TEORÍA DE CONJUNTOS.

J. CLIMENT VIDAL

Resumen. Enunciamos los axiomas de extensionalidad, del conjunto vacío, del conjunto par no ordenado, de la unión, del conjunto potencia y el esquema axiomático de separación. A partir de tales axiomas justificamos las definiciones de las nociones y operaciones usuales sobre el universo de conjuntos y estudiamos las propiedades de tales conceptos y operaciones. Los cuatro axiomas restantes de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel-Skolem i.e., el axioma de elección, el del conjunto infinito, el de regularidad o fundamentación y el esquema axiomático de reemplazo, los presentamos a medida que sean necesarios para justificar la existencia de ciertos conjuntos y para poder establecer algunas nociones y construcciones, que sin ellos serían imposibles, como son las de cardinal y ordinal.

Índice

Date: 25 de junio de 2010.
2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary: ; Secondary:

1. Introducción.

La teoría de conjuntos, en un primer momento, se ocupa del estudio de los conjuntos que se obtienen a partir de los axiomas, considerados como objetos amorfos, i.e., desprovistos de cualquier tipo de estructura, mediante diferentes tipos de morfismos, e.g., relaciones, funciones parciales y funciones. Posteriormente, para profundizar en el estudio de la naturaleza de los conjuntos, se les dota de diversas estructuras, siendo las fundamentales las de tipo relacional, algebraico, topológico y analítico y se les compara mediante los morfismos adecuados, i.e., aquellos que preservan las estructuras involucradas.

Una vez estudiadas las operaciones conjuntistas básicas, pasamos a considerar las relaciones y las funciones, que usaremos para establecer los conceptos de producto de una familia de conjuntos, igualador de un par de aplicaciones con el mismo dominio y codominio, producto fibrado de un par de aplicaciones con un codominio común y límite proyectivo de un sistema proyectivo de conjuntos; así como los conceptos duales de coproducto de una familia de conjuntos, coigualador de un par de aplicaciones con el mismo dominio y codominio, suma amalgamada de un par de aplicaciones con un dominio común y límite inductivo de un sistema inductivo de conjuntos.

Siguiendo los principios categoriales, demostramos la existencia del exponencial de dos conjuntos, caracterizado por una cierta propiedad universal, debida a Schönfinkel y Curry, que sirve, entre otras cosas, para poner de manifiesto que el concepto de función de dos o más variables, puede ser reducido al de función de una sola variable. Por otra parte, demostramos que el conjunto 2 es un clasificador de subconjuntos, i.e., que los subconjuntos de un conjunto están en correspondencia biunívoca con las aplicaciones desde tal conjunto hasta el 2 y ello sujeto a cumplir una cierta propiedad universal.

La existencia de los conjuntos infinitos, razón de ser de la teoría de conjuntos de Cantor, la obtendremos una vez introduzcamos el axioma del conjunto infinito. De hecho, demostraremos, a partir de tal axioma, la existencia de un álgebra de Dedekind-Peano, para las que obtendremos el principio de la definición por recursión finita, a partir del cual demostraremos que las álgebras de Dedekind-Peano son esencialmente únicas, y que otros principios de definición por recursión más complejos, se pueden obtener a partir del mismo. Además, demostraremos que el conjunto subyacente del álgebra Dedekind-Peano, que será el conjunto de los números naturales, está dotado de una buena ordenación, y que tal ordenación es compatible con las operaciones aritméticas usuales, definidas por recursión, sobre el conjunto de los números naturales.

Por ser fundamental para la teoría de conjuntos y teorías afines, continuaremos con el estudio de los conjuntos bien ordenados en general, así como de los morfismos entre los mismos. Una vez llevada a cabo tal tarea, demostraremos, siguiendo a Cantor, que el universo de discurso **WO**, formado por los conjuntos bien ordenados y los morfismos entre ellos, tiene un *esqueleto*, i.e., hay una clase de conjuntos bien ordenados **ON**, la clase de los ordinales, que tiene las siguientes propiedades:

- $\forall(\alpha, \in_\alpha), (\beta, \in_\beta) \in \mathbf{ON}\, ((\alpha, \in_\alpha) \cong (\beta, \in_\beta) \rightarrow (\alpha, \in_\alpha) = (\beta, \in_\beta))$.
- $\forall \mathbf{A} \in \mathbf{WO}\, \exists(\alpha, \in_\alpha) \in \mathbf{ON}\, (\, \mathbf{A} \cong (\alpha, \in_\alpha)\,)$.

Finalizaremos enunciando el *esquema axiomático de reemplazo*, en la versión de Skolem, según el cual la imagen directa de un conjunto bajo una condición funcional es un conjunto, que nos permitirá, no sólo asegurar la existencia de ciertos conjuntos, sino también establecer un principio de la definición por recursión transfinita, que generalizará al principio de la definición por recursión finita y, en definitiva, definir los números ordinales y por lo tanto los cardinales.

2. Axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel-Skolem.

> Una variedad (una totalidad, un conjunto) de elementos pertenecientes a cualquier esfera conceptual se dice "bien definida"si sobre la base de su definición y como consecuencia del principio lógico del tercio excluso, puede ser considerado como internamente determinado, por una parte, si cualquier objeto perteneciente a esta esfera conceptual pertenece o no como elemento a dicha variedad y, por otra, si dos objetos pertenecientes al agregado son o no iguales entre sí, aparte de las diferencias formales en la manera en la que estén dados.
>
> *G. Cantor.*

> Entendemos por "conjunto"cualquier agrupación en un todo M de determinados objetos bien diferenciados m de nuestra intuición o de nuestro pensamiento (llamados "elementos"de M).
>
> *G. Cantor.*

> Set theory is that branch of mathematics whose task is to investigate mathematically the fundamental notions "number", "order", and "function", taking them in their pristine, simple form, and to develop thereby the logical foundations of all of arithmetic and analysis; thus it constitutes an indispensable component of the science of mathematics ... Under such circumstances there is at this point nothing left for us to do but to proceed in the opposite direction [from that of the General Comprehension Principle] and, starting from set theory as it is historically

> given, to seek out the principles required for stablishing the foundations of this mathematical discipline. In solving the problem we must, on the one hand, restrict these principles sufficiently to exclude all contradictions and, on the other, take them sufficiently wide to retain all that is valuable in this theory.
>
> *E. Zermelo.*

En esta sección enunciamos los axiomas de extensionalidad, del conjunto vacío, del conjunto par no ordenado, de la unión, del conjunto potencia y el esquema axiomático de separación. A partir de tales axiomas justificamos las definiciones de las operaciones usuales sobre el universo de conjuntos y estudiamos las propiedades de tales operaciones. Los cuatro axiomas restantes de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel-Skolem i.e., el axioma de elección, el del conjunto infinito, el de regularidad o fundamentación y el esquema axiomático de reemplazo, los explicitaremos en secciones posteriores, a medida que sean necesarios para justificar la existencia de ciertos conjuntos y para poder establecer algunas nociones y construcciones, que sin ellos serían imposibles o extremadamente dificultosas.

2.1. El axioma de extensionalidad. El primero de los axiomas que enunciamos, el axioma de extensionalidad, afirma, esencialmente, que un conjunto está unívocamente determinado por sus miembros.

Axioma de extensionalidad. *Una condición suficiente para que dos conjuntos coincidan es que tengan los mismos miembros:*

$$\forall X, Y\, (\, \forall z\, (\, z \in X \leftrightarrow z \in Y\,) \rightarrow X = Y\,).$$

El recíproco del axioma anterior i.e., que si dos conjuntos coinciden, entonces tienen los mismos miembros, que no es más que un caso particular de la ley de Leibniz de la *identidad de los indiscernibles*, es deducible en la lógica de predicados de primer orden con igualdad; por consiguiente, una condición necesaria y suficiente para que dos conjuntos coincidan es que tengan los mismos miembros. De donde podemos concluir, por una parte, que el concepto de conjunto es independiente del orden de sus miembros y, por otra, que en un conjunto sus miembros, de tenerlos, no ocurren repetidos.

2.2. El axioma del conjunto vacío.

Axioma del conjunto vacío. *Hay un conjunto sin miembros:*

$$\exists X\, \forall y\, (\, y \in X \leftrightarrow y \neq y\,).$$

Ejercicio 2.2.1. Demuéstrese que el axioma del conjunto vacío puede enunciarse alternativa, pero equivalentemente, como:

$$\exists X\, \forall y\, (\, y \notin X\,).$$

Proposición 2.2.2. *Hay un único conjunto sin miembros. Denominamos a tal conjunto el* conjunto vacío *y lo denotamos por $\varnothing$.*

Demostración. En virtud del axioma del conjunto vacío, hay al menos un conjunto sin miembros. Por otra parte, si X' fuera otro conjunto tal que, para cada y, $y \in X'$ precisamente si $y \neq y$, entonces, por el axioma de extensionalidad, $X' = X$. □

2.3. El axioma del conjunto par no ordenado.

Axioma del conjunto par no ordenado. *Dados dos conjuntos x e y, hay un conjunto cuyos miembros son exactamente x e y :*

$$\forall x, y\, \exists Z\, \forall t\, (\, t \in Z \leftrightarrow (\, t = x \vee t = y\,)).$$

Proposición 2.3.1. *Sean x e y dos conjuntos. Entonces hay un único conjunto cuyos miembros son exactamente x e y. Denominamos a tal conjunto el* conjunto par no ordenado *determinado por x e y y lo denotamos por $\{x, y\}$*

Demostración. Dados dos conjuntos x e y, en virtud del axioma del conjunto par no ordenado, hay al menos un conjunto Z que consta de x e y. Por otra parte, si Z' fuera otro conjunto tal que, para cada t, $t \in Z'$ precisamente si $t = x$ o $t = y$, entonces, por el axioma de extensionalidad, $Z = Z'$.

□

Corolario 2.3.2. *Sea x un conjunto. Entonces hay un único conjunto cuyo único miembro es exactamente x. Denominamos a tal conjunto (siguiendo la terminología categorial) el* conjunto terminal *o* final *determinado por x y lo denotamos por $\{x\}$.*

Ejercicio 2.3.3. Sean x, y, x' e y' cuatro conjuntos. Demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que $\{x, y\} = \{x', y'\}$ es que $(\, x = x'$ e $y = y'\,)$ o $(\, x = y'$ e $y = x'\,)$.

Los axiomas hasta ahora enunciados, sólo nos permiten obtener conjuntos con a lo sumo dos miembros distintos. Es por ello por lo que son necesarios otros axiomas que nos aseguren, condicional o incondicionalmente, la existencia de otros conjuntos que puedan tener, eventualmente, más de dos conjuntos distintos como miembros. Dirigido a ese objetivo se encamina el próximo axioma.

2.4. El axioma del conjunto unión.

Axioma del conjunto unión. *Dado un conjunto $\mathcal{X}$, hay otro conjunto cuyos miembros son exactamente los miembros de los miembros de $\mathcal{X}$:*

$$\forall \mathcal{X}\, \exists Y\, \forall t\, (\, t \in Y \leftrightarrow \exists X\, (\, t \in X \wedge X \in \mathcal{X}\,)).$$

Proposición 2.4.1. *Sea $\mathcal{X}$ un conjunto. Entonces hay un único conjunto cuyos miembros son exactamente los miembros de los miembros de $\mathcal{X}$. Denominamos a tal conjunto el* conjunto unión *de $\mathcal{X}$ y lo denotamos por $\bigcup \mathcal{X}$ o por $\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X$.*

Demostración. Dado un conjunto $\mathcal{X}$, en virtud del axioma del conjunto unión, hay al menos un conjunto Y al cual pertenecen precisamente los miembros de los miembros de $\mathcal{X}$. Por otra parte, si Y' fuera otro conjunto que tuviera la misma propiedad que tiene Y, entonces, por el axioma de extensionalidad, $Y = Y'$. □

Así pues, para un conjunto $\mathcal{X}$ tenemos que

$$\bigcup \mathcal{X} = \{\, t \mid \exists X (\, t \in X \wedge X \in \mathcal{X}\,)\,\}.$$

Proposición 2.4.2. *Sean X e Y dos conjuntos. Entonces hay un único conjunto cuyos miembros son exactamente aquellos conjuntos que pertenecen a X o a Y. Denominamos a tal conjunto la* unión (binaria) *de X e Y y lo denotamos por $X \cup Y$.*

Demostración. Sean X e Y dos conjuntos. Entonces, en virtud del axioma del conjunto par no ordenado, existe el conjunto $\{X, Y\}$ y ahora, en virtud del axioma del conjunto unión, existe $\bigcup \{X, Y\}$. Pero, los miembros de ese último conjunto son precisamente los conjuntos que pertenecen a X o a Y i.e., en definitiva a $X \cup Y$. □

De modo que, para dos conjuntos X e Y tenemos que

$$X \cup Y = \{\, t \mid t \in X \vee t \in Y\,\}.$$

Proposición 2.4.3.

1. *Sean x, y y z tres conjuntos, entonces hay un único conjunto del cual son miembros exactamente x, y y z. Denotamos a tal conjunto por $\{x, y, z\}$.*

2. *Sean X, Y y Z tres conjuntos, entonces hay un único conjunto del cual son miembros exactamente aquellos conjuntos que pertenezcan a alguno de los conjuntos dados. Denotamos a tal conjunto por $X \cup Y \cup Z$.*
3. *Para cada número natural n, no nulo, y cualesquiera n conjuntos $x_0, \ldots, x_{n-1}$, hay un único conjunto, denotado por $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$, tal que*
$$\forall x(\, x \in \{x_0, \ldots, x_{n-1}\} \leftrightarrow (\, x = x_0 \vee \ldots \vee x = x_{n-1}\,)).$$
4. *Para cada número natural n, no nulo, y cualesquiera n conjuntos $X_0, \ldots, X_{n-1}$, hay un único conjunto denotado por $X_0 \cup \cdots \cup X_{n-1}$, tal que*
$$\forall x(\, x \in X_0 \cup \cdots \cup X_{n-1} \leftrightarrow (\, x \in X_0 \vee \ldots \vee x \in X_{n-1}\,)).$$

Demostración. Dados los conjuntos x, y y z, obtenemos, por el axioma del conjunto par no ordenado, los conjuntos $\{x, y\}$ y $\{z\}$ y a partir de ellos, otra vez, en virtud del axioma del conjunto par no ordenado, el conjunto $\{\{x, y\}, \{z\}\}$, por último, mediante el axioma del conjunto unión, obtenemos el conjunto $\bigcup\{\{x, y\}, \{z\}\}$, que es el conjunto $\{x, y, z\}$.
Para la segunda parte de la proposición es suficiente considerar $\bigcup\{X, Y, Z\}$.

