las otras dos.

Por el contrario no se [comprende] en modo alguno por sí mismo, y difícilmente podría ser probado [demostrado] en este lugar de nuestra [argumentación], que entre dos números cardinales $\mathfrak{a}$ *y* $\mathfrak{b}$ *cualesquiera debe realizarse necesariamente una de las tres relaciones.*

Sólo más tarde, cuando hayamos logrado una visión de conjunto [global] sobre la sucesión ascendente [creciente] de los números cardinales transfinitos, y nos hayamos hecho una idea de sus relaciones [su encadenamiento], se obtendrá [reconocerá] la verdad del teorema:

A. *"Si* $\mathfrak{a}$ *y* $\mathfrak{b}$ *son dos números cardinales arbitrarios, entonces se da o* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$*, o* $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$*, o* $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$*."*

Comentario. [N.T.10] Principio de la tricotomía, o teorema de comparabilidad, para los números cardinales que no demuestra. Hartogs demostró la equivalencia del mismo con el axioma de elección.

De este teorema se pueden obtener muy fácilmente los siguientes, de los cuales sin embargo no vamos a hacer de momento ningún uso:

B. *"Si dos conjuntos* M *y* N *están [constituidos] de manera tal, que* M *es equivalente a una parte* N_1 *de* N*, y* N *a una parte* M_1 *de* M*, entonces son también* M *y* N *equivalentes* [N.Z.2]*."*

Comentario. [N.T.11] Es el teorema de Cantor-Bernstein(-Schröder-Dedekind). Cantor lo enuncia, pero no lo demuestra, E. Schröder comete un error en su demostración, F. Bernstein, que fue alumno de Cantor, lo demuestra correctamente (y entonces Borel lo incorpora en sus Lecciones sobre la teoría de funciones), y R. Dedekind lo demostró en 1887, antes que Bernstein ... (explicar este último episodio, i.e., el teorema 63 de ¿Qué son y para qué sirven los números?, un trabajo inédito de Dedekind, y la entrevista de Bernstein con Dedekind).

Teorema 0.1. *Si* $K' \prec L \prec K$*, y por lo tanto también* K *es una cadena, entonces* L *es también una cadena. Si ésta es una parte propia de* K*, y* U *el sistema de todos aquellos elementos de* K *que no están contenidos en* L*, y además la cadena* U_0 *es una parte propia de* K*, y* V *el sistema de todos aquellos elementos de* K *que no están contenidos en* U_0*, entonces tenemos que* $K = \mathfrak{M}(U_0, V)$ *y* $L = \mathfrak{M}(U_0', V)$*. Por último, si* $L = K'$*, entonces tenemos que* $V \prec V'$*.*

Demostración. De $L \subseteq K$, deducimos que $\varphi[L] \subseteq \varphi[K]$, pero $\varphi[K] \subseteq L$, así que $\varphi[L] \subseteq L$, i.e., L es una φ-cadena.

Supongamos que $L \subset K$, que $U_0 \subset K$, siendo $U = K - L$, y que $V = K - U_0$. Entonces $K = U_0 \cup V$ y $L = \varphi[U_0] \cup V$.

Es evidente que $K = U_0 \cup V$, porque $V = K - U_0$.

Para demostrar que $L = \varphi[U_0] \cup V$, establecemos, como lema, que $U_0 = U \cup \varphi[U_0]$. Puesto que $U \subseteq U_0$ y $\varphi[U_0] \subseteq U_0$, tenemos que $U \cup \varphi[U_0] \subseteq U_0$. Para demostrar la inclusión inversa, es suficiente que demostremos que $\varphi[U \cup \varphi[U_0]] \subseteq U \cup \varphi[U_0]$. Ahora bien, $\varphi[U \cup \varphi[U_0]] = \varphi[U] \cup \varphi[\varphi[U_0]]$. Por otra parte, de $U \subseteq U_0$, obtenemos que $\varphi[U] \subseteq \varphi[U_0]$; además, $\varphi[U_0] \subseteq U_0$, luego $\varphi[\varphi[U_0]] \subseteq \varphi[U_0]$, así que $\varphi[U] \cup \varphi[\varphi[U_0]] \subseteq$

$\varphi[U_0]$, luego $\varphi[U] \cup \varphi[\varphi[U_0]] \subseteq U \cup \varphi[U_0]$. Por lo tanto $U_0 \subseteq U \cup \varphi[U_0]$. De donde la igualdad $U_0 = U \cup \varphi[U_0]$.

Demostramos ahora que $L = \varphi[U_0] \cup V$. Ahora bien, de $U_0 \subset K$, obtenemos que $\varphi[U_0] \subseteq \varphi[K]$, pero $\varphi[K] \subseteq L$, así que $\varphi[U_0] \subseteq L$. Por otra parte, a partir de $U \subseteq U_0$ concluimos que $V = K - U_0 \subseteq K - U = K - (K - L) = L$, i.e., que $V \subseteq L$. De modo que $\varphi[U_0] \cup V \subseteq L$. Para inclusión inversa, teniendo en cuenta que K se puede representar como $K = U \cup L$ y como $K = U \cup (\varphi[U_0] \cup V)$, porque $K = U_0 \cup V$ y $U_0 = U \cup \varphi[U_0]$, concluimos que L no puede estar incluido en U, porque $U = K - L$, así que $L \subseteq \varphi[U_0] \cup V$. De donde la igualdad.

Suponiendo ahora que $L = \varphi[K]$, podemos afirmar, por lo anterior, que $\varphi[K] = \varphi[U_0] \cup V$. Pero $K = U_0 \cup V$, así que $\varphi[K] = \varphi[U_0] \cup V$, luego $\varphi[U_0] \cup \varphi[V] = \varphi[U_0] \cup V$. Pero $V \subseteq \varphi[U_0] \cup V$, así que $V \subseteq \varphi[U_0] \cup \varphi[V]$.

Falta demostrar que V no puede estar incluido en $\varphi[U_0]$. Ahora bien, $\varphi[U_0] \subseteq U_0$ y $V = K - U_0$, luego V no puede estar incluido en $\varphi[U_0]$, ya que si lo estuviera, estaría incluido en U_0, lo cual sería absurdo. $\square$

De este teorema se deduce el siguiente

Corolario 0.2. *Si un conjunto M es isomorfo a una de sus partes M', entonces es isomorfo a cualquier otra parte T de M que contenga a M'.*

Demostración. Sea f una biyección, arbitraria, pero fija, de M en M', $Q = T - M'$ y $\mathcal{T}_{M',T}$ el conjunto definido como:

$$\mathcal{T}_{M',T} = \{\, A \subseteq M \mid Q \subseteq A \;\; \& \;\; f[A] \subseteq A \,\}.$$

Entonces $M \in \mathcal{T}_{M',T}$, i.e., $\mathcal{T}_{M',T} \neq \varnothing$. Sea $A_0 = \bigcap_{A \in \mathcal{T}_{M',T}} A$. Entonces $Q \subseteq A_0$ y $f[A_0] \subseteq A_0$ (por lo tanto $A_0 \in \mathcal{T}_{M',T}$). Se cumple que $A_0 = Q \cup f[A_0]$. Que $Q \cup f[A_0] \subseteq A_0$ es obvio.

Para demostrar la inclusión inversa, i.e., que $A_0 \subseteq Q \cup f[A_0]$, sea $r \in A_0 - Q$. Supongamos que $r \notin f[A_0]$, entonces $f[A_0] \subseteq A_0 - \{r\}$, luego $f[A_0 - \{r\}] \subseteq A_0 - \{r\}$ (porque $A_0 - \{r\} \subseteq A_0$ y $f[\cdot]$ es isótona). Pero $Q \subseteq A_0 - \{r\}$ (porque $Q \subseteq A_0$ y $r \notin Q$). Así que $A_0 - \{r\} \in \mathcal{T}_{M',T}$, pero $A_0 - \{r\} \subset A_0$, contradicción. Por lo tanto $A_0 = Q \cup f[A_0]$. De donde $T = A_0 \cup (M' - f[A_0])$, ya que $T = Q \cup M'$ y $Q \cup M' = (Q \cup f[A_0]) \cup (M' - f[A_0])$. Pero A_0 es isomorfo a $f[A_0]$, luego T es isomorfo a $f[A_0] \cup (M' - f[A_0])$. Ahora bien, $f[A_0] \cup (M' - f[A_0]) = M'$ y M' es isomorfo a M, así que T es isomorfo a M. $\square$

De este último corolario se deduce el teorema de Cantor-Bernstein, tal como hizo Dedekind, en el inédito mencionado antes.

C. *“Si M_1 es una parte de un conjunto M, y M_2 una parte del conjunto M_1, y si los conjuntos M y M_2 son equivalentes, entonces M_1 es también equivalente a los conjuntos M y M_2.”*

D. *“Si entre dos conjuntos M y N se cumple la condición de que N no es equivalente ni a M mismo, ni a una parte de M, entonces hay una parte N_1 de N que es equivalente a M.”*

E. *“Si dos conjuntos M y N no son equivalentes, y hay una parte N_1 de N que es equivalente a M, entonces no hay ninguna parte de M equivalente a N.”*

Comentario. [N.T.12] Hay que comentar los tres teoremas anteriores.

La adición y multiplicación de las potencias.

La unión de dos conjuntos M y N, que no tienen ningún elemento común, se denotó en el §1, (2), con (M, N). Lo llamamos el *"conjunto unión de M y N"*.

Si M' y N' son otros dos conjuntos sin elementos comunes, y se da que $M \sim M'$, $N \sim N'$, entonces vimos que también se da que

$$(M, N) \sim (M', N').$$

De aquí se sigue que el número cardinal de (M, N) depende sólo de los números cardinales $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$ y $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$.

Esto lleva a la definición de la suma [adición] de $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$, en tanto que [ponemos]

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \overline{\overline{(M, N)}}. \tag{1}$$

Puesto que en el concepto de potencia se ha hecho abstracción del orden de los elementos, entonces se sigue sin más que

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}; \tag{2}$$

y para cada tres números cardinales $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ que

$$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}. \tag{3}$$

Llegamos a la multiplicación.

Cada elemento m de un conjunto M puede [componerse] [ligarse][combinarse][emparejarse][relacionarse] con cada elemento n de otro conjunto N en otro nuevo elemento (m, n); para el conjunto de [todas estas composiciones] [todas estas ligaduras][todos estos emparejamientos] (m, n) establecemos la denotación $(M \cdot N)$. Lo llamamos el *"conjunto de las composiciones [las ligaduras][los emparejamientos] [las combinaciones] de M y N"*. Se da por lo tanto que

$$(M \cdot N) = \{(m, n)\}. \tag{4}$$

Se advierte que también la potencia de $(M \cdot N)$ depende sólo de las potencias $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$, $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$; pues, si se sustituyen los conjuntos M y N por los conjuntos equivalentes a ellos

$$M' = \{m'\} \text{ y } N' = \{n'\}$$

y se consideran m, m', así como n, n' como elementos correspondientes, entonces el conjunto

$$(M' \cdot N') = \{(m', n')\}$$

es llevado [por ello] a una correspondencia recíproca y unívoca con $(M \cdot N)$, de modo que se [contemplan] [consideran] (m, n) y (m', n') como elementos que se corresponden entre sí; se da también que

$$(M' \cdot N') \sim (M \cdot N). \tag{5}$$

Definimos ahora el producto [multiplicación] $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ por medio de la ecuación

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \overline{\overline{(M \cdot N)}}. \tag{6}$$

[486] Un conjunto con el número cardinal $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ se puede producir a partir de dos conjuntos M y N con los números cardinales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ de acuerdo con la siguiente regla: se parte del conjunto N y se reemplaza en él cada elemento n por un conjunto $M_n \sim M$; se reúnen los elementos de todos estos conjuntos M_n [de elementos disjuntos entre sí] en un todo S, entonces se ve fácilmente que

$$S \sim (M \cdot N), \tag{7}$$

por consiguiente

$$\overline{\overline{S}} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}.$$

Puesto que, en cualquier ley de coordinación que se da entre los dos conjuntos equivalentes M y M_n el elemento de M_n correspondiente al elemento m de M es denotado con m_n, entonces se tiene que

$$S = \{m_n\}, \tag{8}$$

y se pueden relacionar por ello los conjuntos S y $(M \cdot N)$ de modo unívoco y recíproco, porque m_n y (m, n) pueden [contemplarse] como elementos correspondientes.

Comentario. [N.T.13] En lo anterior los conjuntos M_n han de ser dos a dos disjuntos, porque ha definido, en este trabajo, la unión sólo para familias de conjuntos que cumplan tal condición. Por ello, intervienen, implícitamente, el esquema axiomático de reemplazamiento y el axioma de la unión. Concretamente, a cada $n \in N$, Cantor le asigna un nuevo conjunto M_n (e.g., $\{n\} \times M$, que es isomorfo a M_n) y de modo que dos a dos sean disjuntos. Entonces considera el conjunto $\{M_n \mid n \in N\}$, aquí es donde intervendría el esquema axiomático de reemplazamiento, y a continuación el conjunto $\bigcup_{n \in N}(\{n\} \times M) = \bigcup_{n \in N} M_n$, aquí es donde intervendría el axioma de la unión, que es isomorfo a $(M \cdot N)$.

De nuestras definiciones se siguen fácilmente los teoremas:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}, \tag{9}$$

$$\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}, \tag{10}$$

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}, \tag{11}$$

porque

$$\begin{aligned} (M \cdot N) &\sim (N \cdot M), \\ (M \cdot (N \cdot P)) &\sim ((M \cdot N) \cdot P), \\ (M \cdot (N, P)) &\sim ((M \cdot N), (M \cdot P)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la adición y multiplicación de potencia están sometidas en general a las leyes conmutativa, asociativa y distributiva.

§4
La exponenciación de las potencias.

Entendemos por un *"recubrimiento del conjunto N con elementos del conjunto M"*, o expresado más fácilmente, por una *'recubrimiento de N con M'*, una ley por la cual en cada caso un determinado elemento de M está asociado con cada elemento n de N, donde uno y el mismo elemento de M puede ser usado repetidamente. El elemento de M asociado con n es en cierto modo una función unívoca de n y puede en general ser denotado con $f(n)$; ésta se llama *"función de recubrimiento de n"*; el recubrimiento correspondiente de N se denomina $f(N)$ [N.Z.3].

Comentario. [N.T.14] Para los pares ordenados usamos ["composición"] ["ligadura"] ["combinación"]; así que, para las aplicaciones, sería conveniente usar "asociación". Decir algo sobre el concepto de "ley" en Cantor.

Sobre los "coverings" en los apuntes de teoría de conjuntos digo: Una aplicación f de un conjunto A en otro conjunto B, además de poder ser considerada como una familia de miembros de B indexada por A, puede ser considerada, como ya hizo, por ejemplo, Cantor, como una familia de subconjuntos de A indexada por B, de modo que tales subconjuntos sean dos a dos disjuntos y cubran A. Antes de proceder a presentar formalmente lo dicho, indicamos que tal hecho será usado en el álgebra universal para extender un álgebra universal mediante un álgebra booleana.

Definición 0.3. Sean A y B dos conjuntos. Entonces el conjunto $\mathrm{Cov}(B, A)$ de los cubrimientos disjuntos de A por B es

$$\mathrm{Cov}(B,A) = \left\{ \varphi\colon B \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall x, y \in B(x \neq y \;\rightarrow \varphi(x) \cap \varphi(y) = \varnothing) \\ \& \; \bigcup_{x \in B} \varphi(x) = A \end{array} \right\}.$$

Observemos que no exigimos que, para cada $x \in B$, $\varphi(x) \neq \varnothing$, i.e., el cubrimiento disjunto no es necesariamente una partición de A indexada por B.

Proposición 0.4. *Sean A y B dos conjuntos. Entonces el conjunto* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *de las aplicaciones de A en B es naturalmente isomorfo al conjunto* $\mathrm{Cov}(B, A)$ *de los cubrimientos disjuntos de A por B.*

Demostración. Es suficiente que consideremos la aplicación del conjunto $\mathrm{Hom}(A, B)$ en el conjunto $\mathrm{Cov}(B, A)$ que a una aplicación f de A en B, le asigna la aplicación $f^{-1}[\cdot] \circ \{\cdot\}_B$ de B en $\mathrm{Sub}(A)$. □

Observemos que los conjuntos de morfismos $\mathrm{Cov}(B, A)$, junto con los conjuntos (en un universo de Grothendieck, arbitrario, pero fijo), constituyen una subcategoría (no plena) de la categoría de Kleisli, $\mathbf{Kl}(\mathbb{P})$, canónicamente asociada a la mónada de las partes, $\mathbb{P}$, sobre la categoría **Set** de conjuntos y aplicaciones. Además, se tiene un anti-isomorfismo entre la categoría **Set** y tal subcategoría de la categoría $\mathbf{Kl}(\mathbb{P})$.

Estudiar la relación entre el conjunto de las aplicaciones sobreyectivas de A en B y el conjunto de los cubrimientos disjuntos de A por B que son particiones de A indexadas por B.

---

[487] Dos recubrimientos $f_1(N)$ y $f_2(N)$ se llaman iguales cuando, y sólo cuando, *para todos los elementos n de N* se cumple la ecuación

$$f_1(n) = f_2(n), \tag{1}$$

de manera que, si no se mantiene [subsiste] esta igualdad, aunque sólo sea para un único elemento particular $n = n_0$, $f_1(N)$ y $f_2(N)$ son [caracterizados] como diferentes recubrimientos de N.

Comentario. $\left[{}^{\text{N.T.15}}\right]$ Se trata de recubrimientos de N con M.

Por ejemplo, puede [constatarse] estipularse, si m_0 es un elemento particular de M, que para todo n se dé que

$$f(n) = m_0;$$

esta ley constituye un recubrimiento particular de N con M.

Otro tipo de recubrimiento se obtiene cuando m_0 y m_1 son dos elementos particulares de M diferentes, y n_0 es un elemento particular de N, a través de la [constatación] estipulación

$$f(n_0) = m_0,$$
$$f(n) = m_1,$$

para todos los n que son diferentes de n_0.

La totalidad [El compendio] de todos los diferentes recubrimientos de N con M forma un determinado conjunto con los elementos $f(N)$; lo llamamos el *“conjunto* *de los recubrimientos de N con M"* y lo denotamos por medio de $(N|M)$. Se da por lo tanto que

$$(N|M) = \{f(N)\}. \tag{2}$$

Si $M \sim M'$ y $N \sim N'$, entonces se comprueba fácilmente que también

$$(N|M) \sim (N'|M'). \tag{3}$$

El número cardinal de $(N|M)$ depende por lo tanto sólo de los números cardinales $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$ y $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$; y nos sirve para la definición de la potencia $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$:

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \overline{\overline{(N|M)}}. \tag{4}$$

Para tres conjuntos arbitrarios M, N, P, se demuestran fácilmente los teoremas

$$((N|M) \cdot (P|M)) \sim ((N,P)|M), \tag{5}$$

$$((P|M) \cdot (P|N)) \sim (P|(M \cdot N)), \tag{6}$$

$$(P|(N|M)) \sim ((P \cdot N)|M), \tag{7}$$

de los cuales, si se establece [conviene] que $\overline{\overline{P}} = \mathfrak{c}$, sobre la base de (4) y teniendo en cuenta el §3 se obtienen los teoremas válidos para tres números cardinales cualesquiera $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{c}$

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}, \tag{8}$$

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} \cdot \mathfrak{b}^{\mathfrak{c}} = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^{\mathfrak{c}}, \tag{9}$$

$$(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}}. \tag{10}$$

Comentario. [N.T.16] En (5) los conjuntos N y P han de ser disjuntos, de modo que no son tan arbitrarios como dice Cantor. Esto se puede lograr, por ejemplo, como sigue. Es suficiente que consideremos el conjunto $P \times \{N\}$, que es isomorfo a P y disjunto de N, usando el axioma de regularidad.

---

[488] Lo fecundas y llenas de consecuencias que son estas simples fórmulas extendidas a las potencias, puede verse en el siguiente ejemplo: Denotamos la potencia del continuo lineal X (i.e., del agregado X de todos los números reales x, que son ≥ 0 y ≤ 1) con $\mathfrak{o}$; entonces es fácil convencerse de que ésta puede ser representada, entre otras, por la fórmula

$$\mathfrak{o} = 2^{\aleph_0}, \tag{11}$$

donde sobre la significación de $\aleph_0$ da explicación el §6.

De hecho, $2^{\aleph_0}$ según (4) no es otra cosa que la potencia de todas la representaciones

$$x = \frac{f(1)}{2} + \frac{f(2)}{2^2} + \cdots + \frac{f(\nu)}{2^\nu} + \cdots \quad (\text{donde } f(\nu) = 0 \text{ o } 1) \tag{12}$$

de los números x en el sistema binario. Observamos aquí que cada número x sólo se representa una vez con la excepción de los números $x = \frac{2\nu+1}{2\mu} < 1$, que se representan por duplicado, así tenemos, si denotamos la totalidad "numerable" de los últimos con $\{s_\nu\}$, en primer lugar

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{(\{s_\nu\}, X)}}.$$

Comentario. [N.T.17] Aquí se rompe, literalmente, el convenio, establecido por Cantor, de considerar que (M, N) sólo tiene sentido si M y N son disjuntos, porque los conjuntos $\{s_\nu\}$ y X no son disjuntos.

Si se elimina de X cualquier conjunto "numerable" $\{t_\nu\}$ y se denota el resto con X_1, entonces tenemos que

$$X = (\{t_\nu\}, X_1) = (\{t_{2\nu-1}\}, \{t_{2\nu}\}, X_1),$$
$$(\{s_\nu\}, X) = (\{s_\nu\}, \{t_\nu\}, X_1),$$
$$\{t_{2\nu-1}\} \sim \{s_\nu\},\ \{t_{2\nu}\} \sim \{t_\nu\},\ X_1 \sim X_1,$$

con lo que

$$X \sim (\{s_\nu\}, X),$$

por lo tanto (por el §1)

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{X}} = \mathfrak{o}$$

De (11) se sigue al elevar al cuadrado (según el §6, (6)) que

$$\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{o} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{o}$$

y de aquí, por multiplicación iterada por $\mathfrak{o}$ que

$$\mathfrak{o}^\nu = \mathfrak{o}, \tag{13}$$

donde ν es cualquier número cardinal finito.

Si se elevan ambos términos de (11) a la potencia $\aleph_0$, entonces se obtiene que

$$\mathfrak{o}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0}.$$

Sin embargo, puesto que, según el §6, (8), $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, entonces

$$\mathfrak{o}^{\aleph_0} = \mathfrak{o}. \tag{14}$$

Las fórmulas (13) y (14) no tienen más significación que ésta: "tanto el continuo ν-dimensional como el $\aleph_0$-dimensional tienen la potencia del continuo unidimensional". Así pues, *todo el contenido* del trabajo en el volumen 84 del Journal de Crelle, 1878, se deduce de manera puramente algebraica *con estos pocos trazos de las fórmulas fundamentales de cálculo con [las] potencias*.

[489] §5

Los números cardinales finitos. [N.Z.4]

Debe mostrarse en primer lugar, cómo los principios expuestos, sobre los cuales deberá ser construida más tarde la teoría de los números cardinales actualmente infinitos o transfinitos, proporcionan también la más natural, corta y rigurosa fundamentación de la teoría de los números finitos.

Comentario. [N.T.18] Cantor supone, en lo que sigue, que hay una infinidad numerable, al menos, de "cosas" (¿diferentes de los conjuntos?): e_0, e_1,..., e_ν,..., dos a dos distintas, y, a partir de ellas, obtiene, aplicando un procedimiento recursivo, los números naturales positivos. Toda esta construcción de Cantor es inaceptable. Hay que admitir, axiomáticamente, la existencia de un conjunto infinito, éste no se puede construir, como pretende Cantor, ni demostrar que existe, como pretendió Dedekind, a partir de una definición del concepto de conjunto infinito (de hecho, es independiente del resto de los axiomas de Zermelo-Fraenkel-Skolem).

A una sola cosa e_0, cuando la subsumimos bajo el concepto de un conjunto $E_0 = (e_0)$, le corresponde como número cardinal lo que llamamos "uno" y denotamos con 1; tenemos que

$$1 = \overline{\overline{E}}_0. \tag{1}$$

Comentario. [N.T.19] Creo que en lo anterior, en lugar de poner $E_0 = (e_0)$, Cantor debería haber puesto $E_0 = \{e_0\}$, y, en lo que sigue exponiendo, en lugar de poner, por ejemplo, $E_1 = (E_0, e_1) = (e_0, e_1)$, debería haber puesto $E_1 = (E_0, \{e_1\}) = (\{e_0\}, \{e_1\})$. Cantor usa la notación $M = \{m\}$ para los conjuntos, con elemento genérico m, mientras que usa $(M, N, \ldots)$ para la unión de conjuntos M, N,... que son dos a dos disjuntos. En el caso que nos ocupa, al menos cuando escribe $E_1 = (E_0, e_1) = (e_0, e_1)$, parece que identifica a los conjuntos unitarios (finales) con el único elemento que contienen.

Si ahora se reúne con E_0 otra cosa e_1, el conjunto unión se llamará E_1, de modo que

$$E_1 = (E_0, e_1) = (e_0, e_1). \tag{2}$$

El número cardinal de E_1 se llama “dos” y se denota con 2:

$$2 = \overline{\overline{E}}_1. \tag{3}$$

Al añadir nuevos elementos obtenemos la sucesión de los conjuntos

$$E_2 = (E_1, e_2), \quad E_3 = (E_2, e_3), \ldots,$$

que nos proporciona sucesivamente, en una sucesión ilimitada, los restantes denominados *números cardinales finitos*, denotados con 3, 4, 5, ... El recurso en el caso presente a los mismos números como índices se justifica porque un número sólo es usado en [bajo] esta significación, después de que ha sido definido como número cardinal. Tenemos, si se entiende por $\nu - 1$ al inmediatamente precedente del número ν en aquella sucesión, que

$$\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1}, \tag{4}$$

$$E_\nu = (E_{\nu-1}, e_\nu) = (e_0, e_1, \ldots, e_\nu). \tag{5}$$

De la definición de la suma en el §3 se sigue que

$$\overline{\overline{E}}_\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1} + 1, \tag{6}$$

i.e., cada número cardinal finito (excepto el 1) es la suma del inmediatamente precedente y 1.

En nuestra argumentación destacan los siguientes tres teoremas:

A. *“Los términos de la sucesión ilimitada de los números cardinales finitos*

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ \nu, \ldots$$

son todos diferentes entre sí (i.e. la condición de equivalencia establecida en el §1 *no se cumple en los conjuntos correspondientes)”.*

[490] B. *“Cada uno de estos números ν es mayor que el que le precede y menor que el que le sigue* (*por el* §2)*.”*

C. *“No hay ningún número cardinal que por su magnitud esté situado entre dos consecutivos ν y $\nu + 1$.”*

La demostración de estos teoremas la apoyamos en los dos siguientes D y E, que por ello han de ser justificados en primer lugar.

D. *“Si M es un conjunto que tiene la característica de que su potencia no es igual a ninguno de sus subconjuntos, entonces el conjunto (M, e), que se genera a partir de M por el añadido de [añadiendo] un único nuevo elemento e, tiene también la misma característica, de no tener igual potencia que ninguno de sus subconjuntos.”*

Comentario. [N.T.20] En D usa subconjunto en el sentido de subconjunto propio.

E. *"Si N es un conjunto con el número cardinal finito ν, y N_1 un subconjunto cualquiera de N, entonces el número cardinal de N_1 es igual a uno de los números precedentes* 1, 2, $3, \ldots, \nu - 1$."

Demostración de D. Supongamos que el conjunto (M, e) tuviera la misma potencia que uno de sus subconjuntos, al que [queremos] llamar N, entonces habría que diferenciar dos casos, y ambos conducen a una contradicción:

1) El conjunto N contiene a e como elemento: se daría que $N = (M_1, e)$, entonces M_1 es una parte de M, porque N es una parte de (M, e). Como vimos en el §1, la ley de correspondencia de dos conjuntos equivalentes (M, e) y (M_1, e) se puede modificar de modo tal que el elemento e de la una se corresponda con el mismo elemento e de la otra; entonces están también relacionados entre sí recíproca y unívocamente M y M_1. Pero esto contradice al supuesto de que M no tiene la misma potencia que su parte M_1.

2) El subconjunto N de (M, e) no contiene a e como elemento, luego N es o M o una parte de M. De acuerdo con la ley de correspondencia entre (M, e) y N, que está en la base de nuestra suposición, corresponda el elemento e de la primera al elemento f de la última. Sea $N = (M_1, f)$; entonces el conjunto M tendrá que estar puesto al mismo tiempo en una relación recíproca y unívoca con M_1; pero M_1 es como parte de N en todo caso también una parte de M. Aquí también sería M equivalente a una de sus partes, contra lo que se había supuesto.

Demostración de E. Presupongamos la corrección del teorema hasta un determinado ν, y entonces concluiremos sobre la validez para el inmediatamente siguiente $\nu + 1$ de la siguiente manera.

Sea puesto como base $E_\nu = (e_0, e_1, \ldots, e_\nu)$ como conjunto con el número cardinal $\nu+1$. Si el teorema es correcto para él, entonces se sigue sin más (por el §1) también su validez para cualquier otro conjunto con el mismo número cardinal $\nu + 1$. Sea E' una parte cualquiera de E_ν; distinguimos los casos siguientes:

1) E' no contiene a e_ν como elemento, luego E' es, o bien $E_{\nu-1}$, **[491]** o bien una parte de $E_{\nu-1}$, luego tiene como número cardinal o ν o uno de los números 1, 2, $3, \ldots, \nu - 1$, porque suponemos ciertamente que nuestro teorema es verdadero para la conjunto $E_{\nu-1}$ con el número cardinal ν.

2) E' consiste en el único elemento e_ν, luego $\overline{\overline{E'}} = 1$.

3) E' consiste en e_ν y un conjunto E'', de modo que $E' = (E'', e_\nu)$. E'' es una parte de $E_{\nu-1}$, luego tiene de acuerdo con lo supuesto uno del los números 1, 2, $3, \ldots, \nu - 1$ como cardinal.