La última parte se demuestra usando el principio de la *demostración por inducción (finita)* de J. Bernoulli-Pascal □

Parece ser que Levi Ben Gerson fue el primero en hacer uso explícito del principio de la demostración por inducción finita en su libro *El trabajo del calculador*, escrito en el 1321. Le siguieron, en este uso, F. Maurolico en el 1575, con ocasión de su libro *Arithmetica*, B. Pascal en el 1655, en el *Traité du triangle arithmétique* y J. Bernoulli, con ocasión de la crítica que hizo de Wallis, por el uso que este último autor hacía del *proceso de inducción incompleta*. Además, la expresión *inducción matemática* fue usada por primera vez por A. de Morgan en el 1838 y el principio como tal fue establecido por G. Peano en su axiomatización de la aritmética en el 1889. A esto cabe añadir que P. de Fermat hizo uso en alguna de sus demostraciones del llamado *principio del descenso indefinido*, sobre el que volveremos al considerar el axioma de regularidad, que es equivalente al principio de la demostración por inducción finita, aunque Lusin, en un trabajo de 1934 sobre los conjuntos medibles, advierte que es difícil decidir sobre la equivalencia entre ambos principios.

A continuación definimos la relación binaria de inclusión entre conjuntos, con el fin de abreviar el enunciado del axioma del conjunto potencia. Pero no sólo por eso definimos la relación de inclusión, sino porque más adelante estudiaremos las propiedades de tal relación, que además resultará ser, cuando se estudien los conjuntos ordenados en una sección posterior, el modelo de las relaciones de orden sobre los conjuntos.

Definición 2.4.4. Sean X e Y dos conjuntos. Decimos que X está *incluido* en Y, o que es un *subconjunto* o *parte* de Y, y lo denotamos por $X \subseteq Y$, si para cada z, si $z \in X$, entonces $z \in Y$. Además, decimos que X está *estrictamente incluido* en Y, o que es un *subconjunto estricto* o *parte estricta* de Y, y lo denotamos por $X \subset Y$, si $X \subseteq Y$ pero $X \neq Y$.

2.5. El axioma del conjunto potencia.

Axioma del conjunto potencia. *Dado un conjunto X, hay otro conjunto cuyos miembros son exactamente los subconjuntos de X:*
$$\forall X\, \exists \mathcal{Y}\, \forall T(\, T \in \mathcal{Y} \leftrightarrow T \subseteq X\,).$$

Proposición 2.5.1. *Sea X un conjunto. Entonces hay un único conjunto cuyos miembros son precisamente los subconjuntos de X. Denominamos a tal conjunto el* conjunto potencia *o el* conjunto de los subconjuntos *de X y lo denotamos por* $\mathrm{Sub}(X)$.

Demostración. Dado un conjunto X, en virtud del axioma del conjunto potencia, hay al menos un conjunto $\mathcal{Y}$ que consta de los subconjuntos de X. Por otra parte, si $\mathcal{Y}'$ fuera otro conjunto que tuviera la misma propiedad que tiene $\mathcal{Y}$, entonces, por el axioma de extensionalidad, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}'$, □

Así pues, para un conjunto X tenemos que

$$\mathrm{Sub}(X) = \{\, T \mid T \subseteq X \,\}.$$

Debemos observar que en el conjunto $\mathrm{Sub}(X)$ están absolutamente todos los subconjuntos de X, sean o no definibles mediante fórmulas, con o sin parámetros, de **ZFSk**.

Antes de pasar a formular el próximo axioma, que es realmente una familia de axiomas, parametrizados por las fórmulas de la teoría de conjuntos, conviene recordar que Frege, que fue coetáneo de Cantor, sostuvo el *principio de comprehensión*, según el cual cada fórmula de la teoría de conjuntos φ, con al menos una variable libre, determina unívocamente un conjunto, su *extensión*, denotado por $\{\, x \mid \varphi \,\}$, y tal conjunto consta de todos los conjuntos x que cumplen la condición φ (aunque, para Frege, "extensión de un concepto" y "conjunto" no son sinónimos. Recordemos que, clásicamente, los conceptos tienen una "extensión" y una "intensión". La extensión de un concepto está formada por todos los objetos que caen bajo el concepto, mientras que su intensión consta de todas las propiedades que son comunes a todos los objetos que caen bajo el concepto). Pero, Russell y Zermelo demostraron que algunas fórmulas no determinan conjunto alguno. Concretamente, tanto Russell como Zermelo, demostraron que, para la fórmula $x \notin x$, no existe el conjunto $R = \{\, x \mid x \notin x \,\}$. A esto se le da el nombre de *paradoja* de Russell.

Teorema 2.5.2 (Russell)**.** *No existe el conjunto del cual sean miembros precisamente aquellos conjuntos que no se pertenezcan a si mismos, i.e., no existe*

$$R = \{\, x \mid x \notin x \,\}.$$

Demostración. Si existiera R, entonces $R \in R$ si y sólo si $R \notin R$, lo cual es absurdo. Por consiguiente no existe tal conjunto. □

El hecho, demostrado por Russell y Zermelo, de que algunas fórmulas de la teoría de conjuntos no determinen conjuntos, tuvo como efecto inmediato la destrucción fulminante del *programa logicista* de Frege, de la fundamentación de la aritmética en una amalgama de lógica de predicados de orden superior (en la que se admite la cuantificación de relaciones, funciones, ...) y principios conjuntistas, consistente en reducir el concepto de número natural a conceptos lógicos.

Ese programa de fundamentación fue el sucesor inmediato del *programa de aritmetización* del análisis matemático, iniciado por Cauchy y Bolzano y continuado por Weierstrass, Dedekind, Cantor y Meray, entre otros, y tal programa de aritmetización consistió, esencialmente, en construir los números reales a partir de los números racionales, para entonces poder definir correctamente los procesos de paso al límite, característicos del análisis matemático.

A diferencia de otras paradojas conjuntistas, como e.g., la de Cantor, del conjunto de todos los cardinales, o la de Burali-Forti, del conjunto de todos los ordinales, en las que intervienen nociones sofisticadas de la teoría de conjuntos; la paradoja de Russell es notable, entre otras razones, porque está formulada en función de términos básicos, como son los de conjunto, pertenencia y negación y es obtenida mediante un procedimiento natural, el de comprehensión.

La paradoja de Russell, junto, sobre todo, a la crítica que de la primera demostración del teorema de la buena ordenabilidad de los conjuntos de Zermelo, hicieron los matemáticos franceses Baire, Borel y Lebesgue, indujeron a Zermelo a proponer un sistema axiomático para la teoría de conjuntos de Cantor que, por una parte, fuera lo suficientemente restrictivo, como para evitar la reproducción, en el mismo, de las conocidas paradojas conjuntistas y, por otra, fuera lo suficientemente potente, como para preservar los resultados fundamentales obtenidos por Cantor y otros, demostrándolos a partir de principios explícitos, y añadir otros resultados nuevos, aunque, como demostraron Fraenkel y Skolem, el sistema axiomático de Zermelo no tenía la suficiente potencia como para demostrar la existencia de ciertos conjuntos e.g., el conjunto $\{\, \mathrm{Sub}^n(\mathbb{N}) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$, y por ello, estos dos matemáticos tuvieron que añadir el esquema axiomático de reemplazo.

El principio limitativo mediante el cual, Zermelo, consiguió, aparentemente, eliminar las paradojas conjuntistas fue el esquema axiomático de separación, que le permitía, a partir de un conjunto ya dado y de una proposición *bien definida*, separar del conjunto la parte formada por todo aquello que cumpliera la proposición bien definida en cuestión. Pero la formulación que de él dió Zermelo fue insatisfactoria, debido a que estaba basada en el concepto informal de *definite Eigenschaft*. Recordemos que según Zermelo:

> Una cuestión o afirmación E, se dice que está *bien definida* si las relaciones fundamentales del dominio (i.e., las de la forma $a \in b$), en virtud de los axiomas y de las leyes lógicas universalmente válidas, determinan sin arbitrariedad su validez o invalidez. Asímismo, una "función proposicional" $E(x)$, en la que el término variable x tiene como dominio de variación una clase K, se dice que está bien definida si está bien definida para *cada uno* de los indivíduos de la clase K.

Posteriormente, el esquema axiomático de separación fue correctamente enunciado por parte de Fraenkel y Skolem, independientemente uno de otro, y, por lo que respecta a Skolem, haciendo uso de la lógica de predicados de primer orden con igualdad, como afirmando que, dada una fórmula de la teoría de conjuntos φ, con al menos una variable libre, y un conjunto A, existe el subconjunto de A formado por los miembros de A que cumplen la condición φ.

2.6. El esquema axiomático de separación.

Esquema axiomático de separación. *Si la fórmula $\varphi(x, t_{[n]})$ es tal que sus variables libres son x, $t_0,\dots, t_{n-1}$ y en ella no ocurre B, entonces, para cualesquiera conjuntos $t_0,\dots, t_{n-1}$ y A, existe un conjunto B cuyos miembros son exactamente aquéllos conjuntos $x \in A$ tales que $\varphi(x, t_0, \dots, t_{n-1})$:*

$$\forall t_0, \dots, t_{n-1}\, \forall A\, \exists B\, \forall x\, (\, x \in B \leftrightarrow (\, x \in A \wedge \varphi(x, t_0, \dots, t_{n-1}\,))).$$

La restricción impuesta a B, en el enunciado del esquema axiomático de separación, de que no ocurra en la fórmula $\varphi(x, t_0, \dots, t_{n-1})$, elimina las *definiciones auto-referenciales* de los conjuntos. Así, e.g., si la fórmula φ fuera $x \notin B$, entonces la existencia de un conjunto no vacío A entraría en contradicción con $\exists B\, \forall x\, (\, x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B\,))$, ya que entonces $x \in B$ si y sólo si $x \notin B$, por cumplirse que $x \in A$.

Proposición 2.6.1. *Sea $\varphi(x, t_0, \dots, t_{n-1})$ una fórmula cuyas variables libres sean x, $t_0,\dots, t_{n-1}$ y en la que no ocurra B. Entonces para cualesquiera conjuntos $t_0,\dots, t_{n-1}$ y A, existe un único conjunto B cuyos miembros son precisamente aquellos conjuntos $x \in A$ tales que $\varphi(x, t_0, \dots, t_{n-1})$. Denotamos a tal conjunto por $\{\, x \in A \mid \varphi(x, t_0, \dots, t_{n-1})\,\}$.*

Demostración. Sea $\varphi(x, t_0, \dots, t_{n-1})$ una fórmula cuyas variables libres sean x, $t_0,\dots, t_{n-1}$ y en la que no ocurra B . Entonces, por el esquema axiomático de separación, dados los conjuntos $t_0,\dots, t_{n-1}$ y A, hay al menos un conjunto B cuyos miembros son precisamente aquellos conjuntos $x \in A$ tales que $\varphi(x, t_0, \ldots, t_{n-1})$. Por otra parte, si B' fuera otro conjunto que tuviera la misma propiedad que tiene B, i.e., si B' no ocurriera en $\varphi(x, t_0, \ldots, t_{n-1})$ y si para cada x se cumpliera que $x \in B'$ cuando y sólo cuando $x \in A$ y $\varphi(x, t_0, \ldots, t_{n-1})$, entonces se cumpliría que, para cada x, $x \in B$ sí y sólo sí $x \in B'$, luego, por el axioma de extensionalidad, $B = B'$. □

Cuando la fórmula φ sea $x \notin x$, lo que obtenemos es que, para cada conjunto A, hay un único conjunto $R(A)$ tal que, para cada x, $x \in R(A)$ si y sólo si $x \in A$ y $x \notin x$; y lo que ocurre entonces es que $R(A) \in \mathrm{Sub}(A)$ y $R(A) \notin A$, como pone de manifiesto la siguiente proposición.

Proposición 2.6.2. *Para cada conjunto A, existe un conjunto $R(A)$ tal que $R(A) \in \mathrm{Sub}(A)$ pero $R(A) \notin A$.*

Demostración. Sea $R(A) = \{ x \in A \mid x \notin x \}$. Entonces $R(A)$, por definición, es un subconjunto de A, luego miembro de $\mathrm{Sub}(A)$. Pero, $R(A) \notin A$, porque si ocurriera que $R(A) \in A$, entonces, ya que $R(A) \in R(A)$ si y sólo si $R(A) \in A$ y $R(A) \notin R(A)$, obtendríamos que $R(A) \in R(A)$ si y sólo si $R(A) \notin R(A)$, lo cual es absurdo. Por lo tanto $R(A) \notin A$. □

Cuando en una sección posterior enunciemos el axioma de regularidad, demostraremos que de hecho, para cada conjunto A, $R(A) = A$.

A diferencia de lo que ocurre con el conjunto vacío, que es el mínimo respecto de la inclusión, no hay ningún conjunto que sea máximo respecto de la inclusión como pone de manifiesto el siguiente

Corolario 2.6.3. *Para cada conjunto A, hay un conjunto B tal que $A \subset B$. Por consiguiente no hay ningún conjunto máximo respecto de la inclusión.*

Demostración. Dado un conjunto A, es suficiente considerar $B = A \cup \{R(A)\}$, o cuando dispongamos del axioma de regularidad $A \cup \{A\}$.