Ahora bien, tenemos que $\overline{\overline{E'}} = \overline{\overline{E''}} + 1$, de donde E' tiene como cardinal uno de los números 2, $3, \ldots, \nu$.

Demostración de A. Cada uno de los conjuntos que hemos denotado con E_ν tiene la característica de no ser equivalente a ninguno de sus subconjuntos. Entonces, si se supone que esto es correcto para un determinado ν, se sigue de acuerdo con el teorema D lo mismo para el inmediatamente siguiente $\nu + 1$.

Para $\nu = 1$ se reconoce inmediatamente, sin embargo, que el conjunto $E_1 = (e_0, e_1)$ no es equivalente a ninguno de sus subconjuntos, que aquí son (e_0) y (e_1).

Si consideramos ahora dos números cualesquiera μ y ν de la sucesión 1, 2, 3, $\ldots$ y μ es el anterior, y ν el posterior, entonces $E_{\mu-1}$ es un subconjunto de $E_\nu - 1$; por lo tanto $E_{\mu-1}$ y $E_{\nu-1}$ no son equivalentes; por ello, los números cardinales correspondientes $\mu = \overline{\overline{E}}_{\mu-1}$ y $\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1}$ no son iguales.

Comentario. [N.T.21] No considera, en A, como subconjunto de un conjunto dado ni al vacío ni al propio conjunto en cuestión.

Demostración de B. Si de los dos números cardinales finitos μ y ν el primero es el anterior, y el último el posterior, entonces $\mu < \nu$. Pues, si consideramos los dos conjuntos $M = E_{\mu-1}$ y $N = E_{\nu-1}$, cada una de las dos condiciones del §2 se cumple en ellos. La condición 1) se cumple, porque según el teorema E un subconjunto de $M = E_{\mu-1}$ sólo puede tener uno de los números cardinales 1, 2, 3,. . . , $\mu - 1$, luego, de acuerdo con el teorema A, no puede ser equivalente al conjunto $N = E_{\nu-1}$. La condición 2) se cumple, porque aquí M mismo es una parte de N.

Demostración de C. Sea $\mathfrak{a}$ un número cardinal, que es menor que $\nu+1$. Debido a la condición 2) del §2 hay un subconjunto que es parte de E_ν con el número cardinal $\mathfrak{a}$. Por el teorema E corresponde a un subconjunto de E_ν sólo uno de los cardinales 1, 2, 3,. . . , ν.

Por lo tanto, $\mathfrak{a}$ es igual a uno de los números 1, 2, 3,. . . , ν.

Según el teorema B ninguno de éstos es mayor que ν.

Por consiguiente no hay un número cardinal $\mathfrak{a}$ que sea menor que $\nu + 1$ y mayor que ν.

El siguiente teorema es importante para lo que sigue:

F. *"Si K es un conjunto cualquiera de diferentes números cardinales finitos, hay entre ellos un κ_1, que es menor que los demás, y que por lo tanto es el mínimo de todos."*

[492] Demostración. El conjunto K contiene, o bien el número 1, y entonces éste es el mínimo, $\kappa_1 = 1$, o no. En el último caso, sea J el conjunto de *todos* aquellos números cardinales de nuestra sucesión 1, 2, 3,. . . , que son menores que los que aparecen en K. Si un número ν pertenece a J, entonces pertenecen también a J todos los números que son $< \nu$. Pero J debe contener un elemento ν_1, tal que $\nu_1 + 1$ y por consiguiente también todos los números mayores no pertenecen a J, porque en caso contrario J contendría la totalidad de los números finitos, mientras que sin embargo los números que pertenecen a K no están contenidos en J. Por lo tanto J no es otra cosa que la sección [segmento (Abschnitt)] $(1, 2, 3, \ldots, \nu_1)$. El número $\nu_1 + 1 = \kappa_1$ es necesariamente un elemento de K y menor que los demás.

Comentario. [N.T.22] En el teorema F se establece la propiedad característica de los conjuntos bien ordenados: todo subconjunto no vacío de un conjunto ordenado tiene un mínimo.

De F se concluye:

G. *"Todo conjunto $K = \{\kappa\}$ de diferentes números cardinales finitos se puede poner bajo la forma [de una sucesión]*

$$K = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \ldots)$$

de modo que

$$\kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3 \cdots ."$$

§6
El mínimo número cardinal transfinito Aleph-cero. [N.Z.5]

Los conjuntos con un número cardinal finito se llaman *"conjuntos finitos"*, a todos los demás [queremos] denominarlos *"conjuntos transfinitos"*, y a los números cardinales que les corresponden, *"números cardinales transfinitos"*.

La totalidad de *los números cardinales finitos ν* nos ofrece el ejemplo más inmediato de un conjunto transfinito; denominamos al número cardinal (§1) que le corresponde *"Aleph-cero"*, en signos $\aleph_0$, y definimos por lo tanto

$$\aleph_0 = \overline{\overline{\{\nu\}}}. \tag{1}$$

Que $\aleph_0$ es un número *transfinito*, i.e., que no es *igual a ningún número finito* μ, se sigue del simple hecho de que, si se añade al conjunto $\{\nu\}$ un nuevo elemento e_0, el conjunto unión $(\{\nu\}, e_0)$ es equivalente al original $\{\nu\}$. Puesto que entre ambos se puede pensar la relación recíproca y unívoca, según la cual al elemento e_0 del primero le corresponde el elemento 1 del segundo, y al elemento ν del primero el elemento $\nu + 1$ del otro. Según el §3 tenemos a partir de aquí que

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0. \tag{2}$$

Sin embargo, en el §5 se mostró que (para un μ finito) $\mu + 1$ es siempre diferente de μ, por ello $\aleph_0$ no es igual a ningún número finito.

El número $\aleph_0$ *es mayor que cualquier número finito* μ:

$$\aleph_0 > \mu. \tag{3}$$

[493] Esto se sigue, teniendo en cuenta el §3, de que $\mu = \overline{\overline{(1, 2, 3, \ldots, \mu)}}$, de que ninguna parte del conjunto $(1, 2, 3, \ldots, \mu)$ es equivalente al conjunto $\{\nu\}$, y de que $(1, 2, 3, \ldots, \mu)$ mismo es una parte de $\{\nu\}$.

Por otra parte, $\aleph_0$ es *el mínimo número cardinal transfinito.*

Si $\mathfrak{a}$ es cualquier número cardinal transfinito diferente de $\aleph_0$, entonces se da siempre que

$$\aleph_0 < \mathfrak{a}. \tag{4}$$

Esto se apoya en los siguientes teoremas:

A. *"Todo conjunto transfinito T tiene subconjuntos con el número cardinal $\aleph_0$."*

Demostración [N.Z.6]. Si se ha eliminado de acuerdo con alguna regla un número finito de elementos t_1, t_2,..., $t_{\nu-1}$ de T, entonces queda siempre la posibilidad de eliminar un elemento adicional t_ν. El conjunto $\{t_\nu\}$, donde ν [significa] denota un número cardinal finito cualquiera, es un subconjunto de T con el cardinal $\aleph_0$, porque $\{t_\nu\} \sim \{\nu\}$ (por el §1).

Comentario. [N.T.23] En el teorema A parece ser que la palabra "subconjunto" se puede interpretar en sentido amplio ($\subseteq$). En la demostración del teorema A interviene una forma débil del axioma de elección, específicamente, el *axioma de elección numerable*, que dice lo siguiente: Cualquier familia numerable de conjuntos no vacíos tiene una función de elección. Tal axioma implica que cualquier conjunto infinito tiene un subconjunto infinito numerable. Hay otro axioma, el *axioma de las elecciones dependientes* de Bernays, que es más débil que el axioma de elección, pero más fuerte que el axioma de elección numerable, a partir del cual se puede demostrar el teorema A de manera más simple, y que dice lo siguiente: Si A es un conjunto no vacío y Φ una relación binaria sobre A tal que para cada $x \in A$ existe un $y \in A$ tal que $(x, y) \in \Phi$, entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(x_n, x_{n+1}) \in \Phi$. La demostración del teorema A es, entonces, como sigue: Si el conjunto T es infinito, entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $\mathrm{Iny}(k + 1, T)$, de las aplicaciones inyectivas de $k + 1$ en T no es vacío, luego $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Iny}(k + 1, T) \neq \varnothing$. Entonces sobre $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Iny}(k + 1, T) \neq \varnothing$ definimos la relación binaria Φ como: $((x_i)_{i\in m}, (y_j)_{j\in n}) \in \Phi$ si, y sólo si, $n = m + 1$ y, para cada $i \in m$, $x_i = y_i$, con m y $n \geq 1$. Entonces, por el axioma de las elecciones dependientes, hay una familia $((x_i)_{i\in n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, en el conjunto $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Iny}(k + 1, T)$, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $((x_i)_{i\in n+1}, (x_i)_{i\in n+2}) \in \Phi$. Luego la unión de las imágenes de las familias $(x_i)_{i\in n+1}$, que componen la familia $((x_i)_{i\in n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, constituyen el conjunto infinito numerable en cuestión.

B. *"Si S es un conjunto transfinito con el número cardinal $\aleph_0$, y S_1 cualquier subconjunto transfinito de S, entonces tenemos también que $\overline{\overline{S}}_1 = \aleph_0$."*

Demostración. Se ha presupuesto que $S \sim \{\nu\}$; tomando como base una ley de correspondencia entre estos dos conjuntos, denotamos con s_ν aquel elemento de S, que corresponde al elemento ν de $\{\nu\}$, entonces tenemos que

$$S = \{s_\nu\}.$$

El conjunto S_1 que es parte de S consiste en determinados elementos s_κ de S, y la totalidad de todos los números κ forma una parte transfinita K del conjunto $\{\nu\}$.

Según el teorema G del §5, el conjunto K puede ponerse en la forma de una sucesión

$$K = \{\kappa_\nu\},$$

donde

$$\kappa_\nu < \kappa_{\nu+1},$$

por consiguiente tenemos también que

$$S_1 = \{s_{\kappa_\nu}\}.$$

De donde se sigue que $S_1 \sim S$, con lo que $\overline{\overline{S}}_1 = \aleph_0$.

De A y B se obtiene la fórmula (4) tomando en consideración el §2.

De (2) se obtiene al añadir 1 en ambos lados que

$$\aleph_0 + 2 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0,$$

y, [en tanto que se repite esa consideración] repitiendo esto, que

$$\aleph_0 + \nu = \aleph_0. \tag{5}$$

Pero tenemos también que

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0. \tag{6}$$

[494] Puesto que, según (1) del §3, $\aleph_0 + \aleph_0$ es el número cardinal $\overline{\overline{(\{a_\nu\}, \{b_\nu\})}}$, porque

$$\overline{\overline{\{a_\nu\}}} = \overline{\overline{\{b_\nu\}}} = \aleph_0.$$

Ahora se tiene, manifiestamente [evidentemente], que

$$\{\nu\} = (\{2\nu - 1\}, \{2\nu\}),$$

$$(\{2\nu - 1\}, \{2\nu\}) \sim (\{a_\nu\}, \{b_\nu\}),$$

luego

$$\overline{\overline{(\{a_\nu\}, \{b_\nu\})}} = \overline{\overline{\{\nu\}}} = \aleph_0.$$

La ecuación (6) puede escribirse también así:

$$\aleph_0 \cdot 2 = \aleph_0;$$

y si se añade repetidamente a ambos lados $\aleph_0$, se encuentra que

$$\aleph_0 \cdot \nu = \nu \cdot \aleph_0 = \aleph_0. \tag{7}$$

Tenemos también que

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0. \tag{8}$$

Demostración [N.Z.7]. Según (6) del §3, $\aleph_0 \cdot \aleph_0$ es el número cardinal correspondiente al conjunto de las [composiciones] [ligaduras]

$$\{(\mu, \nu)\},$$

donde μ y ν son dos números cardinales finitos arbitrarios independientes entre sí. Si λ es también el representante de un número cardinal finito arbitrario (de modo que $\{\lambda\}$, $\{\mu\}$ y $\{\nu\}$ sólo son diferentes denotaciones para la misma totalidad de todos los números cardinales finitos), tenemos que mostrar que

$$\{(\mu,\nu)\} \sim \{\lambda\}.$$

Denotamos $\mu+\nu$ con ρ, luego ρ toma todos los valores numéricos $2,3,4,\ldots$, y hay en total $\rho-1$ elementos (μ,ν), para los cuales $\mu+\nu=\rho$, a saber, éstos:

$$(1,\rho-1),\ (2,\rho-2),\ldots,\ (\rho-1,1).$$

En esta sucesión piénsese establecido en primer lugar el elemento $(1,1)$, para el que $\rho=2$, luego los dos elementos para los que $\rho=3$, luego los tres elementos para los que $\rho=4$, etc, así se obtiene la totalidad de los elementos (μ,ν) en la forma de una sucesión simple:

$$(1,1);\ (1,2),\ (2,1);\ (1,3),\ (2,2),\ (3,1);\ (1,4),\ (2,3),\ldots,$$

y ciertamente viene aquí, como se ve fácilmente, el elemento (μ,ν) en el λ-ésimo lugar, donde

$$\lambda=\mu+\frac{(\mu+\nu-1)(\mu+\nu-2)}{2}\,. \tag{9}$$

Tomando λ cada valor numérico 1, 2, 3,. . . , una sola vez; se mantiene [subsiste] por lo tanto, gracias a [en virtud de] (9), una relación recíprocamente unívoca entre los dos conjuntos $\{\lambda\}$ y $\{(\mu,\nu)\}$.

[495] Si las dos partes de la ecuación (8) se multiplican por $\aleph_0$, entonces se obtiene que $\aleph_0^3=\aleph_0^2=\aleph_0$, y, mediante multiplicaciones repetidas por $\aleph_0$, obtenemos la ecuación, válida para cualquier número cardinal finito ν:

$$\aleph_0^\nu=\aleph_0. \tag{10}$$

Los teoremas E y A del §5 conducen al [siguiente] teorema sobre conjuntos *finitos*:

C. *"Todo conjunto finito E está constituido de modo tal, que no es equivalente a ninguno de sus subconjuntos."*

A este teorema se le opone frontalmente el siguiente para conjuntos *transfinitos*:

D. *"Todo conjunto transfinito está constituido de tal modo, que tiene subconjuntos T_1 que son equivalentes a él* [N.Z.8]*."*

Demostración. Según el teorema A de este parágrafo hay un subconjunto $S=\{t_\nu\}$ de T con el número cardinal $\aleph_0$. Sea $T=(S,U)$, de manera que U está compuesto de aquellos elementos de T, que son diferentes de los elementos t_ν. Establezcamos que $S_1=\{t_{\nu+1}\}$, $T_1=(S_1,U)$, luego T_1 es un subconjunto de T que se genera ciertamente por la supresión del único elemento t_1 de T. Puesto que $S\sim S_1$ (teorema B de este parágrafo), y $U\sim U$, entonces tenemos también (por el §1) que $T\sim T_1$.

Comentario. [N.T.24] $U=T-S$, así que usa la operación de formar diferencias de dos conjuntos (esto (creo que) viene a cuento de algo que dice Ferreirós).

En estos teoremas C y D queda puesta de relieve de la manera más manifiesta la diferencia esencial entre conjuntos finitos y transfinitos, a la que ya se hizo referencia en el año 1877 en el volumen 84 [1878] del Journal de Crelle, pág. 242.

Comentario. [N.T.25] Aquí parece que hay, implícita, una disputa de prioridad con Dedekind 1888 . . . , ver las cartas y los prefacios de las obras de Dedekind.

Tras haber introducido el mínimo número cardinal transfinito $\aleph_0$ y haber deducido sus propiedades más inmediatas, surge la pregunta por los números cardinales más elevados [superiores] y su procedencia de $\aleph_0$.

Ha de mostrarse que los números cardinales transfinitos se pueden ordenar según su magnitud, y que en esta ordenación forman, como los [números] finitos, un *"conjunto bien ordenado"* aunque en un sentido extendido [ampliado] de las palabras. [N.Z.9]

Comentario. [N.T.26] No existe el conjunto de todos los cardinales transfinitos. Su admisión lleva a una contradicción.

Ferreirós, en la pág. 274 de "Fundamentos para una teoría general de conjuntos", dice: "Ya desde los Fundamentos de 1883 Cantor llegó al convencimiento de que la totalidad de los alephs o la totalidad de los ordinales transfinitos no pueden formar un conjunto. O más bien, llegó a pensar que forman "conjuntos" absolutamente infinitos, a los cuales no puede aplicarse el razonamiento matemático (como no puede aplicarse a Dios mismo)".

No me parece que lo dicho por Ferreirós quede corroborado por lo que dice Cantor en 1895.

De $\aleph_0$ procede según una ley determinada el número cardinal *siguiente mayor* $\aleph_1$, de este por la misma ley el *siguiente mayor* $\aleph_2$, y así sucesivamente.

Comentario. [N.T.27] Explicar lo de "ley determinada".

Pero además [incluso] la sucesión ilimitada de los números cardinales

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\nu, \ldots$$

no agota el concepto de número cardinal transfinito. Se demostrará la existencia de un número cardinal que denotamos con $\aleph_\omega$, y que se acredita [muestra] como *el siguiente mayor a todos los* $\aleph_\nu$; de él procede un siguiente mayor $\aleph_{\omega+1}$ de la misma manera como $\aleph_1$ de $\aleph_0$, y así sucesivamente, sin fin.

[496] Para *cada número cardinal transfinito* $\mathfrak{a}$ hay un número *siguiente mayor* procedente de él según una ley unitaria; y también para cada ilimitadamente ascendente [creciente] conjunto bien ordenado $\{\mathfrak{a}\}$ de números cardinales transfinitos $\mathfrak{a}$ hay uno *siguiente mayor* procedente de ahí [ése conjunto] de modo unitario.

Comentario. [N.T.28] Explicar lo de "ley unitaria" y "modo unitario", se refieren a los dos primeros principios de generación del año 1883.

Para una fundamentación rigurosa de este hecho, encontrado en el año 1882 y expresado en el escrito "Fundamentos de una teoría general de las multiplicidades", así como en el vol. 21 de los Math. Annalen [III 4, nº 5, §§11 − 13] nos servimos de los llamados *"tipos de orden"* de cuya teoría nos hemos ocupado por primera vez en los siguientes parágrafos.

§7
Los tipos de orden de los conjuntos simplemente ordenados. [N.Z.10]

Denominamos a un conjunto M *"simplemente ordenado"* cuando entre sus elementos m rige un determinado *"orden jerárquico"*, en el cual de cada dos elementos m_1 y m_2 uno toma el rango *"inferior"* y el otro el *"superior"*, y ciertamente de modo que, si de tres elementos m_1, m_2 y m_3, por ejemplo m_1 es en rango inferior a m_2, y éste inferior a m_3, entonces m_1 es en rango inferior a m_3.

Comentario. [N.T.29] Hay que recordar la noción actual de conjunto totalmente, o linealmente, ordenado, como un conjunto M dotado de una relación binaria $\leq$ reflexiva, antisimétrica, transitiva, y conexa (para cada $x, y \in M$, $x \leq y$ o $y \leq x$), y que tal concepto es equivalente al de Cantor. También que, para una relación binaria $<$ sobre M, la transitividad junto a la tricotomía (para cada $x, y \in M$, o bien $x < y$, o bien $y < x$, o bien $x = y$) de $<$, es equivalente a la noción propuesta por Cantor.

La relación de dos elementos m_1 y m_2, en los que m_1 tiene el rango inferior [en el orden jerárquico dado] y m_2 el superior, debe expresarse por medio de la fórmula

$$m_1 \prec m_2, \quad m_2 \succ m_1. \tag{1}$$

Así, por ejemplo, cada conjunto de puntos P definido en una línea recta [infinita] es un conjunto simplemente ordenado, si de dos puntos p_1 y p_2 pertenecientes a el se le atribuye el rango inferior a aquel cuya coordenada (una vez fijado un punto cero [origen] y un sentido positivo) sea la menor.

Es evidente que uno y el mismo conjunto puede estar "simplemente ordenado" según diferentes leyes. Así, por ejemplo, para el conjunto R de todos los números racionales positivos $\frac{p}{q}$ (donde p y q no tienen divisores comunes), que son mayores que 0 y menores que 1, se tiene, en primer lugar, su jerarquía "natural" según su magnitud. Entonces se pueden ordenar [colocar] [disponer], también, por ejemplo (y en este orden [queremos] denotar el conjunto con R_0), de manera que de dos números $\frac{p_1}{q_1}$ y $\frac{p_2}{q_2}$, para los cuales las sumas p_1+q_1 y p_2+q_2 tienen valores diferentes, el número cuya suma correspondiente es la menor tiene el rango inferior, y [que cuando] si $p_1 + q_1 = p_2 + q_2$, entonces el menor de los dos números racionales sea el inferior.

[497] En esta jerarquía, puesto que a uno y el mismo valor de $p + q$ sólo le pertenece una cantidad finita de diferentes [números] racionales $\frac{p}{q}$, nuestro conjunto tiene manifiestamente [evidentemente] la forma

$$R_0 = (r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{4}, \ldots),$$

donde

$$r_\nu \prec r_{\nu+1}.$$

Por lo tanto, siempre que hablamos de un conjunto M *simplemente ordenado*, pensamos que está a la base [subyaciendo] una *determinada jerarquía* de sus elementos en el sentido explicado.

Hay conjuntos doble, triple, ν-ple, $\mathfrak{a}$-plemente ordenados, pero prescindimos provisionalmente de ellos en nuestra investigación. Por ello, permítasenos emplear en lo que sigue la expresión más corta "conjuntos ordenados", mientras [cuando] tenemos en mente "conjuntos simplemente ordenados".

Comentario. [N.T.30] Se refiere al trabajo de Acta Math. que no se publicó (explicar el incidente y la repercusión que tuvo en su relación con Mittag-Leffler).

"Simplemente" se refiere al hecho de que sobre un conjunto dado se considera un único orden lineal, "doblemente" a que se consideran, sobre un mismo conjunto, simultáneamente dos órdenes lineales, etc. Ver un trabajo de F. Riesz al respecto así como una tesis de un alumno de Cantor, llamado H.C. Schwarz.

A cada conjunto ordenado M le corresponde un determinado *"tipo de orden"*, o, más brevemente, un determinado *"tipo"*, que queremos denotar con

$$\overline{M}; \tag{2}$$

entendemos por tal *el concepto general que se obtiene de M, cuando sólo hacemos abstracción de las propiedades de los elementos m, pero conservamos la jerarquía entre ellos.*

Según esto, el tipo de orden $\overline{M}$ es *él mismo un conjunto ordenado*, cuyos elementos son *puras unidades*, que guardan entre sí la misma jerarquía que los elementos correspondientes de M, de los que han surgido por abstracción.

Comentario. $\left[^{\text{N.T.31}}\right]$ Como en el caso de los cardinales, aquí Cantor asocia a cada conjunto linealmente ordenado M, haciendo un sólo acto de abstracción (sobre la naturaleza de los elementos de M), un nuevo conjunto linealmente ordenado $\overline{M}$.

Llamamos *"semejantes"* a dos conjuntos ordenados M y N, cuando se pueden poner entre sí en una correspondencia recíproca y unívoca de manera tal que, si m_1 y m_2 son dos elementos cualesquiera de M, y n_1 y n_2 los elementos correspondientes de N, entonces la relación de jerarquía de m_1 con m_2 dentro de M es siempre la misma que la de n_1 con n_2 dentro de N. Llamamos a una tal correspondencia de conjuntos semejantes una "imagen" ["aplicación" (Abbildung)] de los mismos entre sí. En ella [una tal aplicación], a cada subconjunto M_1 de M (que se muestra manifiestamente [evidentemente] también como un conjunto ordenado) le corresponde un subconjunto semejante N_1 de N.

La semejanza de dos conjuntos ordenados M y N la expresamos por la fórmula

$$M \simeq N. \tag{3}$$

Todo conjunto ordenado es semejante a sí mismo.

Si dos conjuntos ordenados son semejantes a un tercero, entonces son también semejantes entre sí.

[498] Una simple reflexión muestra que *dos conjuntos ordenados tienen el mismo tipo de orden, si, y sólo si, son semejantes, de modo que de las dos fórmulas*

$$\overline{M} = \overline{N},\ M \simeq N \tag{4}$$

una es siempre consecuencia de la otra.

Comentario. $\left[^{\text{N.T.32}}\right]$ Reemplaza, en virtud del acto de abstracción consistente en olvidar la naturaleza de los elementos del conjunto simplemente ordenado, una relación de equivalencia *formal*, la que subsiste entre dos conjuntos linealmente ordenados cuando entre ellos existe una biyección que preserva el orden, por la relación de igualdad.

Un tipo ordinal no es para Cantor lo que hoy llamaríamos una clase de equivalencia, sino un representante de clase de una clase de equivalencia. Y se da la circunstancia de que, por el modo como determina el tipo de orden, mediante las unidades y manteniendo el orden lineal original, obtiene que, para dos conjuntos linealmente ordenados $(M,<)$, y $(M',<')$, $\overline{(M,<)} = \overline{(M',<')}$ si, y sólo si, $(M,<) \simeq (M',<')$.

De hecho, desde el punto de vista de la teoría de categorías, lo que acaba de hacer Cantor es definir una nueva categoría, la de los conjuntos simplemente ordenados (y aplicaciones isótonas), denotada por **LOrd**, junto con una subcategoría plena, la de los tipos de orden, denotada por **OTyp**, que es, además, esquelética (para que se pueda obtener lo que dice antes sobre "Una simple reflexión muestra que…"), un functor desde **OTyp** hasta **LOrd**, el de inclusión, y un functor OT desde **LOrd** hasta **OTyp**, que asigna a un conjunto simplemente ordenado $(M,<)$ su tipo de orden $\mathrm{OT}(M,<) = \overline{(M,<)}$. Entonces se cumple que, para cada conjunto simplemente ordenado $(M,<)$, $\overline{(M,<)} \simeq (M,<)$. Por ser OT un functor, es evidente que, si $(M,<) \simeq (M',<')$, entonces $\mathrm{OT}(M,<) \simeq \mathrm{OT}(M',<')$, pero, por ser **OTyp** esquelética, entonces $\mathrm{OT}(M,<) = \mathrm{OT}(M',<')$.

Si se abstrae en un tipo de orden $\overline{M}$ aún además la jerarquía de los elementos, se obtiene (por el §1) el número cardinal $\overline{\overline{M}}$ del conjunto ordenado M, que es al mismo tiempo el número cardinal del tipo de orden $\overline{M}$.

De $\overline{M} = \overline{N}$ se sigue siempre $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, i.e., dos conjuntos ordenados de igual tipo [del mismo tipo de orden] tienen siempre la misma potencia o número cardinal; la semejanza de conjuntos ordenados conlleva siempre su equivalencia. Por el contrario, dos conjuntos ordenados pueden ser equivalentes sin ser semejantes.

Para la denotación de los tipos de orden emplearemos las minúsculas del alfabeto griego.

Si α es un tipo de orden, entendemos por

$$\overline{\alpha} \tag{5}$$

el número cardinal correspondiente.

Los tipos de orden de los conjuntos simplemente ordenados finitos no ofrecen ningún interés especial. Pues es fácil convencerse de que para uno y el mismo número cardinal finito ν todos los conjuntos [simplemente] ordenados son semejantes entre sí, luego tienen uno y el mismo tipo. Los tipos de orden simples y finitos están por esto sometidos a las mismas leyes que los números cardinales finitos, y estará permitido emplear para ellos los mismos signos 1, 2, 3,…, ν,…, aunque ellos son conceptualmente diferentes de los números cardinales.

El caso de los *tipos de orden transfinito* es completamente diferente; pues para uno y el mismo número cardinal transfinito hay innumerables tipos de conjuntos simplemente ordenados, que en su totalidad constituyen una *"clase de tipos"* especial.

Así pues, cada una de estas clases de tipos está determinada por el número cardinal transfinito $\mathfrak{a}$ que es común a todos los tipos particulares que pertenecen a la clase; la denominamos por esto brevemente la clase de tipos $[\mathfrak{a}]$.

Aquellas clases, que se nos ofrecen en primer lugar naturalmente, y cuya investigación completa debe ser por ello el objetivo más inmediato de la doctrina de los conjuntos transfinitos, es la clase de tipos $[\aleph_0]$, que comprende todos los tipos con el mínimo número cardinal transfinito $\aleph_0$.

Hemos de distinguir del número cardinal $\mathfrak{a}$, que determina la clase de tipos $[\mathfrak{a}]$, aquel número cardinal $\mathfrak{a}'$, que por su parte **[499]** está determinado por la clase de tipos $[\mathfrak{a}]$; [el último] es el número cardinal que (por el §1) corresponde a la clase de tipos $[\mathfrak{a}]$, en cuanto [ella] representa un *conjunto bien definido*, *cuyos elementos son todos los tipos α con el número cardinal $\mathfrak{a}$*. Veremos que $\mathfrak{a}'$ es diferente de $\mathfrak{a}$, y ciertamente es siempre mayor que $\mathfrak{a}$.

Si se invierten todas las relaciones de orden [precedencia] de un conjunto ordenado M, de manera que en todos los casos [por doquier] se convierte el "inferior" en "superior", y el "superior" en "inferior", se obtiene de nuevo un conjunto ordenado, que denotamos con

$$^*M, \tag{6}$$

y que queremos denominar el *"inverso"* de M.

El tipo de orden de ${}^*M$ lo denotamos, si $\alpha = \overline{M}$, con

$$ {}^*\alpha \tag{7} $$

Puede suceder que se dé que ${}^*\alpha = \alpha$, como p. ej. en [el caso de] los tipos finitos o en el [del] tipo del conjunto R de todos los números racionales que son mayores que 0 y menores que 1, en su jerarquía natural, que investigaremos bajo la denotación η.

Señalamos además, que dos conjuntos ordenados semejantes pueden ser aplicados entre sí, bien de un modo, bien de varios modos; en el primer caso el tipo correspondiente es semejante a sí mismo sólo de un modo, en el otro de varios modos [N.Z.11].

No sólo todos los tipos finitos, sino los tipos de los "conjuntos bien ordenados" transfinitos, que nos ocupará después, y que llamaremos "números ordinales transfinitos", son tales que ellos admiten sólo una única aplicación sobre sí mismos. Por el contrario, aquel tipo η es semejante consigo mismo de innumerables modos.