□

Ejercicio 2.6.4. Demuéstrese que suponiendo la existencia de al menos un conjunto, entonces existe el conjunto vacío.

Teorema 2.6.5 (Cantor)**.** *No existe el conjunto del cual sean miembros precisamente todos los conjuntos. Por consiguiente no hay ningún conjunto que sea máximo respecto de la pertenencia.*

Demostración. Si existiera el conjunto de todos los conjuntos, i.e., el conjunto $V = \{ x \mid x = x \}$, entonces debería existir, en virtud del esquema axiomático de separación, el conjunto $R(V) = \{ x \in V \mid x \notin x \}$, que es precisamente el conjunto $R = \{ x \mid x \notin x \}$, pero tal conjunto no existe, por el Teorema 2.5.2, luego no existe el conjunto de todos los conjuntos.

□

2.7. Algunas operaciones conjuntistas derivadas.

Proposición 2.7.1. *Sea $\mathcal{X}$ un conjunto no vacío. Entonces hay un único conjunto cuyos miembros son precisamente aquellos conjuntos que pertenecen a todos y cada uno de los miembros de $\mathcal{X}$. A tal conjunto lo denominamos el conjunto* intersección *de $\mathcal{X}$ y lo denotamos por $\bigcap \mathcal{X}$ o por $\bigcap_{X \in \mathcal{X}} X$.*

Demostración. Dado un conjunto no vacío $\mathcal{X}$, sea $X \in \mathcal{X}$, arbitrario pero fijo. Entonces, en virtud del esquema axiomático de separación, obtenemos el conjunto $\{ t \in X \mid \forall Y \, (Y \in \mathcal{X} \to t \in Y) \}$, que es precisamente $\bigcap_{X \in \mathcal{X}} X$. □

Así pues, para un conjunto no vacío $\mathcal{X}$, tenemos que

$$\bigcap \mathcal{X} = \{\, t \mid \forall X \,(\, X \in \mathcal{X} \to t \in X \,)\,\}.$$

Además, no definimos la intersección del conjunto vacío, porque tal conjunto debería ser el conjunto formado por todos los conjuntos t tales que para cada X, si $X \in \varnothing$, entonces $t \in X$, i.e., sería el conjunto de todos los conjuntos, ya que el antecedente del condicional es falso, pero tal conjunto, por 2.6.5, no existe. Otro modo de justificar que no existe $\bigcap \varnothing$ es el siguiente. Si existiera $\bigcap \varnothing$, entonces, ya que, para cada conjunto X, se cumple que $\varnothing \subseteq X$, tendríamos, en particular que, para cada conjunto X, se cumple que $\varnothing \subseteq \{X\}$. Por lo tanto, para cada conjunto X, $\bigcap\{X\} = X \subseteq \bigcap \varnothing$. Ahora bien, no hay ningún conjunto que contenga a cualquier conjunto, ya que, para cada conjunto A, existe un conjunto B, e.g., $B = A \cup \{R(A)\}$, siendo $R(A) = \{x \in A \mid x \notin x\}$, tal que $A \subset B$.

Proposición 2.7.2. *Sean X e Y dos conjuntos. Entonces hay un único conjunto cuyos miembros son precisamente aquellos conjuntos que pertenecen a X e Y. A tal conjunto lo denominamos la* intersección (binaria) *de X e Y y lo denotamos por $X \cap Y$.*

Demostración. Sean X e Y dos conjuntos. Entonces, por el axioma del conjunto par no ordenado, obtenemos el conjunto $\{X, Y\}$ y, por la Proposición 2.7.1, el conjunto $X \cap Y$. □

De manera que, para dos conjuntos X e Y, tenemos que

$$X \cap Y = \{\, t \mid t \in X \wedge t \in Y \,\}.$$

Definición 2.7.3. Dos conjuntos X e Y son *disjuntos*, y lo denotamos por $X \perp Y$, si $X \cap Y = \varnothing$. Además, decimos que un conjunto $\mathcal{X}$ es un conjunto de conjuntos *dos a dos disjuntos* si, para cada Y, $Z \in \mathcal{X}$, si $Y \neq Z$, entonces Y y Z son disjuntos.

Proposición 2.7.4. *Sean X, Y y Z tres conjuntos, entonces hay un único conjunto del cual son miembros exactamente aquellos conjuntos que pertenezcan a todos y cada uno de los conjuntos dados. A tal conjunto lo denotamos por $X \cap Y \cap Z$.*

Demostración. Es suficiente considerar $\bigcap\{X, Y, Z\}$. □

Proposición 2.7.5. *Sean X e Y dos conjuntos. Entonces hay un único conjunto cuyos miembros son precisamente aquellos conjuntos que pertenecen a X y no pertenecen a Y. A tal conjunto lo denominamos la* diferencia *o la* diferencia relativa *de Y en X y lo denotamos por $X - Y$, o por $X \setminus Y$.*

Demostración. Dados dos conjuntos X e Y, es suficiente, en virtud del esquema axiomático de separación, que consideremos el conjunto $\{\, t \in X \mid t \notin Y \,\}$. □

Debemos observar que en la proposición anterior los conjuntos X e Y son arbitrarios, en particular, no se exige que $Y \subseteq X$.

Proposición 2.7.6. *Para cualquier conjunto X, se cumple que no existe el conjunto que consta precisamente de todos los conjuntos que no pertenecen a X, i.e., no existe el complementario absoluto de X.*

Demostración. Sea X un conjunto y supongamos que exista el conjunto

$$\{\, t \mid t \notin X \,\}.$$

Entonces, por el axioma del conjunto unión, existiría el conjunto $X \cup \{\, t \mid t \notin X \,\}$, pero tal conjunto sería el conjunto de todos los conjuntos que, por el Teorema 2.6.5, no existe. Por consiguiente no existe el *complementario absoluto* de X. □

No obstante, ya que en muchas ocasiones se toma un conjunto X, arbitrario, pero fijo, como universo de discurso y en el se llevan a cabo ciertas construcciones, conviene considerar, en particular, la noción de *complementario relativo* en X.

Proposición 2.7.7. *Dado un conjunto X, considerado como universo de discurso local, y para un subconjunto Y de X, existe el conjunto de todos los conjuntos que pertenecen a X pero que no pertenecen a Y, i.e., existe el* complementario relativo *de Y en X, al que denotamos por $\complement_X Y$.*

Demostración. Esta Proposición es el caso particular de la Proposición 2.7.5, cuando el conjunto Y, en lugar de ser arbitrario, es un subconjunto de X. □

Para un conjunto X y un subconjunto Y de X se cumple que $\complement_X Y$ es la unión de todos los subconjuntos Z de X que son disjuntos de Y, i.e., $\complement_X Y = \bigcup_{\substack{Z\subseteq X\\ Y\cap Z=\varnothing}} Z$, i.e., $\complement_X Y$ es el máximo subconjunto de X disjunto de Y. También se cumple que $\complement_X Y$ es la intersección de todos los subconjuntos Z de X que son suplementarios de Y, i.e., $\complement_X Y = \bigcap_{\substack{Z\subseteq X\\ Y\cup Z=X}} Z$, i.e., $\complement_X Y$ es el mínimo subconjunto de X suplementario de Y. Todo esto significa, por una parte, que la formación del complementario relativo es definible en términos de otras operaciones conjuntistas, la unión y la intersección, y, por otra, que la primera ecuación está íntimamente ligada al principio de contradicción, mientras que la segunda lo está al principio del tercio excluso. Naturalmente estas consideraciones se pueden extrapolar a otros ámbitos, con las correcciones adecuadas, p.ej., a la lógica, considerando el complemento lógico de un sistema deductivo en una lógica abstracta, o a la topología, considerando la clausura de una parte de un espacio topológico.

Proposición 2.7.8. *Sean X e Y dos conjuntos. Entonces hay un único conjunto, al que denotamos por $X \oplus Y$ y denominamos la* diferencia simétrica *de X e Y, que consta precisamente de los conjuntos que pertenecen a X pero no a Y, junto con los conjuntos que pertenecen a Y pero no a X.*

Demostración. Dados X e Y, es suficiente que consideremos $(X-Y)\cup(Y-X)$. □

Haciendo uso de los conceptos de clase y de diferencia simétrica, podemos reformular el axioma de extensionalidad como:

- **Axioma de extensionalidad**. Si denotamos por V^2 la clase de todos los pares de conjuntos (X,Y), entonces de V^2 en V tenemos, entre otras, a las dos transformaciones $\oplus$ y $\kappa_\varnothing$, la primera asigna al par (X,Y) el conjunto $X \oplus Y$ y la segunda le asigna $\varnothing$. Entonces, el axioma de extensionalidad afirma que el *igualador* de $\oplus$ y $\kappa_\varnothing$, denotado por $\mathrm{Eq}(\oplus,\kappa_\varnothing)$ y definido como la clase $\mathrm{Eq}(\oplus,\kappa_\varnothing) = \{\,(X,Y) \mid X\oplus Y = \varnothing\,\}$, está incluido en Δ_V, siendo Δ_V, la *diagonal* de V^2, i.e., la clase $\{\,(X,Y) \mid X = Y\,\}$.

Ahora consideramos algunas de las relaciones más relevantes que subsisten entre el operador de formación del conjunto de las partes de un conjunto dado y los restantes operadores hasta ahora introducidos.

Proposición 2.7.9.

1. $\varnothing, A \in \mathrm{Sub}(A)$.
2. $\mathrm{Sub}(\varnothing) = \{\varnothing\}$.
3. $A \subseteq B$, *si y sólo si* $\mathrm{Sub}(A) \subseteq \mathrm{Sub}(B)$.
4. $\mathrm{Sub}(A\cap B) = \mathrm{Sub}(A)\cap \mathrm{Sub}(B)$.
5. $\mathrm{Sub}(A)\cup \mathrm{Sub}(B) \subseteq \mathrm{Sub}(A\cup B)$.
6. $\mathrm{Sub}(A)\cup \mathrm{Sub}(B) = \mathrm{Sub}(A\cup B)$ *si y sólo si* $A \subseteq B$ *o* $B \subseteq A$.

Demostración. □

Ejercicio 2.7.10. Demuéstrese que para cualesquiera conjuntos A y B se cumple que:

1. $\mathrm{Sub}(A - B) - \{\varnothing\} \subseteq \mathrm{Sub}(A) - \mathrm{Sub}(B)$.
2. $(\mathrm{Sub}(A - B) - \{\varnothing\}) \cup (\mathrm{Sub}(B - A) - \{\varnothing\}) \subseteq \mathrm{Sub}(A) \oplus \mathrm{Sub}(B)$.

Definimos a continuación una operación binaria, el *condicional*, sobre los subconjuntos de un conjunto.

Definición 2.7.11. Sea A un conjunto y X e Y dos subconjuntos de A. Entonces denotamos por $X \Rightarrow Y$ el subconjunto de A definido como:

$$X \Rightarrow Y = \big(\complement_A X\big) \cup Y,$$

y lo denominamos el *condicional* de X e Y. Además, denotamos por $X \Leftrightarrow Y$ el subconjunto de A definido como:

$$X \Leftrightarrow Y = (\complement_A X \cup Y) \cap (\complement_A Y \cup X),$$

y lo denominamos el *bicondicional* de X e Y.

Ejercicio 2.7.12. Sea A un conjunto y X e Y dos subconjuntos de A. Demuéstrese que $X \Rightarrow Y$ es el máximo subconjunto de A tal que $X \cap (X \Rightarrow Y) \subseteq Y$

2.8. Propiedades de la relación de inclusión. A continuación, enunciamos las propiedades fundamentales de la relación de inclusión entre conjuntos. Tales propiedades establecen, esencialmente, que el universo de los conjuntos está ordenado, bajo la relación de inclusión, que no es una cadena i.e., que hay pares de conjuntos incomparables respecto de la inclusión, y que el conjunto vacío es el mínimo de tal universo. Además, por el Corolario 2.6.3, el universo de los conjuntos no tiene un máximo, respecto de la relación de inclusión.

Proposición 2.8.1.

1. $\varnothing \subseteq A$ *($\varnothing$ es el mínimo para la inclusión).*
2. $A \subseteq A$ *(Reflexividad).*
3. *Si* $A \subseteq B$ *y* $B \subseteq A$*, entonces* $A = B$ *(Antisimetría).*
4. *Si* $A \subseteq B$ *y* $B \subseteq C$*, entonces* $A \subseteq C$ *(Transitividad).*
5. *Hay dos conjuntos incomparables respecto de la relación de inclusión, i.e., hay dos conjuntos* A *y* B *tales que ni* $A \subseteq B$*, ni* $B \subseteq A$ *(No conectividad).*

Demostración. Para la última parte es suficiente considerar, p. ej., los conjuntos $\{\varnothing\}$ y $\{\{\varnothing\}\}$. □

Ejercicio 2.8.2. Demuéstrese que si $A \subseteq \varnothing$, entonces $A = \varnothing$.

Proposición 2.8.3.

1. $A \not\subset A$ *(Irreflexividad).*
2. *Si* $A \subset B$ *y* $B \subseteq C$*, entonces* $A \subset C$*.*
3. *Si* $A \subseteq B$ *y* $B \subset C$*, entonces* $A \subset C$*.*
4. *Si* $A \subset B$ *y* $B \subset C$*, entonces* $A \subset C$ *(Transitividad).*
5. *Si* $A \subset B$*, entonces* $B \not\subset A$ *(Asimetría).*

Demostración. □

Ejercicio 2.8.4. Sean A y B dos conjuntos. Demuéstrese que:

1. $\varnothing \subset A$ si y sólo si $A \neq \varnothing$.
2. $A \not\subset \varnothing$.
3. Si $A \subset B$, entonces $B \nsubseteq A$.