Queremos aclarar esta diferencia con dos ejemplos simples.

Entendemos por ω el tipo de un conjunto bien ordenado

$$(e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots),$$

en el cual

$$e_\nu \prec e_{\nu+1},$$

y donde ν es un representante de todos los números cardinales finitos.

Otro conjunto bien ordenado

$$(f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots),$$

con la condición

$$f_\nu \prec f_{\nu+1},$$

del mencionado tipo ω sólo puede, manifiestamente [evidentemente], ser "aplicado" [sobre el primero] de tal manera que e_ν y f_ν sean elementos que se corresponden. Puesto que e_1, el elemento mínimo en rango del primero, debe ser asignado en la aplicación al elemento mínimo f_1 del segundo, el siguiente a e_1 en rango, e_2 al siguiente a f_1, f_2, etc.

[500] Cualquier otra correspondencia unívoca y recíproca de los dos conjuntos equivalentes $\{e_\nu\}$ y $\{f_\nu\}$ no es una "aplicación" en el sentido que hemos fijado más arriba para la teoría de los tipos.

Tomemos por el contrario un conjunto ordenado de la forma

$$\{e_{\nu'}\},$$

donde ν' es un representante de todos los número enteros finitos positivos y negativos, incluido el 0, y donde igualmente

$$e_{\nu'} \prec e_{\nu'+1}.$$

Este conjunto no tiene ningún elemento que sea mínimo ni ningún elemento que sea máximo en rango. Su tipo es, según la definición de la suma [adición] que en el §8 se ha dado, ésta:

$${}^*\omega + \omega.$$

Es semejante consigo mismo de innumerables modos. Luego contemplamos un conjunto del mismo tipo

$$\{f_{\nu'}\},$$

donde

$$f_{\nu'} \prec f_{\nu'+1},$$

entonces ambos conjuntos ordenados pueden aplicarse entre sí, de modo tal que, entendiendo por ν'_0 un número determinado de los ν', corresponda al elemento $e_{\nu'}$

del primero el elemento $f_{\nu'_0+\nu'}$ [del segundo]. Dada la arbitrariedad de ν'_0 tenemos por lo tanto aquí innumerables aplicaciones.

El concepto de "tipo de orden" desarrollado aquí comprende, cuando se extiende de la misma manera a "conjuntos ordenados de varias maneras [múltiplemente ordenados]", además del [en conjunción con el] concepto introducido en el §1 de "número cardinal o potencia", el de todo lo "numerable" ("Anzahlmässige"), que en general es pensable [todo lo que sea susceptible de ser "numerado" que sea pensable], y no permite en este sentido ninguna generalización ulterior $\left[^{\text{N.Z.12}}\right]$. No contiene nada arbitrario, sino que es la ampliación [extensión] natural del concepto de cantidad [enumerador]. *Merece la pena acentuar especialmente, que el criterio de igualdad* (4) *se sigue con absoluta necesidad del concepto de tipo de orden y por ello no permite alteración alguna.* En el desconocimiento de este hecho ha de verse la causa fundamental de los graves errores que se encuentran en los *"Fundamentos de geometría"* del señor G. Veronese (versión alemana de A. Schepp, Leipzig, 1894).

Allí, en la pág. 30 se explica la "cantidad o número de un grupo ordenado" en completa coincidencia con lo que hemos denominado "tipo de orden de un conjunto simplemente ordenado". (Sobre la teoría de los transfinitos, Halle, 1890, págs. 68–75, reimpresión de Ztschr. f. Philos. u. philos. Kritik, del año 1887).

[501] El señor V. cree deber proporcionar un añadido al criterio de igualdad. Él dice, pág. 31: "números, cuyas unidades se corresponden unívocamente y en el mismo orden *y de los cuales uno no es una parte del otro ni es igual a una parte del otro*, son iguales."[1]

Esta definición de la igualdad contiene un *círculo* y lleva por ello a un *sinsentido.*

Pues, ¿qué quiere decir, en su añadido, *"ni es igual a una parte del otro"*?

Para responder a esta pregunta, se debe saber ante todo, cuándo dos números son iguales o no lo son [desiguales]. *Por lo tanto, su definición de la igualdad (aparte de su arbitrariedad) presupone una definición de la igualdad, que a su vez presupone una definición de la igualdad, en la que se debe saber, de nuevo, qué es igual y desigual, etc., etc., in infinitum.*

Una vez que el señor V. ha abandonado, por así decir, voluntariamente el fundamento indispensable para la comparación de números, no puede uno sorprenderse de la falta de regla [ilegalidad] [ilicitud] con la que él opera en lo que resta [subsiguientemente] [posteriormente] con sus números pseudotransfinitos y les atribuye propiedades que no pueden poseer simplemente porque ellos mismos, bajo la forma imaginada [fingierten] por él, no tienen existencia salvo sobre el papel. Por lo tanto, también, la llamativa semejanza de sus "números" con los [muy] absurdos [absurdísimos] "números infinitos" de la "Géometrie de l'Infini, Paris, 1727" de Fontenelle se hace comprensible. Recientemente, W. Killing ha dado cumplida expresión de sus dudas concernientes a la fundamentación del libro de Veronese en el "Index lectionum" de la Academia de Munster (para 1895–1896).

Comentario. $\left[^{\text{N.T.33}}\right]$ Relacionar "fingierten" con el aforismo de Newton "No forjo hipótesis".

---

§8

Adición y multiplicación de los tipos de orden.

[1]En la edición original italiana (pág. 27) este pasaje dice literalmente: "Numeri le unità dei quali si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine, e di cui l'uno non è parte o iguale ad una parte dell'altro, sono uguali."

El conjunto unión (M, N) de dos conjuntos M y N puede, si M y N están ordenados, ser concebido como un conjunto ordenado en el que las relaciones de precedencia de los elementos de M entre sí mismos así como las relaciones de precedencia de los elementos de N entre sí mismos permanece la misma tanto en M como en N respectivamente, y todos los elementos de M tienen un rango inferior a todos los elementos de N. Si M' y N' son otros dos conjuntos ordenados, $M \simeq M'$ y $N \simeq N'$, **[502]** entonces $(M, N) \simeq (M', N')$; luego el tipo de orden de (M, N) sólo depende de los tipos de orden $\overline{M} = \alpha$ y $\overline{N} = \beta$. Luego, definimos:

$$\alpha + \beta = \overline{(M, N)}. \tag{1}$$

En la suma [adición] $\alpha + \beta$ llamamos a α el *"sumando"* y a β el *"sumador"*.

Comentario. [N.T.34] M y N, así como M' y N', han de ser disjuntos.

Para cualesquiera tres tipos demostramos fácilmente la ley asociativa:

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma. \tag{2}$$

Por otra parte, la ley conmutativa no es válida, en general, para la adición de tipos. Vemos esto mediante el siguiente ejemplo simple.

Si ω es el tipo, mencionado con anterioridad en el §7, del conjunto bien ordenado

$$E = (e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots), \quad e_\nu \prec e_{\nu+1},$$

entonces $1 + \omega$ no es igual a $\omega + 1$.

Pues, si f es un nuevo elemento, entonces se tiene por (1)

$$1 + \omega = \overline{(f, E)},$$
$$\omega + 1 = \overline{(E, f)}.$$

El conjunto

$$(f, E) = (f, e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots)$$

es, sin embargo, semejante al conjunto E, por consiguiente

$$1 + \omega = \omega.$$

Comentario. [N.T.35] Hay que justificar, como en otras ocasiones, que se tiene un nuevo elemento f que no pertenece a E y que identifica el elemento f con el conjunto unitario (final) $\{f\}$.

Por el contrario, los conjuntos E y (E, f) no son semejantes, porque el primero no tiene ningún miembro que sea el máximo en rango, mientras que el segundo tiene el miembro máximo f. Por lo tanto, $\omega + 1$ es diferente de $\omega = 1 + \omega$.

A partir de dos conjuntos ordenados M y N con los tipos α y β se puede producir un conjunto ordenado S al substituir en N en el lugar de cada elemento n un conjunto ordenado M_n, que tiene el mismo tipo α que M, luego

$$\overline{M}_n = \alpha, \tag{3}$$

y que sobre el orden de rango en

$$S = (M_n) \tag{4}$$

se establecerán las siguientes prescripciones:

1) Cada dos elementos de S, que pertenecen a uno y el mismo conjunto M_n, mantienen en S la misma relación de rango que en M_n.

2) Cada dos elementos de S que pertenecen a dos conjuntos diferentes M_{n_1} y M_{n_2} mantienen en S la relación de rango que tienen n_1 y n_2 en N.

El tipo de orden de S depende, como es fácil ver, sólo de los tipos α y β: definimos:

$$\alpha \cdot \beta = \overline{S}. \tag{5}$$

Comentario. [N.T.36] El conjunto S es la unión de la familia $(M_n)_{n\in N}$ en la que los conjuntos de la misma son dos a dos disjuntos.

---

[503] En este producto [esta multiplicación] α se llama el *"multiplicando"* y β el *"multiplicador"*. Dada cualquier *aplicación* de M sobre M_n, sea m_n el elemento de M_n correspondiente al elemento m de M.

Podríamos entonces escribir también

$$S = \{m_n\} \tag{6}$$

Si añadimos [adjuntamos] un tercer conjunto ordenado $P = \{p\}$ con el tipo de orden $\overline{P} = \gamma$, entonces, según (5)

$$\alpha \cdot \beta = \overline{\{m_n\}}, \quad \beta \cdot \gamma = \overline{\{n_p\}}, \quad (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \overline{\{(m_n)_p\}}, \quad \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = \overline{\{m_{(n_p)}\}}.$$

Los dos conjuntos ordenados $\{(m_n)_p)\}$ y $\{m_{(n_p)}\}$ son sin embargo semejantes y son aplicados entre sí, si sus elementos $(m_n)_p$ y $m_{(n_p)}$ se consideran como correspondientes.

Se mantiene [Subsiste] por consiguiente para los tres tipos α, β y γ la *ley asociativa*

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \tag{7}$$

De (1) y (5) se sigue también fácilmente la *ley distributiva*

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma; \tag{8}$$

aunque *sólo en la forma en que el factor con dos términos tiene el papel del multiplicador*. Por el contrario, la *ley conmutativa* no tiene valor general ni en la multiplicación ni en la adición.

Por ejemplo, $2 \cdot \omega$ y $\omega \cdot 2$ son dos tipos diferentes; pues, según (5)

$$2 \cdot \omega = \overline{(e_1, f_1; e_2, f_2; \ldots; e_\nu, f_\nu; \ldots)} = \omega;$$

por el contrario,

$$\omega \cdot 2 = \overline{(e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots; f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)}$$

que es claramente diferente de ω.

Si se comparan las definiciones de las operaciones elementales para números cardinales dadas en el §3 con las aquí establecidas para tipos de orden, entonces se reconoce fácilmente que el número cardinal de la suma de dos tipos es igual a la suma de los números cardinales de los tipos singulares y que el número cardinal del producto de dos tipos es igual al producto de los números cardinales de los tipos singulares.

Cada ecuación entre tipos de orden que surge de ambas operaciones elementales se mantiene [sigue siendo] por lo tanto también correcta, si en ella se cambian todos los tipos por sus números cardinales.

[504] §9

El tipo de orden η del conjunto R de todos los números racionales que son mayores que 0 y menores que 1, en su ordenación jerárquica natural. [N.Z.13]

Entendemos por R, como en el §7, el sistema de todos los números racionales $\frac{p}{q}$ (no teniendo p y q divisores comunes), que son > 0 y < 1, *en su orden jerárquico natural*, donde la magnitud del número determina su rango. El tipo de orden de [Al tipo de orden de] R lo denotamos con η:

$$\eta = \overline{R}. \tag{1}$$

[Pero hemos puesto el mismo conjunto en otra ordenación jerárquica, en la que lo llamamos R_0, donde esta ordenación está determinada, en primer lugar, por la magnitud de $p+q$, y en segundo lugar, es decir, para los números racionales para los que $p+q$ tiene el mismo valor, por la magnitud de $\frac{p}{q}$ misma] Tenemos entonces ahí el mismo conjunto puesto también en otra ordenación jerárquica, en la que lo llamamos R_0, donde esta ordenación está determinada, en primer lugar, por la magnitud de $p+q$, y en segundo lugar, es decir, para los números racionales para los que $p+q$ tiene el mismo valor, por la magnitud de $\frac{p}{q}$ misma. R_0 tiene la forma de un conjunto bien ordenado del tipo ω:

$$R_0 = (r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots),\text{ donde } r_\nu \prec r_{\nu+1} \tag{2}$$

$$\overline{R_0} = \omega \tag{3}$$

R y R_0 tienen, puesto que se diferencian sólo en el orden jerárquico de sus elementos, el mismo número cardinal, y puesto que manifiestamente [evidentemente] $\overline{\overline{R_0}} = \aleph_0$, entonces tenemos también que

$$\overline{\overline{R}} = \overline{\eta} = \aleph_0. \tag{4}$$

Luego el tipo η pertenece a la clase de tipos $[\aleph_0]$.

Comentario. [N.T.37] $(\mathbb{Q} \cap]0,1[, <)$ es un conjunto linealmente ordenado, infinito numerable, denso, y sin extremos. "Everywhere dense" es lo que hoy se llama "dense".

Señalamos, en segundo lugar, que en R no ocurre ni un elemento que sea el mínimo, ni uno que sea el máximo en rango.

En tercer lugar R tiene la propiedad de que *entre* cada dos de sus elementos según el rango hay otros; esta característica la expresamos con las siguientes palabras: *R es "denso por doquier"*.

Debe mostrarse ahora, que estos tres atributos caracterizan al tipo η de R, de modo que se tiene el siguiente teorema:

"Si se tiene un conjunto M simplemente ordenado, que cumple las tres condiciones:

1) $\overline{\overline{M}} = \aleph_0$,

2) *M no tiene ningún elemento que sea el mínimo y ninguno que sea el máximo en rango*,

3) *M es denso por doquier*,

entonces el tipo de orden de M es igual a η:

$$\overline{M} = \eta."$$

Comentario. [N.T.38] La demostración que sigue se basa en lo que se conoce como el método del "back and forth".

Demostración. Por la condición 1) se puede poner a M en [bajo] la forma **[505]** de un conjunto bien ordenado del tipo ω: dado en [bajo] una tal forma, denotamos M con M_0 y establecemos que [convenimos que]

$$M_0 = (m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots). \tag{5}$$

Ahora tenemos que mostrar que

$$M \simeq R. \tag{6}$$

Esto es, debe demostrarse que M se puede *aplicar* en R, de tal modo que la relación de rango de cada dos elementos en M sea la misma que la relación de rango de los dos elementos correspondientes en R.

Sea puesto en correspondencia el elemento r_1 en R con el elemento m_1 en M. r_2 tiene una determinada relación de rango con r_1 en R, por la condición 2) hay una infinidad de elementos m_ν de M, que tienen la misma relación de rango en M con m_1 que la que tiene r_2 con r_1 en R; *de entre ellos* escogemos aquel que tiene el índice mínimo en M_0, sea éste m_{ι_2}, y lo hacemos corresponder con r_2.

r_3 tiene en R determinadas relaciones de rango con r_1 y r_2; por las condiciones 2) y 3) hay innumerables elementos m_ν de M, que tienen la misma relación de rango en M con m_1 y m_{ι_2}, que la que tiene r_3 con r_1 y r_2 en R; escogemos de entre ellos aquel, sea m_{ι_3}, que tiene el índice mínimo en M_0, y a éste le hacemos corresponder con r_3.

De acuerdo con esta ley nos representamos este procedimiento de asignación continuado; si a los ν elementos

$$r_1,\ r_2,\ r_3, \ldots,\ r_\nu$$

de R les son asignados elementos determinados

$$m_1,\ m_{\iota_2},\ m_{\iota_3}, \ldots,\ m_{\iota_\nu},$$

de M como imágenes, que tienen entre sí en M las mismas relaciones de rango que los que les corresponden en R, entonces le será asignado al elemento $r_{\nu+1}$ de R el elemento $m_{\iota_{\nu+1}}$ de M dotado del índice mínimo en M_0 como imagen, que tiene con

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\nu}$$

las mismas relaciones de rango en M, que las que tiene $r_{\nu+1}$ con $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ en R.

De este modo hemos asignado a *todos* los elementos r_ν de R determinados elementos m_{ι_ν} de M como imágenes, y los elementos m_{ι_ν} tienen en M el mismo orden jerárquico que los elementos correspondientes r_n en R.

Ha de mostrarse ahora que los elementos m_{ι_ν} comprenden a *todos los elementos m_ν de M*, o, lo que es lo mismo, que la sucesión

$$1,\ \iota_1,\ \iota_2, \ldots,\ \iota_\nu, \ldots$$

[506] sólo es una *permutación* de la sucesión

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ \nu, \ldots$$

Demostramos esto por una *inducción completa*, mostrando que *si* los elementos $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ son valores tomados por la aplicación, *lo mismo sucede con el siguiente elemento $m_{\nu+1}$*.

Sea λ de una magnitud tal, que entre los elementos

$$m_1,\ m_{\iota_2},\ m_{\iota_3}, \ldots,\ m_{\iota_\lambda},$$

se encuentran los elementos

$$m_1,\ m_2, \ldots,\ m_\nu,$$

(que por hipótesis fueron valores tomados por la aplicación). Puede ser, que se encuentre entre ellos también $m_{\nu+1}$, entonces $m_{\nu+1}$ es un valor tomado por la aplicación.

Sin embargo, si $m_{\nu+1}$ no *se encuentra entre los elementos*

$$m_1,\, m_{\iota_2},\, m_{\iota_3}, \ldots,\, m_{\iota_\lambda},$$

entonces $m_{\nu+1}$ tiene una determinada posición de rango con estos elementos dentro de M; la misma posición de rango con r_1, r_2,..., r_λ en R la tienen una infinidad de elementos de R, entre los cuales sea $r_{\lambda+\sigma}$ el dotado del índice mínimo en R_0.

Entonces $m_{\nu+1}$ tiene, como es fácil advertir, también con

$$m_1,\, m_{\iota_2},\, m_{\iota_3}, \ldots,\, m_{\iota_{\lambda+\sigma-1}}$$

la misma posición de rango en M que $r_{\lambda+\sigma}$ con

$$r_1,\, r_2, \ldots,\, r_{\lambda+\sigma-1}$$

en R. Puesto que m_1, m_2,..., m_ν ya han sido tomados como valores por la aplicación, entonces $m_{\nu+1}$ es el elemento dotado del índice mínimo en M, que tiene esta posición en rango con respecto a

$$m_1,\, m_{\iota_2}, \ldots,\, m_{\iota_{\lambda+\sigma-1}}.$$

Por consiguiente, tenemos según nuestra ley de asignación

$$m_{\iota_{\lambda+\sigma}} = m_{\nu+1}.$$

En este caso también llega el elemento $m_{\nu+1}$ a ser un valor en la aplicación, y ciertamente $r_{\lambda+\sigma}$ es el elemento asignado a él en R.

Vemos así que según nuestro modo de asignación *todo el conjunto* M es aplicado sobre *todo el conjunto* R; M y R son conjuntos semejantes, q.e.d.

Del teorema que acabamos de demostrar se obtienen por ejemplo los siguientes:

[507] "η es el tipo de orden del conjunto de todos los números racionales negativos y positivos con la inclusión del cero en su orden jerárquico natural."

" η es el tipo de orden de todos los números racionales que son mayores que a y menores que b, en su ordenación jerárquica natural, donde a y b son cualesquiera dos números reales, $a < b$."

"η es el tipo de orden del conjunto de todos los números reales algebraicos en su orden jerárquico natural."

"η es el tipo de orden del conjunto de todos los números reales algebraicos que son mayores que a y menores que b, en su orden natural, donde a y b son dos números reales cualesquiera, tales que $a < b$."

Pues todos estos conjuntos ordenados cumplen las tres condiciones exigidas en nuestro teorema para M (cf. el Journal de Crelle, vol. 77, pág. 258).

Si consideramos ahora además según las definiciones dadas en el §8 conjuntos con los tipos $\eta+\eta$, $\eta\eta$, $(1+\eta)\eta$, $(\eta+1)\eta$, $(1+\eta+1)\eta$, se cumplen también entre ellos aquellas tres condiciones. Con esto tenemos los teoremas:

$$\eta + \eta = \eta, \tag{7}$$

$$\eta\eta = \eta, \tag{8}$$

$$(1+\eta)\eta = \eta, \tag{9}$$

$$(\eta+1)\eta = \eta, \tag{10}$$

$$(1+\eta+1)\eta = \eta, \tag{11}$$

El uso repetido de (7) y (8) da para cada número finito ν que

$$\eta \cdot \nu = \eta, \tag{12}$$

y que

$$\eta^{\nu} = \eta. \tag{13}$$

Por el contrario, como es fácil observar, para $\nu > 1$, los tipos $1 + \eta$, $\eta + 1$, $\nu \cdot \eta$, $1 + \eta + 1$, son diferentes tanto entre sí como de η. Por otra parte, tenemos que

$$\eta + 1 + \eta = \eta, \tag{14}$$

por el contrario, $\eta + \nu + \eta$ es diferente de η para $\nu > 1$.

Por último merece ser enfatizado que

$$^{*}\eta = \eta. \tag{15}$$

[508] §10

Las sucesiones fundamentales contenidas en un conjunto ordenado transfinito.

Comentario. [N.T.39] En esta sección introduce contrapartidas, para los conjuntos linealmente ordenados, de nociones topológicas tales como: sucesiones fundamentales, límites de sucesiones fundamentales, denso en sí mismo, cerrado, y perfecto.

Tomamos como base un conjunto transfinito cualquiera M simplemente ordenado. Cada subconjunto de M es él mismo un conjunto ordenado. Para el estudio del tipo $\overline{M}$ parecen ser especialmente valiosos aquellos subconjuntos de M, a los que corresponden los tipos ω y $^{*}\omega$; los denominamos *"sucesiones fundamentales de primer orden contenidas en M"*, y por cierto, a las primeras (de tipo ω) *"ascendentes"* [*"crecientes"*], y a las otras (de tipo $^{*}\omega$) *"descendentes"* [*"decrecientes"*].

Puesto que nos limitamos a la consideración de las sucesiones fundamentales *de primer orden* (en investigaciones posteriores se tendrán en cuenta también las de *orden superior*), las denominaremos aquí simplemente *"sucesiones fundamentales"*.

Así pues, una "sucesión fundamental ascendente [creciente]" tiene la forma

$$\{a_\nu\}, \text{ donde } a_\nu \prec a_{\nu+1}, \tag{1}$$

y una "sucesión fundamental descendente [decreciente]" es de la forma

$$\{b_\nu\}, \text{ donde } b_\nu \succ b_{\nu+1}, \tag{2}$$

ν tiene siempre en nuestras consideraciones (así como κ,λ, μ), la significación de un número cardinal *finito* cualquiera, o también de un tipo *finito* respecto de un número ordinal *finito*.

Llamamos a dos sucesiones fundamentales ascendentes [crecientes] $\{a_\nu\}$ y $\{a'_\nu\}$ *"congéneres"*, en signos,

$$\{a_\nu\} \parallel \{a'_\nu\}, \tag{3}$$

si para cada elemento a_ν existen elementos a'_λ, de tal modo que

$$a_\nu \prec a'_\lambda,$$

así como también para cada elemento a'_ν hay elementos a_μ, de manera que

$$a'_\nu \prec a_\mu.$$

Dos sucesiones fundamentales descendentes [decrecientes] $\{b_\nu\}$ y $\{b'_\nu\}$ se llaman *"congéneres"*, en signos,

$$\{b_\nu\} \parallel \{b'_\nu\}, \tag{4}$$

si para cada elemento b_ν hay elementos b'_λ, de manera que

$$b_\nu \succ b'_\lambda,$$

y para cada elemento b'_ν existen elementos b_μ, de modo que

$$b'_\nu \succ b_\mu.$$

Llamamos *'congéneres'* a una sucesión fundamental ascendente [creciente] $\{a_\nu\}$ y a otra descendente [decreciente] $\{b_\nu\}$, en signos,

[509]
$$\{a_\nu\} \parallel \{b_\nu\}, \tag{5}$$

si 1) para todos los μ y ν

$$a_\nu \prec b_\mu$$

y 2) en M existe *a lo sumo* un elemento m_0 (es decir, uno o ninguno), tal que para todos los ν

$$a_\nu \prec m_0 \prec b_\nu.$$

Comentario. [N.T.40] La relación "$\parallel$" es una relación de equivalencia sobre el conjunto de las sucesiones ascendentes [crecientes], y también sobre el de las descendentes [decrecientes].

Se tienen entonces los teoremas:

A. *"Si dos sucesiones fundamentales son congéneres con una tercera, entonces son congéneres también entre sí."*

B. *"Dos sucesiones fundamentales que proceden en el mismo sentido, de las cuales una es un subconjunto de la otra, son siempre congéneres."*

Si existe en M un elemento m_0, que tiene una posición con respecto a la sucesión fundamental ascendente [creciente] $\{a_\nu\}$, tal que

1) para cada ν

$$a_\nu \prec m_0,$$

2) para cada elemento m de M que es [sea] $\prec m_0$, existe un determinado número ν_0, tal que

$$a_\nu \succ m, \text{ para } \nu \geq \nu_0,$$

entonces denominaremos a m_0 *"elemento límite de $\{a_\nu\}$ en M"*, y al mismo tiempo un *"elemento principal de M"*.

Igualmente denominaremos también a m_0 un *"elemento fundamental de M"*, y al mismo tiempo un *"elemento límite de $\{b_\nu\}$ en M"*, si se cumplen las dos condiciones:

1) para cada ν

$$b_\nu \succ m_0,$$

2) para cada elemento m de M, que es [sea] $\succ m_0$, existe un determinado número ν_0, tal que

$$b_\nu \prec m, \text{ para } \nu \geq \nu_0.$$

Una sucesión fundamental no puede tener *nunca más que un* elemento límite en M; sin embargo, M tiene en general muchos elementos principales.

Se advierte la verdad de los siguientes teoremas:

C. *"Si una sucesión fundamental tiene un elemento límite en M, entonces todas las sucesiones fundamentales congéneres con ella tienen el mismo elemento límite en M."*

D. *"Si dos sucesiones fundamentales (procedan en el mismo o en diferentes sentidos) tienen uno y el mismo elemento límite en M, entonces son congéneres."*

Si M y M' son dos conjuntos ordenados semejantes, de tal modo que

$$\overline{M} = \overline{M'}, \tag{6}$$

y se parte de *una aplicación cualquiera* entre ambos conjuntos, entonces son válidos, como es fácil ver, los siguientes teoremas:

[510] E. *"A cada sucesión fundamental en M le corresponde como imagen una sucesión fundamental en M' y viceversa; a cada ascendente [creciente] una ascendente [creciente], a cada descendente [decreciente] una descendente [decreciente]; a sucesiones fundamentales congéneres en M le corresponden como imágenes sucesiones fundamentales congéneres en M' y viceversa."*

F. *"Si un elemento límite en M pertenece a una sucesión fundamental en M, entonces pertenece también un elemento límite en M' a las sucesiones fundamentales correspondientes en M' y viceversa; y estos dos elementos límite son imágenes entre sí en la aplicación."*

G. *"A los elementos principales de M les corresponden como imágenes elementos principales de M' y viceversa."*

Si un conjunto M consiste sólo en elementos principales, de tal modo que cada uno de sus elementos es un elemento principal, entonces le llamamos un *"conjunto denso en sí mismo"*.

Si hay para cada sucesión fundamental en M un elemento límite en M, entonces llamamos a M un *"conjunto cerrado"*.

Un conjunto que sea tanto "denso en sí mismo" como "cerrado" se llama un *"conjunto perfecto"* [N.Z.14].

Si un conjunto tiene uno de estos tres predicados, entonces le corresponde también el mismo predicado a todo conjunto semejante; se pueden atribuir por esto los mismos predicados a los tipos de orden correspondientes, y hay con ello *"tipos densos en sí mismos"*, *"tipos cerrados"*, *"tipos perfectos"*, e igualmente también *"tipos densos por doquier"* (por el §9).

Así, por ejemplo, η es un tipo "denso en sí mismo"; y, como se ha mostrado en el §9, también es "denso por doquier", pero no es "cerrado".

ω y $^*\omega$ no tienen ningún elemento principal (unidades principales); por el contrario $\omega + \nu$ y $\nu + {}^*\omega$ tienen un elemento principal y son tipos "cerrados".

El tipo $\omega \cdot 3$ tiene dos elementos principales, pero no es "cerrado"; el tipo $\omega \cdot 3 + \nu$ tiene tres elementos principales y es "cerrado".

Comentario. [N.T.41] Un conjunto ordenado $(X, <)$ es *denso* si tiene al menos dos elementos y, para cada $a, b \in X$, si $a < b$, entonces hay un $c \in X$ tal que $a < c < b$.

El ejemplo más importante de conjunto linealmente ordenado, denso, e infinito numerable es el del conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ con su orden natural por [según la] magnitud.

Teorema 0.5. *Sean $(P, <)$ y $(Q, <)$ dos conjuntos linealmente ordenados, infinito numerables, densos, y sin máximo ni mínimo. Entonces $(P, <)$ y $(Q, <)$ son isomorfos.*

Para demostrar el teorema consideramos dos biyecciones $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de $\mathbb{N}$ en P, y $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de $\mathbb{N}$ en Q, arbitrarias pero fijas (tales biyecciones no son necesariamente isomorfismos). Además, necesitamos disponer del concepto de isomorfismo parcial entre dos conjuntos linealmente ordenados y de un cierto lema.

Definición 0.6. Un *isomorfismo parcial* del conjunto linealmente ordenado $(P, <)$ en el conjunto linealmente ordenado $(Q, <)$ es una biyección parcial f de P en Q, i.e., una aplicación parcial inyectiva f de P en Q, tal que, para cada $p, p' \in \mathrm{Dom}(f)$, se cumple que $p < p'$ si, y sólo si, $f(p) < f(p')$.