3. Propiedades de las operaciones Booleanas.

En esta sección estudiamos algunas de las propiedades de las operaciones Booleanas, concretamente de la unión, unión binaria, intersección, intersección binaria, diferencia, diferencia simétrica y la complementación. Postponemos el tratamiento de otras propiedades de las operaciones anteriores hasta la introducción, en la próxima sección, de la noción de función.

3.1. Propiedades de la unión. De entre las propiedades de la unión que enunciamos en la proposición que sigue, son especialmente importantes las dos últimas, debido a que establecen que la unión de un conjunto es el mínimo conjunto que contiene a cada uno de los conjuntos que le pertenecen o, lo que es equivalente, es el extremo superior, respecto de la inclusión, de los conjuntos del conjunto en cuestión.

Proposición 3.1.1.
1. *$A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$.*
2. *Si $A \subseteq X$ y $B \subseteq X$, entonces $A \cup B \subseteq X$.*
3. *$\bigcup \varnothing = \varnothing$.*
4. *$\bigcup \{x\} = x$.*
5. *Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ (Isotonía).*
6. *$\bigcup(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = (\bigcup \mathcal{A}) \cup (\bigcup \mathcal{B})$.*
7. *$\bigcup(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \subseteq (\bigcup \mathcal{A}) \cap (\bigcup \mathcal{B})$.*
8. *Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$.*
9. *Si B es tal que, para cada $A \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \subseteq B$.*

Demostración. □

Ejercicio 3.1.2. Demuéstrese que:
1. $A = \bigcup \mathrm{Sub}(A)$.
2. $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Sub}\left(\bigcup \mathcal{A}\right)$

Proposición 3.1.3.
1. *$A \cup \varnothing = A$ ($\varnothing$ es neutro para la unión binaria).*
2. *$A \cup A = A$ (Idempotencia).*
3. *$A \cup B = B \cup A$ (Conmutatividad).*
4. *$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (Asociatividad).*
5. *$A \subseteq B$ si y sólo si $A \cup B = B$.*
6. *Si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$, entonces $A \cup C \subseteq B \cup D$ (Isotonía).*

Demostración. La idempotencia se cumple, esencialmente, porque $\{A, A\} = \{A\}$, ya que de dicha propiedad obtenemos

$$A \cup A = \bigcup \{A, A\} = \bigcup \{A\} = A.$$

La conmutatividad se cumple, esencialmente, porque $\{A, B\} = \{B, A\}$, ya que de dicha propiedad obtenemos

$$A \cup B = \bigcup \{A, B\} = \bigcup \{B, A\} = B \cup A.$$

La asociatividad se cumple porque, por una parte, tenemos que

$$A \cup (B \cup C) = (\bigcup \{A\}) \cup (\bigcup \{B, C\}) = \bigcup(\{A\} \cup \{B, C\}) = \bigcup \{A, B, C\},$$

y, por otra, que

$$(A \cup B) \cup C = (\bigcup \{A, B\}) \cup (\bigcup \{C\}) = \bigcup(\{A, B\} \cup \{C\}) = \bigcup \{A, B, C\},$$

□

Ejercicio 3.1.4. Demuéstrese que:

1. $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cup B = B$. Por lo tanto la relación de inclusión entre conjuntos es definible a partir de la operación binaria de la unión.
2. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$.
3. $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.
4. $(A - B) \cup C = (A \cup C) - (B - C)$.
5. $(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C)$.

3.2. Propiedades de la intersección. De entre las propiedades de la intersección que enunciamos en la proposición que sigue, son especialmente importantes las dos últimas, debido a que establecen que la intersección de un conjunto no vacío es el máximo conjunto que está contenido a cada uno de los conjuntos que le pertenecen o, lo que es equivalente, es el extremo inferior, respecto de la inclusión, de los conjuntos del conjunto en cuestión.

Proposición 3.2.1.

1. *$A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$.*
2. *Si $X \subseteq A$ y $X \subseteq B$, entonces $X \subseteq A \cap B$.*
3. *$\bigcap\{x\} = x$.*
4. *Si $\mathcal{A} \neq \varnothing$ y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, entonces $\bigcap \mathcal{B} \subseteq \bigcap \mathcal{A}$ (Antimonotonía).*
5. *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ no son vacíos, entonces $\bigcap(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = (\bigcap \mathcal{A}) \cap (\bigcap \mathcal{B})$.*
6. *Si $\mathcal{A} \neq \varnothing$ y $A \in \mathcal{A}$, entonces $\bigcap \mathcal{A} \subseteq A$.*
7. *Si $\mathcal{A} \neq \varnothing$ y B es tal que, para cada $A \in \mathcal{A}$, $B \subseteq A$, entonces $B \subseteq \bigcap \mathcal{A}$.*

Demostración. □

Ejercicio 3.2.2. Demuéstrese que si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ no son vacíos y $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \varnothing$, entonces $(\bigcap \mathcal{A}) \cup (\bigcap \mathcal{B}) \subseteq \bigcap(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$.

Proposición 3.2.3.

1. *$A \cap \varnothing = A$ ($\varnothing$ es un aniquilador para la intersección binaria).*
2. *$A \cap A = A$ (Idempotencia).*
3. *$A \cap B = B \cap A$ (Conmutatividad).*
4. *$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C)$ (Asociatividad).*
5. *$A \subseteq B$ si y sólo si $A \cap B = A$.*
6. *Si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$, entonces $A \cap C \subseteq B \cap D$ (Isotonía).*

Demostración. □

Ejercicio 3.2.4. Demuéstrese que $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cap B = A$. Por lo tanto la relación de inclusión entre conjuntos es definible a partir de la operación binaria de intersección.

Proposición 3.2.5.

1. *$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Distributividad).*
2. *$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Distributividad).*
3. *$A \cup (A \cap B) = A$ (Absorción).*
4. *$A \cap (A \cup B) = A$ (Absorción).*

Demostración. □

La generalización de la distributibidad de la unión respecto de la intersección a un conjunto A y un conjunto no vacío $\mathcal{B}$, i.e., la ecuación:

$$A \cup (\textstyle\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B) = \bigcap\{\, A \cup B \mid B \in \mathcal{B} \,\}$$

presupone la existencia del conjunto $\{\, A \cup B \mid B \in \mathcal{B} \,\}$. Ahora bien, tal conjunto existe debido a que, usando el esquema axiomático de separación, lo obtenemos como parte del conjunto $\mathrm{Sub}(A \cup \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B)$, porque, para cada $B \in \mathcal{B}$, se cumple que $A \cup B \subseteq A \cup \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$. Del mismo modo, la generalización de la distributibidad de la intersección respecto de la unión a un conjunto A y un conjunto $\mathcal{B}$, i.e., la ecuación:

$$A \cap (\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B) = \bigcup\{\, A \cap B \mid B \in \mathcal{B} \,\}$$

presupone la existencia del conjunto $\{\, A \cap B \mid B \in \mathcal{B} \,\}$. Pero, tal conjunto existe debido a que, usando el esquema axiomático de separación, lo obtenemos como parte del conjunto $\mathrm{Sub}(A)$, porque, para cada $B \in \mathcal{B}$, $A \cap B \subseteq A$.

Ejercicio 3.2.6. Demuéstrese que dado un conjunto A existe el conjunto

$$\{\, \mathrm{Sub}(a) \mid a \in A \,\}.$$

Tomar en consideración que si $a \in A$, entonces $a \subseteq \bigcup A$, luego $\mathrm{Sub}(a) \subseteq \mathrm{Sub}(\bigcup A)$, por lo tanto $\mathrm{Sub}(a) \in \mathrm{Sub}(\mathrm{Sub}(\bigcup A))$.

Ejercicio 3.2.7. Demuéstrese que dado un conjunto A existe el conjunto

$$\{\, \{a\} \mid a \in A \,\}.$$

Tomar en consideración que si $a \in A$, entonces $\{a\} \subseteq A$, i.e., $\{a\} \in \mathrm{Sub}(A)$.

Ejercicio 3.2.8. Demuéstrese que dado un conjunto A existe el conjunto

$$\{\, \bigcup a \mid a \in A \,\}.$$

Tomar en consideración que si $a \in A$, entonces $a \subseteq \bigcup A$, luego $\bigcup a \subseteq \bigcup\bigcup A$, i.e., $\bigcup a \in \mathrm{Sub}(\bigcup\bigcup A)$.

3.3. Propiedades de la diferencia.

Proposición 3.3.1.

1. *$C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$ (De Morgan).*
2. *$C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$ (De Morgan).*
3. *$A \cap (C - A) = \varnothing$.*
4. *$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$.*
5. *$A \subseteq B$ si y sólo si $A - B = \varnothing$.*

Demostración. □

La generalización de las leyes de De Morgan a un conjunto C y un conjunto no vacío $\mathcal{B}$, i.e., las ecuaciones:

$$C - \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = \bigcap\{\, C - B \mid B \in \mathcal{B} \,\} \text{ y } C - \bigcap_{B\in\mathcal{B}} B = \bigcup\{\, C - B \mid B \in \mathcal{B} \,\}$$

presuponen la existencia del conjunto $\{\, C - B \mid B \in \mathcal{B} \,\}$. Ahora bien, tal conjunto existe debido a que, usando el esquema axiomático de separación, lo obtenemos como parte del conjunto $\mathrm{Sub}(C)$, porque, para cada $B \in \mathcal{B}$, $C - B \subseteq C$.

Ejercicio 3.3.2. Demuéstrese que:

1. $A - A = \varnothing$.
2. $A - \varnothing = A$.
3. $\varnothing - A = \varnothing$.

Proposición 3.3.3.

1. *$\complement_X X = \varnothing$.*
2. *$\complement_X \varnothing = X$.*
3. *Si $A \subseteq X$, entonces $\complement_X \complement_X A = A$ (Involución).*
4. *Si $A \subseteq X$, entonces $A \cup \complement_X A = X$.*
5. *Si $A \subseteq X$, entonces $A \cap \complement_X A = \varnothing$.*
6. *Si $A, B \subseteq X$, entonces $\complement_X (A \cup B) = \big(\complement_X A\big) \cap \big(\complement_X B\big)$ (De Morgan).*
7. *Si $A, B \subseteq X$, entonces $\complement_X (A \cap B) = \big(\complement_X A\big) \cup \big(\complement_X B\big)$ (De Morgan).*

8. *Si* $A, B \subseteq X$, *entonces* $A \subseteq B$ *si y sólo si* $\complement_X B \subseteq \complement_X A$.

Demostración. □

Ejercicio 3.3.4. Demuéstrese que:

1. Si $A, B \subseteq X$, entonces son equivalentes:
   a) $A \cap B = \varnothing$.
   b) $A \subseteq \complement_X B$.
   c) $B \subseteq \complement_X A$.
2. Si $A, B \subseteq X$, entonces son equivalentes:
   a) $A \cup B = X$.
   b) $\complement_X A \subseteq B$.
   c) $\complement_X B \subseteq A$.
3. Si $A, B \subseteq X$, entonces $A - B = A \cap \complement_X B$.

Proposición 3.3.5. *Sean* X, Y *y* Z *tres conjuntos. Entonces se cumple que:*

1. $X \oplus X = \varnothing$.
2. $X \oplus \varnothing = X$.
3. $X \oplus Y = Y \oplus X$.
4. $(X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus (Y \oplus Z)$.
5. $X \oplus Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$

Demostración. □

4. Relaciones.

La teoría de conjuntos, en un primer momento, se ocupa del estudio de los conjuntos, considerados como objetos amorfos, i.e., desprovistos de cualquier tipo de estructura, mediante diferentes clases de morfismos, e.g., relaciones, funciones parciales y funciones. Posteriormente, para profundizar en el estudio de la naturaleza de los conjuntos, se les dota de diversas estructuras, siendo las fundamentales las de tipo relacional, algebraico, topológico y analítico y se les compara mediante los morfismos adecuados.

De entre las diferentes maneras de comparar a los conjuntos amorfos entre si, para determinar su magnitud relativa, la fundamental, tal como veremos al tratar el teorema de Cantor-Bernstein, es a través de las funciones. Ahora bien, el concepto de función del que actualmente se dispone, es el resultado de un largo proceso de generalizaciones sucesivas y, para no remontarnos en exceso en el tiempo, recordamos que tal concepto, aplicado a dominios numéricos y en sentido extensional, proviene, esencialmente, de Dirichlet y del profundo estudio que éste hizo de los trabajos de Fourier sobre la representación de las funciones numéricas mediante series trigonométricas, que también estuvo, dicho sea de paso, en el origen de la teoria de conjuntos de Cantor.

Para Dirichlet, una función numérica (contínua) era una *correspondencia* que asignaba a *cada número*, de un cierto *dominio numérico de variación*, y de manera *unívoca*, otro número, de otro *dominio numérico de valores*. Posteriormente, tal concepto fue generalizado, entre otros, por Cantor, Dedekind, Frege y Peano, hasta conjuntos arbitrarios, i.e., dominios no necesariamente numéricos.

4.1. Pares ordenados. En la teoría de conjuntos se da cuenta del concepto de función, sin que con ello se pretenda en absoluto dilucidar qué sean las funciones *en si*, reduciéndolo al de relación y este, a su vez, al de par ordenado. Antes de pasar a definir la noción de par ordenado de Kuratowski, que, en principio, tiene una forma aparentemente arbitraria, y para entender el por qué de ésa definición, convenie, por una parte, saber, aunque sea adelantándose al tratamiento formal de los órdenes lineales, que llevaremos a cabo en una sección posterior, que una *ordenación lineal* sobre un conjunto A es, según la definió Cantor, un determinado *orden de precedencia*, que gobierna a sus miembros, de manera que de cualesquiera dos miembros x e y de A, uno tiene el rango *inferior* y el otro el *superior* y eso de tal modo que, si de tres miembros x, y y z de A, x tiene un rango inferior a y e y un rango inferior a z, entonces el rango de x es inferior al de z o, denotando por $<$ el orden de precedencia entre los miembros de A y simbolizando por $x < y$ el que el rango de x sea inferior al rango de y, cuando la relación $<$ tenga las siguientes propiedades:

- $\forall x \in A(x \not< x)$ (Irreflexividad);
- $\forall x, y \in A(x \neq y \to (x < y \lor y < x))$ (Disyuntividad);
- $\forall x, y, z \in A((x < y \land y < z) \to x < z)$ (Transitividad);

y, por otra, que Hessenberg, Kuratowski y otros autores, demostraron que una ordenación lineal sobre A se puede establecer, considerando un subconjunto $\mathcal{M}$ de $\mathrm{Sub}(A)$ que cumpla las siguientes condiciones:

- $\forall X, Y \in \mathcal{M}(X \subseteq Y \lor Y \subseteq X)$.
- $\forall x, y \in A(x \neq y \to \exists G \in \mathcal{M}((x \in G \land y \notin G) \lor (y \in G \land x \notin G))$.
- $\forall \mathcal{X} \subseteq \mathcal{M}(\bigcup \mathcal{X} \in \mathcal{M})$.
- $\forall \mathcal{X} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{X} \neq \varnothing \to \bigcap \mathcal{X} \in \mathcal{M})$.
- $A \in \mathcal{M}$.

En efecto, si $\mathcal{M}$ cumple las condiciones anteriores, entonces definiendo la relación $<$ sobre A, para cualesquiera x e $y \in A$, como:

$$x < y \leftrightarrow \exists G \in \mathcal{M}(x \in G \land y \notin G),$$

se cumple que la relación $<$ es un orden lineal sobre A i.e., es irreflexiva, transitiva y conexa.

En particular, si $A = \{x, y\}$, siendo $x \neq y$, entonces los únicos subconjuntos de $\mathrm{Sub}(A)$ que cumplen las condiciones anteriores son:

$$\{\varnothing, \{x\}, \{x, y\}\} \quad \text{y} \quad \{\varnothing, \{y\}, \{x, y\}\}.$$

Usando la definición del orden lineal determinado por ellos, estos órdenes totales deben corresponder, resp., a los órdenes $x < y$ y $y < x$ sobre A. Si se ignora $\varnothing$, entonces $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ corresponde a $x < y$ y $\{\{y\}, \{x, y\}\}$ corresponde a $y < x$. Esto, junto a la proposición que sigue, es lo que posiblemente indujo a Kuratowski a definir el *par ordenado* determinado por x e y como:

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Proposición 4.1.1. *Sean x e y dos conjuntos. Entonces hay un único conjunto, cuyos miembros son exactamente $\{x\}$ y $\{x, y\}$. A tal conjunto lo denominamos el* par ordenado *cuya* primera coordenada *es x y cuya* segunda coordenada *es y, y lo denotamos por (x, y).*

Demostración. A partir de los conjuntos x e y, en virtud del axioma del conjunto par no ordenado, obtenemos los conjuntos $\{x\}$ y $\{x, y\}$, y entonces, otra vez por el mismo axioma, obtenemos el conjunto $\{\,\{x\}, \{x, y\}\,\}$, cuyos miembros son exactamente $\{x\}$ y $\{x, y\}$. □

Conviene decir que la definición de par ordenado de Kuratowski, no es la única. Otra definición del mismo concepto fue dada, con anterioridad, por Wiener, también para reducir el concepto de relación a conceptos conjuntistas, pero considerando el sistema de los *Principia Mathematica* de Russell & Whitehead, como:

$$(x, y) = \{\{\varnothing, \{x\}\}, \{\{y\}\}\}.$$

No obstante, sea cual sea la definición adoptada, lo esencial es que se cumpla que la operación $(\cdot\,,\cdot)$ sea inyectiva.

Lema 4.1.2. *Sean x, y, x' e y' cuatro conjuntos. Entonces una condición necesaria y suficiente para que $\{x, y\} = \{x', y'\}$ es que $x = x'$ e $y = y'$ o que $x = y'$ e $y = x'$.*

Proposición 4.1.3. *Sean x, y, x' e y' cuatro conjuntos. Entonces una condición necesaria y suficiente para que $(x, y) = (x', y')$ es que $x = x'$ e $y = y'$.*

Demostración. Nos limitamos a demostrar que la condición es necesaria. Supongamos que $(x, y) = (x', y')$, i.e., que $\{\,\{x\}, \{x, y\}\,\} = \{\,\{x'\}, \{x', y'\}\,\}$. Para continuar distinguimos dos casos, según que $x = y$ o que $x \neq y$.

Si $x = y$, entonces $(x, y) = \{\{x\}\}$, luego, ya que por hipótesis $(x, y) = (x', y')$, $(x', y') = \{\{x\}\}$. Por lo tanto $\{x'\} = \{x\}$ y $\{x', y'\} = \{x\}$, i.e., $x' = x$ y además $x' = x$ e $y' = x$, o, lo que es equivalente, $x' = x$ e $y' = x$. Por consiguiente los cuatro conjuntos coinciden.

Si $x \neq y$, entonces $x' \neq y'$, luego, ya que por hipótesis $(x, y) = (x', y')$, $\{x\} = \{x'\}$ y $\{x, y\} = \{x', y'\}$, i.e., $x = x'$ y $\{x, y\} = \{x', y'\}$. Por consiguiente $x = x'$ e $y = y'$ □

Proponemos a continuación otra demostración de la proposición anterior. Dados cuatro conjuntos x, y, x' e y', una condición necesaria y suficiente para que $(x, y) = (x', y')$ es que $x = x'$ e $y = y'$. En efecto, por lo que respecta a la necesidad, si $(x, y) = (x', y')$, entonces

$$\bigcap\bigcap(x, y) = x = x' = \bigcap\bigcap(x', y')$$

y

$$\bigcap\bigcup(x,y)\cup(\bigcup\bigcup(x,y)-\bigcup\bigcap(x,y)) = y = y' = \bigcap\bigcup(x',y')\cup(\bigcup\bigcup(x',y')-\bigcup\bigcap(x',y')).$$

Ejercicio 4.1.4. Demuéstrese que tanto la definición de Wiener de par ordenado, como la definición $(x, y) = \{\{\varnothing, x\}, \{\{\varnothing\}, y\}\}$, tienen la misma propiedad que tiene el par ordenado definido por Kuratowski.

Ejercicio 4.1.5. Demuéstrese que no hay un conjunto del cual sean miembros exactamente todos los pares ordenados. Si existiera el mencionado conjunto, entonces existiría, en virtud del esquema axiomático de separación, el conjunto de todos los pares ordenados de la forma (x, x), luego existiría la unión de la unión de tal conjunto, que es el conjunto de todos los conjuntos, contradicción.

A partir de la noción de par ordenado, definimos la de triplo ordenado, cuádruplo ordenado y, en general la de n-tupla ordenada. No obstante, la noción general de n-tupla ordenada, sólo estará plenamente justificada una vez dispongamos, en una sección posterior, del conjunto de los números naturales.

Definición 4.1.6. Sean x, y y z tres conjuntos. Entonces definimos el triplo ordenado determinado por x, y y z como:

$$(x, y, z) = ((x, y), z).$$

Supuesto definido el concepto de n-tupla ordenada, para $n \geq 3$ definimos el de $n + 1$-tupla ordenada como:

$$(x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n) = ((x_0, \ldots, x_{n-1}), x_n).$$

Ejercicio 4.1.7. Demuéstrese que para cada número natural $n \geq 3$ y cualesquiera conjuntos $x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n$, $y_0, \ldots, y_{n-1}, y_n$ son equivalentes:

1. $(x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (y_0, \ldots, y_{n-1}, y_n)$.
2. $\forall i \in n(x_i = y_i)$.

Observemos que el concepto de triplo ordenado podríamos haberlo definido como:

$$(x, y, z) = (x, (y, z)),$$

obteniendo resultados, esencialmente, equivalentes a los que se obtienen con la definición adoptada.

Ejercicio 4.1.8. Sean x, y, z, x', y' y z' seis conjuntos arbitrarios. Entonces son equivalentes:

1. $((x, y), z) = ((x', y'), z')$.
2. $(x, (y, z)) = (x', (y', z'))$.
3. $x = x'$, $y = y'$ y $z = z'$.

Observación 4.1.9. Dados tres conjuntos x, y, z, si el concepto de triplo ordenado (x, y, z) se definiera, no de manera recursiva como antes, sino como:

$$(x, y, z) = \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\},$$

entonces dicha definición no sería correcta, ya que, para $x \neq y$, se tendría que $(x, x, y) = (x, y, y)$, puesto que ambos coinciden con (x, y).

4.2. El producto cartesiano de conjuntos. Antes de definir la noción de relación (binaria), demostramos la existencia del producto cartesiano de dos conjuntos, que usaremos, entre otros fines, para caracterizar a las relaciones.

Lema 4.2.1. *Si x, $y \in A$, entonces $(x, y) \in \mathrm{Sub}(\mathrm{Sub}(A))$.*

Demostración. Puesto que $x, y \in A$, $\{x\} \in \mathrm{Sub}(A)$ y $\{x, y\} \in \mathrm{Sub}(A)$. Por lo tanto $(x, y) = \{\, \{x\}, \{x, y\} \,\} \in \mathrm{Sub}(\mathrm{Sub}(A))$. □

Proposición 4.2.2. *Sean A y B dos conjuntos. Entonces hay un único conjunto cuyos miembros son exactamente los pares ordenados (x, y) tales que $x \in A$ e $y \in B$. A tal conjunto lo denominamos el* producto cartesiano *de A y B y lo denotamos por $A \times B$.*

Demostración. Porque $A \times B$ es el subconjunto de $\mathrm{Sub}(\mathrm{Sub}(A \cup B))$ que obtenemos, en virtud del esquema axiomático de separación, como:

$$A \times B = \{\, z \in \mathrm{Sub}(\mathrm{Sub}(A \cup B)) \mid \exists x \in A\, \exists y \in B\, (z = (x, y)) \,\}$$

□

Corolario 4.2.3. *Sean A un conjunto. Entonces hay un único conjunto, al que denotamos por $A^{(2)}$, cuyos miembros son exactamente los pares ordenados (x, y) tales que $x, y \in A$.*

Demostración. Tal conjunto es el *producto cartesiano* de A consigo mismo. □

Lo mismo que antes, con la noción de n-tupla ordenada, a partir de la de producto cartesiano de dos conjuntos, que está fundamentada en última instancia sobre la de par ordenado, definimos la de producto cartesiano de cualesquiera n conjuntos $A_0, \ldots, A_{n-1}$, para $n \geq 3$.

Definición 4.2.4. Sean A, B y C tres conjuntos. Entonces definimos el producto cartesiano de A, B y C como:

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C.$$

Supuesto definido el concepto de producto cartesiano para cualesquiera n conjuntos, con $n \geq 3$, y dados los $n + 1$ conjuntos $A_0, \ldots, A_{n-1}, A_n$, definimos el producto cartesiano de los mismos como:

$$A_0 \times \ldots \times A_{n-1} \times A_n = (A_0 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n.$$

En particular, para $n \geq 3$, $A^{(n)}$ denota el producto cartesiano de A consigo mismo n veces, de modo que $A^{(n+1)} = A^{(n)} \times A$.

Observemos que el concepto de producto cartesiano de tres conjuntos podríamos haberlo definido como:

$$A \times B \times C = A \times (B \times C),$$

obteniendo resultados, esencialmente, equivalentes a los que se obtienen con la definición adoptada.

Proposición 4.2.5. *Sean A, B, A' y B' cuatro conjuntos. Si A y B no son vacíos, entonces $A \times B \subseteq A' \times B'$ si y sólo si $A \subseteq A'$ y $B \subseteq B'$.*

Demostración. Nos limitamos a demostrar que si A y B no son vacíos y $A \times B \subseteq A' \times B'$, entonces $A \subseteq A'$ y $B \subseteq B'$. Sea $x \in A$, entonces, por ser B no vacío, eligiendo un $y \in B$, tenemos que $(x, y) \in A \times B$, luego $(x, y) \in A' \times B'$, por lo tanto $x \in A'$. Así que $A \subseteq A'$. Del mismo modo se demuestra que $B \subseteq B'$. □

Proposición 4.2.6. *Sean A y B dos conjuntos. Entonces una condición necesaria y suficiente para que $A \times B \neq \varnothing$ es que $A \neq \varnothing$ y que $B \neq \varnothing$.*

Demostración. La condición es suficiente. Si $A \neq \varnothing$ y $B \neq \varnothing$, entonces, eligiendo un $x \in A$ y un $y \in B$, tenemos que $(x, y) \in A \times B$, luego $A \times B \neq \varnothing$.

La condición es necesaria. Si $A \times B \neq \varnothing$, entonces ni A ni B pueden ser vacíos □

Ejercicio 4.2.7. Sean A y B dos conjuntos. Demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que $A \times B = \varnothing$ es que $A = \varnothing$ o $B = \varnothing$

Proposición 4.2.8.