Lema 0.7. *Sean $(P, <)$ y $(Q, <)$ dos conjuntos linealmente ordenados, infinito numerables, densos, y sin máximo ni mínimo. Si f es un isomorfismo parcial de $(P, <)$ en $(Q, <)$ tal que* $\mathrm{Dom}(f)$ *es finito y si $p \in P$ y $q \in Q$ son dos elementos arbitrarios, pero fijos, entonces existe un isomorfismo parcial $f^{p,q}$ de $(P, <)$ en $(Q, <)$ tal que $p \in \mathrm{Dom}(f^{p,q})$, $q \in \mathrm{Im}(f^{p,q})$, y $f \leq f^{p,q}$.*

Demostración. Sea $F = \{(p_{i_0}, q_{i_0}), \ldots, (p_{i_{k-1}}, q_{i_{k-1}})\}$ la función subyacente del isomorfismo parcial f, donde se cumple que $p_{i_0} < p_{i_1} < \ldots < p_{i_{k-1}}$, y, por lo tanto que $q_{i_0} < q_{i_1} < \ldots < q_{i_{k-1}}$. Si $p \notin \mathrm{Dom}(f)$, entonces, o bien $p < p_{i_0}$, o bien $p_{i_e} < p < p_{i_{e+1}}$, para un $0 \leq e \leq k-2$, o bien $p_{i_{k-1}} < p$. Sea ahora n el mínimo número natural tal que si $p < p_{i_0}$, entonces $q_n < q_{i_0}$; si $p_{i_e} < p < p_{i_{e+1}}$, entonces $q_{i_e} < q_n < q_{i_{e+1}}$; y si $p_{i_{k-1}} < p$, entonces $p_{i_{k-1}} < q_n$. Que tal número natural existe y sujeto a cumplir lo dicho se sigue de que $(Q, <)$ es un conjunto linealmente ordenado, denso, y sin máximo ni mínimo.

Se cumple que $F' = F \cup \{(p, q_n)\}$ es la función subyacente de un isomorfismo parcial f' de $(P, <)$ en $(Q, <)$.

Si $q \in \mathrm{Im}(f')$, entonces el problema está resuelto. Si $q \notin \mathrm{Im}(f')$, entonces, usando el mismo argumento que antes pero intercambiando los papeles de $(P, <)$ y $(Q, <)$, hay un $p_m \in P$ tal que $F' \cup \{(p_m, q)\}$ es la función subyacente de un isomorfismo parcial f'' de $(P, <)$ en $(Q, <)$ y, tomando el mínimo m, obtenemos $F^{p,q} = F' \cup \{(p_m, q)\}$, y, por lo tanto, $f^{p,q}$. □

Para demostrar el teorema definimos, por recursión, una sucesión de isomorfismos parciales: f_0 es el que tiene como función subyacente al vacío, supuesto definido f_n, para $n \geq 0$, definimos f_{n+1} como $f_n^{p_n,q_n}$, siendo ésta última la extensión de f_n tal que $p_n \in \mathrm{Dom}(f_n^{p_n,q_n})$ y $q_n \in \mathrm{Im}(f_n^{p_n,q_n})$. Entonces tomando como f la aplicación parcial cuya función subyacente es $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n^{p_n,q_n}$ obtenemos el isomorfismo deseado entre $(P, <)$ y $(Q, <)$.

---

§11
El tipo de orden θ del continuo lineal $\mathbf{X}$. [N.Z.15]

Nos dedicamos ahora a la investigación de los tipos de orden del conjunto $X = \{x\}$ de todos los números reales x, que son ≥ 0 y≤ 1, en su orden jerárquico natural, de tal modo que para dos elementos cualesquiera x y x' del mismo

$$x \prec x', \text{ en el caso de que } x < x'.$$

La denotación de este tipo sería

$$\overline{X} = \theta \tag{1}$$

[511] De los elementos de la teoría de los números racionales e irracionales se sabe que toda sucesión fundamental $\{x_\nu\}$ en X tiene un elemento límite x_0 en X, y que también, viceversa, todo elemento x de X es elemento límite de sucesiones fundamentales correspondientes en X. Con esto X es un *"conjunto perfecto"*, y θ un *"tipo perfecto"*.

Sin embargo, con esto θ no está aún suficientemente caracterizado; es más, tenemos que tener presente aún la siguiente propiedad de X:

X *contiene* el conjunto R investigado en el §9 de tipo de orden η como subconjunto, y ciertamente *en particular de tal modo que, entre cada dos cualesquiera elementos* x_0 y x_1 de X están situados elementos de R según el rango.

Debe mostrarse ahora que *estas propiedades* en conjunto [al unísono] caracterizan de modo exhaustivo el tipo de orden θ del continuo lineal X, de tal modo que es válido el teorema:

"Si un conjunto ordenado M tiene un carácter tal que 1) *es "perfecto",* 2) *está contenido en él un conjunto S con el número cardinal $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$, que está con M en una relación tal que entre cada dos cualesquiera elementos m_0 y m_1 de M están situados según el rango elementos de S, entonces $\overline{M} = \theta$."*

Demostración. Si S tuviera un elemento mínimo o máximo,entonces tendría a causa de 2) el mismo carácter como elemento de M; podríamos entonces eliminarlo de S, sin que este conjunto perdiera por ello la relación con M expresada en 2).

Suponemos por ello en adelante a S sin elemento menor ni mayor; S tiene entonces según el §9 el tipo de orden η.

Puesto que entonces S es una parte de M, entonces deben por 2) estar situados entre cada dos cualesquiera elementos s_0 y s_1 de S otros elementos de S según el rango. Además, tenemos por 2) que $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$.

Los dos conjuntos S y R son por ello *"semejantes"* entre sí,

$$S \simeq R. \tag{2}$$

Nos imaginamos que partimos de cualquier *"aplicación"* de R en S y afirmamos que ésta da lugar al mismo tiempo a una determinada *"aplicación"* de X en M, y por cierto del modo siguiente:

Todos los elementos de X, que al mismo tiempo pertenecen al conjunto R, corresponderían como imágenes a aquellos elementos de M, que al mismo tiempo son elementos de S y en la aplicación supuesta de R en S corresponderían a esos elementos de R. Pero si x_0 es un elemento de X que no pertenece a R, entonces puede contemplarse como un elemento límite de una sucesión fundamental $\{x_\nu\}$ contenida en X, que puede ser sustituida por una sucesión fundamental $\{r_{\kappa_\nu}\}$ contenida en R congénere con ella. A ésta **[512]** le corresponde como imagen una sucesión fundamental $\{s_{\lambda_\nu}\}$ en S y M, que a causa de 1) está limitada por un elemento m_0 en M, que no pertenece a S (F del §10). Sea este elemento m_0 en M (el cual permanece el mismo, si en lugar de las sucesiones fundamentales $\{x_\nu\}$ y $\{r_{\kappa_\nu}\}$ se pensaran otras limitadas por el mismo elemento x_0 en X (E, C, D, en el §10)), la imagen de x_0 en X. Viceversa, corresponde a cada elemento m_0 de M, que no ocurre en S, un elemento completamente determinado x_0 de X, que no pertenece a R y del cual m_0 es la imagen.

De este modo se ha construido una relación [coordinación] recíproca y unívoca entre X y M, de la que hay que mostrar que funda una 'aplicación' de estos conjuntos.

Esto permanece en adelante para aquellos elementos de X y M que al mismo tiempo pertenecen a los conjuntos R y S respectivamente.

Comparemos un elemento r de R con un elemento x_0 de X que no pertenezca a R; los elementos correspondientes de M serían s y m_0.

Si $r < x_0$, entonces hay una sucesión fundamental ascendente [creciente] $\{r_{\kappa_\nu}\}$, que está limitada por x_0, y tenemos, a partir de un determinado ν_0 [en adelante], que

$$r < r_{\kappa_\nu}, \text{ para } \nu \geq \nu_0.$$

La imagen de $\{r_{\kappa_\nu}\}$ en M es una sucesión fundamental ascendente [creciente] $\{s_{\lambda_\nu}\}$, que estará limitada por un m_0 de M, y se tiene (por el §10), en primer lugar, que $s_{\lambda_\nu} \prec m_0$ para cada ν, y por otra parte, que $s \prec s_{\lambda_\nu}$ para $\nu \geq \nu_0$, y por ello (por el §7) $s \prec m_0$.

Si $r > x_0$, entonces se concluye de modo semejante que $s \succ m_0$.

Si consideramos por último dos elementos x_0 y x'_0 no pertenecientes a R y los elementos m_0 y m'_0 correspondientes a ellos en M, entonces se muestra por una consideración análoga, que si $x_0 < x'_0$ entonces $m_0 \prec m'_0$

Con esto se habría alcanzado la demostración de la semejanza de X y M, y tenemos por ello que

$$\overline{M} = \theta.$$

Halle, Marzo de 1895.

CONTRIBUCIONES A LA FUNDAMENTACIÓN DE LA TEORÍA DE LOS CONJUNTOS TRANSFINITOS

POR
G. CANTOR
de Halle a. S.

(SEGUNDO ARTÍCULO)

[Math. Annalen vol. 49, págs. 207-246 (1897).]

Traducción provisional y comentarios por J. Bares y J. Climent.

§12
Los conjuntos bien ordenados.

Entre los conjuntos simplemente ordenados les corresponde a los conjuntos bien ordenados un lugar relevante; sus tipos de orden, a los que denominamos *"números ordinales"* constituyen el material natural para una definición precisa de los números cardinales transfinitos superiores o de las potencias, una definición, que está por completo de acuerdo con aquella que se nos ha proporcionado para el número transfinito mínimo *aleph-cero* por medio del sistema de todos los números finitos ν (en el §6).

Llamamos *"bien ordenado"* a un conjunto simplemente ordenado F (ver el §7) si sus elementos f desde uno mínimo f_1 en adelante *ascienden [crecen] en una sucesión determinada*, de tal modo que se cumplen las dos siguientes condiciones:

I. *"Hay en F un elemento f_1 mínimo según el rango"*

II. *"Si F' es un subconjunto cualquiera de F y F posee uno o varios elementos de rango superior a todos los elementos de F', entonces existe un elemento f' de F, que sigue inmediatamente a la totalidad F', de manera que no se da ningún elemento en F que caiga entre F' y f' según el rango*[2]*"* $\left[{}^{\text{N.Z.16}}\right]$.

Comentario. $\left[{}^{\text{N.T.42}}\right]$ Un conjunto *bien ordenado*, según el trabajo de Cantor de 1883, es un conjunto bien definido en el que los elementos están ligados [relacionados] entre sí mediante una sucesión determinada dada tal que (i) hay un *primer* elemento del conjunto; (ii) cualquier elemento singular (a condición de que no sea el último de la sucesión) es seguido por otro elemento determinado; y (iii) para cualquier conjunto de elementos finito o infinito deseado existe un elemento determinado que es *su sucesor inmediato* en la sucesión (salvo que no exista absolutamente nada en la sucesión que los siga a todos ellos).

Vamos a demostrar que el concepto de conjunto bien ordenado que usamos actualmente es equivalente al de Cantor. Para ello comenzamos recordando la primera acepción del término mencionado.

Definición 0.8. Un conjunto bien ordenado es un par $\mathbf{A} = (A, <)$ en el que A es un conjunto y $<$ una relación binaria sobre A que cumple las siguientes condiciones

1. $<$ es irreflexiva, i.e., para cada $a \in A$, $a \not< a$.
2. $<$ es transitiva, i.e., para cada $a, b, c \in A$, si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

---

[2]Esta definición de los "conjuntos bien ordenados" coincide por completo, dejando aparte los términos literales, con la que se introdujo en Math. Ann. vol. 21, pág. 548 (Grundlagen e. allg. Mannifaltigkeitslehre, pág. 4).

3. Para cada subconjunto no vacío X de A existe un $a \in X$ tal que, para cada $x \in X$, $a < x$ o $a = x$.

Obsérvese que entonces $\mathbf{A} = (A, <)$ es un conjunto linealmente ordenado, i.e., que $<$ es irreflexiva, transitiva, y que, para cada $x, y \in A$, si $x \neq y$, entonces $x < y$ o $y < x$.

Continuamos reformulando la anterior definición de Cantor como

Definición 0.9. Un conjunto bien ordenado es un par $\mathbf{A} = (A, <)$ en el que A es un conjunto y $<$ una relación binaria sobre A que cumple las siguientes condiciones

1. $<$ es transitiva, i.e., para cada $a, b, c \in A$, si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.
2. Para cada $a, b \in A$, o bien $a = b$, o bien $a < b$, o bien $b < a$ (Principio de la tricotomía).
3. Hay un $m \in A$ tal que, para cada $a \in A$, $m < a$ o $m = a$.
4. Para cada $a \in A$, si $\uparrow a = \{\, x \in A \mid a < x \,\} \neq \varnothing$, entonces existe un $b \in A$ tal que $a < b$ y $]a, b[= \varnothing$. Al único elemento b con tal propiedad lo denotamos por a^+ y lo denominamos el sucesor inmediato de a.
5. Para cada $X \subseteq A$, si $X \neq \varnothing$ y $\uparrow X = \{\, a \in A \mid X < a \,\} \neq \varnothing$ (significando "$X < a$" que, para cada $x \in X$, $x < a$) entonces existe un $b \in A$ tal que $X < b$ y $]X, b[= \{\, c \in A \mid X < c < b \,\} = \varnothing$.

Observemos que la transitividad junto con el Principio de la tricotomía equivalen a decir que $\mathbf{A} = (A, <)$ es un conjunto linealmente ordenado. Por otra parte, la cuarta condición es un caso particular de la quinta, considerando, para un $a \in A$ que cumpla la condición $\uparrow a = \{\, x \in A \mid a < x \,\} \neq \varnothing$, el subconjunto $\{a\}$ de A.

Es evidente que si $\mathbf{A} = (A, <)$ es un conjunto bien ordenado no vacío en el primer sentido, entonces es un conjunto bien ordenado en el sentido de Cantor.

Para demostrar la recíproca, i.e., que un conjunto bien ordenado en el sentido de Cantor lo es en el primer sentido, la estrategia a seguir consiste en suponer que existe un subconjunto no vacío X de A tal que, para cada $x \in X$, existe un $y \in X$ tal que $y < x$, para entonces tratar de demostrar que no hay un $m \in A$ tal que, para cada $a \in A$, $m < a$ o $m = a$, o que hay un subconjunto $Z \subseteq A$ tal que $Z \neq \varnothing$ y $\uparrow Z = \{\, a \in A \mid Z < a \,\} \neq \varnothing$, pero que no existe un $y \in A$ tal que $Z < y$ y $]Z, y[= \varnothing$.

Sea pues X un subconjunto no vacío de A sin mínimo, i.e., tal que, para cada $x \in X$, existe un $y \in X$ tal que $y < x$. Consideremos el subconjunto $\downarrow X = \{\, a \in A \mid a < X \,\}$ de A.

Si $\downarrow X = \varnothing$, i.e., si, para cada $a \in A$, existe un $x \in X$ tal que $x \leq a$, entonces, por la hipótesis sobre X, para cada $a \in A$, existe un $y \in X$ tal que $y < a$, luego $\mathbf{A}$ no tiene un primer elemento.

Si $\downarrow X \neq \varnothing$, entonces $\uparrow (\downarrow X) \neq \varnothing$, porque $X \subseteq \uparrow (\downarrow X)$ y $X \neq \varnothing$. Ahora verificamos que no existe un $y \in A$ tal que $\downarrow X < y$ y $]\downarrow X, y[= \varnothing$, i.e., que, para cada $y \in A$, si $\downarrow X < y$, entonces $]\downarrow X, y[\neq \varnothing$.

Sea $y \in A$ tal que $\downarrow X < y$, i.e., tal que, para cada $a \in A$, si a tiene la propiedad de que, para cada $x \in X$, $a < x$, entonces $a < y$. Se cumple que, o bien y precede estrictamente a todos los elementos de X, o bien algún elemento de X precede estrictamente o coincide con y.

Ahora bien, lo primero no puede ocurrir, ya que si, para cada $x \in X$, $y < x$, entonces $y \in \downarrow X$ e y, por cumplir que $\downarrow X < y$, sería tal que $y < y$, contradicción.

Por consiguiente debe ocurrir necesariamente lo segundo, i.e., que existe un $x \in X$ tal que $x \leq y$. Luego hay un $t \in X$ tal que $t < x$, de donde $t < y$, y puesto que para t se cumple que $\downarrow X < t$, porque $t \in X \subseteq \uparrow (\downarrow X)$, tenemos que $]\downarrow X, y[\neq \varnothing$.

En particular, a cada elemento f de F, *en el caso de que no sea el máximo*, le sigue otro elemento determinado f' como el *inmediato mayor en rango*; esto se obtiene de la condición II, si se sustituye F' por el elemento particular f. Además, si está contenida, por ejemplo, una sucesión infinita de elementos consecutivos en F

$$e' \prec e'' \prec e''' \cdots \ e^{(\nu)} \prec e^{(\nu+1)} \cdots$$

aunque de tal manera que hay en F elementos tales que tienen un **[208]** rango superior *a todos los* $e^{(\nu)}$, por lo que según la condición II, si allí se sustituye F' por la totalidad $\{e^{(\nu)}\}$, debe existir un elemento f', de tal manera que no sólo

$$f' \succ e^{(\nu)}$$

para todos los valores de ν, sino que también no hay en F *ningún elemento* g que cumpla las dos condiciones

$$g \prec f'$$
$$g \succ e^{(\nu)}$$

para todos los valores de ν.

Así, por ejemplo, los tres conjuntos

$$(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots),$$
$$(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots b_1, b_2, \ldots, b_\mu, \ldots),$$
$$(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots b_1, b_2, \ldots, b_\mu, \ldots c_1, c_2, c_3),$$

donde

$$a_\nu \prec a_{\nu+1} \prec b_\mu \prec b_{\mu+1} \prec c_1 \prec c_2 \prec c_3,$$

están bien *ordenados*. Los dos primeros no tienen ningún elemento máximo, el tercero tiene el elemento máximo c_3; en el segundo y el tercero sigue a todos los elementos a_ν en primer lugar b_1, en el tercero a todos los elementos a_ν y b_μ en primer lugar c_1.

A continuación extenderemos los signos definidos en el §7 $\prec$ y $\succ$, que allí fueron usados para expresar la relación de rango de cada dos elementos, a grupos de elementos, de tal manera que las fórmulas

$$M \prec N,$$
$$M \succ N$$

serían la expresión de que en una ordenación de rango existente todos los elementos del conjunto M tienen un rango inferior, o superior, respectivamente, a todos los elementos del conjunto N.

A. *"Todo subconjunto F_1 de un conjunto bien ordenado F tiene un elemento mínimo."*

Comentario. [N.T.43] Supone, implícitamente, que las partes no son vacías. Además, este teorema se toma hoy en día como condición definitoria del concepto de conjunto bien ordenado.

Demostración. Si el elemento mínimo f_1 de F pertenece a F_1, entonces es al mismo tiempo el elemento mínimo de F_1. Por otra parte, sea F' la totalidad de los elementos de F, que tienen un rango inferior a todos los elementos de F_1, entonces por eso mismo no se encuentra situado ningún elemento de F entre F' y F_1. Luego si (según II) f' sigue en primer lugar a F', entonces pertenece necesariamente a F_1 y toma aquí el rango mínimo.

B. *"Si un conjunto simplemente ordenado F está constituido de tal manera que tanto F como cada uno de sus subconjuntos tienen un elemento mínimo, entonces F es un conjunto bien ordenado."*

Comentario. [N.T.44] Es suficiente que F sea ordenado y que cada parte no vacía de F tenga un mínimo. Además, en B, se ve que Cantor considera parte como parte no vacía y distinta del conjunto en cuestión.

---

[209] DEMOSTRACIÓN. Puesto que F tiene un elemento mínimo, entonces la condición I está satisfecha. Sea F' un subconjunto de F tal que hay en F uno o varios elementos que son $\succ F'$; sea F_1 la totalidad de esos elementos y f' el elemento mínimo de F_1, entonces es manifiestamente [evidentemente] f' el elemento de F inmediatamente siguiente a F'. Con esto se satisface también la condición II y F es por lo tanto un conjunto bien ordenado.

C. *"Todo subconjunto F' de un conjunto bien ordenado F es igualmente un conjunto bien ordenado."*

DEMOSTRACIÓN. F' tiene, según el teorema A, al igual que cada subconjunto F'' de F' (pues éstos son al mismo tiempo subconjuntos de F) un elemento mínimo; por eso F' es según el teorema B un conjunto bien ordenado.

D. *"Todo conjunto G semejante a un conjunto bien ordenado F es igualmente un conjunto bien ordenado."*

Comentario. [N.T.45] Supone Cantor, implícitamente, que G está linealmente ordenado y esto es, entonces, un caso de transporte de estructura.

DEMOSTRACIÓN. Si M es un conjunto, que posee un elemento mínimo, entonces tiene, como se sigue directamente del concepto de semejanza (en el §7), también cada conjunto N semejante a él un elemento mínimo. Ahora bien, puesto que debe ser $G \simeq F$, y F, como conjunto bien ordenado, tiene un elemento mínimo, entonces vale lo mismo de G. Cada subconjunto G' de G tiene igualmente un elemento mínimo; pues en una aplicación de G a F corresponde al conjunto G' como imagen un subconjunto F' de F, de tal manera que

$$G' \simeq F'.$$

Pero F' tiene según el teorema A un elemento mínimo, y por lo tanto también G'. Luego tanto G como cada subconjunto G' de G tienen un elemento mínimo; y G es por esto según el teorema B un conjunto bien ordenado.

E. *"Si en un conjunto bien ordenado G se sustituyen sus elementos g por conjuntos bien ordenados de manera que, si F_g y $F_{g'}$ son los conjuntos bien ordenados que [ocupan los lugares] entran en lugar de los elementos g y g' y $g \prec g'$, entonces también $F_g \prec F_{g'}$, entonces el conjunto H, producido componiendo [combinando] de este modo los elementos de todos los conjuntos F_g, es un conjunto bien ordenado."*

DEMOSTRACIÓN. Tanto H como cada subconjunto H_1 de H tienen un elemento mínimo, lo cual caracteriza a H según el teorema B como un conjunto bien ordenado. Es decir, si g_1 es el elemento mínimo de G, entonces el elemento mínimo de F_{g_1} es al mismo tiempo el elemento mínimo de H. Además, si se tiene un subconjunto H_1 de H, entonces sus elementos pertenecen a conjuntos determinados F_g, que tomados en común [al unísono] forman un subconjunto del conjunto bien ordenado $\{F_g\}$, semejante al conjunto G y compuesto de los elementos F_g; si, por ejemplo,

F_{g_0} es el elemento mínimo de este subconjunto, entonces el elemento mínimo del subconjunto H_1 contenido en F_{g_0} es al mismo tiempo el elemento mínimo de H_1.

[210] §13

Las secciones de los conjuntos bien ordenados.

Si f es un elemento cualquiera del conjunto bien ordenado F *diferente del elemento inicial* f_1, entonces denominaremos al conjunto A de todos los elementos de F que son $\prec f$, una *"sección de F"*, y por cierto, la sección de F *determinada por el elemento f*. Por el contrario, llámese al conjunto R de todos los elementos restantes de F *incluido* f un *"resto de F"*, y por cierto el resto de F *determinado por el elemento* f. Los conjuntos A y R son según el teorema C del §12, *bien ordenados*, y podemos escribir según el §8 y el §12

$$F = (A, R), \tag{1}$$

$$R = (f, R'), \tag{2}$$

$$A \prec R. \tag{3}$$

R' es la parte de R que sigue al elemento inicial f y se reduce a 0, en el caso de que R no tenga ningún otro elemento más que f.

Comentario. [N.T.46] Aquí, una vez más, Cantor admite, mal que le pese, el conjunto vacío ("se reduce a 0").

Tomemos como ejemplo el conjunto bien ordenado

$$F = (a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots b_1, b_2, \ldots, b_\mu, \ldots c_1, c_2, c_3),$$

entonces la sección

$$(a_1, a_2)$$

y el resto correspondiente

$$(a_3, a_4, \ldots, a_\nu, \ldots b_1, b_2, \ldots, b_\mu, \ldots c_1, c_2, c_3)$$

están determinados por el elemento a_3, y la sección

$$(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots)$$

y el resto correspondiente

$$(b_1, b_2, \ldots, b_\mu, \ldots c_1, c_2, c_3)$$

están determinados por el elemento b_1, y la sección

$$(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots b_1, b_2, \ldots, b_\mu, \ldots c_1)$$

y el resto correspondiente

$$(c_2, c_3)$$

están determinados por el elemento c_2.

Si A y A' son dos secciones de F, y f y f' los elementos determinantes, y tenemos que

$$f' \prec f, \tag{4}$$

entonces A' es también una sección de A. Llamamos entonces a A' la sección *menor*, y a A la *mayor* de F:

$$A' < A \tag{5}$$

Correspondientemente podemos también decir de cada A de F, que es menor que F mismo:

$$A < F. \tag{6}$$

[211] $\left[^{\text{N.Z.17}}\right]$ A. *"Si dos conjuntos bien ordenados semejantes F y G se aplican entre sí, entonces corresponde a cada sección A de F una sección semejante B de G y a cada sección B de G una sección semejante A de F, y los elementos f y g de F y G por los cuales las correspondientes secciones A y B están determinadas, se corresponden entre sí igualmente en la aplicación."*

Demostración. Si se han aplicado entre sí dos conjuntos simplemente ordenados semejantes M y N, y m y n son dos elementos coordinados [correspondientes], y M' es el conjunto de todos los elementos de M que son $\prec m$, y N' es el conjunto de todos los elementos de N que son $\prec n$, entonces M' y N' se corresponden entre sí en la aplicación. Pues a cada elemento m' de M, que es $\prec m$ debe corresponderle, (por el §7), un elemento n' de N, que es $\prec n$, y viceversa.

Si se aplica este teorema general a los conjuntos bien ordenados F y G, entonces se obtiene lo que había que demostrar.

B. *"Un conjunto bien ordenado F no es semejante a ninguna de sus secciones A."*

Comentario. $\left[^{\text{N.T.47}}\right]$ Usa, en la demostración, el axioma de elección y el principio de la definición por recursión.

Demostración. Supongamos que $F \simeq A$, entonces nos imaginamos construida [instituida] una aplicación de F sobre A. Según el teorema A, a la sección A de F le corresponde entonces como imagen una sección A' de A, de tal modo que $A' \simeq A$. Sería entonces también $A' \simeq F$, y es $A' < A$. De A' se obtendría de la misma manera una sección menor A'' de F, de tal modo que $A'' \simeq F$ y $A'' < A'$, etc.,

Obtendríamos así una *sucesión necesariamente infinita*

$$A > A' > A'' \cdots A^{(\nu)} > A^{(\nu+1)} \cdots$$

de secciones de F que van haciéndose siempre más pequeñas, las cuales serían todas semejantes al conjunto F.

Si denotamos con f, f', f'',..., $f^{(\nu)}$,... a los elementos de F que determinan estas secciones, entonces tendríamos que

$$f \succ f' \succ f'' \cdots f^{(\nu)} \succ f^{(\nu+1)} \cdots$$

Tendríamos por lo tanto un subconjunto *infinito* de F

$$(f, f', f'', \ldots, f^{(\nu)}, \ldots)$$

en el cual no toma *ningún elemento el rango mínimo.*

Tales subconjuntos de F son sin embargo según el teorema A del §12, *imposibles.* [Luego] el supuesto [la suposición] de una aplicación de F en [sobre] una de sus partes lleva por lo tanto a una contradicción, y por ello el conjunto F no es semejante a ninguna de sus secciones.

Aunque, según el teorema B, un conjunto bien ordenado F no es semejante a ninguna de sus *secciones*, sin embargo, si F es *infinito*, entonces hay siempre **[212]** *otros subconjuntos* de F que son semejantes a F. Así, por ejemplo, el conjunto

$$F = (a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots)$$

es semejante a [cualquiera de] su [sus] resto [restos]

$$(a_{\kappa+1}, a_{\kappa+2}, \ldots, a_{\kappa+\nu}, \ldots).$$

Por ello es significativo que podamos añadir junto al teorema B también los siguientes

C. *"Un conjunto bien ordenado F no es semejante a ningún subconjunto de ninguna de sus secciones A."*

Demostración. Suponemos, que F' es un subconjunto de una sección A de F, y que $F' \simeq F$. Imaginamos que [subyaciendo haya] hay a la base una aplicación de F a [sobre] F'; en ella según el teorema A a la sección A de F le corresponderá como imagen una sección F'' del conjunto bien ordenado F'; esta sección estará determinada por el elemento f' de F'. f' es también elemento de A y determina una sección A' de A, de la cual F'' es un subconjunto.

El supuesto de un subconjunto F' de una sección A de F, tal que $F' \simeq F$, nos lleva por esto al de un subconjunto F'' de una sección A' de A, tal que $F'' \simeq A$.

El mismo tipo de demostración obtiene [nos proporciona] un subconjunto F''' de una sección A'' de A', de tal manera que $F''' \simeq A'$. Y avanzando [procediendo] así obtenemos, como en la demostración del teorema B, una sucesión *necesariamente infinita* de secciones de F que se van haciendo siempre más pequeñas [menores]

$$A > A' > A'' \cdots A^{(\nu)} > A^{(\nu+1)} \cdots ,$$

y con ello la sucesión *infinita* de los elementos que determinan esta [estas] sección [secciones]

$$f \succ f' \succ f'' \cdots f^{(\nu)} \succ f^{(\nu+1)} \cdots ,$$

en la cual no habría presente ningún elemento mínimo, lo cual es según el teorema A del §12, imposible. Por lo tanto no hay ningún subconjunto F' de una sección A de F, tal que $F' \simeq F$.

D. *"Dos secciones diferentes A y A' de un conjunto bien ordenado F no son semejantes entre sí."*

Demostración. Si $A' < A$, entonces A' es también sección del conjunto bien ordenado A, y no puede por esto según el teorema B ser semejante a A.

E. *"Dos conjuntos bien ordenados semejantes F y G no pueden aplicarse entre sí más que de un único modo."*

Demostración. Suponemos dos aplicaciones diferentes de F en [sobre] G y sea f un elemento de F, al que corresponderían en [por medio de] las dos aplicaciones diferentes imágenes g y g' en G. Sea A la sección de F que está determinada por f, y sean B y B' las secciones de G, que están determinadas por g y g'. Según el teorema A tenemos tanto $A \simeq B$ **[213]** como $A \simeq B'$, y tendríamos también que $B \simeq B'$, lo que contradice al teorema D.

F. *"Si F y G son dos conjuntos bien ordenados, entonces una sección A de F puede tener a lo sumo una sección semejante B en G."*

Demostración. Si la sección A de F tuviera dos secciones semejantes a ella B y B' en G, entonces B y B' serían también semejantes, lo que según el teorema D es imposible.

G. *"Si A y B son dos secciones semejantes de dos conjuntos bien ordenados F y G, entonces hay también para cada sección más pequeña [menor] $A' < A$ de F una sección semejante $B' < B$ de G y para cada sección más pequeña [menor] $B' < B$ de G una sección semejante $A' < A$ de F."*

La demostración se sigue del teorema A, si se aplica a los conjuntos semejantes A y B.

H. *"Si A y A' son dos secciones de un conjunto bien ordenado F, y B y B' dos secciones semejantes a ellas de un conjunto bien ordenado G, y tenemos que $A' < A$, entonces tenemos que $B' < B$."*

La demostración se sigue de los teoremas F y G.

J. *"Si una sección B de un conjunto bien ordenado G no es semejante a ninguna sección de un conjunto bien ordenado F, entonces tanto cada sección $B' > B$ de G como G mismo no son semejantes a ninguna sección de F ni a F mismo."*

La demostración se sigue del teorema G.

K. *"Si hay para cada sección A de un conjunto bien ordenado F una sección B semejante a ella de otro conjunto bien ordenado G, pero también viceversa para cada sección B de G una sección semejante a ella A de F, entonces tenemos que $F \simeq G$."*

Demostración. Podemos aplicar entre sí F y G según la siguiente ley: Hacemos que el elemento mínimo f_1 de F corresponda al elemento mínimo g_1 de G. Si $f \succ f_1$ es cualquier otro elemento de F, entonces determina una sección A de F; a ésta pertenece según el supuesto una sección semejante determinada B de G; sea el elemento g de G, determinante de la sección B, la imagen de f. Y si g es cualquier elemento de G, que es $\succ g_1$, entonces determina una sección B de G, a la cual pertenece de acuerdo con la suposición una sección semejante A de F; sea el elemento f, que determina esta sección A, la imagen de g. Que la coordinación unívoca y respectiva definida de este modo de F y G es una *aplicación* en el sentido del §7, se sigue fácilmente. Pues si f y f' son dos elementos arbitrarios de F, g y g' **[214]** los elementos correspondientes a ellos de G, A y A' las secciones determinadas por f y f', B y B' las secciones determinadas por g y g', y tenemos, por ejemplo, que

$$f' \prec f,$$

entonces

$$A' < A;$$

a partir de aquí tenemos también según el teorema H que

$$B' < B$$

y por consiguiente que

$$g' \prec g.$$

L. *"Si para cada sección A de un conjunto bien ordenado F hay una sección B semejante a ella de otro conjunto bien ordenado G, y, en cambio, existe al menos una sección de G para la que no hay ninguna sección semejante de F, entonces existe una sección determinada B_1 de G, tal que $B_1 \simeq F$."*

Demostración. Tomamos en consideración la totalidad de las secciones de G para los cuales no hay ninguna sección semejante en F; entre ellos debe haber una sección *mínima*, a la que denominamos B_1. Esto se sigue de que, según el teorema A del §12, el conjunto de todos los elementos que determinan estas secciones posee un elemento mínimo; la sección B_1 de G determinada por este último es la más pequeña [mínima] de aquella totalidad. Según el teorema J, *cada* sección de G que es $> B_1$ es tal que no existe ninguna sección semejante a ella en F; por esto, las secciones B de G, que se enfrentan [corresponden] a secciones semejantes de F, deben ser todas $< B_1$, y ciertamente pertenece a cada sección $B < B_1$ una sección semejante A de F, porque justamente B_1 es la sección mínima de G entre aquellas a las que no les corresponde ninguna sección semejante en F. Con esto [Luego], para cada sección A de F hay una sección semejante B de B_1, y para cada sección B de B_1 [hay] una sección semejante A de F; según el teorema K tenemos a partir de aquí que

$$F \simeq B_1.$$

M. *"Si el conjunto bien ordenado G tiene al menos una sección para la que no existe ninguna sección semejante en el conjunto bien ordenado F, entonces debe haber para cada sección A de F una sección B en G semejante a ella."*

Demostración. Sea B_1 la mínima de todas aquellas secciones de G para las que no existe ninguna [sección] semejante en F (Cf. la demostración de L). Si hubiera secciones en F a las que no correspondiera ninguna sección semejante en G, entonces, entre estas, una, a la que denominamos A_1, habría de ser la mínima. Para cada sección de A_1 existiría entonces una sección semejante de B_1, y para cada sección de B_1 una sección semejante de A_1. Entonces, según el teorema K, tendríamos que

$$B_1 \simeq A_1.$$

[215] Pero esto contradice al hecho de que para B_1 no existe ninguna sección semejante en F. A partir de aquí [Por consiguiente], no puede haber ninguna sección en F que no se enfrente [corresponda] a una [sección] semejante en G.

N. *"Si F y G son dos conjuntos bien ordenados arbitrarios, entonces o bien son* 1) *F y G semejantes entre sí, o hay* 2) *una sección determinada B_1 de G, que es semejante a F, o hay* 3) *una sección determinada A_1 de F, que es semejante a G: y cada uno de estos tres casos excluye la posibilidad de los otros dos."*

Comentario. [N.T.48] El anterior es el teorema de comparabilidad para los conjuntos bien ordenados. Este teorema lo usará Zermelo en 1904 en su demostración de que todo conjunto tiene una buena ordenación. Recordemos que para Cantor era una ley del pensamiento el que todo conjunto bien definido puede ser bien ordenado. De modo que Zermelo, usando, entre otros instrumentos, el axioma de elección, transforma una ley del pensamiento en un teorema, y en última instancia la ley del pensamiento anterior es equivalente al axioma de elección de Zermelo.

Demostración. El comportamiento de F con respecto a G puede admitir tres posibilidades.

1) Pertenece a cada sección A de F una sección semejante B de G y viceversa, a cada sección B de G una sección semejante A de F.

2) Pertenece a cada sección A de F una sección semejante B de G, y por el contrario hay al menos una sección de G a la que no le corresponde ninguna sección semejante en F.

3) Pertenece a cada sección B de G una sección semejante A de F, y por el contrario hay al menos una sección de F a la que no le corresponde ninguna sección semejante en G.

El caso de que haya tanto una sección en F a la que no le corresponda ninguna sección semejante en G, como también una sección de G a la que no le corresponda ninguna sección semejante en F, no es posible; es excluido por el teorema M.

Según el teorema K, en el *primer* caso tenemos

$$F \simeq G.$$

Según el teorema L, hay en el *segundo* caso una sección determinada B_1 de B, tal que

$$B_1 \simeq F,$$

y en el *tercer* caso hay una sección determinada A_1 de F, tal que

$$A_1 \simeq G.$$

Pero no pueden darse a la vez $F \simeq G$ y $F \simeq B$, pues entonces también tendríamos que $G \simeq B_1$, contra el teorema B, y por la misma razón no pueden darse a la vez $F \simeq G$ y $G \simeq A$. Pero también es imposible que se sostengan [mantengan] juntas $F \simeq B_1$ y $G \simeq A_1$; pues según el teorema A se seguiría de $F \simeq B_1$ la existencia de una sección B_1' de B_1, de tal manera que tendríamos que $A_1 \simeq B_1'$. Tendríamos también que $G \simeq B_1'$, contra el teorema B.

O. *“Si un subconjunto F' de un conjunto bien ordenado F no es semejante a ninguna sección de F, entonces es semejante a F mismo.”*

Demostración. F' es un conjunto bien ordenado según el teorema C del §12. Si F' no fuera semejante ni a una sección de F ni a F mismo, entonces habría según el teorema N una sección F'_1 de F', que sería semejante a F. Pero F'_1 es un subconjunto de aquella sección A de F que **[216]** está determinada por el mismo elemento que la sección F'_1 de F'. El conjunto F debería por lo tanto ser semejante a un subconjunto de una de sus secciones, lo que contradice al teorema C.

§14

Los números ordinales de los conjuntos bien ordenados.

Según el §7 cada conjunto bien ordenado M tiene un determinado *tipo de orden* $\overline{M}$; éste es el concepto general que se obtiene de M si manteniendo la ordenación de rango de sus elementos se hace abstracción de las características de estos últimos, de tal manera que llegan a ser a partir de ellos puras unidades, que están entre sí en una determinada relación de rango. *A todos los conjuntos semejantes entre sí, y sólo a ellos, les corresponde uno y el mismo tipo de orden.*

Al tipo de orden de un conjunto bien ordenado F lo denominamos el *“número ordinal”* que le corresponde.

Si α y β son dos números ordinales arbitrarios, entonces pueden tener entre sí un comportamiento que admite tres posibilidades. Por ejemplo, si F y G son dos conjuntos bien ordenados, del tipo que se da que

$$\overline{F} = \alpha, \quad \overline{G} = \beta,$$

entonces, según el teorema N del §13 son posibles tres casos mutuamente excluyentes:

1) $$F \simeq G.$$

2) Hay una sección determinada B_1 de G, tal que

$$F \simeq B_1.$$

3) Hay una determinada sección A_1 de F, tal que

$$G \simeq A_1.$$

Como se ve fácilmente, cada uno de estos tres casos se mantiene [subsiste], si F y G son sustituidos por los conjuntos semejantes a ellos F' y G'; según esto tenemos que vérnoslas también con tres relaciones recíprocas y excluyentes de los tipos α y β entre sí.

En el primer caso tenemos que $\alpha = \beta$; en el segundo decimos que $\alpha < \beta$, en el tercero, que $\alpha > \beta$.

Tenemos por lo tanto el teorema:

A. *“Si α y β son dos números ordinales arbitrarios, entonces tenemos que o bien $\alpha = \beta$, o bien $\alpha < \beta$, o bien $\alpha > \beta$.”*

Comentario. [N.T.49] Tricotomía para los ordinales.

De la definición de ser menor y mayor se sigue fácilmente:

B. *“Si se tienen tres números ordinales α, β y γ, y tenemos que $\alpha < \beta$ y que $\beta < \gamma$, entonces tenemos también que $\alpha < \gamma$.”*

Los números ordinales forman por lo tanto, en su ordenación de magnitudes [cuando se disponen en orden de magnitud], un conjunto simplemente ordenado; después se mostrará que éste es un conjunto *bien ordenado*.

Comentario. [N.T.50] Que los números ordinales formen un conjunto lleva a una contradicción (Burali-Forti). Observemos que no restringe el tamaño de los conjuntos bien ordenados cuando considera los ordinales con ellos asociados y que los ordinales, en tanto que tipos de orden particulares, son, además de universales, *conjuntos*. Esto también es un contraejemplo para lo que dice Ferreirós en la pág. 274 de Fund. para una teoría ...

---

[217] Las operaciones definidas en el §8 de la *adición* y la *multiplicación* de tipos de orden de conjuntos simplemente ordenados arbitrarios son naturalmente también aplicables a los números ordinales. Si $\alpha = \overline{F}$, y $\beta = \overline{G}$, donde F y G son dos conjuntos bien ordenados, entonces se da que

$$\alpha + \beta = \overline{(F, G)}. \tag{1}$$

El conjunto unión (F, G) es manifiestamente [evidentemente] también un conjunto bien ordenado; tenemos por lo tanto el teorema:

C. *"La suma [adición] de dos números ordinales es igualmente un número ordinal."*

En la suma $\alpha + \beta$, α se llama el *"sumando"* y β el *"sumador"*.

Comentario. [N.T.51] sumando = augend: A quantity to which the addend is added; sumador = addend: A number that is added to another number.

Puesto que F es una *sección* de (F, G), entonces se tiene siempre que

$$\alpha < \alpha + \beta. \tag{2}$$

Por el contrario, G no es una *sección*, sino un *resto* de (F, G), y por ello puede, como vimos en el §13, ser semejante al conjunto (F, G); si esto no sucede, entonces G es según el teorema O del §13 semejante a una sección de (F, G). Tenemos por lo tanto que

$$\beta \leq \alpha + \beta. \tag{3}$$

A continuación tenemos:

D. *"La suma [adición] de dos números ordinales es siempre mayor que el sumando, y por el contrario mayor o igual que el sumador. Si se tiene que $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, entonces se sigue de aquí siempre que $\beta = \gamma$."*

En general $\alpha + \beta$ y $\beta + \alpha$ no son iguales. Por el contrario se tiene, si γ es un tercer número ordinal, que

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \tag{4}$$

Por lo tanto

E. *"En la adición de los números ordinales la ley asociativa es válida."*

Si se sustituye en el conjunto G del tipo β *cada* elemento g por un conjunto F_g del tipo A, entonces se obtiene según el teorema E del §12, un conjunto bien ordenado H, cuyo tipo está completamente determinado por los tipos α y β, y se denomina el *producto* $\alpha \cdot \beta$:

$$\overline{F}_g = \alpha, \tag{5}$$

$$\alpha \cdot \beta = \overline{H}. \tag{6}$$

F. *"El producto de dos números ordinales es igualmente un número ordinal."*

En el producto $\alpha \cdot \beta$, α se llama el *"multiplicando"* y β el *"multiplicador"*.

En general $\alpha \cdot \beta$ y $\beta \cdot \alpha$ no son iguales. Sin embargo, se tiene que (por el §8)

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma). \tag{7}$$

Esto es,

[218] G. *"En la multiplicación de los números ordinales es válida la ley asociativa."*

La ley *distributiva* tiene en general (por el §8) aquí validez sólo en la siguiente forma:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma. \tag{8}$$

En relación con la magnitud del producto es válido, como se ve fácilmente, el teorema:

H. *"Si el multiplicador es mayor que 1, entonces el producto de dos números ordinales es siempre mayor que el multiplicando, y por el contrario es mayor o igual que el multiplicador. Si se tiene que $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$, entonces se sigue de ahí siempre, que $\beta = \gamma$."*

Por otra parte, es evidente que

$$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha. \tag{9}$$

Hay que añadir aún la operación de la *substracción*. Si α y β son dos números ordinales y $\alpha < \beta$, entonces existe siempre un número ordinal determinado, que denominamos $\beta - \alpha$, que satisface la igualdad

$$\alpha + (\beta - \alpha) = \beta. \tag{10}$$

Pues si $\overline{G} = \beta$, entonces G tiene una sección B, tal que $\overline{B} = \alpha$; al resto correspondiente lo llamamos S y tenemos que

$$G = (B, S) \text{ y}$$

$$\beta = \alpha + \overline{S};$$

luego

$$\beta - \alpha = \overline{S}. \tag{11}$$

La determinación de $\beta - \alpha$ aparece claramente a partir del hecho de que la sección B de G es una completamente determinada (teorema F del §13), y por ello también S está unívocamente dado.

Subrayamos las siguientes fórmulas, que fluyen [se siguen] de (4), (8) y (10):

$$(\gamma + \beta) - (\gamma + \alpha) = \beta - \alpha, \tag{12}$$

$$\gamma(\beta - \alpha) = \gamma\beta - \gamma\alpha. \; [\text{N.Z.18}] \tag{13}$$

Es importante [reflejar] que una cantidad infinita de números ordinales siempre se pueden sumar, de manera que su suma es un número ordinal determinado, dependiente de la sucesión de sus sumandos.

Si por ejemplo

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots$$

es una sucesión [simplemente] infinita simple y arbitraria de números ordinales y se tiene que

$$\beta_\nu = \overline{G}_\nu, \tag{14}$$

[219] entonces también, por el teorema E del §12,

$$G = (G_1, G_2, \ldots, G_\nu, \ldots) \tag{15}$$

es un conjunto bien ordenado, cuyo número ordinal β representa la suma de los β_ν. Tenemos por lo tanto que

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu + \cdots = \overline{G} = \beta, \tag{16}$$

y se tiene, como se desprende fácilmente de la definición del producto, siempre que

$$\gamma\cdot(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu+\cdots)=\gamma\cdot\beta_1+\gamma\cdot\beta_2+\cdots+\gamma\cdot\beta_\nu+\cdots \tag{17}$$

Establecemos que [Si convenimos que]

$$\alpha_\nu=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu, \tag{18}$$

entonces tenemos que

$$\alpha_\nu=\overline{(G_1,G_2,\ldots,G_\nu)}. \tag{19}$$

Tenemos que

$$\alpha_{\nu+1}>\alpha_\nu, \tag{20}$$

y podemos según (10) expresar los números β_ν por medio de los números α_ν del modo siguiente:

$$\beta_1=\alpha_1;\quad \beta_{\nu+1}=\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu. \tag{21}$$

La sucesión

$$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu,\ldots$$

representa por ello una sucesión infinita *arbitraria* de números ordinales que cumplen la condición (20); la denominamos una *"sucesión fundamental"* de números ordinales (ver el §10); entre ella y β hay una relación, que se puede expresar de la siguiente manera:

1) β es $>\alpha_\nu$, para cada ν, porque el conjunto $(G_1,G_2,\ldots,G_\nu)$ cuyo número ordinal es α_ν, es una sección del conjunto G, que tiene el número ordinal β.

2) Si β' es *cualquier* número ordinal $<\beta$, entonces tenemos desde un cierto ν en adelante que

$$\alpha_\nu>\beta'.$$

Porque, puesto que $\beta'<\beta$, hay una sección B' del conjunto G que es de tipo β'. El elemento de G que determina esta sección debe pertenecer a una de las partes G_ν; llamaremos a esta parte G_{ν_0}. Pero entonces B' es también una sección de $(G_1,G_1,\ldots,G_{\nu_0})$, y por consiguiente $\beta'<\alpha_{\nu_0}$. Luego

$$\alpha_\nu>\beta',$$

para $\nu\geq\nu_0$.

Con esto β es el número ordinal inmediatamente siguiente en magnitud a todos los α_ν; lo denominaremos por esto el *"límite"* de los α_ν para un ν creciente, y lo denotaremos con $\mathrm{Lím}_\nu\,\alpha_\nu$, de tal manera que según (16) y (21)

$$\mathop{\mathrm{Lím}}_\nu\alpha_\nu=\alpha_1+(\alpha_2-\alpha_1)+\cdots+(\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu)+\cdots \tag{22}$$

[220] Podemos expresar lo precedente en el siguiente teorema:

I. *"A cada sucesión fundamental $\{\alpha_\nu\}$ de números ordinales le pertenece un número ordinal* $\mathrm{Lím}_\nu\,\alpha_\nu$*, que sigue inmediatamente en magnitud a todos los α_ν; está representado en la fórmula* (22)*."*

Si se entiende por γ un número ordinal constante cualquiera, entonces se demuestra fácilmente, con la ayuda de las fórmulas (12), (13) y (17), los teoremas contenidos en las siguientes fórmulas:

$$\mathop{\mathrm{Lím}}_\nu(\gamma+\alpha_\nu)=\gamma+\mathop{\mathrm{Lím}}_\nu\alpha_\nu, \tag{23}$$

$$\mathop{\mathrm{Lím}}_\nu(\gamma\cdot\alpha_\nu)=\gamma\cdot\mathop{\mathrm{Lím}}_\nu\alpha_\nu. \tag{24}$$

Ya hemos mencionado en el §7 que todos los conjuntos simplemente ordenados de número cardinal *finito* dado tienen uno y el mismo tipo de orden. Esto se puede demostrar aquí como sigue [N.Z.19]. Cada conjunto simplemente ordenado de número cardinal *finito* es un conjunto bien ordenado; pues debe tener, así como cada uno de sus subconjuntos, un elemento mínimo, lo que los caracteriza según el teorema B del §12 como un conjunto bien ordenado.

Comentario. [N.T.52] Una vez más, Cantor distingue entre un conjunto y sus partes propias y no vacías.

Los tipos de [los] conjuntos simplemente ordenados finitos no son, por esto, otra cosa que [los] *números ordinales finitos*. A dos números ordinales diferentes α y β no puede corresponderles, sin embargo, uno y el mismo número cardinal *finito*. Por ejemplo si tenemos que $\alpha < \beta$ y $\overline{G} = \beta$, entonces existe, como sabemos, una sección B de G, tal que $\overline{B} = \alpha$.

Luego el mismo número cardinal ν sería apropiado para el conjunto G y para su subconjunto B. Esto es, según el teorema C del §6, imposible.

Los *números ordinales finitos* coinciden, por lo tanto, en sus propiedades con los *números cardinales finitos*. Con los *números ordinales transfinitos* sucede algo por completo diferente; para uno y el mismo número cardinal transfinito $\mathfrak{a}$ hay una cantidad *infinita* de números ordinales, que forman un sistema coherente [conexo] unitario, al que llamaremos la "clase numérica $Z(\mathfrak{a})$". Es una parte de la *clase de tipos* $[\mathfrak{a}]$ (del §7).

El siguiente objeto de nuestra consideración lo forma la clase numérica $Z(\aleph_0)$, a la que llamaremos la *segunda clase numérica*.

En este contexto entendemos por la *primera clase numérica* la totalidad $\{\nu\}$ de todos los números ordinales *finitos*.

[221] §15

Los números de la segunda clase numérica $Z(\aleph_0)$.

La segunda clase numérica $Z(\aleph_0)$ es la totalidad $\{\alpha\}$ de todos los tipos de orden α de conjuntos bien ordenados de número cardinal $\aleph_0$ (ver el §6).

A. *"La segunda clase numérica tiene un número mínimo $\omega = \text{Lím}_\nu\, \nu$."*

Demostración. Entendemos por ω el tipo del conjunto bien ordenado

$$F_0 = (f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots), \tag{1}$$

donde ν recorre todos los números ordinales finitos y

$$f_\nu \prec f_{\nu+1}. \tag{2}$$

Tenemos por lo tanto que (por el §7)

$$\omega = \overline{F}_0 \tag{3}$$

y que (por el §6):

$$\overline{\overline{\omega}} = \aleph_0. \tag{4}$$

ω es por ello un número de la segunda clase numérica, y ciertamente el *mínimo*. Puesto que γ es un número ordinal cualquiera que es $< \omega$, entonces debe ser (por el §14) el tipo de una *sección* de F_0. Pero F_0 tiene sólo secciones

$$A = (f_1, f_2, \ldots, f_\nu)$$

con un número ordinal *finito* ν. Por lo tanto, tenemos que $\gamma = \nu$.

Así pues, no hay números ordinales *transfinitos*, que fueran [sean] menores que ω, el cual es por ello el mínimo de ellos. Según la definición dada en el §14 de $\text{Lím}_\nu\, \alpha_\nu$ tenemos claramente que $\omega = \text{Lím}_\nu\, \nu$.

B. *"Si α es un número cualquiera de la segunda clase numérica, entonces le sigue como número inmediato mayor de la misma clase numérica el número $\alpha + 1$."*

Demostración. Sea F un conjunto bien ordenado de tipo α y de número cardinal $\aleph_0$, por lo tanto

$$\overline{F} = \alpha, \tag{5}$$

$$\overline{\alpha} = \aleph_0. \tag{6}$$

Tenemos, si se entiende por g un nuevo elemento que se añade,

$$\alpha + 1 = \overline{(F, g)}. \tag{7}$$

Puesto que F es una sección de (F, g), entonces tenemos que

$$\alpha + 1 > \alpha. \tag{8}$$

Esto es,

$$\overline{\alpha + 1} = \overline{\alpha} + 1 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0 \ (\S 6).$$

Luego el número $\alpha + 1$ pertenece a la segunda clase numérica. Entre α y $\alpha + 1$ no hay sin embargo ningún número ordinal; pues cada número γ **[222]** que es $< \alpha + 1$ corresponde como tipo a una sección de (F, g); y como tal sólo puede ser F o una sección de F. γ es por lo tanto o $=$ o $< \alpha$.

C. *"Si α_1, α_2,..., α_ν,... es una sucesión fundamental cualquiera de números de la primera o la segunda clase numérica, entonces el número inmediatamente siguiente a ellos en magnitud* $\text{Lím}_\nu\, \alpha_\nu$ *(ver el* §14*) pertenece también a la segunda clase numérica."*

Comentario. [N.T.53] Axioma de elección.

Demostración. Según el §14, se obtendría de la sucesión fundamental $\{\alpha_\nu\}$ el número $\text{Lím}_\nu\, \alpha_\nu$ construyendo otra sucesión β_1, β_2,..., β_ν,..., de tal manera que

$$\beta_1 = \alpha_1,\, \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1, \ldots, \beta_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu, \ldots$$

Si además G_1 G_2, ... G_n, ... son conjuntos bien ordenados [sin elementos comunes] tales que

$$\overline{G}_\nu = \beta_\nu,$$

entonces también

$$G = (G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots)$$

es un conjunto bien ordenado y

$$\text{Lím}_\nu\, \alpha_\nu = \overline{G}.$$

Se trata por ello sólo de demostrar que

$$\overline{\overline{G}} = \aleph_0.$$

Pero puesto que los números β_1, β_2,..., β_ν,... pertenecen a la primera o a la segunda clase numérica, entonces tenemos que

$$\overline{\overline{G}}_\nu \leq \aleph_0,$$

y por ello

$$\overline{\overline{G}} \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

Sin embargo, G es, en todo caso, un conjunto transfinito, luego el caso $\overline{\overline{G}}_\nu < \aleph_0$ está excluido [N.Z.20].

A dos sucesiones fundamentales $\{\alpha_\nu\}$ y $\{\alpha'_\nu\}$ de números de la primera o la segunda clase numérica las llamamos *'congéneres'*, en signos

$$\{\alpha_\nu\} \parallel \{\alpha'_\nu\}, \tag{9}$$

si para cada ν existen números finitos λ_0, μ_0, de tal manera que

$$\alpha'_\lambda > \alpha_\nu, \quad \lambda \geq \lambda_0, \tag{10}$$

y

$$\alpha_\mu > \alpha'_\nu, \quad \mu \geq \mu_0. \tag{11}$$

[223] D. *"Los números límite* $\text{Lím}_\nu\, \alpha_\nu$ *y* $\text{Lím}_\nu\, \alpha'_\nu$ *correspondientes a las sucesiones fundamentales* $\{\alpha_\nu\}$ *y* $\{\alpha'_\nu\}$ *son iguales si, y sólo si,* $\{\alpha_\nu\} \parallel \{\alpha'_\nu\}$*."*

Demostración. Por mor de la brevedad, convenimos que $\text{Lím}_\nu\, \alpha_\nu = \beta$ y $\text{Lím}_\nu\, \alpha'_\nu = \gamma$. Suponemos en primer lugar que tuviéramos que $\{\alpha_\nu\} \parallel \{\alpha'_\nu\}$, entonces afirmamos que $\beta = \gamma$. Pues si β no fuera igual a γ, entonces, uno de estos dos números debería ser el menor, por ejemplo $\beta < \gamma$. A partir de un determinado ν tendríamos que $\alpha'_\nu > \beta$ (§14), por lo que también, a causa de (11), a partir de un determinado μ tendríamos que $\alpha_\mu > \beta$. Pero esto es imposible, porque $\beta = \text{Lím}_\nu\, \alpha_\nu$, luego para todos los μ $\alpha_\mu < \beta$.

Si se supone por el contrario que $\beta = \gamma$, entonces, puesto que $\alpha_\nu < \gamma$, deberemos tener a partir de un cierto λ que $\alpha'_\lambda > \alpha_\nu$, y puesto que $\alpha'_\nu < \beta$, deberemos tener a partir de un determinado μ que $\alpha_\mu > \alpha'_\nu$, esto es, tenemos que $\{\alpha_\nu\} \parallel \{\alpha'_\nu\}$.

E. *"Si* α *es un número cualquiera de la segunda clase numérica, y* ν_0 *un número ordinal finito arbitrario, entonces* $\nu_0 + \alpha = \alpha$*, y por ello [por consiguiente] también que* $\alpha - \nu_0 = \alpha$*."*

Demostración. Nos convencemos en primer lugar de la corrección del teorema si $\alpha = \omega$. Tenemos que

$$\omega = \overline{(f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)},$$
$$\nu_0 = \overline{(g_1, g_2, \ldots, g_{\nu_0})},$$

por ello

$$\nu_0 + \omega = \overline{(g_1, g_2, \ldots, g_{\nu_0}, f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)} = \omega.$$

Pero si $\alpha > \omega$, entonces tenemos que

$$\alpha = \omega + (\alpha - \omega),$$

$$\nu_0 + \alpha = (\nu_0 + \omega) + (\alpha - \omega) = \omega + (\alpha - \omega) = \alpha.$$

F. *"Si* ν_0 *es un número ordinal finito cualquiera, entonces* $\nu_0 \cdot \omega = \omega$*."*

Demostración. Para obtener un conjunto del tipo $\nu_0 \cdot \omega$, los elementos particulares f_ν del conjunto $(f_1, f_2, \ldots f_\nu, \ldots)$ han de substituirse por conjuntos del tipo ν_0 $(g_{\nu,1}, g_{\nu,2}, \ldots g_{\nu,\nu_0})$. Se obtiene el conjunto

$$(g_{1,1}, g_{1,2}, \ldots, g_{1,\nu_0}, g_{2,1}, \ldots, g_{2,\nu_0}, \ldots, g_{\nu,1}, g_{\nu,2}, \ldots, g_{\nu,\nu_0}, \ldots),$$

que es manifiestamente [evidentemente] semejante al conjunto $\{f_\nu\}$, por ello

$$\nu_0\omega = \omega.$$

Se obtiene lo mismo más brevemente de la manera siguiente: según (24) del §14, puesto que $\omega = \text{Lím}_\nu\, \nu$, tenemos que

$$\nu_0\omega = \operatorname*{Lím}_\nu \nu_0\nu.$$

Por otra parte tenemos que

$$\{\nu_0\nu\} \parallel \{\nu\},$$

con lo que

$$\operatorname*{Lím}_\nu \nu_0\nu = \operatorname*{Lím}_\nu \nu = \omega,$$

luego

$$\nu_0\omega = \omega.$$

[224] G. *"Siempre se tiene que*

$$(\alpha + \nu_0)\omega = \alpha\omega,$$

donde α es un número de la segunda clase numérica, y ν_0 uno de la primera."