1. *Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$, entonces $A \times B \subseteq C \times D$ (Isotonía).*
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ *y*
   $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ *(Distributividad).*
3. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ *y*
   $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ *(Distributividad).*
4. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$ *y*
   $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$ *(Distributividad).*

Demostración. □

Ejercicio 4.2.9. Demuéstrese que:

1. Hay dos conjuntos A y B tales que $A \times B \neq B \times A$ (No conmutatividad estricta).
2. Hay tres conjuntos A, B y C tales que $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$ (No asociatividad estricta).
3. Hay un conjunto A tal que $A \cap (A \times A) \neq \varnothing$. Por ejemplo $A = \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$. Esto tiene como consecuencia que no se puede definir, en general, de manera natural una aplicación de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^{(n)}$ en $\mathbb{N}$ que asigne, unívocamente, a cada elemento de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^{(n)}$ su correspondiente "longitud". Es por ello por lo que este ejemplo es relevante cuando se trata de definir la noción de palabra sobre un alfabeto A. En principio, hay dos opciones razonables para una tal definición, una consiste en considerar que las palabras sobre A son funciones desde un número natural n hasta A, en cuyo caso tenemos una aplicación canónica de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Fnc}(n, A)$ en $\mathbb{N}$ que asigna, unívocamente, a cada palabra su "longitud"; la otra consiste en considerar que las palabras sobre A son n-tuplas ordenadas formadas con las letras de A, i.e., elementos de $A^{(n)}$, en cuyo caso no tendríamos, necesariamente, en virtud del ejemplo anterior, una aplicación canónica de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^{(n)}$ en $\mathbb{N}$ que asignara, unívocamente, a

cada palabra su "longitud", luego si se quisiera obtener una aplicación tal, entonces deberíamos considerar que las palabras sobre A son pares ordenados pertenecientes al conjunto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\{n\} \times A^{(n)})$. De las dos posibilidades, la primera tiene una complejidad lógica menor que la segunda, ya que una palabra sobre A, según la primera definición, tendría la forma

$$\{(0, a_0), \dots, (n-1, a_{n-1})\},$$

mientras que, según la segunda definición, tendría la forma

$$(n, (a_0, \dots, a_{n-1})).$$

4.3. Relaciones binarias. El estudio matemático de las relaciones fue iniciado, en la segunda mitad del siglo XIX, por De Morgan, Peirce, Schröder y Frege. A los dos primeros se les deben las nociones de relación *inversa* de una relación y de *composición* de dos relaciones, a Schröder un profundo estudio del *álgebra de las relaciones*, que fue aprovechado por Russell y Whitehead en sus *Principia Mathematica* y a Frege los conceptos de *clausura transitiva* de una relación y de *relación funcional* o *función*. Por lo que respecta al concepto de función, éste también fué considerado, en toda su generalidad, por Dedekind y Peano.

Definición 4.3.1. Un conjunto R es una *relación (binaria)* si todos sus miembros son pares ordenados i.e., si se cumple que:

$$\forall z(\, z \in R \rightarrow \exists x, y\, (\, z = (x, y)\,)).$$

Así pues, un conjunto R no será una relación precisamente cuando exista un z en R que no sea un par ordenado i.e., que sea tal que, para cualesquiera conjuntos x e y, $z \neq (x, y)$

Ejercicio 4.3.2. Demuéstrese que:

1. $\varnothing$ es una relación.
2. No hay un conjunto del cual sean miembros exactamente todas las relaciones. Si existiera, entonces, en virtud del esquema axiomático de separación, existiría el conjunto formado por todas las relaciones de la forma $\{(x, x)\}$, luego existiría la unión de la unión de la unión de tal conjunto, que es el conjunto de todos los conjuntos, contradicción.
3. Ni la inclusión ni la pertenencia determinan conjuntos. Pero si A es un conjunto, entonces

$$\subseteq_A = \{\, (x, y) \in A \mid x \subseteq y\,\} \quad y \quad \in_A = \{\, (x, y) \in A \mid x \in y\,\}$$

son relaciones, denominadas resp., la *restricción* de $\subseteq$ a A y de $\in$ a A.

Puesto que las relaciones no son más que un tipo especial de conjuntos, a ellas se les aplican todas las nociones y construcciones hasta ahora consideradas para los conjuntos. En particular, para ellas se cumple el *principio de extensionalidad*, tal como establece la siguiente proposición.

Proposición 4.3.3. *Sean R y S dos relaciones. Entonces:*

1. *Una condición necesaria y suficiente para que $R \subseteq S$ es que*

$$\forall x, y((x, y) \in R \rightarrow (x, y) \in S).$$

2. (Principio de extensionalidad para las relaciones) *Una condición necesaria y suficiente para que $R = S$ es que*

$$\forall x, y((x, y) \in R \leftrightarrow (x, y) \in S).$$

Demostración. Nos limitamos a demostrar la suficiencia de la condición de la primera parte, ya que la necesidad de la misma es evidente, y porque la segunda parte de la proposición se deduce de la primera inmediatamente.

La condición es suficiente. Sea $z \in R$. Entonces, por ser R una relación, hay dos conjuntos x e y tales que $z = (x, y)$, luego $(x, y) \in S$, por lo tanto $z \in S$. Así que $R \subseteq S$. □

Proposición 4.3.4.

1. *Si $\mathcal{R}$ es un conjunto cuyos miembros son todos relaciones, entonces $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$ es una relación.*
2. *Si $\mathcal{R}$ es un conjunto no vacío y sus miembros son todos relaciones, entonces $\bigcap_{R \in \mathcal{R}} R$ es una relación.*
3. *Si R y S son relaciones, entonces $R - S$ es una relación.*

Demostración. □

5. Operaciones sobre las relaciones.

5.1. Dominio, imagen y campo de una relación. A continuación enunciamos una propiedad que tienen los pares ordenados respecto de su pertenencia a los conjuntos, que usaremos en la demostración de la existencia del *dominio*, la *imagen* y el *campo* de una relación.

Lema 5.1.1. *Sean x, y y R conjuntos. Si $(x, y) \in R$, entonces x, $y \in \bigcup\bigcup R$.*

Demostración. Se cumple que $x \in \bigcup\bigcup R$, porque

$$x \in \{x\} \in (x, y) \in R;$$

y que $y \in \bigcup\bigcup R$, porque

$$y \in \{\, x, y \,\} \in (x, y) \in R.$$

□

Proposición 5.1.2. *Si R es una relación, entonces:*

1. *Hay un único conjunto cuyos miembros son exactamente aquellos x para los que hay un y tal que $(x, y) \in R$. A este conjunto lo denominamos el* dominio de definición *o* de existencia *o simplemente el* dominio *de la relación R y lo denotamos por* $\mathrm{Dom}(R)$.
2. *Hay un único conjunto cuyos miembros son exactamente aquellos y para los que hay un x tal que $(x, y) \in R$. A este conjunto lo denominamos la* imagen *de la relación R y lo denotamos por* $\mathrm{Im}(R)$. *A lo que hemos denominado imagen de una relación, también se le conoce, entre otros, por* rango *de la relación. Hemos adoptado el término imagen, por ser el habitual en matemáticas.*

Además, al conjunto $\mathrm{Dom}(R) \cup \mathrm{Im}(R)$ *lo denominamos el* campo *de R y lo denotamos por* $\mathrm{Fld}(R)$.

Demostración. Por lo que respecta a la primera parte, es suficiente considerar el conjunto definido como:

$$\mathrm{Dom}(R) = \{\, x \in \bigcup\bigcup R \mid \exists y\,((x, y) \in R) \,\}.$$

Por lo que respecta a la segunda parte, es suficiente considerar el conjunto definido como:

$$\mathrm{Im}(R) = \{\, y \in \bigcup\bigcup R \mid \exists x\,((x, y) \in R) \,\}.$$

□

Ejercicio 5.1.3. Demuéstrese que los conceptos de *dominio*, *imagen* y *campo*, son predicables de cualquier conjunto, i.e., que tienen sentido para cualquier conjunto, y no sólo, para las relaciones.

Ejercicio 5.1.4. Si R es una relación, entonces $\mathrm{Fld}(R) = \bigcup\bigcup R$. Ahora bien, si R es un conjunto, que no es una relación, entonces, en general, $\mathrm{Fld}(R) \subseteq \bigcup\bigcup R$, y, por ejemplo, si $R = \{(x, y), 2\}$, siendo $2 = \{0, 1\}$, donde, a su vez, $0 = \varnothing$ y $1 = \{0\}$, entonces $\mathrm{Fld}(R) = \{x, y\}$, pero $\bigcup\bigcup R = \{x, y, 0\}$, luego $\mathrm{Fld}(R) \subset \bigcup\bigcup R$. Además, si un conjunto R es tal que $\mathrm{Fld}(R) = \bigcup\bigcup R$, entonces R no es necesariamente una relación, por ejemplo, si $R = \{\varnothing\}$, entonces $\mathrm{Fld}(R) = \varnothing = \bigcup\bigcup R$, pero R no es una relación.

Proposición 5.1.5. *Sea R un conjunto. Entonces una condición necesaria y suficiente para que R sea una relación es que $R \subseteq \mathrm{Dom}(R) \times \mathrm{Im}(R)$.*

Demostración. La condición es suficiente. Si $R \subseteq \mathrm{Dom}(R) \times \mathrm{Im}(R)$ y $z \in R$, entonces $z \in \mathrm{Dom}(R) \times \mathrm{Im}(R)$, luego hay un $x \in \mathrm{Dom}(R)$ y un $y \in \mathrm{Im}(R)$ tales que $z = (x, y)$, por lo tanto R es una relación.

La condición es necesaria. Si R es una relación y $z \in R$, entonces hay un x y un y tales que $z = (x, y)$, luego, en virtud del lema 5.1.1, x, $y \in \bigcup\bigcup R$, por lo tanto $x \in \mathrm{Dom}(R)$ e $y \in \mathrm{Im}(R)$, de donde $(x, y) \in \mathrm{Dom}(R) \times \mathrm{Im}(R)$. □

Proposición 5.1.6. *Sean R y S dos relaciones. Entonces:*

1. $\mathrm{Dom}(R \cup S) = \mathrm{Dom}(R) \cup \mathrm{Dom}(S)$ *e* $\mathrm{Im}(R \cup S) = \mathrm{Im}(R) \cup \mathrm{Im}(S)$.
2. $\mathrm{Dom}(R \cap S) \subseteq \mathrm{Dom}(R) \cap \mathrm{Dom}(S)$ *e* $\mathrm{Im}(R \cap S) \subseteq \mathrm{Im}(R) \cap \mathrm{Im}(S)$.
3. $\mathrm{Dom}(R) - \mathrm{Dom}(S) \subseteq \mathrm{Dom}(R - S)$ *e* $\mathrm{Im}(R) - \mathrm{Im}(S) \subseteq \mathrm{Im}(R - S)$.
4. *Si* $R \subseteq S$, *entonces* $\mathrm{Dom}(R) \subseteq \mathrm{Dom}(S)$ *e* $\mathrm{Im}(R) \subseteq \mathrm{Im}(S)$.
5. $\mathrm{Dom}(\varnothing) = \varnothing$ *e* $\mathrm{Im}(\varnothing) = \varnothing$.
6. $\mathrm{Fld}(R \cup S) = \mathrm{Fld}(R) \cup \mathrm{Fld}(S)$.
7. $\mathrm{Fld}(R \cap S) \subseteq \mathrm{Fld}(R) \cap \mathrm{Fld}(S)$.
8. $\mathrm{Fld}(R) - \mathrm{Fld}(S) \subseteq \mathrm{Fld}(R - S)$.
9. *Si* $R \subseteq S$, *entonces* $\mathrm{Fld}(R) \subseteq \mathrm{Fld}(S)$.
10. $\mathrm{Fld}(\varnothing) = \varnothing$.

Demostración. Supongamos que $x \in \mathrm{Dom}(R \cup S)$. Entonces $x \in \bigcup\bigcup(R \cup S)$ y existe un y tal que $(x, y) \in R \cup S$. Pero se cumple que

$$\bigcup\bigcup(R \cup S) = (\bigcup\bigcup R) \cup (\bigcup\bigcup S).$$

Por lo tanto $x \in \bigcup\bigcup R$ o $x \in \bigcup\bigcup S$ y existe un y tal que $(x, y) \in R$ o $(x, y) \in S$

Para la segunda parte hemos de tomar en consideración que de

$$\bigcup(R \cap S) \subseteq (\bigcup R) \cap (\bigcup S),$$

obtenemos que

$$\bigcup\bigcup(R \cap S) \subseteq \bigcup((\bigcup R) \cap (\bigcup S)) \subseteq (\bigcup\bigcup R) \cap (\bigcup\bigcup S).$$

Supongamos que $R \subseteq S$ y que $x \in \mathrm{Dom}(R)$. Entonces $x \in \bigcup\bigcup R$ y existe un y tal que $(x, y) \in R$. Pero, por ser $R \subseteq S$, tenemos que $\bigcup\bigcup R \subseteq \bigcup\bigcup S$. Por lo tanto $x \in \bigcup\bigcup S$ y existe un y tal que $(x, y) \in S$. De donde podemos concluir que $\mathrm{Dom}(R) \subseteq \mathrm{Dom}(S)$. La demostración de que $\mathrm{Im}(R) \subseteq \mathrm{Im}(S)$ es idéntica.

Para la séptima parte se ha de tomar en consideración que de

$$\mathrm{Dom}(R \cap S) \subseteq \mathrm{Dom}(R), \mathrm{Dom}(S) \text{ y } \mathrm{Im}(R \cap S) \subseteq \mathrm{Im}(R), \mathrm{Im}(S),$$

obtenemos que

$$\mathrm{Dom}(R \cap S) \cup \mathrm{Im}(R \cap S) \subseteq \mathrm{Dom}(R) \cup \mathrm{Im}(R), \mathrm{Dom}(S) \cup \mathrm{Im}(S).$$

□

5.2. El esquema axiomático de reemplazo. Para obtener la generalización de la primera parte de la última proposición de la subsección anterior hasta un conjunto de relaciones $\mathcal{R}$, i.e., que $\mathrm{Dom}(\bigcup_{R\in\mathcal{R}} R) = \bigcup\{\,\mathrm{Dom}(R) \mid R \in \mathcal{R}\,\}$ e $\mathrm{Im}(\bigcup_{R\in\mathcal{R}} R) = \bigcup\{\,\mathrm{Im}(R) \mid R \in \mathcal{R}\,\}$, hemos de establecer previamente que existen los conjuntos $\{\,\mathrm{Dom}(R) \mid R \in \mathcal{R}\,\}$ y $\{\,\mathrm{Im}(R) \mid R \in \mathcal{R}\,\}$, y ello es así, e.g., aplicando ciertas instancias del llamado *esquema axiomático de reemplazo*, en la versión de Skolem, que enunciamos a continuación, según el cual la imagen directa de un conjunto bajo una condición funcional es un conjunto, y que nos permitirá, no sólo asegurar la existencia de conjuntos como los anteriores y otros, sino también establecer, posteriormente, algún hecho de más enjundia tal como un principio de la definición por recursión transfinita, que generalizará al principio de la definición por recursión finita y, en definitiva, nos permitirá definir los números ordinales.