Demostración. Tenemos que

$$\operatorname*{Lím}_{\nu} \nu = \omega.$$

Según (24) del §14, tenemos por ello [por consiguiente que]

$$(\alpha + \nu_0)\omega = \operatorname*{Lím}_{\nu} (\alpha + \nu_0)\nu.$$

Pero tenemos que

$$\begin{aligned}(\alpha+\nu_0)\nu &= \overbrace{(\alpha+\nu_0)}^{1} + \overbrace{(\alpha+\nu_0)}^{2} + \cdots + \overbrace{(\alpha+\nu_0)}^{\nu}\\ &= \alpha + \overbrace{(\nu_0+\alpha)}^{1} + \cdots + \overbrace{(\nu_0+\alpha)}^{\nu-1} + \nu_0\\ &= \overbrace{\alpha}^{1} + \overbrace{\alpha}^{2} + \cdots + \overbrace{\alpha}^{\nu} + \nu_0\\ &= \alpha\nu + \nu_0\end{aligned}$$

Se tiene ahora, como es fácil ver [porque $\alpha(\nu+1) = \alpha\nu + \alpha > \alpha\nu + \nu_0$], que

$$\{\alpha\nu + \nu_0\} \parallel \{\alpha\nu\}$$

y por consiguiente que

$$\operatorname*{Lím}_{\nu} (\alpha + \nu_0)\nu = \operatorname*{Lím}_{\nu} (\alpha\nu + \nu_0) = \operatorname*{Lím}_{\nu} \alpha\nu = \alpha\omega.$$

H. *"Si α es un número cualquiera de la segunda clase numérica, entonces la totalidad $\{\alpha'\}$ de todos los números α' de la primera y la segunda clase numérica, que son menores que α, forma en su ordenación por magnitud un conjunto bien ordenado de tipo α."*

Demostración. Sea F un conjunto bien ordenado tal que $\overline{F} = \alpha$; sea f_1 el elemento mínimo de F. Si α' es un número ordinal arbitrario $< \alpha$, entonces, por el §14, hay una sección determinada A' de F, tal que

$$\overline{A'} = \alpha',$$

y viceversa cada sección A' determina por medio de su tipo $\overline{A'} = \alpha'$ un número $\alpha' < \alpha$ de la primera o la segunda clase numérica; pues, dado que $\overline{\overline{F}} = \aleph_0$, $\overline{\overline{A'}}$ sólo puede ser un número cardinal finito o $\aleph_0$.

La sección A' está determinada por un elemento $f' \succ f_1$ de F, y viceversa, cada elemento $f' \succ f_1$ de F determina una sección A' de F. Si f' y f'' son dos elementos $\succ f_1$ de F, A' y A'' las secciones determinadas por ellos de F, α' y α'' sus tipos de orden, y tenemos, por ejemplo, que $f' \prec f''$, entonces (por el §13) $A' < A''$ y por ello $\alpha' < \alpha''$.

[225] Establecemos [Convenimos] por ello que $F = (f_1, F')$, luego, si se asigna al elemento f' de F el elemento α' de $\{\alpha'\}$, hemos logrado una aplicación de estos dos conjuntos. Con ello tenemos que

$$\overline{\{\alpha'\}} = \overline{F'}.$$

Pero[, ahora bien,] $\overline{F'} = \alpha - 1$ y (por el teorema E) $\alpha - 1 = \alpha$, por lo cual

$$\overline{\{\alpha'\}} = \alpha.$$

Puesto que $\overline{\overline{\alpha}} = \aleph_0$, es válido a partir de aquí que:

J. *"El conjunto $\{\alpha'\}$ de todos los números α' de la primera y la segunda clase numérica, que son menores que un número α de la segunda clase numérica, tiene el número cardinal $\aleph_0$."*

K. *"Cada número α de la segunda clase numérica es, o bien tal que se [produce] [origina] a partir de uno inmediatamente menor α_{-1} al añadirle el* 1*:*

$$\alpha = \alpha_{-1} + 1,$$

o bien se puede indicar una sucesión fundamental $\{\alpha_\nu\}$ de números de la primera o la segunda clase numérica, tal que

$$\alpha = \operatorname*{Lím}_{\nu} \alpha_\nu.\text{"}$$

Demostración. Sea $\alpha = \overline{F}$. Si F tiene un elemento máximo g según el rango, entonces $F = (A, g)$ donde A es la sección de F determinada por g. Tenemos entonces el primer caso, a saber,

$$\alpha = \overline{A} + 1 = \alpha_{-1} + 1.$$

Existe por lo tanto un número *inmediatamente menor*, que justamente se denomina α_{-1}.

Sin embargo, si F no posee ningún elemento máximo, entonces consideramos el conjunto [agregado] [compendio] [Inbegriff] $\{\alpha'\}$ de todos los números de la primera y segunda clases numéricas, que son menores que α. Según el teorema H, el conjunto $\{\alpha'\}$ es semejante en su ordenación por magnitudes al conjunto F; por ello entre los números α' ninguno es el máximo. Según el teorema J el conjunto $\{\alpha'\}$ puede llevarse a la forma $\{\alpha'_\nu\}$ de una sucesión simplemente infinita. Si partimos de α'_1, entonces los siguientes elementos α'_2, α'_3, $\ldots$ en este orden, que es diferente, en general, en esta ordenación jerárquica de la ordenación por magnitudes, habrán de ser menores que α'_1; en todo caso sin embargo tienen lugar [ocurrirán] en el curso posterior [del proceso] miembros [términos], que son $> \alpha'_1$; pues α'_1 no puede ser mayor que todos los demás miembros [términos], porque entre los números $\{\alpha'_\nu\}$ no existe ninguno que sea el máximo. Sea α'_{ρ_2} el número α'_ν provisto [dotado] con el índice mínimo, que es mayor que α'_1. Sea igualmente α'_{ρ_3} el número de la sucesión $\{\alpha'_\nu\}$ provisto [dotado] con el índice mínimo, que es mayor que α'_{ρ_2}. Si proseguimos así, obtenemos una sucesión infinita de números crecientes, una sucesión fundamental

$$\alpha'_1, \alpha'_{\rho_2}, \alpha'_{\rho_3}, \ldots, \alpha'_{\rho_\nu}, \ldots,$$

[226] Tenemos que

$$1 < \rho_2 < \rho_3 < \cdots < \rho_\nu < \rho_{\nu+1} \cdots,$$
$$\alpha'_1 < \alpha'_{\rho_2} < \alpha'_{\rho_3} < \cdots < \alpha'_{\rho_\nu} < \alpha'_{\rho_{\nu+1}} \cdots,$$
$$\alpha'_\mu < \alpha'_{\rho_\nu} \text{ siempre si } \mu < \rho_\nu;$$

y puesto que manifiestamente [evidentemente] $\nu \leq \rho_\nu$, entonces tenemos siempre que

$$\alpha'_\nu \leq \alpha'_{\rho_\nu}.$$

A partir de aquí, se ve que cada número α'_ν, y por lo tanto también cada número $\alpha' < \alpha$ es sobrepasado por los números α'_{ρ_ν} para valores suficientemente grandes de ν.

Pero α es el número inmediatamente siguiente a todos los números α' según la magnitud, con lo que es también el número inmediatamente siguiente en relación a todos los α'_{ρ_ν}. Si establecemos [convenimos] por ello que $\alpha'_1 = \alpha_1, \alpha_{\rho_{\nu+1}} = \alpha_{\nu+1}$, entonces tenemos que

$$\alpha = \operatorname*{Lím}_{\nu} \alpha_\nu.$$

A partir de los teoremas B, C,. . . , K, queda claro que los números de la segunda clase numérica se obtienen de dos modos a partir de números menores. Algunos números, a los que llamamos *números del primer tipo*, se obtienen de un número inmediatamente menor α_{-1} al añadirle el 1, según la fórmula

$$\alpha = \alpha_{-1} + 1;$$

los otros, a los que denominamos *números del segundo tipo*, están compuestos [hechos] de tal manera, que para ellos no hay un inmediatamente menor α_{-1}; estos proceden sin embargo de sucesiones fundamentales $\{\alpha_\nu\}$ como sus números límite según la fórmula

$$\alpha = \operatorname*{Lím}_{\nu} \alpha_\nu.$$

Aquí α es el número inmediatamente siguiente a la totalidad de los números α_ν según la magnitud.

Estos dos modos de producirse [originarse] (de) los números mayores a partir de los menores los denominamos el *primero y el segundo principio de generación de los números de la segunda clase numérica.*

§16
La potencia de la segunda clase numérica es igual al segundo mínimo número cardinal transfinito Aleph-uno.

Antes de dedicarnos en los siguientes parágrafos a una consideración más exhaustiva de los números de la segunda clase numérica y de las leyes que los rigen, queremos responder la pregunta acerca del número cardinal que corresponde al conjunto $Z(\aleph_0) = \{\alpha\}$ de todos estos números.

[227] A. *"La totalidad $\{\alpha\}$ de todos los números α de la segunda clase numérica forma en su ordenación por magnitud un conjunto bien ordenado de la segunda clase numérica."*

Demostración [N.Z.21]. Entendemos [Denotamos] por A_α la totalidad de los números de la *segunda clase numérica* que son menores que un número α dado, en su ordenación [numérica], luego A_α es un conjunto bien ordenado del tipo $\alpha - \omega$. Esto se desprende del teorema H del §15. Allí el conjunto de todos los números α' de la *primera* y la *segunda* clase numérica, denotado con $\{\alpha'\}$, se compone de $\{\nu\}$ y A_α, de modo que

$$\{\alpha'\} = (\{\nu\}, A_\alpha).$$

De aquí se sigue que

$$\overline{\{\alpha'\}} = \overline{\{\nu\}} + \overline{A}_\alpha.$$

y puesto que

$$\overline{\{\alpha'\}} = \alpha, \quad \overline{\{\nu\}} = \omega,$$

entonces tenemos que

$$\overline{A}_\alpha = \alpha - \omega.$$

Sea J un subconjunto cualquiera de $\{\alpha\}$ tal que hay números en $\{\alpha\}$ que son mayores que todos los números de J. Sea por ejemplo α_0 uno de estos números. Entonces, J es un subconjunto de A_{α_0+1}, y ciertamente uno tal que al menos el número α_0 de A_{α_0+1} es mayor que todos los números de J. Puesto que A_{α_0+1} es un conjunto bien ordenado, entonces un número α' de A_{α_0+1}, que por lo tanto también es un número de $\{\alpha\}$, debe (por el §12) seguir inmediatamente a todos los números de J. Con esto se cumple la condición II del §12 en [el caso de] $\{\alpha\}$; la condición I del §12 se cumple también, porque $\{\alpha\}$ contiene el número mínimo ω.

Si se aplican ahora los teoremas A y C del §12 al conjunto bien ordenado $\{\alpha\}$, entonces se obtienen los siguientes teoremas:

B. *"Cada conjunto [agregado] [compendio] [Inbegriff] de números diferentes de la primera y segunda clase numérica tiene un número mínimo, un* minimum.*"*

C. *"Cada conjunto [agregado] [compendio] [Inbegriff] de números diferentes de la primera y la segunda clase numérica [comprendido][dispuesto] en su ordenación por magnitud forma un conjunto bien ordenado."*

Ahora ha de mostrarse en primer lugar que la potencia de la segunda clase numérica es diferente de la de la primera, que es $\aleph_0$

D. *"La potencia de la totalidad $\{\alpha\}$ de todos los números α de la segunda clase numérica no es igual a $\aleph_0$."*

Demostración [N.Z.22]. Si fuera $\overline{\overline{\{\alpha\}}} = \aleph_0$, entonces se podría poner la totalidad $\{\alpha\}$ en [bajo] la forma de una sucesión simplemente infinita

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu, \ldots$$

de manera que $\{\gamma_\nu\}$ representaría a la *totalidad* de los números de la segunda **[228]** clase numérica en una ordenación jerárquica que es diferente de la ordenación por magnitudes, y $\{\gamma_\nu\}$ no contendría, como $\{\alpha\}$, un número máximo.

Partiendo de γ_1, sea γ_{ρ_2} el término de la sucesión provisto [dotado] con el índice mínimo $> \gamma_1$, [y] γ_{ρ_3} el término provisto [dotado] con el índice mínimo de aquéllos $> \gamma_{\rho_2}$, etc. Obtenemos la sucesión infinita de números crecientes

$$\gamma_1, \gamma_{\rho_2}, \ldots, \gamma_{\rho_\nu}, \ldots,$$

de modo que

$$1 < \rho_2 < \rho_3 \cdots < \rho_\nu < \rho_{\nu+1} < \cdots,$$
$$\gamma_1 < \gamma_{\rho_2} < \gamma_{\rho_3} \cdots < \gamma_{\rho_\nu} < \gamma_{\rho_{\nu+1}} < \cdots,$$
$$\gamma_\nu \leq \gamma_{\rho_\nu}.$$

Según el teorema C del §15, habría un número determinado δ de la segunda clase numérica, a saber

$$\delta = \operatorname*{Lím}_\nu \gamma_{\rho_\nu},$$

que sería mayor que [todos los] γ_{ρ_ν}, por consiguiente, tendríamos también que

$$\delta > \gamma_\nu$$

para todo ν. Ahora bien, $\{\gamma_\nu\}$ contiene [a] *todos* los números de la segunda clase numérica, y por consiguiente también al número δ; tendríamos por lo tanto para un determinado ν_0 que

$$\delta = \gamma_{\nu_0},$$

ecuación que es incompatible con la relación $\gamma > \gamma_{\nu_\rho}$. Por lo tanto, el supuesto $\overline{\overline{\{\alpha\}}} = \aleph_0$ lleva a una contradicción.

E. *"Un conjunto [agregado] [compendio] [Inbegriff] arbitrario de diferentes números $\{\beta\}$ de la segunda clase numérica tiene, si es infinito, o bien el número cardinal $\aleph_0$, o bien el número cardinal $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$ de la segunda clase numérica."*

Demostración. El conjunto $\{\beta\}$ en su ordenación por magnitudes, como subconjunto del conjunto bien ordenado $\{\alpha\}$, según el teorema O del §13, es semejante, o bien a una sección A_{α_0} de este último, (esto es, del conjunto de todos los números de la segunda clase numérica que son $< \alpha_0$ en su ordenación por magnitudes), o bien a la totalidad $\{\alpha\}$ misma. Como fue mostrado en la demostración del teorema A, $\overline{A}_{\alpha_0} = \alpha_0 - \omega$.

Tenemos por lo tanto, o bien $\overline{\{\beta\}} = \alpha_0 - \omega$, o bien $\overline{\{\beta\}} = \overline{\{\alpha\}}$, de donde también, o bien $\overline{\overline{\{\beta\}}}$ es igual a $\overline{\alpha_0 - \omega}$, o bien es igual a $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$. Pero $\overline{\alpha_0 - \omega}$ es o bien un número cardinal finito, o bien es igual a $\aleph_0$ (Teorema I del §15). El primer caso está excluido aquí, porque se ha supuesto a $\{\beta\}$ como un conjunto infinito. Así pues, el número cardinal $\overline{\overline{\{\beta\}}}$ es, o bien $= \aleph_0$, o bien $= \overline{\overline{\{\alpha\}}}$.

F. *“La potencia de la segunda clase numérica $\{\alpha\}$ es el segundo mínimo número cardinal transfinito Aleph-uno.”*

[229] Demostración. No hay ningún número cardinal $\mathfrak{a}$, que sea $> \aleph_0$ y $< \overline{\overline{\{\alpha\}}}$. Pues en caso contrario debería existir por el §2 un subconjunto infinito $\{\beta\}$ de $\{\alpha\}$, de tal modo que $\overline{\overline{\{\beta\}}} = \mathfrak{a}$. Como consecuencia del teorema E que acabamos de demostrar, sin embargo, el subconjunto $\{\beta\}$ tiene, o bien el número cardinal $\aleph_0$, o bien el número cardinal $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$. Por ello, el número cardinal $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$ es necesariamente el número cardinal siguiente en magnitud a $\aleph_0$, y lo denominamos $\aleph_1$.

Por ello, en la segunda clase numérica $Z(\aleph_0)$ tenemos el *representante* natural para el segundo número mínimo transfinito *Aleph-uno.*

§17
Los números de la forma $\omega^\mu\nu_0 + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \cdots + \nu_\mu$. [N.Z.23]

Es conveniente familiarizarse en primer lugar con aquellos números de $Z(\aleph_0)$ que son funciones enteras (racionales) de grado finito de ω. Cada número de este tipo puede, y esto sólo de un modo, llevarse a la forma

$$\varphi = \omega^\mu\nu_0 + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \cdots + \nu_\mu, \tag{1}$$

donde μ y ν_0 son finitos y diferentes de cero, pero ν_1, ν_2,..., ν_μ pueden ser también cero. Esto se debe a que

$$\omega^{\mu'}\nu' + \omega^\mu\nu = \omega^\mu\nu, \tag{2}$$

en el caso de que $\mu' < \mu$ y $\nu > 0$.

Pues según (8) del §14, tenemos que

$$\omega^{\mu'}\nu' + \omega^\mu\nu = \omega^{\mu'}(\nu' + \omega^{\mu-\mu'}\nu),$$

y, según el teorema E del §15, que

$$\nu' + \omega^{\mu-\mu'}\nu = \omega^{\mu-\mu'}\nu.$$

Luego, en un agregado de la forma

$$\cdots + \omega^{\mu'}\nu' + \omega^\mu\nu + \cdots$$

todos aquellos términos que son seguidos hacia la derecha por términos de grado más alto en ω pueden ser omitidos. Este procedimiento puede seguir llevándose a cabo, hasta que se haya alcanzado la forma dada en (1). Destacamos aún que

$$\omega^\mu\nu + \omega^\nu\mu' = \omega^\mu(\nu + \nu'). \tag{3}$$

Comparamos ahora el número φ con un número ψ del mismo tipo

$$\psi = \omega^\lambda\rho_0 + \omega^{\lambda-1}\rho_1 + \cdots + \rho_\lambda \tag{4}$$

Si μ y λ son diferentes y, por ejemplo, $\mu < \lambda$, entonces tenemos, según (2), $\varphi + \psi = \psi$, y de ahí $\varphi < \psi$.

[230] Si $\mu = \lambda$, ν_0 y ρ_0 son diferentes, y, por ejemplo, $\nu_0 < \rho_0$, entonces tenemos, según (2)

$$\varphi + (\omega^\lambda(\rho_0 - \nu_0) + \omega^{\lambda-1}\rho_1 + \cdots + \rho_\mu) = \psi,$$

y de ahí también

$$\varphi < \psi.$$

Si tenemos por último

$$\mu = \lambda, \quad \nu_0 = \rho_0, \quad \nu_1 = \rho_1, \ldots, \quad \nu_{\sigma-1} = \rho_{\sigma-1}, \quad \sigma \le \mu,$$

y por el contrario ν_σ y ρ_σ son diferentes, y por ejemplo $\nu_\sigma < \rho_\sigma$, entonces tenemos según (2)

$$\varphi + (\omega^{\lambda-\sigma}(\rho_\sigma - \nu_\sigma) + \omega^{\lambda-\sigma-1}\rho_{\sigma+1} + \cdots + \rho_\mu = \psi,$$

de ahí de nuevo

$$\varphi < \psi.$$

Vemos, por lo tanto, que sólo en el caso de la identidad de las expresiones φ y ψ pueden ser iguales los números representados por ellos.

La *adición* de φ y ψ lleva al siguiente resultado:

1) Si $\mu < \lambda$, entonces tenemos, como ya se señaló más arriba,

$$\varphi + \psi = \psi.$$

2) Si $\mu = \lambda$, entonces se tiene

$$\varphi + \psi = \omega^\lambda(\nu_0 + \rho_0) + \omega^{\lambda-1}\rho_1 + \cdots + \rho_\lambda.$$

3) Si $\mu > \lambda$, entonces se tiene

$$\varphi + \psi = \omega^\mu\nu_0 + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \cdots + \omega^{\lambda+1}\nu_{\mu-\lambda-1} + \omega^\lambda(\nu_{\mu-\lambda} + \rho_0) + \omega^{\lambda-1}\rho_1 + \cdots + \rho_\lambda.$$

Para realizar la multiplicación de φ y ψ, señalamos que, si ρ es un número finito diferente de cero, la fórmula es

$$\varphi\rho = \omega^\mu\nu_0\rho + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \cdots + \nu_\mu. \tag{5}$$

Se obtiene fácilmente realizando la suma $\varphi + \varphi + \cdots + \varphi$ de los ρ miembros.

Aplicando repetidamente el teorema G del §15, se obtiene además, teniendo en consideración F del §15, que

$$\varphi\omega = \omega^{\mu+1}, \tag{6}$$

y de ahí también que

$$\varphi\omega^\lambda = \omega^{\mu+\lambda}. \tag{7}$$

Según la ley distributiva, (8) del §14, tenemos que

$$\varphi\psi = \varphi\omega^\lambda\rho_0 + \varphi\omega^{\lambda-1}\rho_1 + \cdots + \varphi\omega\rho_{\lambda-1} + \varphi\rho_\lambda$$

Las fórmulas (4),(5) y (7) proporcionan el siguiente resultado:

1) Si $\rho_\lambda = 0$, entonces se tiene

$$\varphi\psi = \omega^{\mu+\lambda}\rho_0 + \omega^{\mu+\lambda-1}\rho_1 + \cdots + \omega^{\mu+1}\rho_{\lambda-1} = \omega^\mu\psi.$$

2) Si ρ_λ no es $= 0$, entonces tenemos

$$\varphi\psi = \omega^{\mu+\lambda}\rho_0 + \varphi\omega^{\mu+\lambda-1}\rho_1 + \cdots + \omega^{\mu+1}\rho_{\lambda-1} + \omega^\mu\nu_0\rho_\lambda + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \cdots + \nu_\mu.$$

[231] Llegamos a una descomposición de los números φ digna de ser señalada del siguiente modo. Sea

$$\varphi = \omega^\mu\kappa_0 + \omega^{\mu_1}\kappa_1 + \cdots + \omega^{\mu_\tau}\kappa_\tau, \tag{8}$$

donde

$$\mu > \mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_\tau \geq 0$$

y κ_0, κ_1,..., κ_τ son números finitos diferentes de cero. Tenemos entonces que

$$\varphi = (\omega^{\mu_1}\kappa_1 + \omega^{\mu_2}\kappa_2 + \cdots + \omega^{\mu_\tau}\kappa_\tau)(\omega^{\mu-\mu_1}\kappa_0 + 1).$$

Aplicando repetidamente esta fórmula obtenemos que

$$\varphi = \omega^{\mu_\tau}\kappa_\tau(\omega^{\mu_{\tau-1}-\mu_\tau}\kappa_{\tau-1} + 1)(\omega^{\mu_{\tau-2}-\mu_{\tau-1}}\kappa_{\tau-2} + 1)\ldots(\omega^{\mu-\mu_1}\kappa_0 + 1).$$

Pero [según (5)] tenemos que

$$\omega^\lambda\kappa + 1 = (\omega^\lambda + 1)\kappa,$$

en el caso en que κ sea un número finito diferente de cero. Por lo tanto

$$\varphi = \omega^{\mu_\tau}\kappa_\tau(\omega^{\mu_{\tau-1}-\mu_\tau} + 1)\kappa_{\tau-1}(\omega^{\mu_{\tau-2}-\mu_{\tau-1}} + 1)\kappa_{\tau-2}\ldots(\omega^{\mu-\mu_1} + 1)\kappa_0. \tag{9}$$

Los factores $\omega^\lambda + 1$ que ocurren aquí son completamente [todos] *primos*, y se puede representar un número φ en [bajo] esta forma de producto *de un solo modo.* Si $\mu_\tau = 0$, entonces φ es del *primer* tipo, en todos los demás casos es del *segundo* tipo.

La diferencia aparente entre las fórmulas de este parágrafo y aquéllas que ya fueron dadas en Math. Annalen, vol. 21, pág. 585 (o Grundlagen, pág. 41) se debe sólo a que se ha cambiado el modo de escribir el producto de dos números, pues ahora ponemos el multiplicando a la izquierda, el multiplicador a la derecha, mientras que entonces seguimos la regla contraria.

§18
La exponenciación γ^α en el dominio de la segunda clase numérica. [N.Z.24]

Sea ξ una variable cuyo dominio consiste en los números de la primera y la segunda clase numérica incluido el cero, y sean γ y δ dos *constantes* pertenecientes al mismo dominio, y en efecto

$$\delta > 0, \gamma > 1.$$

En ese caso podemos fundamentar el siguiente teorema:

A. *"Hay una única función $f(\xi)$ completamente determinada, de la variable ξ, que cumple las siguientes condiciones:*

1) $f(0) = \delta$.

2) *Si ξ' y ξ'' son dos valores arbitrarios de ξ, y tenemos que*

$$\xi' < \xi'',$$

entonces tenemos

$$f(\xi') < f(\xi'').$$

[232] 3) *Para cada valor de ξ tenemos que*

$$f(\xi + 1) = f(\xi)\gamma.$$

4) *Si $\{\xi_\nu\}$ es una sucesión fundamental arbitraria, entonces lo es también $\{f(\xi_\nu)\}$, y se tiene que*

$$\xi = \operatorname*{Lím}_\nu \xi_\nu,$$

entonces tenemos que

$$f(\xi) = \operatorname*{Lím}_\nu f(\xi_\nu)."$$

Comentario. [N.T.54] Principio de la definición por recursión transfinita.

Demostración. Según 1) y 3) tenemos que

$$f(1) = \delta\gamma, \quad f(2) = \delta\gamma\gamma, \quad f(3) = \delta\gamma\gamma\gamma, \dots,$$

y, debido a que $\delta > 0$ y $\gamma > 1$, se tiene que

$$f(1) < f(2) < f(3) < \cdots < f(\nu) < f(\nu + 1) < \cdots .$$

Así pues, la función $f(\xi)$ está completamente determinada para el dominio $\xi < \omega$. Suponemos ahora que el teorema esté establecido para todos los valores de ξ que son $< \alpha$, donde α es cualquier número de la segunda clase numérica, entonces también es válido para $\xi \leq \alpha$. Puesto que α es de la *primera* clase, entonces se sigue de 3) que

$$f(\alpha) = f(\alpha_{-1})\gamma > f(\alpha_{-1});$$

luego se cumplen también las condiciones 2), 3) y 4) para $\xi \leq \alpha$. Pero si α es de la *segunda* clase, y $\{\alpha_\nu\}$ una sucesión fundamental tal que $\text{Lím}_\nu\, \alpha_\nu = \alpha$, entonces se sigue de 2) que también $\{f(\alpha_\nu)\}$, y de 4), que $f(\alpha) = \text{Lím}_\nu\, f(\alpha_\nu)$. Si se toma otra sucesión fundamental $\{\alpha'_\nu\}$, tal que $\text{Lím}_\nu\, \alpha'_\nu = \alpha$, entonces, por 2), las dos sucesiones fundamentales $\{f(\alpha_\nu)\}$ y $\{f(\alpha'_\nu)\}$ son *congéneres*; por lo tanto tenemos que $f(\alpha) = \text{Lím}_\nu\, f(\alpha'_\nu)$. El valor $f(\alpha)$ está por lo tanto también en este caso *unívocamente* determinado.

Si α' es cualquier número $< \alpha$, entonces es fácil convencerse de que $f(\alpha') < f(\alpha)$. Por lo tanto se cumplen las condiciones 2), 3) y 4) también para $\xi \leq \alpha$. De aquí se sigue la validez del teorema *para todos los valores* de ξ.

Pues si hubiera valores excepcionales de ξ para los cuales no se mantuviera [cumpliera], entonces, según el teorema B del §16, unos de ellos debería ser, al que denominamos α, el *mínimo*. Entonces el teorema sería válido para $\xi < \alpha$, pero no para $\xi \leq \alpha$, lo que estaría en contradicción con lo que se acaba de demostrar. Por lo tanto, para todo el dominio de ξ hay *una* y solo una función $f(\xi)$ que cumple las condiciones 1) a 4).

[233] Si se asigna a la constante δ el valor 1 y se denota al mismo tiempo la función $f(\xi)$ con

$$\gamma^\xi,$$

entonces podemos formular el siguiente teorema:

B. *“Si γ es una constante > 1 arbitraria perteneciente a la primera o la segunda clase numérica, entonces hay una función completamente determinada γ^ξ, de tal modo que*

1) $\gamma^0 = 1$.

2) *Si $\xi' < \xi''$, entonces tenemos que $\gamma^{\xi'} < \gamma^{\xi''}$.*

3) *Para todo valor de ξ se da que $\gamma^{\xi+1} = \gamma^\xi \gamma$.*

4) *Si $\{\xi_\nu\}$ es una sucesión fundamental, entonces lo es también $\{\gamma^{\xi_\nu}\}$, y se tiene, en el caso en que $\xi = \text{Lím}_\nu\, \xi_\nu$, también que*

$$\gamma^\xi = \text{Lím}_\nu\, \gamma^{\xi_\nu}.\text{”}$$

Podemos también, sin embargo, expresar también así el teorema:

C. *“Si $f(\xi)$ es la función de ξ caracterizada en el teorema A, entonces tenemos que*

$$f(\xi) = \delta\gamma^\xi.\text{”}$$

Demostración. Teniendo en cuenta (24) del §14, es fácil convencerse de que la función $\delta\gamma^\xi$ no sólo satisface las condiciones 1), 2) y 3) del teorema A, sino también la condición 4) del mismo. A causa de la unicidad de la función $f(\xi)$, ésta debe por ello ser idéntica a $\delta\gamma^\xi$.

D. *“Si α y β son dos números arbitrarios de la primera o la segunda clase numérica con la inclusión del* 0*, entonces tenemos que*

$$\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^\alpha\gamma^\beta.\text{”}$$

Demostración. Consideramos la función $\varphi(\xi) = \gamma^{\alpha+\xi}$. Teniendo en cuenta que según la fórmula (23) del §14,

$$\text{Lím}_\nu(\alpha + \xi_\nu) = \alpha + \text{Lím}_\nu\, \xi_\nu,$$

reconocemos, que $\varphi(\xi)$ cumple las cuatro siguientes condiciones:

1) $\varphi(0) = \gamma^\alpha$.

2) Si $\xi' < \xi''$, entonces tenemos que $\varphi(\xi') < \varphi(\xi'')$.

3) Para cada valor de ξ se da que $\varphi(\xi+1) = \varphi(\xi)\gamma$.

4) Si $\{\xi_\nu\}$ es una sucesión fundamental tal que $\text{Lím}_\nu\, \xi_\nu = \xi$, entonces se tiene que

$$\varphi(\xi) = \text{Lím}_\nu\, \varphi(\xi_\nu).$$

A partir de aquí, según el teorema C, poniendo $\delta = \gamma^\alpha$,

$$\varphi(\xi) = \gamma^\alpha \gamma^\xi.$$

Si ponemos aquí que $\xi = \beta$, entonces se sigue

$$\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^\alpha \gamma^\beta.$$

E. *"Si α y β son dos números arbitrarios de la primera o la segunda clase numérica con la inclusión del cero, entonces tenemos que*

$$\gamma^{\alpha\beta} = (\gamma^\alpha)^\beta."$$

[**234**] Demostración. Si consideramos la función $\psi(\xi) = \gamma^{\alpha\xi}$ y señalamos que según (24) del §14, siempre se da que $\text{Lím}_\nu\, \alpha\xi_\nu = \alpha\, \text{Lím}_\nu\, \xi_\nu$, entonces podemos afirmar lo siguiente sobre la base del teorema D:

1) $\psi(0) = 1$.

2) Si $\xi' < \xi''$, entonces tenemos que $\psi(\xi') < \psi(\xi'')$.

3) Para cada valor de ξ se da que $\psi(\xi+1) = \psi(\xi)\gamma^\alpha$.

4) Si $\{\xi_\nu\}$ es una sucesión fundamental, entonces también lo es $\{\psi(\xi_\nu)\}$ y se tiene, en el caso de que $\xi = \text{Lím}_\nu\, \xi_\nu$, también que $\psi(\xi) = \text{Lím}_\nu\, \psi(\xi_\nu)$.

A partir de aquí se tiene según el teorema C, si aquí $\delta = 1$, y se pone γ^α por γ,

$$\psi(\xi) = (\gamma^\alpha)^\xi.$$

Sobre la *magnitud* de γ^ξ en comparación con ξ puede expresarse el siguiente teorema:

F. *"Si $\gamma > 1$, entonces se tiene para cada valor de ξ que*

$$\gamma^\xi \geq \xi."$$

Demostración. En los casos $\xi = 0$ y $\xi = 1$ el teorema es inmediatamente evidente. Mostramos ahora que, si es válido para todos los valores de ξ que son menores que un número dado $\alpha > 1$, es también correcto para $\xi = \alpha$.

Si α es del *primer* tipo, entonces tenemos según el supuesto que

$$\alpha_{-1} \leq \gamma^{\alpha_{-1}},$$

por lo que también

$$\alpha_{-1}\gamma \leq \gamma^{\alpha_{-1}}\gamma = \gamma^\alpha,$$

con lo que

$$\gamma^\alpha \geq \alpha_{-1} + \alpha_{-1}(\gamma - 1) = \alpha_{-1}\gamma.$$

Puesto que tanto α_{-1} como $\gamma - 1$ son al menos $= 1$ y tenemos que $\alpha_{-1} + 1 = \alpha$, entonces se sigue que

$$\gamma^\alpha \geq \alpha.$$

Si por el contrario α es del *segundo* tipo y ciertamente

$$\alpha = \text{Lím}_\nu\, \alpha_\nu,$$

entonces tenemos, a causa de que $\alpha_\nu < \alpha$, de acuerdo con el supuesto, que

$$\alpha_\nu \leq \gamma^{\alpha_\nu},$$

de aquí también que

$$\text{Lím}_\nu\, \alpha_\nu \leq \text{Lím}_\nu\, \gamma^{\alpha_\nu},$$

i.e., que

$$\alpha \leq \gamma^{\alpha}.$$

Ahora, si hubiera valores de ξ, para los cuales

$$\xi > \gamma^{\xi},$$

entonces, [uno] de entre ellos, según el teorema B del §16, debería ser el *mínimo*; si éste es denotado con α, entonces se tendría para $\xi < \alpha$, que

[235]

$$\xi \leq \gamma^{\xi},$$

pero

$$\alpha > \gamma^{\alpha},$$

lo que contradice lo demostrado previamente. Con esto tenemos para todos los valores de ξ que

$$\gamma^{\xi} \geq \xi.$$

§19

La forma normal de los números de la segunda clase numérica.

Sea α un número cualquiera de la segunda clase numérica. La potencia ω^{ξ} será para valores lo suficientemente grandes de ξ mayor que α. Esto, según el teorema F del §18 es siempre el caso para $\xi > \alpha$, pero en general ocurrirá también ahora para valores menores de ξ.

Según el teorema B del §16, entre los valores de ξ, para los cuales tenemos que

$$\omega^{\xi} > \alpha,$$

uno deberá ser el *mínimo*; le llamamos β y nos convencemos fácilmente de que *no* puede ser un número de la *segunda* clase numérica. Si tuviéramos, por ejemplo,

$$\beta = \operatorname*{Lím}_{\nu} \beta_{\nu},$$

entonces se tendría, puesto que $\beta_{\nu} < \beta$,

$$\omega^{\beta_{\nu}} \leq \alpha,$$

de aquí también

$$\operatorname*{Lím}_{\nu} \omega^{\beta_{\nu}} \leq \alpha.$$

Tendríamos por lo tanto

$$\omega^{\beta} \leq \alpha,$$

mientras que, a pesar de todo, deberíamos tener que

$$\omega^{\beta} > \alpha.$$

Por lo tanto β es del primer tipo. Denotamos a β_{-1} con α_0, y podemos afirmar por ello *que hay un número completamente determinado α_0 de la primera o la segunda clase numérica, que cumple las dos condiciones*

$$\omega^{\alpha_0} \leq \alpha, \quad \omega^{\alpha_0}\omega > \alpha. \tag{1}$$

De la segunda condición concluimos que *no para todos los valores finitos de ν puede ser que*

$$\omega^{\alpha_0}\nu \leq \alpha,$$

pues en caso contrario tendríamos también que $\operatorname{Lím}_{\nu} \omega^{\alpha_0}\nu = \omega^{\alpha_0}\omega \leq \alpha$.

El *número mínimo finito ν*, para el cual

$$\omega^{\alpha_0}\nu > \alpha,$$

lo denotamos con $\kappa_0 + 1$. A causa de (1), tenemos que $\kappa_0 > 0$.

[236] *Hay por lo tanto también un número completamente determinado κ_0 de la primera clase numérica*, tal que

$$\omega^{\alpha_0}\kappa_0 \leq \alpha, \quad \omega^{\alpha_0}(\kappa_0+1) > \alpha. \tag{2}$$

Ponemos que $\alpha - \omega^{\alpha_0}\kappa_0 = \alpha'$, entonces tenemos que

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\kappa_0 + \alpha' \tag{3}$$

y que

$$0 \leq \alpha' < \omega^{\alpha_0}, \quad 0 < \kappa_0 < \omega. \tag{4}$$

Sin embargo, α se puede representar de *un único* modo bajo las condiciones (4) en la forma (3). Pues de (3) y (4) se siguen retroactivamente en primer lugar las condiciones (2) y de ahí las condiciones (1).

Las condiciones (1) las satisface sólo el número $\alpha_0 = \beta_{-1}$, y por medio de las condiciones (2) el número finito κ_0 está unívocamente determinado. De (1) y (4) se sigue tomando en consideración el teorema F del §18, que

$$\alpha' < \alpha, \quad \alpha_0 \leq \alpha.$$

Podemos por ello afirmar la corrección del siguiente teorema:

A. *"Cada número α de la segunda clase numérica se puede, y ciertamente de un único modo, llevar a la forma*

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\kappa_0 + \alpha',$$

de tal modo que

$$0 \leq \alpha' < \omega^{\alpha_0}, \quad 0 < \kappa_0 < \omega;$$

α' es siempre menor que α, por el contrario α_0 es menor o igual que α."

Si α' es un número de la *segunda* clase numérica, entonces se le puede aplicar el teorema A y tenemos

$$\alpha' = \omega^{\alpha_1}\kappa_1 + \alpha'', \tag{5}$$

$$0 \leq \alpha'' < \omega^{\alpha_1}, \quad 0 < \kappa_1 < \omega,$$

y tenemos que

$$\alpha_1 < \alpha_0, \quad \alpha'' < \alpha'.$$ [N.Z.25]

En general obtenemos una sucesión adicional de ecuaciones análogas

$$\alpha'' = \omega^{\alpha_2}\kappa_2 + \alpha''', \tag{6}$$

$$\alpha''' = \omega^{\alpha_3}\kappa_3 + \alpha^{\mathrm{IV}}. \tag{7}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Sin embargo, esta sucesión no puede ser infinita, debe interrumpirse necesariamente. Pues los números α, α', α'' decrecen en magnitud, esto es,

$$\alpha > \alpha' > \alpha'' > \alpha''' \cdots.$$

Si una sucesión de números transfinitos descendente [decreciente] fuera infinita, entonces ningún miembro de la misma sería el mínimo; esto es según el teorema B del §16 imposible. Por ello debe darse para un cierto valor numérico *finito* τ que

$$\alpha^{(\tau+1)} = 0.$$

[237] Si combinamos ahora las ecuaciones (3),(5), (6) y (7) entre sí, obtenemos el teorema:

B. *"Cada número α de la segunda clase numérica se puede, y por cierto sólo en un único modo, representar en la forma*

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\kappa_0 + \omega^{\alpha_1}\kappa_1 + \cdots + \omega^{\alpha_\tau}\kappa_\tau,$$

donde α_0*,* α_1*,...,* α_τ *son números de la primera o la segunda clase numérica, que satisfacen las condiciones*

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_\tau \geq 0,$$

mientras que κ_0*,* κ_1*, ...,* κ_τ*,* $\tau + 1$ *son números de la primera o segunda clase numérica diferentes de cero."*

La forma demostrada aquí de los números de la segunda clase numérica queremos denominarla su *forma normal*; llámese α_0 el *'grado'*, y α_τ el *'exponente'* de α; en el caso de $\tau = 0$ el grado y el exponente son iguales entre sí.

Según que el exponente α_τ *sea igual o mayor que* 0*,* α *es un número del primer o el segundo tipo.*

Tomamos ahora otro número β en la forma normal

$$\beta = \omega^{\beta_0}\lambda_0 + \omega^{\beta_1}\lambda_1 + \cdots + \omega^{\beta_\sigma}\lambda_\sigma. \tag{8}$$

Tanto para la comparación de α con β como también para la realización de su suma y diferencia sirven las fórmulas

$$\omega^{\alpha'}\kappa' + \omega^{\alpha'}\kappa = \omega^{\alpha'}(\kappa' + \kappa), \tag{9}$$

$$\omega^{\alpha'}\kappa' + \omega^{\alpha''}\kappa'' = \omega^{\alpha''}\kappa'', \text{ para } \alpha' < \alpha''. \tag{10}$$

κ, κ', κ'' tienen aquí la significación de números finitos.

Son éstas generalizaciones de las fórmulas (3) y (2) del §17.

Para la formación del producto $\alpha\beta$ entran en consideración las siguientes fórmulas:

$$\alpha\lambda = \omega^{\alpha_0}\kappa_0\lambda + \omega^{\alpha_1}\kappa_1 + \cdots + \omega^{\alpha_\tau}\kappa_\tau, \quad 0 < \lambda < \omega; \tag{11}$$

$$\alpha\omega = \omega^{\alpha_0+1}; \tag{12}$$

$$\alpha\omega^{\beta'} = \omega^{\alpha_0+\beta'}, \quad \beta' > 0. \tag{13}$$

La exponenciación α^β es fácilmente realizable sobre la base de las siguientes fórmulas:

$$\alpha^\lambda = \omega^{\alpha_0\lambda}\kappa_0 + \cdots, \quad 0 < \lambda < \omega. \tag{14}$$

Los miembros que se van añadiendo a la derecha tienen un grado inferior que el primero. De aquí se sigue fácilmente que las sucesiones fundamentales $\{\alpha^\lambda\}$ y $\{\omega^{\alpha_0\lambda}\}$ son congéneres, de tal manera que

$$\alpha^\omega = \omega^{\alpha_0\omega}, \quad \alpha_0 > 0. \tag{15}$$

A partir de aquí se tiene también como consecuencia del teorema E del §18:

$$\alpha^{\omega^{\beta'}} = \omega^{\alpha_0\omega^{\beta'}}, \quad \alpha_0 > 0, \quad \beta' > 0. \tag{16}$$

Con la ayuda de estas fórmulas se pueden demostrar los siguientes teoremas:

[238] C. *"Si los primeros miembros* $\omega^{\alpha_0}\kappa_0$*,* $\omega^{\beta_0}\lambda_0$ *de la forma normal de dos números* α *y* β *no son iguales, entonces es* α *menor o mayor que* β*, según que* $\omega^{\alpha_0}\kappa_0$ *sea menor o mayor que* $\omega^{\beta_0}\lambda_0$*. Sin embargo, si se tiene que*

$$\omega^{\alpha_0}\kappa_0 = \omega^{\beta_0}\lambda_0, \quad \omega^{\alpha_1}\kappa_1 = \omega^{\beta_1}\lambda_1, \ldots \quad \omega^{\alpha_\rho}\kappa_\rho = \omega^{\beta_\rho}\lambda_\rho,$$

y $\omega^{\alpha_{\rho+1}}\kappa_{\rho+1}$ *es menor o mayor que* $\omega^{\beta_{\rho+1}}\lambda_{\rho+1}$*, entonces es también* α *respectivamente menor o mayor que* β*."*

D. *"Si el grado* α_0 *de* α *es menor que el grado* β_0 *de* β*, entonces tenemos que*

$$\alpha + \beta = \beta.$$

Si $\alpha_0 = \beta_0$*, entonces tenemos que*

$$\alpha + \beta = \omega^{\beta_0}(\kappa_0 + \lambda_0) + \omega^{\beta_1}\lambda_1 + \cdots + \omega^{\beta_\sigma}\lambda_\sigma.$$

Si tenemos, sin embargo, que

$$\alpha_0 > \beta_0, \quad \alpha_1 > \beta_0, \ldots, \quad \alpha_\rho \geq \beta_0, \quad \alpha_{\rho+1} < \beta_0,$$

entonces tenemos que

$$\alpha+\beta=\omega^{\alpha_0}\kappa_0+\cdots+\omega^{\alpha_\rho}\kappa_\rho+\omega^{\beta_0}\lambda_0+\omega^{\beta_1}\lambda_1+\cdots+\omega^{\beta_\sigma}\lambda_\sigma.\text{”}$$

E. *“Si β es del segundo tipo ($\beta_\sigma>0$), entonces tenemos que*

$$\alpha\beta=\omega^{\alpha_0+\beta_0}\lambda_0+\omega^{\alpha_0+\beta_1}\lambda_1+\cdots+\omega^{\alpha_0+\beta_\sigma}\lambda_\sigma=\omega^{\alpha_0}\beta;$$

sin embargo, si β es del primer tipo, ($\beta_\sigma=0$), entonces tenemos que

$$\alpha\beta=\omega^{\alpha_0+\beta_0}\lambda_0+\omega^{\alpha_0+\beta_1}\lambda_1+\cdots+\omega^{\alpha_0+\beta_{\sigma-1}}\lambda_{\sigma-1}+\omega^{\alpha_0}\kappa_0\lambda_\sigma+\omega^{\alpha_1}\kappa_1+\cdots+\omega^{\alpha_\tau}\kappa_\tau.\text{”}$$

F. *“Si β es del segundo tipo ($\beta_\sigma>0$), entonces tenemos*

$$\alpha^\beta=\omega^{\alpha_0\beta};$$

sin embargo, si β es del primer tipo ($\beta_\sigma=0$) y por ejemplo $\beta=\beta'+\lambda_\sigma$, donde β' es del segundo tipo, entonces se tiene

$$\alpha^\beta=\omega^{\alpha_0\beta'}\alpha^{\lambda_0}.\text{”}$$

G. *“Cada número α de la segunda clase numérica puede, y ciertamente de un único modo, representarse en la forma de producto*

$$\alpha=\omega^{\gamma_0}\kappa_\tau(\omega^{\gamma_1}+1)\kappa_{\tau-1}(\omega^{\gamma_2}+1)\kappa_{\tau-2}\cdots(\omega^{\gamma_\tau}+1)\kappa_0,$$

y tenemos que

$$\gamma_0=\alpha_\tau,\quad \gamma_1=\alpha_{\tau-1}-\alpha_\tau,\quad \gamma_2=\alpha_{\tau-2}-\alpha_{\tau-1},\ldots,\quad \gamma_\tau=\alpha_0-\alpha_1,$$

mientras que κ_0, κ_1, …, κ_τ tienen la misma significación que en la forma normal. Los factores $\omega^\gamma+1$ son todos primos.”

H. *“Cada número α del segundo tipo perteneciente a la segunda clase numérica puede, y ciertamente de un único modo, representarse en [bajo] la forma*

$$\alpha=\omega^{\gamma_0}\alpha',$$

donde $\gamma_0>0$ y α' es un número del primer tipo perteneciente a la primera o a la segunda clase numérica.”

[239] J. *“ Para que dos números α y β de la segunda clase numérica cumplan la relación*

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha,$$

es necesario y suficientes, que tengan la forma

$$\alpha=\gamma\mu,\quad \beta=\gamma\nu,$$

donde μ y ν son números de la primera clase numérica.”

K. *“Para que dos números α y β de la segunda clase numérica, los cuales son ambos del primer tipo, cumplan la relación*

$$\alpha\beta=\beta\alpha,$$

es necesario y suficiente, que tengan la forma

$$\alpha=\gamma^\mu,\quad \beta=\gamma^\nu,$$

donde μ y ν son números de la primera clase numérica.”

Para ejemplificar la transcendencia de la *forma normal* de los números de la segunda clase numérica demostrada y de la *forma de producto* directamente relacionada con ella, pueden seguir aquí las demostraciones que se basan en ellas de los dos últimos teoremas J y K.

Del supuesto

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$

concluimos en primer lugar, que el grado α_0 de α debe ser igual al grado β_0 de β. Pues si por ejemplo fuera $\alpha_0 < \beta_0$, entonces se tendría (según el teorema D) que

$$\alpha + \beta = \beta,$$

y de ahí también que

$$\beta + \alpha = \beta,$$

lo cual no es posible, pues según (2) del §14,

$$\beta + \alpha > \beta.$$

Podemos por ello poner que

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\mu + \alpha', \quad \beta = \omega^{\alpha_0}\nu + \beta',$$

donde los grados de los números α' y β' son menores que α_0, y μ y ν son números finitos diferentes de 0.

Según el teorema D tenemos ahora que

$$\alpha + \beta = \omega^{\alpha_0}(\mu + \nu) + \beta', \quad \beta + \alpha = \omega^{\alpha_0}(\mu + \nu) + \alpha',$$

por lo tanto,

$$\omega^{\alpha_0}(\mu + \nu) + \beta' = \omega^{\alpha_0}(\mu + \nu) + \alpha'.$$

A causa del teorema D del §14 tenemos por ello que

$$\beta' = \alpha'.$$

Con lo que tenemos que

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\mu + \alpha', \quad \beta = \omega^{\alpha_0}\nu + \alpha',$$

[240] y si se pone

$$\omega^{\alpha_0} + \alpha' = \gamma,$$

entonces, por (11),

$$\alpha = \gamma\mu, \quad \beta = \gamma\nu.$$

Suponemos por otra parte [N.Z.26] dos números α y β del *primer tipo* pertenecientes a la segunda clase numérica, que cumplen la condición

$$\alpha\beta = \beta\alpha,$$

y suponemos que

$$\alpha > \beta.$$

Nos representamos según el teorema G a ambos números en su forma de producto y sea

$$\alpha = \delta\alpha', \quad \beta = \delta\beta'$$

donde α' y β' no tendrían (además de 1) ningún factor final común a la izquierda.

Se tiene entonces que

$$\alpha' > \beta',$$

y

$$\alpha'\delta\beta' = \beta'\delta\alpha'.$$

Todos los números que ocurren aquí y en los que sigue son del *primer tipo*, porque esto quedó supuesto por α y β.

La última ecuación permite reconocer en primer lugar (teniendo en consideración el teorema G), que α' y β' *no pueden ser ambos transfinitos*, porque en ese caso conllevarían un factor final a la izquierda común. *Tampoco pueden ser ambos finitos*; pues δ sería entonces transfinito y, si κ es el último factor final a la izquierda, entonces debería tenerse que

$$\alpha'\kappa = \beta'\kappa,$$

y por lo tanto también que

$$\alpha' = \beta'.$$

Queda sólo la posibilidad de que

$$\alpha' > \omega, \quad \beta' < \omega.$$

El número finito β' debe sin embargo ser 1:

$$\beta' = 1,$$

porque en caso contrario estaría contenido como parte en el último factor final a la izquierda de α'.

Llegamos al resultado, que $\beta = \delta$, y en consecuencia

$$\alpha = \beta\alpha',$$

donde α' es un número del primer tipo perteneciente a la segunda clase numérica, que debe ser menor que α:

$$\alpha' < \alpha, \text{ [porque tenemos que } \beta\alpha = \alpha\beta > \alpha].$$

Entre α' y β se mantiene [subsiste] la relación

$$\alpha'\beta = \beta\alpha'.$$

[241] Por consiguiente si también $\alpha' > \beta$, entonces se concluye de la misma manera la existencia de un número transfinito del *primer tipo* $\alpha'' < \alpha'$, tal que

$$\alpha' = \beta\alpha'', \quad \alpha''\beta = \beta\alpha''.$$

Si también α'' fuera aún $> \beta$, entonces hay un número $\alpha''' < \alpha''$, tal que

$$\alpha'' = \beta\alpha''', \quad \alpha'''\beta = \beta\alpha''',$$

etc.

La sucesión de números descendentes [decrecientes] α, α', α'', α''', ... debe *interrumpirse* según el teorema B del §16. Por ello se tendrá para un determinado índice finito ρ_0 que

$$\alpha^{(\rho_0)} \leq \beta.$$

Si se tiene que

$$\alpha^{(\rho_0)} = \beta,$$

entonces se tiene que

$$\alpha = \beta^{\rho_0+1}, \quad \beta = \beta;$$

el teorema K estaría entonces demostrado, y se tendría que

$$\gamma = \beta, \quad \mu = \rho_0 + 1, \quad \nu = 1.$$

Pero si se tiene que

$$\alpha^{(\rho_0)} < \beta,$$

entonces ponemos

$$\alpha^{(\rho_0)} = \beta_1,$$

y tenemos que

$$\alpha = \beta^{\rho_0}\beta_1, \quad \beta\beta_1 = \beta_1\beta, \quad \beta_1 < \beta.$$

Por ello hay también un número finito ρ_1 tal que

$$\beta = \beta_1^{\rho_1}\beta_2, \quad \beta_1\beta_2 = \beta_2\beta_1, \quad \beta_2 < \beta_1.$$

En general se tiene, de manera análoga,

$$\beta_1 = \beta_2^{\rho_2}\beta_3, \quad \beta_2\beta_3 = \beta_3\beta_2, \quad \beta_3 < \beta_2$$

etc. También la sucesión de números descendentes [decrecientes] β_1, β_2, β_3,... debe *interrumpirse* según el teorema B del §16. Existe por ello un número finito κ, tal que

$$\beta_{\kappa-1} = \beta_\kappa^{\rho_\kappa}.$$

Ponemos

$$\beta_\kappa = \gamma,$$

entonces tenemos que

$$\alpha = \gamma^\mu, \quad \beta = \gamma^\nu,$$

donde μ y ν son numerador y denominador de la fracción continuada:

$$\frac{\mu}{\nu} = \rho_0 + \cfrac{1}{\rho_1 + \ddots + \cfrac{1}{\rho_\kappa}}$$

[242] §20

Los ε-números de la segunda clase numérica. [N.Z.27]

Comentario. [N.T.55] El primero de los números ordinales que se definen en esta sección es el que mide la complejidad de la aritmética.

El grado α_0 de un número α, como es inmediatamente evidente a partir de la forma normal

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\kappa_0 + \omega^{\alpha_1}\kappa_1 + \cdots, \quad \alpha_0 > \alpha_1 > \cdots, \quad 0 < \kappa_\nu < \omega \tag{1}$$

teniendo en cuenta el teorema F del §18, no es nunca mayor que α; se pregunta, sin embargo, si no hay números α para los cuales se dé que $\alpha_0 = \alpha$.

En un tal caso la forma normal de α debería reducirse al primer miembro [término], y éste debería ser $= \omega^\alpha$ [porque en caso contrario tendríamos que $\alpha = \omega^\alpha\kappa_0 + \omega^{\alpha_1}\kappa_1 \cdots > \omega^\alpha$], i.e., α debería ser una raíz de la ecuación

$$\omega^\xi = \xi. \tag{2}$$

Por otra parte, cada raíz α de esta ecuación tendría la forma normal ω^α; su grado sería igual a sí mismo.

Los números de la segunda clase numérica que son iguales a su grado, coinciden[, por consiguiente,] por completo con las raíces de la ecuación (2). Nuestra tarea es [Nuestro problema es el de] determinar estas raíces en su totalidad. Para diferenciarlas de todos los demás números, las denominamos los *"ε-números de la segunda clase numérica"*.

Sin embargo, que hay tales ε-números resulta del siguiente teorema:

A. *"Si γ es cualquier número de la primera o la segunda clase numérica que no satisface la ecuación (2), entonces éste determina una sucesión fundamental $\{\gamma_\nu\}$ por medio de las ecuaciones*

$$\gamma_1 = \omega^\gamma, \quad \gamma_2 = \omega^{\gamma_1}, \ldots, \quad \gamma_\nu = \omega^{\gamma_{\nu-1}}, \ldots.$$

El límite $\text{Lím}_\nu\, \gamma_\nu = \text{E}(\gamma)$ *de esta sucesión fundamental es siempre un ε-número."*

Demostración. Puesto que γ no es un ε-número, entonces $\omega^\gamma > \gamma$, i.e., $\gamma_1 > \gamma$. Por ello, según el teorema B del §18, también $\omega^{\gamma_1} > \omega^\gamma$, i.e., $\gamma_2 > \gamma_1$, y de la misma manera se sigue que $\gamma_3 > \gamma_2$, etc. La sucesión $\{\gamma_\nu\}$ es por lo tanto una sucesión fundamental. Su límite, que es una función de γ, lo denominamos [denotamos por] $\text{E}(\gamma)$ y tenemos que

$$\omega^{\text{E}(\gamma)} = \text{Lím}_\nu\, \omega^{\gamma_\nu} = \text{Lím}_\nu\, \gamma_{\nu+1} = \text{E}(\gamma).$$

$\text{E}(\gamma)$ es por ello un ε-número.

B. *“El número* $\varepsilon_0 = \mathrm{E}(1) = \mathrm{Lím}_\nu\, \omega_\nu$, *donde*

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = \omega^{\omega_1}, \quad \omega_3 = \omega^{\omega_2}, \ldots, \quad \omega_\nu = \omega^{\omega_{\nu-1}}, \ldots$$

es el mínimo de todos los ε*-números.”*

[243] Demostración. Sea ε' un ε-número cualquiera, de tal modo que

$$\omega^{\varepsilon'} = \varepsilon'.$$

Puesto que $\varepsilon' > \omega$, entonces $\omega^{\varepsilon'} > \omega^\omega$, i.e., $\varepsilon' > \omega_1$. De aquí se sigue igualmente que $\omega^{\varepsilon'} > \omega^{\omega_1}$, i.e., que $\varepsilon' > \omega_2$, etc.

Tenemos en general que

$$\varepsilon' > \omega_\nu,$$

y por ello que

$$\varepsilon' \geq \mathrm{Lím}_\nu\, \omega_\nu,$$

i.e., que

$$\varepsilon' \geq \varepsilon_0.$$

Por lo tanto, $\varepsilon_0 = \mathrm{E}(1)$ es el mínimo de todos los ε-números.

C. *“Si* ε' *es cualquier* ε*-número,* ε'' *el siguiente* ε*-número en magnitud, y* γ *cualquier número situado entre ambos*

$$\varepsilon' < \gamma < \varepsilon'',$$

entonces $\mathrm{E}(\gamma) = \varepsilon''$.”

Demostración. De

$$\varepsilon' < \gamma < \varepsilon''$$

se sigue que

$$\omega^{\varepsilon'} < \omega^\gamma < \omega^{\varepsilon''},$$

i.e., que

$$\varepsilon' < \gamma_1 < \varepsilon''.$$

De aquí concluimos igualmente que

$$\varepsilon' < \gamma_2 < \varepsilon''$$

etc. Tenemos, en general, que

$$\varepsilon' < \gamma_\nu < \varepsilon'',$$

por lo que

$$\varepsilon' < \mathrm{E}(\gamma) \leq \varepsilon''.$$

$\mathrm{E}(\gamma)$ es, según el teorema A, un ε-número. Puesto que ε'' es el ε-número que sigue en magnitud a ε', entonces no puede darse que $\mathrm{E}(\gamma) < \varepsilon''$, y por lo tanto debe darse que

$$\mathrm{E}(\gamma) = \varepsilon''.$$

Puesto que $\varepsilon + 1$ ya en principio no es ningún ε-número, [simplemente] porque todos los ε-números, como se sigue de la ecuación definitoria $\xi = \omega^\xi$, son del *segundo tipo*, entonces $\varepsilon' + 1$ es con seguridad menor que ε'', y tenemos por ello el siguiente teorema:

D. *“Si* ε' *es un* ε*-número cualquiera, entonces* $\mathrm{E}(\varepsilon' + 1)$ *es el* ε*-número inmediatamente siguiente en magnitud.”*

Al mínimo ε-número ε_0 le sigue por lo tanto el inmediatamente siguiente, que denominamos ε_1,

$$\varepsilon_1 = \mathrm{E}(\varepsilon_0 + 1),$$

[244] y a éste el inmediatamente mayor

$$\varepsilon_2 = \mathrm{E}(\varepsilon_1 + 1)$$

etc.