Esquema axiomático de reemplazo. *Para cada fórmula $\varphi(x, y, t_{[n]})$ cuyas variables libres sean x, y, $t_0,\ldots, t_{n-1}$, y en la que no ocurra B, si, para cualesquiera conjuntos $t_0,\ldots, t_{n-1}$ y A, se cumple que para cada $x \in A$ existe un único y tal que $\varphi(x, y, t_{[n]})$, entonces existe un conjunto B cuyos miembros son exactamente aquéllos conjuntos y para los que existe un $x \in A$ tal que $\varphi(x, y, t_{[n]})$:*

$$\forall(t_{[n]}), \forall A\,((\forall x \in A\,\exists! y\,\varphi(x, y, t_{[n]})) \rightarrow \exists B\forall y(y \in B \leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge \varphi(x, y, t_{[n]})))).$$

Así, tomando como fórmulas $y = \mathrm{Dom}(x)$ e $y = \mathrm{Im}(x)$ y para el conjunto de relaciones $\mathcal{R}$, obtenemos los conjuntos mencionados. También se puede establecer la existencia de tales conjuntos, haciendo uso del axioma del conjunto potencia e instancias del esquema axiomático de separación, como partes de $\mathrm{Sub}(\mathrm{Dom}(\bigcup_{R\in\mathcal{R}} R))$ y $\mathrm{Sub}(\mathrm{Im}(\bigcup_{R\in\mathcal{R}} R))$, ya que, para cada $R \in \mathcal{R}$, $\mathrm{Dom}(R) \subseteq \mathrm{Dom}(\bigcup_{R\in\mathcal{R}} R)$ e $\mathrm{Im}(R) \subseteq \mathrm{Im}(\bigcup_{R\in\mathcal{R}} R)$. No obstante, observemos que la vía del esquema axiomático de reemplazo es lógicamente más simple y directa que la otra vía, que supone el uso de un axioma, el del conjunto potencia, y una instancia del esquema axiomático de separación, siendo este último, en definitiva, un caso particular del esquema axiomático de reemplazo.

Procedemos a continuación a demostrar que el esquema axiomático de reemplazo nos permite obtener el producto cartesiano de dos conjuntos M y N. Dado un $n \in N$, tomando como A el conjunto M y como fórmula φ la fórmula $y = (x, n)$, obtenemos el conjunto $M \times \{n\}$ (que, para cada $n \in N$, es isomorfo a M y, además, para cualesquiera $n, n' \in N$, si $n \neq n'$, entonces $(M \times \{n\}) \cap (M \times \{n'\}) = \varnothing$). A continuación, tomando como A el conjunto M y como fórmula φ la fórmula $y = M \times \{x\}$, obtenemos el conjunto $\{M \times \{x\} \mid x \in N\}$. Por último, obtenemos $M \times N$ como $\bigcup\{M \times \{x\} \mid x \in N\}$.

Relacionado con lo anterior, recordamos que Cantor en 1895 escribió lo siguiente:

> Un conjunto con el número cardinal $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ se puede producir a partir de dos conjuntos M y N con los números cardinales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ de acuerdo con la siguiente regla: se parte del conjunto N y se reemplaza en él cada elemento n por un conjunto $M_n \sim M$; se reúnen los elementos de todos estos conjuntos M_n [de elementos disjuntos entre sí] en un todo S, entonces se ve fácilmente que
>
> $$S \sim (M \cdot N),$$
>
> por consiguiente
>
> $$\overline{\overline{S}} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}.$$
>
> Puesto que, en cualquier ley de coordinación que se da entre los dos conjuntos equivalentes M y M_n, [si] el elemento de M_n correspondiente al elemento m de M es denotado con m_n, entonces se tiene que
>
> $$S = \{m_n\},$$

> y se pueden relacionar por ello los conjuntos S y $(M \cdot N)$ de modo unívoco y recíproco, porque m_n y (m, n) pueden [contemplarse] como elementos correspondientes.

Según lo anterior, Cantor considera evidente que, dados dos conjuntos M y N, por cada $n \in N$, hay un conjunto $M_n \sim M$, i.e., isomorfo a M, y, además que, para cualesquiera $n, n' \in N$, si $n \neq n'$, entonces $M_n \cap M_{n'} = \varnothing$. Digamos que considera natural la siguiente asociación:

$$\begin{pmatrix} \dots, & n, & \dots, & n', & \dots \\ \dots, & M_n, & \dots, & M_{n'}, & \dots \end{pmatrix}$$

Ahora bien, Cantor no hace propiamente explícito ningún procedimiento que le permita definir los conjuntos M_n, con $n \in N$, cumpliendo, además, la propiedad de ser dos a dos disjuntos.

Resulta un tanto sorprendente que Zermelo, siendo un buen conocedor de la obra de Cantor y un extraordinario matemático, no extrajera el esquema axiomático de reemplazo de la anterior frase de Cantor (en la que, implícitamente, lo usa).

5.3. Funciones y aplicaciones no deterministas entre conjuntos. Estudiamos a continuación el concepto de *función no determinista*. La relevancia de tal concepto proviene, por una parte, de que mediante él comparamos a los conjuntos entre sí, de modo que un conjunto muestra lo que *es*, por lo que *hace*, concretamente, por sus interacciones con el resto de los conjuntos del universo de los conjuntos, y, por otra, del hecho de que tal concepto ocurre de modo natural en ámbitos tales como la lógica, a través de las reglas de inferencia, la semántica de los lenguajes de programación, como interpretación de los programas, o la teoría de funciones de variable compleja, como las funciones multiformes.

Definición 5.3.1. Sean A y B dos conjuntos y R una relación. Decimos que R es una *relación*, o una *multifunción* o una *función no determinista de A en B* si $\mathrm{Dom}(R) \subseteq A$ e $\mathrm{Im}(R) \subseteq B$. En particular, a las relaciones de A en A las denominamos *relaciones en A*.

Ejercicio 5.3.2. Demuéstrese que R es una *relación en A* i.e., una relación de A en A, si y sólo si $\mathrm{Fld}(R) \subseteq A$.

Proposición 5.3.3. *Sean A y B dos conjuntos y R una relación. Entonces una condición necesaria y suficiente para que R sea una relación de A en B es que $R \subseteq A \times B$. En particular, R es una relación en A si y sólo si $R \subseteq A \times A$.*

Demostración. La condición es suficiente. Supongamos que $R \subseteq A \times B$. Nos limitamos a demostrar que entonces $\mathrm{Dom}(R) \subseteq A$, ya que el argumento para demostrar que $\mathrm{Im}(R) \subseteq B$ es formalmente idéntico. Si $x \in \mathrm{Dom}(R)$, entonces hay un y tal que $(x, y) \in R$, luego $(x, y) \in A \times B$, por lo tanto $x \in A$.

La condición es necesaria. Si $\mathrm{Dom}(R) \subseteq A$ e $\mathrm{Im}(R) \subseteq B$, entonces dado un $z \in R$, hay un x y un y tales que $z = (x, y)$, luego $x \in \mathrm{Dom}(R)$ e $y \in \mathrm{Im}(R)$, por lo tanto $z \in A \times B$. □

Corolario 5.3.4. *Sean A y B dos conjuntos. Entonces existe un único conjunto cuyos miembros son exactamente las relaciones de A en B, al que denotamos por* $\mathrm{Rel}(A, B)$. *En particular, existe un único conjunto cuyos miembros son exactamente las relaciones en A, y lo denotamos por* $\mathrm{Rel}(A)$.

Demostración. Porque $\mathrm{Rel}(A, B) = \mathrm{Sub}(A \times B)$. □

Si R es una relación de A en B, $(A \times B) - R$, la relación complementaria de R, que ya consideraron Peirce y De Morgan, tiene la propiedad de que su complementaria coincide con R (que es una propiedad característica de la lógica proposicional clásica: Una doble negación equivale a una afirmación). Pero si definimos $\overline{R}$ como

$$\overline{R} = (A - \mathrm{Dom}(R)) \times (B - \mathrm{Im}(R)),$$

que podría interpretarse como un nuevo tipo de complementación, entonces $\overline{\overline{R}}$ no coincide necesariamente con R, sólo se cumple, en general, que $R \subseteq \overline{\overline{R}}$ (que es una propiedad característica de la lógica proposicional intuicionista).

Ejercicio 5.3.5. Demuéstrese que hay cuatro conjuntos A, B, A' y B' tales que $(A, B) \neq (A', B')$, pero que $\mathrm{Rel}(A, B) \cap \mathrm{Rel}(A', B') \neq \varnothing$

Proposición 5.3.6. *Sean A y B dos conjuntos. Entonces* $\mathrm{Dom}(A \times B) = A$*, si* $B \neq \varnothing$*, e* $\mathrm{Im}(A \times B) = B$*, si* $A \neq \varnothing$*.*

Demostración. Nos limitamos a demostrar que $\mathrm{Dom}(A \times B) = A$, si $B \neq \varnothing$, ya que la otra parte es formalmente idéntica. Supongamos que $B \neq \varnothing$. Entonces, por una parte, dado un $x \in A$, $x \in \mathrm{Dom}(A \times B)$, porque eligiendo un $y \in B$, tenemos que $x \in \{x\} \in (x, y) \in A \times B$, y, por otra, si $x \in \mathrm{Dom}(A \times B)$, entonces hay un y tal que $(x, y) \in A \times B$, luego $x \in A$. □

En ciertos contextos matemáticos, e.g., en el álgebra homológica, la topología algebraica o la semántica de los lenguajes de programación, cuando se comparan entre sí los objetos de que se ocupan esas disciplinas, mediante los *morfismos* adecuados, es necesario que ésos morfismos tengan unívocamente asociados un *dominio* y un *codominio*, porque e.g., una misma relación entre conjuntos distintos puede tener unas propiedades u otras según cuales sean ésos conjuntos (considérese, por una parte, la inclusión de $\mathbb{S}^1$, la circunferencia del círculo, en $\mathbb{R}^2$, el plano Euclídeo, y, por otra, la inclusión de $\mathbb{S}^1$ en el plano Euclídeo, pero con el origen de coordenadas excluido, i.e., en $\mathbb{R}^2 - \{\,(0,0)\,\}$; o la inclusión del conjunto vacío en un conjunto no vacío y la inclusión del vacío en sí mismo). Por ello definimos a continuación el concepto de *multiaplicación* o *aplicación no determinista* de un conjunto en otro.

Definición 5.3.7. Sean A y B dos conjuntos. Una *multiaplicación* o *aplicación no determinista de A en B* es un triplo ordenado $r = (A, R, B)$, al que también denotamos por $r\colon A \multimap B$, en el que R es una relación de A en B, a la que denominamos la *relación subyacente* de r. Denotamos al conjunto de las aplicaciones no deterministas de A en B por $\mathrm{Hom}_{\mathrm{nd}}(A, B)$, y es el conjunto

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{nd}}(A, B) = \{A\} \times \mathrm{Rel}(A, B) \times \{B\}.$$

En particular, a las aplicaciones no deterministas de A en A las denominamos *endoaplicaciones no deterministas* de A, y al conjunto de todas ellas lo denotamos por $\mathrm{End}_{\mathrm{nd}}(A)$

Además, siguiendo el hábito categorial, al conjunto A de la aplicación no determinista $r = (A, R, B)$ lo denominamos el *dominio* de r y lo denotamos por $\mathrm{d}_0(r)$, y al B el *codominio* de r y lo denotamos por $\mathrm{d}_1(r)$.

En general, $\mathrm{d}_0(r)$ será distinto del dominio de definición de la relación R de A en B, subyacente de la aplicación no determinista r, y también $\mathrm{d}_1(r)$ lo será de la imagen de R.

Dar una aplicación no determinista de A en B equivale a dar una aplicación de A en $\mathrm{Sub}(B)$ o una aplicación de $\mathrm{Sub}(A)$ en $\mathrm{Sub}(B)$ que sea completamente aditiva.

Proposición 5.3.8. *Sean A, B, A' y B' cuatro conjuntos. Si* $(A, B) \neq (A', B')$*, entonces* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{nd}}(A, B) \cap \mathrm{Hom}_{\mathrm{nd}}(A', B') = \varnothing$

Demostración. Porque si $\mathrm{Hom}_{\mathrm{nd}}(A, B) \cap \mathrm{Hom}_{\mathrm{nd}}(A', B') \neq \varnothing$, entonces existiría una aplicación no determinista r tal que $\mathrm{d}_0(r) = A = A'$ y $\mathrm{d}_1(r) = B = B'$, pero eso es imposible, ya que, por hipótesis, $(A, B) \neq (A', B')$. □

Entre otros ejemplos del uso de las aplicaciones no deterministas tenemos las álgebras no deterministas mono-unarias (también conocidas por *marcos modales* o *marcos de Kripke*), i.e., los pares (A, r) en los que A es un conjunto y r una aplicación no determinista de A en A.

5.4. Inversión y composición de relaciones. Nos ocupamos ahora de definir dos operadores, el de formación de la inversa de una relación y el de composición de dos relaciones. El primero es un endooperador de la clase Rel de las relaciones y el segundo un operdor de Rel $\times$ Rel en Rel.