En general tenemos para el ε-número $(\nu + 1)$-ésimo en magnitud la fórmula recursiva

$$\varepsilon_\nu = \mathrm{E}(\varepsilon_{\nu-1} + 1). \tag{3}$$

Que sin embargo la sucesión infinita

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1, \ldots,\ \varepsilon_\nu, \ldots$$

no abarca en modo alguno [a] la totalidad de los ε-números, resulta del siguiente teorema:

E. *"Si ε, ε', ε'',... es cualquier sucesión infinita de ε-números tal que*

$$\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon'' \cdots \varepsilon^{(\nu)} < \varepsilon^{(\nu+1)} < \cdots,$$

entonces también $\mathrm{Lím}_\nu\, \varepsilon^{(\nu)}$ *es un ε-número, y en particular [de hecho], el ε-número inmediatamente siguiente en magnitud a todos los $\varepsilon^{(\nu)}$."*

Demostración.

$$\omega^{\mathrm{Lím}_\nu\, \varepsilon^{(\nu)}} = \mathop{\mathrm{Lím}}_{\nu} \omega^{\varepsilon^{(\nu)}} = \mathop{\mathrm{Lím}}_{\nu} \varepsilon^{(\nu)}.$$

Que sin embargo $\mathrm{Lím}_\nu\, \varepsilon^{(\nu)}$ es el ε-número *inmediatamente siguiente* en magnitud a todos los $\varepsilon^{(\nu)}$ resulta [del hecho] de que $\mathrm{Lím}_\nu\, \varepsilon^{(\nu)}$ es el *número de la segunda clase numérica inmediatamente siguiente* en magnitud a todos los $\varepsilon^{(\nu)}$.

F. *"La totalidad de los ε-números de la segunda clase numérica forma, en su ordenación por magnitud, un conjunto bien ordenado del tipo Ω de la segunda clase numérica, considerada en su ordenación por magnitud, y tiene por ello la potencia aleph-uno."*

Demostración. La totalidad de los ε-números de la segunda clase numérica forma, según el teorema C del §16, un conjunto bien ordenado en su ordenación por magnitud

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1, \ldots,\ \varepsilon_\nu, \ldots\ \varepsilon_\omega, \varepsilon_{\omega+1}, \ldots\ \varepsilon_{\alpha'}, \ldots, \tag{4}$$

cuya ley de formación está expresada en los teoremas D y E.

Ahora bien, si el índice α' no recorriera todos los números de la segunda clase numérica, entonces debería haber un número mínimo α, al que éste no alcanzara. Pero esto contradiría el teorema D, si α fuera del primer tipo, y al teorema E, si α fuera del segundo tipo. Se le suponen por ello a [Luego] α' [toma] todos los valores numéricos de la segunda clase numérica.

Si denotamos el tipo de la segunda clase numérica con Ω, entonces el tipo de (4) es

$$\omega + \Omega = \omega + \omega^2 + (\Omega - \omega^2);$$

[245] pero puesto que $\omega + \omega^2 = \omega^2$, entonces se sigue de aquí que

$$\omega + \Omega = \Omega.$$

Por ello tenemos también que

$$\overline{\omega + \Omega} = \overline{\Omega} = \aleph_1.$$

G. *"Si ε es cualquier ε-número y α un número arbitrario de la primera o la segunda clase numérica que es menor que ε:*

$$\alpha < \varepsilon,$$

entonces ε satisface [a] las tres ecuaciones

$$\alpha + \varepsilon = \varepsilon, \quad \alpha\varepsilon = \varepsilon, \quad \alpha^\varepsilon = \varepsilon."$$

Demostración. Si α_0 es el grado de α, entonces $\alpha_0 \leq \alpha$, y por ello, dado que $\alpha < \varepsilon$, también $\alpha_0 < \varepsilon$. El grado de $\varepsilon = \omega^\varepsilon$ es sin embargo ε; α tiene por lo tanto un grado menor que ε, con lo que, según el teorema D del §19,

$$\alpha + \varepsilon = \varepsilon,$$

por lo que también
$$\alpha_0 + \varepsilon = \varepsilon.$$
Por otra parte, tenemos, según la fórmula (13) del §19, que
$$\alpha\varepsilon = \alpha\omega^{\varepsilon} = \omega^{\alpha_0+\varepsilon} = \omega^{\varepsilon} = \varepsilon,$$
y por lo tanto también que
$$\alpha_0\varepsilon = \varepsilon.$$
Por último, tenemos, considerando la fórmula (16) del §19, que
$$\alpha^{\varepsilon} = \alpha^{\omega^{\varepsilon}} = \omega^{\alpha_0\omega^{\varepsilon}} = \omega^{\alpha_0\varepsilon} = \omega^{\varepsilon} = \varepsilon.$$

H. *"Si α es un número cualquiera de la segunda clase numérica, entonces la ecuación*
$$\alpha^{\xi} = \xi$$
no tiene otras raíces que los ε-números que son mayores que α."

Demostración. Sea β una raíz de la ecuación
$$\alpha^{\xi} = \xi,$$
por lo tanto
$$\alpha^{\beta} = \beta,$$
luego se sigue inmediatamente de esta fórmula que
$$\beta > \alpha.$$
Por otra parte, β debe ser del segundo tipo, puesto que en caso contrario tendríamos que
$$[\alpha^{\beta} = \alpha^{\beta'+1} = \alpha^{\beta'}\alpha > \alpha^{\beta'}2 \geq \beta'2 \geq \beta' + 1 = \beta, \text{ i.e., que}]$$
$$\alpha^{\beta} > \beta.$$
Tenemos por ello según el teorema F del §19, que
$$\alpha^{\beta} = \omega^{\alpha_0\beta},$$
con lo que
$$\omega^{\alpha_0\beta} = \beta.$$

[246] Tenemos, según el teorema F del §18, que
$$\omega^{\alpha_0\beta} \geq \alpha_0\beta,$$
por ello
$$\beta \geq \alpha_0\beta.$$
Pero no puede ser que $\beta > \alpha_0\beta$; por ello tenemos que
$$\alpha_0\beta = \beta,$$
y con ello que
$$\omega^{\beta} = \beta.$$
luego β es un ε-número que es mayor que α.

Halle, Marzo de 1897.

[**Notas de Zermelo**.]

El trabajo precedente, que apareció en dos partes con [una distancia] entre ellas de dos años, la última publicación de Cantor sobre la teoría de los conjuntos, es el verdadero cierre de su obra. En él, los conceptos fundamentales y las ideas, después de haberse desarrollado paulatinamente en el curso de decenios, obtienen su versión definitiva, y muchos teoremas principales de la teoría de conjuntos “general” encuentran aquí por primera vez su fundamentación clásica. Aparte de algunas imperfecciones y obscuridades en la fundamentación, que señalaremos en detalle, sólo podemos lamentar muy vivamente que Cantor, como consecuencia de problemas de salud y dificultades objetivas, no pudiera continuar el trabajo en el modo previsto, de tal modo que esta última publicación así como el trabajo Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten sobre conjuntos de puntos [multiplicidades puntuales] en cierto modo han quedado en esbozo. Como en éste, permaneció inalcanzada la meta buscada, la demostración de que el continuo tiene la segunda potencia, aquí falta también aún la demostración que constituye el verdadero colofón de la doctrina [teoría] de la[s] potencia[s], que todo conjunto [es] susceptible de una buena ordenación, y por lo tanto [que] toda potencia es un Aleph.

[N.Z.1] Pág. **[481]**. Por “subconjunto” entiende Cantor aquí sólo un subconjunto *propio*, diferente del conjunto mismo. También la definición del “conjunto unión” está aquí limitada (innecesariamente) al caso de conjuntos de elementos ajenos [disjuntos] entre sí (exclusivamente) en contraposición a la anteriormente introducida (p. 145) de ”mínimo común múltiplo”.

El intento de explicar el proceso de abstracción que lleva al “número cardinal” comprendiendo el número cardinal como “un conjunto compuesto de solas unidades” no fue afortunado. Pues las unidades, como no puede ser de otro modo, son todas *diferentes* entre sí, no pueden servir justamente como los elementos de un nuevo conjunto y equivalente con el primero, y en la abstracción requerida ahora no hemos avanzado ningún [ni un sólo] paso.

[N.Z.2] Pág. **[484]**, teorema B. Aquí tenemos en la formulación más clara el llamado “teorema de equivalencia”, que hoy tras su demostración por F. Bernstein y otros constituye uno de los más importantes y básicos teoremas principales de la teoría general de conjuntos. Cf. F. Hausdorff, Grundz. d. Mengenl. cap. III, §2. Aquí aparece este fundamental teorema como consecuencia del teorema más general A, que afirma la “comparabilidad” de cualesquiera potencias, pero, como hoy sabemos, bastante menos básico, sólo puede ser demostrado con la ayuda de la buena ordenación. Entre las restantes “consecuencias” aquí introducidas, el teorema es prácticamente igual en su significación a B y ha sido demostrado muchas veces *antes* que éste, mientras que D y E hacen uso de la “comparabilidad” general.

[N.Z.3] Pág. **[486]** §4, Subteorema 1. Por “recubrimiento” de un conjunto N con elementos de M entiende Cantor por lo tanto una función $m = f(n)$ cuyo “dominio de variabilidad” está formado por el conjunto N y su “[provisión] de valores” [está formado por el conjunto M], o dicho de otro modo, una aplicación unívoca (aunque no inversamente unívoca) del conjunto N en una parte (propia o impropia) de M.

[N.Z.4] §5, pág. **[489]**. La teoría aquí desarrollada de los números cardinales *finitos* (como también la teoría que sigue en el §6 del número cardinal Aleph-cero es, medida con el patrón moderno, menos satisfactoria, pues a los fundamentos necesarios de una tal teoría les falta aún una *definición* conceptual precisa de los conjuntos finitos, y sólo puede lograrse en un nivel más elevado [superior] de la teoría general, p. ej., con la ayuda de la buena ordenación. Así, p. ej., se hace uso en la pág. **[490]** de la ley de la “inducción completa”, sin que se hubiera fundamentado antes la validez de esta ley. Esta ley es usada por otros, como p. ej., por G. Peano, correctamente para la *definición* de la sucesión numérica.

[N.Z.5] §6, pág. [**492**]. Puesto que el "mínimo número cardinal transfinito" es definido aquí por medio de la "totalidad de los números cardinales finitos", sin que éstos fueran (en el §5) definidos satisfactoriamente, falta también aquí la verdadera base conceptual de la teoría. Y sin embargo basta con definir el número cardinal de que se trata por medio de *la sección mínima de un conjunto bien ordenado* (transfinito) *que no posee ningún último elemento.* A ello, claro está, debería precederle una *teoría general de los conjuntos bien ordenados.* Las afirmaciones de este (como de los previos) parágrafos [padecen] visiblemente en el orden elegido, según el cual lo (aparentemente) más básico también debería haber sido tratado antes, mientras que a pesar de todo justamente requieren de la teoría *general* para su fundamentación.

[N.Z.6] Pág. [**493**]. La "demostración" del teorema A, que es puramente insatisfactoria intuitiva y lógicamente, recuerda al conocido intento primitivo, de alcanzar la *buena ordenación* de un conjunto dado por medio de la extracción sucesiva de elementos arbitrarios. Para una demostración correcta obtenemos primero, si partimos de un conjunto ya *bien ordenado*, de su mínima sección transfinita que entonces posee de hecho el número cardinal $\aleph_0$ requerido.

[N.Z.7] Pág. [**494**]. Para la demostración de la fórmula (8) cf. la construcción correspondiente para la demostración del teorema C′ en el trabajo III 2 en la pág. 131-132 y la corriente explicación del editor en la p. 133.

[N.Z.8] Pág. [**495**]. Los teoremas C y D, que aquí (sobre bases puramente intuitivas y por ello inseguras) son "demostrados", sirven en Dedekind (¿Qué son y para qué sirven los números?) y en otros autores simplemente para la *definición* conceptual de los conjuntos "finitos" y de los "infinitos".

[N.Z.9] Pág. [**495 – 496**]. La promesa hecha aquí, que se refiere al *sistema en conjunto* de todos los números cardinales transfinitos en su construcción natural, no ha sido cumplida por Cantor: sus propias investigaciones (en la segunda parte de este trabajo) [no llegan a] la "segunda clase numérica", alcanzan por lo tanto sólo hasta Aleph-uno, aunque los métodos empleados por él son susceptibles de una extensión mucho más amplia. El fundamento de este abandono parece residir por una parte en la falta de la demostración de que toda potencia es un Aleph, y por otra parte sin embargo también, en que la ya conocida para él "antinomia de Burali-Forti" había incitado a dudas escépticas contra el concepto de "todos" los números ordinales o cardinales en Cantor, y pudo haberle motivado por ello a una limitación objetivamente injustificada de sus investigaciones. Sobre esto, cf. también la exposición postal en el "apéndice", pág. 443 y sigs.

[N.Z.10] §7, pág. [**496**]. Aquí se desarrolla por primera vez el concepto fundamental de "tipo de orden" (de conjuntos simplemente ordenados) con toda claridad, aunque su pretendida ilustración por medio de un conjuntos compuesto de "puras unidades" debería ser tan errada como la correspondiente para el número cardinal en el §1 de este trabajo. Una definición correcta debería, partiendo del concepto de una "aplicación semejante", definir el tipo de orden como la "invariante" de estos tipos de aplicaciones, como aquélla, que tiene en común un conjunto ordenado con todos aquellos "semejantes" ordenados. Frege, Russell, y otros [quieren] definir el número cardinal, y correspondientemente el número ordinal como la "clase" o el "concepto" de todos los equivalentes de un conjunto dado, y correspondientemente de los conjuntos semejantes. Pero entonces una tal "clase", como es sabido (cf. Apéndice, pág. 443 y sigs.) no es un verdadero *conjunto* consistente, así se obtiene con esta definición ya inmediatamente en [desde] el principio la necesidad (siempre negada por Russell) de distinguir entre "conjuntos" y "clases".

[N.Z.11] Pág. [**499**], §4. Aquí se indica la posibilidad de los "automorfismos", i.e., de aplicaciones semejantes de un conjunto ordenado sobre sí mismo, que son diferentes de la identidad.

[N.Z.12] Pág. [**500**], par. inic. Que el tipo de orden abarca *todo* lo "numerable" en general y que no pueda admitir "ninguna ulterior generalización", parece sin embargo ser una afirmación algo arbitraria. Depende de lo que se se entienda por "numerable" —y esto es una opinión subjetiva. Cantor entiende por "numerable" el tipo de orden, mientras que también podría entenderse por ello el número cardinal o alguna otra cosa.

[N.Z.13] §9, pág. [**504**]. Este parágrafo proporciona con la caracterización inequívoca del tipo η un resultado muy bello y quizá sorprendente. La demostración es diáfana y correcta. Sólo en la pág. [**506**], [l. 6], donde dice "como es *fácil* convencerse" encuentra el lector una cierta dificultad. A esto ha de observarse lo siguiente. Los elementos $r_{\lambda+1}$, $r_{\lambda+2}, \ldots, r_{\lambda+\sigma-1}$ están situados *fuera* del intervalo parcial determinado por r_1, $r_2, \ldots$, r_λ, en el cual debe estar situado $r_{\lambda+\sigma}$, i.e, en parte antes, y en parte después de este intervalo parcial. Correspondientemente están situados entonces sin embargo también los elementos correspondientes $m_{i_{\lambda+1}}, m_{i_{\lambda+2}}, \ldots, m_{i_{\lambda+\sigma-1}}$ en parte antes, y en parte después del intervalo parcial correspondiente, que está determinado por m_{i_1}, $m_{i_2}, \ldots, m_{i_\lambda}$, en el que está situado $m_{\nu+1}$, tiene por lo tanto con respecto a este la misma relación de rango que $r_{\lambda+1}, \ldots, r_{\lambda+\sigma-1}$ con $r_{\lambda+\sigma}$.

[N.Z.14] Pág. [**510**]. Los conceptos "denso en sí mismo", "cerrado" y "perfecto" empleados para los tipos de orden, no coinciden exactamente con los conceptos correspondientes en la teoría de los *conjuntos de puntos*, donde éstos tienen sólo una significación *relativa* en relación al continuo presupuesto como dado, en el que los conjuntos de puntos concernidos están colocados. Un conjunto de puntos se llama "cerrado" si contiene todos los puntos de este continuo, que representan los "puntos límites" o los "puntos de acumulación" de los conjuntos de puntos. Aquí por el contrario se trata de una propiedad *interna* del tipo de orden: se llama "cerrado", si cada "sucesión fundamental" formada en él, posee en él un "elemento límite". Un conjunto de puntos cerrado en un intervalo limitado (finito) del continuo lineal (incluyendo los puntos límite) tiene ciertamente también un tipo de orden "cerrado", pues cada una de sus "sucesiones fundamentales" corresponde a un "punto de acumulación" en el continuo y por ello también a un "punto límite" en sí misma. Pero a la inversa un tal conjunto de puntos M de un tipo de orden "cerrado" *no* necesita necesariamente el mismo ser "cerrado", p. ej. el conjunto de los puntos con las coordinadas $1 - \frac{1}{v}(v = 1, 2, \ldots)$ juntamente con el punto 2 en el intervalo $(0, 2)$, que ciertamente posee para sí el tipo de orden "cerrado" $\omega + 1$, pero no contiene su punto de acumulación. Cf. aquí las págs. 193, 226, 228.

[N.Z.15] §11, pág. [**510**] y sigs. De las dos características, con las que caracteriza aquí Cantor el tipo de orden del continuo lineal, es de significación fundamental y el verdadero descubrimiento de Cantor la propiedad señalada por él como 2): la existencia de un subconjunto numerable S "denso por doquier" en M. Menos afortunada nos parece hoy su formulación de la propiedad 2), puesto que todo elemento de M al mismo tiempo es un "elemento límite" de S y por ello también de M. Ante todo, sin embargo, la definición cantoriana de "elemento límite" a través de las "sucesiones fundamentales", que manifiestamente está codeterminada por su teoría de los números irracionales (cf. aquí la pág.

186), lleva aquí a complicaciones innecesarias. Lo más sencillo sería, desde luego, según Dedekind caracterizar el conjunto como "continuo" o mejor "sin huecos" (F. Hausdorff, Grundzüge, cap. IV, §5) a través de la siguiente propiedad: en cada "corte", i.e., cada división del conjunto (simplemente ordenado) M en un "corte" [una "sección"] A y un resto B (cf. §13, pág. **[210]**) posee o bien el segmento A un máximo, o bien el resto B un mínimo elemento. Ambos a la vez está excluido en el caso del continuo lineal por la propiedad 2). Por medio de este cambio de la propiedad 1) se simplifica también la demostración de la exclusividad. Después de que en primer lugar se ha aplicado el subconjunto S al conjunto R de los números racionales del tipo η, cada elemento ulterior m de M es caracterizado por un "corte" del conjunto S y así a la inversa exclusivamente aplicado sobre el elemento x de X, que está determinado por el "corte" correspondiente del conjunto R. Aquí se muestra también que es innecesario el uso de "sucesiones congéneres".

[N.Z.16] Pág. **[207]** Lo más simple parece caracterizar un conjunto "bien ordenado" como uno "simplemente ordenado" en el cual cada "resto" posee un elemento mínimo, mientras que la propiedad A (pág. **[208]**) (aparentemente más simple), de que también *cada subconjunto* tiene también un elemento mínimo, es mejor postponerla con Cantor como una consecuencia *demostrable*, puesto que éste reproduce la "transitividad" ya contenida en la "simple ordenación".

[N.Z.17] Pág. **[211]**. Los teoremas A–M de estos parágrafos son en gran parte teoremas auxiliares para la demostración del "teorema de semejanza" N (pág. **[215]**), en el cual culmina la teoría elemental de los conjuntos bien ordenados. Sin embargo, aquí se pueden demostrar o reemplazar los teoremas B–F más simplemente que en Cantor, por medio de la anticipación del *teorema auxiliar* general (procedente del editor): "En *ninguna* aplicación semejante de un conjunto bien ordenado en una de sus partes se aplicará un elemento a en uno *precedente* $a' \prec a$. Cf. G. Hessenberg, Grundbegriffe d. Mngl. §33, teorema XX, así como Hausdorff, loc. cit., cap. V, §2.)

[N.Z.18] Pág. **[218]**. Las fórmulas (12) y (13) se obtienen de la definición (10) de la diferencia, porque de hecho

$$(\gamma + \alpha) + (\beta - \alpha) = \gamma + (\alpha + \beta - \alpha) = \gamma + \beta$$

y tenemos que

$$\gamma\alpha + \gamma(\beta - \alpha) = \gamma(\alpha + \beta - \alpha) = \gamma\beta.$$

[N.Z.19] Pág. **[220]**, último párrafo. Aquí se hace notar de nuevo la falta de una definición precisa del concepto de conjunto "finito". En este contexto habría que definir el conjunto "finito" como un conjunto bien ordenado en el que cada sección, así como el conjunto completo, tiene[n] un último elemento, o como un conjunto *ordenado* en el que cada subconjunto contiene *tanto un primer como un último elemento*. Entonces habría que mostrar que esta propiedad es *independiente* de la ordenación elegida y que cada tal conjunto sólo puede ser ordenado según un *único* tipo, que está determinado por su número cardinal Cf. aquí §5 (pág. **[489]**) y la nota [N.Z.4].

[N.Z.20] Pág. **[222]**. l. 1. El conjunto G es numerable como [en tanto que] reunión de una cantidad numerable de conjuntos numerables o finitos.

[N.Z.21] §16, pág. **[227]**. Para la demostración del teorema A basta a causa de B del §12 (pág. **[208]**) mostrar, que cada subconjunto J de $\{\alpha\}$ contiene un número mínimo α'. Sea α_0 un número de J, que aún no es [no sea] el mínimo. Entonces todos los números

$\alpha < \alpha_0$ de J pertenecen a la sección A_{α_0} determinada por α_0, la cual según H del §15 es un conjunto bien ordenado del tipo α_0, y forman por ello también ellos mismos un conjunto bien ordenado con un elemento mínimo α' que, puesto que $\alpha' < \alpha_0 < \beta$, precede también a todo elemento β de J que en general no pertenezca a A_{α_0}, luego representa en todo caso en general el elemento mínimo de J.

[N.Z.22] Pág. **[227]**. La demostración del teorema D podría también más fácilmente reconducirse al teorema H del §15. Si el conjunto $\{\alpha\}$ bien ordenado del teorema A fuera numerable, entonces lo sería también tras el añadido de [después de añadirle] todos los números de la primera clase numérica, y el conjunto bien ordenado S que se produciría tendría como tipo de orden un número σ de la segunda clase numérica, de tal modo que la sección correspondiente A_σ tendría según H del §15 el mismo tipo de orden σ. Luego todo el conjunto S sería semejante a una de sus secciones, contra B del §13.

[N.Z.23] §17, pág. **[229]** y sigs. Se trata en este parágrafo de un caso particular simple de la "forma normal" general desarrollada después en el §19 para los números de la segunda clase numérica. La diferencia consiste sólo en que los exponentes α_0, α_1,... del teorema B del §19 se toman aquí todos como *finitos.* También el desarrollo de los productos (9) del §17 procede del teorema G del §19 por medio de la correspondiente particularización. Manifiestamente, el estudio del caso particular ha sido para Cantor decisivo para encontrar la forma de representación general.

[N.Z.24] §18, pág. **[231]** y sigs. La introducción de un nuevo *concepto de potencia*, que es esencialmente diferente del proporcionado antes para los números cardinales, posibilita por vez primera una teoría formalmente aritmética de los números ordinales transfinitos, y ciertamente no sólo en la segunda clase numérica. El método empleado aquí para su introducción de la "definición por inducción transfinita" (Hausdorff, op. cit., cap. V, §3) se ha convertido desde entonces en modélico para todas las construcciones transfinitas de este tipo. En particular, la función $f(\xi)$ introducida aquí tiene el carácter de una "función normal" (Hausdorff, op. cit., pág. 114), un concepto que posteriormente se ha mostrado como uno de los más importantes en toda la teoría de los números ordinales transfinitos.

[N.Z.25] Pág. **[236]**. Aquí se da que $\alpha_1 < \alpha_0$, porque en caso contrario

$$\begin{aligned}\alpha &= \omega^{\alpha_0}\kappa_0 + \omega^{\alpha_1}\kappa_1 + \alpha'' \\ &\geq \omega^{\alpha_0}(\kappa_0 + \kappa_1) + \alpha'' \\ &\geq \omega^{\alpha_0}(\kappa_0 + 1)\end{aligned}$$

estaría en contradicción con el supuesto (2).

[N.Z.26] Pág. **[240]**. La demostración del teorema K se apoya en lo esencial en la *univocidad de la representación del producto G* y de la existencia que se sigue de ella de una "parte común máxima" (a la izquierda) de dos números transfinitos α y β en la forma $\alpha = \delta\alpha'$ y $\beta = \delta\beta'$. Si para dos números tales α y β del primer tipo tenemos que $\alpha\beta = \beta\alpha$, entonces se obtiene en primer lugar que el mayor de ellos debe ser divisible por el menor, $\alpha = \beta\alpha'$. Pero además también α' es "intercambiable" con β y $\alpha' < \alpha$. Porque ya que $\beta > 1$ aquí se da que $\beta\alpha = \alpha\beta > \alpha$. A cada par de números α, β de la propiedad considerada le corresponde por lo tanto un par "menor" α', β (en el cual el *mayor* de ambos números es menor que en el primero) de la misma propiedad, y si el par menor admite la representación exigida γ^μ, γ^ν, entonces lo mismo vale para α y β mismos. Ahora bien, si hubiera pares de números transfinitos α, β de la propiedad mencionada, que *no* pudieran representarse así, entonces habría entre estos también un *mínimo* (uno con el menor $\alpha > \beta$) y esto estaría en contradicción con lo que se acaba de demostrar. Por lo tanto, por medio de esta simple consideración se puede simplificar esencialmente la demostración cantoriana.

$\left[^{\text{N.Z.27}}\right]$ §20, pág. **[242]**. Los $\varepsilon-$números no son otra cosa en el modo moderno de denotación que los "números críticos" de la "función normal" especial $f(\xi) = \omega^{\xi}$ (cf. Hausdorff, cap. V, §3), y por ello su teoría ha sido guía para toda la teoría moderna de las funciones normales, por lo que alcanza una importancia que transciende ampliamente su significación original. El desarrollo completo del pensamiento de este parágrafo hasta el teorema F inclusive puede transferirse sin más a los "números críticos" de cualquier función normal.

El trabajo *Fundamentos de una teoría general de variedades [multiplicidades]* es el primero de Cantor sobre la teoría *general* de conjuntos; los anteriores tenían que ver con conjuntos numéricos.

Con anterioridad al trabajo mencionado Cantor estableció lo siguiente

1. En el año 1874 una demostración de que el conjunto de los números reales no es infinito numerable.
2. En el año 1878 una definición de la equipotencia de dos conjuntos.
3. En el año 1878 una demostración de que el conjunto de los números reales es equipotente al conjunto de los puntos del espacio euclídeo n-dimensional, para $n \geq 2$.

De ello se deduce que hasta antes de 1883 Cantor disponía de al menos dos números cardinales infinitos, el de los números naturales y el de los números reales. Además, Cantor carecía de los medios para obtener otros cardinales infinitos. Por otra parte, al establecer en el año 1878 la hipótesis del continuo, i.e., que no hay ningún subconjunto infinito del conjunto de los números reales cuya cardinalidad esté estrictamente comprendida entre la de los números naturales y la de los reales, se puede concluir que, hasta antes del año 1883, Cantor disponía de únicamente dos cardinales infinitos.

Cantor, a diferencia, e.g., de Bolzano, supo distinguir entre las propiedades de los constructos, i.e., los objetos matemáticos formados por un conjunto junto con una estructura sobre tal conjunto, y las propiedades de los conjuntos (despojados de toda estructura). Por ejemplo, los intervalos $]0,1[$ y $]0,2[$, considerados como objetos geométricos, tienen magnitudes distintas (y a ellos les es aplicable el principio de que el todo es mayor que la parte), pero, en tanto que conjuntos, tienen el mismo cardinal (y a ellos no les es aplicable el mismo principio).

En el año 1882 la concepción que tenía Cantor del concepto de conjunto era la siguiente:

> Llamo a una variedad (un agregado, un conjunto) de elementos, que pertenecen a cualquier esfera conceptual, bien–definida, si sobre la base de su definición y como consecuencia del principio lógico del tercio excluso, debe ser reconocido que está internamente determinado cuándo un objeto arbitrario de esta esfera conceptual pertenece a la variedad o no, y también, cuándo dos objetos en el conjunto, a pesar de las diferencias formales en la manera en la que están dados, son iguales o no. En general las diferencias relevantes no pueden ser hechas en la práctica con certeza y exactitud por las

> capacidades o métodos actualmente disponibles. Pero eso carece de cualquier importancia. Lo único importante es la determinación interna a partir de la cual en casos concretos, donde ello es exigido, una determinación actual (externa) ha de ser desarrollada por medio de un perfeccionamiento de los recursos.

Como dice Tait, la última parte de la cita anterior es interesante porque refleja la tensión creciente en las matemáticas acerca del papel de las propiedades que son 'indecidibles', i.e., para las que no tenemos ningún algoritmo para decidir de cualquier objeto de la esfera conceptual, si tiene o no la propiedad. Cantor está diciendo que la existencia de tal algoritmo es innecesaria en orden a que la propiedad defina un conjunto.

En el otro extremo de la escala ideológica estaba Kronecker que sostenía, por una parte, que la ley del tercio excluso no debía de ser asumida (en toda su generalidad) y, por otra parte, que sólo debían ser introducidos en las matemáticas aquellos objetos que pueden ser finitamente representados y sólo aquellos conceptos para los que tenemos un algoritmo para decidir si tales conceptos se cumplen o no para un objeto dado. De modo que Kronecker es ancestro intelectual, por una parte, de Brouwer, y, por otra, de Baire, Borel, y Lebesgue.

Índice alfabético