Proposición 5.4.1. *Sea R una relación. Entonces hay una única relación cuyos miembros son exactamente aquellos pares ordenados (y, x) tales que $(x, y) \in R$. Denominamos a tal relación la* inversa *o* recíproca *de R y la denotamos por R^{-1}.*

Demostración. Es suficiente tomar como R^{-1}, la relación definida como:

$$R^{-1} = \{\, (y, x) \in \mathrm{Im}(R) \times \mathrm{Dom}(R) \mid (x, y) \in R \,\}$$

$\square$

Ejercicio 5.4.2. Demuéstrese que el proceso de formación del *inverso* es aplicable a cualquier conjunto (aunque el resultado del mismo, obviamente, no sea necesariamente una relación).

Proposición 5.4.3. *Sean x e y dos conjuntos. Entonces:*

1. $\bigcap\bigcap(x, y) = x$.
2. $\bigcap\bigcap\bigcap\{(x, y)\}^{-1} = y$.

Demostración. Por lo que respecta a la primera parte tenemos que:

$$\begin{aligned} \bigcap\bigcap(x, y) &= \bigcap\left(\bigcap\{\,\{x\}, \{x, y\}\,\}\right) && \text{(por la def. de par ordenado)} \\ &= \bigcap\{x\} \\ &= x \end{aligned}$$

Por lo que respecta a la segunda tenemos que:

$$\begin{aligned} \bigcap\bigcap\bigcap\{(x, y)\}^{-1} &= \bigcap\bigcap\bigcap\{(y, x)\} && \text{(por la def. de la inversa)} \\ &= \bigcap\bigcap\left(\bigcap\{\,\{\,\{y\}, \{y, x\}\,\}\,\}\right) && \text{(por la def. de par ordenado)} \\ &= \bigcap\bigcap\{\,\{y\}, \{y, x\}\,\} \\ &= y && \text{(por la primera parte)} \end{aligned}$$

$\square$

La proposición anterior nos permite asociar, de manera unívoca, a cada par ordenado su primera y su segunda coordenada, tal como establece la siguiente definición.

Definición 5.4.4. Si z es un par ordenado, entonces la *primera coordenada* de z, a la que denotamos por $(z)_0$, es $\bigcap\bigcap z$ y la *segunda coordenada* de z, a la que denotamos por $(z)_1$, es $\bigcap\bigcap\bigcap\{z\}^{-1}$.

Además, la proposición anterior nos permite dar una demostración alternativa de otra proposición anterior según la cual, dados cuatro conjuntos x, y, x' e y', una condición necesaria y suficiente para que $(x, y) = (x', y')$ es que $x = x'$ e $y = y'$. En efecto, por lo que respecta a la necesidad, si $(x, y) = (x', y')$, entonces $\bigcap\bigcap(x, y) = x = x' = \bigcap\bigcap(x', y')$ y $\bigcap\bigcap\bigcap\{(x, y)\}^{-1} = y = y' = \bigcap\bigcap\bigcap\{(x', y')\}^{-1}$.

A continuación enunciamos algunas de las propiedades esenciales de la operación de formación de la inversa de una relación.

Lema 5.4.5. *Si R es una relación entonces $\bigcup\bigcup R^{-1} = \bigcup\bigcup R$.*

Proposición 5.4.6. *Sean R y S dos relaciones. Entonces:*

1. $\mathrm{Dom}(R^{-1}) = \mathrm{Im}(R)$ *e* $\mathrm{Im}(R^{-1}) = \mathrm{Dom}(R)$.
2. $(R^{-1})^{-1} = R$ *(Involución).*
3. $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.
4. $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.
5. $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$.
6. $\mathrm{Fld}(R^{-1}) = \mathrm{Fld}(R)$.
7. *Si* $R \subseteq S$*, entonces* $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

Demostración. □

Ejercicio 5.4.7. Sean A y B dos conjuntos. Demuéstrese que entonces $(A \times B)^{-1} = B \times A$.

Definición 5.4.8. Si $r = (A, R, B)$ es una aplicación no determinista de A en B, entonces $r^{-1} = (B, R^{-1}, A)$ es la aplicación no determinista *inversa* o *recíproca* de r y lo es de B en A.

A continuación establecemos la existencia de una operación binaria, fundamental, sobre el universo de las relaciones, la *composición* o *producto relativo*, que permite obtener, a partir de dos relaciones una nueva relación, la *compuesta* de las mismas, que será la base sobre la que se establecerá la clasificación de Cantor, en términos de *equipotencia*, de los conjuntos.

Proposición 5.4.9. *Sean R y S dos relaciones. Entonces hay una única relación cuyos miembros son exactamente aquellos pares ordenados (x, z) para los que hay un y tal que $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in S$. Denominamos a tal conjunto la* composición *o el* producto relativo *de R y S y lo denotamos por $S \circ R$ o simplemente por yuxtaposición como SR.*

Demostración. Es suficiente tomar como $S \circ R$ la relación definida como:

$$S \circ R = \{\, (x, z) \in \mathrm{Dom}(R) \times \mathrm{Im}(S) \mid \exists y\, ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S) \,\}$$

□

Ejercicio 5.4.10. Demuéstrese que la operación de composición se puede aplicar a cualquier par de conjuntos.

Proposición 5.4.11. *Sean R y S dos relaciones. Entonces* $\mathrm{Dom}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Dom}(R)$ *e* $\mathrm{Im}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Im}(S)$.

Demostración. En virtud de la definición de la composición de relaciones tenemos que $S \circ R \subseteq \mathrm{Dom}(R) \times \mathrm{Im}(S)$. Por lo tanto $\mathrm{Dom}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{Dom}(R) \times \mathrm{Im}(S))$. Si $\mathrm{Im}(S) = \varnothing$, entonces $S \circ R = \varnothing$, luego $\mathrm{Dom}(S \circ R) = \varnothing \subseteq \mathrm{Dom}(R)$. Si $\mathrm{Im}(S) \neq \varnothing$, entonces $\mathrm{Dom}(\mathrm{Dom}(R) \times \mathrm{Im}(S)) = \mathrm{Dom}(R)$, luego $\mathrm{Dom}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Dom}(R)$.

La demostración de que $\mathrm{Im}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Im}(S)$ es idéntica.

□

Proposición 5.4.12. *Sean R, S y T tres relaciones. Entonces:*

1. $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$ *(Asociatividad).*
2. $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$ *y* $(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$ *(Distributividad de la composición respecto de la unión, por la izquierda y por la derecha).*
3. $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$ *y* $(R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)$.
4. *Si* $R \subseteq S$*, entonces* $R \circ T \subseteq S \circ T$ *y* $T \circ R \subseteq T \circ S$ *(Isotonía).*
5. $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Demostración. □

Antes de proseguir conviene poner de manifiesto que la generalización de la distributividad de la composición respecto de la unión, por la izquierda y por la derecha, al caso en que consideremos un conjunto de relaciones $\mathcal{R}$ y otra relación S, i.e., que se cumplen las ecuaciones siguientes:

$$S \circ (\bigcup_{R\in\mathcal{R}} R) = \bigcup\{\, S \circ R \mid R \in \mathcal{R}\,\} \text{ y } (\bigcup_{R\in\mathcal{R}} R) \circ S = \bigcup\{\, R \circ S \mid R \in \mathcal{R}\,\},$$

presupone que existen los conjuntos $\{\, S \circ R \mid R \in \mathcal{R}\,\}$ y $\{\, R \circ S \mid R \in \mathcal{R}\,\}$. Ahora bien, para demostrar tal existencia podemos hacer uso del esquema axiomático de reemplazo, para obtener, en primer lugar, a partir del conjunto de relaciones $\mathcal{R}$ y de las fórmulas $y = \mathrm{Dom}(x)$ e $y = \mathrm{Im}(x)$, los conjuntos $\{\, \mathrm{Dom}(R) \mid R \in \mathcal{R}\,\}$ y $\{\, \mathrm{Im}(R) \mid R \in \mathcal{R}\,\}$ (lo mismo que en un caso anterior, también se puede establecer la existencia de tales conjuntos, haciendo uso del axioma del conjunto potencia e instancias del esquema axiomático de separación). A continuación, mediante el axioma de la unión, obtenemos $\bigcup_{R\in\mathcal{R}} \mathrm{Dom}(R)$ y $\bigcup_{R\in\mathcal{R}} \mathrm{Im}(R)$. En último lugar, después de obtener $(\bigcup_{R\in\mathcal{R}}\mathrm{Dom}(R)) \times \mathrm{Im}(S)$ y $\mathrm{Dom}(S) \times \bigcup_{R\in\mathcal{R}}\mathrm{Im}(R)$ y usar el axioma del conjunto potencia para obtener $\mathrm{Sub}((\bigcup_{R\in\mathcal{R}}\mathrm{Dom}(R)) \times \mathrm{Im}(S))$ y $\mathrm{Sub}(\mathrm{Dom}(S) \times \bigcup_{R\in\mathcal{R}}\mathrm{Im}(R))$, obtenemos, usando el esquema axiomático de separación, los conjuntos $\{\, S \circ R \mid R \in \mathcal{R}\,\}$ y $\{\, R \circ S \mid R \in \mathcal{R}\,\}$, ya que, para cada $R \in \mathcal{R}$, $S \circ R \subseteq (\bigcup_{R\in\mathcal{R}}\mathrm{Dom}(R)) \times \mathrm{Im}(S)$ y $R \circ S \subseteq \mathrm{Dom}(S) \times \bigcup_{R\in\mathcal{R}}\mathrm{Im}(R)$.

Ejercicio 5.4.13. Sean A, B y C tres conjuntos. Demuéstrese que:

1. Si $B \cap C = \varnothing$, entonces $(C \times D) \circ (A \times B) = \varnothing$.
2. Si $B \cap C \neq \varnothing$, entonces $(C \times D) \circ (A \times B) = A \times D$.

Además de la composición de relaciones, De Morgan y Peirce consideraron otra operación de composición para las relaciones, la *suma relativa*, que se puede definir, cuando las relaciones lo son entre conjuntos dados, a partir de la composición ordinaria y de la complementación.

Proposición 5.4.14. *Sean R y S dos relaciones. Entonces hay una única relación cuyos miembros son exactamente aquellos pares ordenados (x, z) tales que, para cada y, $(x, y) \in R$ o $(y, z) \in S$. Denominamos a tal relación la* suma relativa *de R y S y la denotamos por $S\dagger R$.*

Demostración. Es suficiente tomar como $S\dagger R$ la relación definida como:

$$S\dagger R = \{\, (x, z) \in \mathrm{Dom}(R) \times \mathrm{Im}(S) \mid \forall y\, ((x, y) \in R \vee (y, z) \in S)\,\}$$

□

Ahora que disponemos del concepto de composición de relaciones, definimos, como caso particular, la composición de aplicaciones no deterministas.

Definición 5.4.15. Sea $r\colon A \longrightarrow\!\!\circ\, B$ una aplicación no determinista de A en B y $s\colon B \longrightarrow\!\!\circ\, C$ una de B en C. Entonces a la aplicación no determinista $(A, S \circ R, C)$ de A en C la denominamos la *composición* de r y s y la denotamos por $s \circ r$ o simplemente por sr.

Debemos observar que la composición de dos aplicaciones no deterministas, $r\colon A \longrightarrow\!\!\circ\, B$ y $s\colon C \longrightarrow\!\!\circ\, D$ sólo la definimos, a diferencia de la composición de relaciones, cuando y sólo cuando $\mathrm{d}_1(r) = \mathrm{d}_0(s)$, i.e., en este caso cuando $B = C$.

Proposición 5.4.16. *Si $r\colon A \multimap B$, $s\colon B \multimap C$ y $t\colon C \multimap D$ son tres aplicaciones no deterministas, entonces $t \circ (s \circ r) = (t \circ s) \circ r$, i.e., el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "s \circ r"'] \arrow[drr, bend left=60, "(t \circ s) \circ r"] \arrow[drr, bend right=60, "t \circ (s \circ r)"'] & B \arrow[d, "s"] \arrow[dr, "t \circ s"] & \\
 & C \arrow[r, "t"'] & D
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Ahora establecemos la existencia, para cada conjunto, de una relación distinguida en el, la *diagonal* del mismo, que usaremos para demostrar, entre otras cosas, que la composición de aplicaciones no deterministas tiene neutros a la izquierda y a la derecha.

Lema 5.4.17. *Sea A un conjunto. Entonces $\bigcup\bigcup \Delta_A = A$.*

Proposición 5.4.18. *Sea A un conjunto. Entonces hay un único conjunto cuyos miembros son exactamente aquellos z para los que existe un $a \in A$ tal que $z = (a, a)$. Denominamos a tal conjunto la* diagonal *de A y lo denotamos por Δ_A.*

Demostración. Es suficiente tomar como Δ_A el conjunto definido como:

$$\Delta_A = \{\, z \in A \times A \mid \exists a \in A\,(z = (a, a))\,\}$$

□

Proposición 5.4.19. *Sea A un conjunto. Entonces:*

1. $\mathrm{Dom}(\Delta_A) = A$, $\mathrm{Im}(\Delta_A) = A$ *y* $\mathrm{Fld}(\Delta_A) = A$.
2. $\Delta_A^{-1} = \Delta_A$.

Demostración. □

Proposición 5.4.20. *Sea R una relación. Entonces:*

1. $\Delta_{\mathrm{Im}(R)} \circ R = R$.
2. $R \circ \Delta_{\mathrm{Dom}(R)} = R$.
3. $\Delta_{\mathrm{Dom}(R)} \subseteq R^{-1} \circ R$ *y* $\Delta_{\mathrm{Im}(R)} \subseteq R \circ R^{-1}$.

Demostración. □

Definición 5.4.21. Sea A un conjunto. Entonces a la aplicación no determinista (A, Δ_A, A) la denominamos la *identidad* de A y la denotamos por id_A.

Proposición 5.4.22. *Si $r\colon A \multimap B$ es una aplicación no determinista de A en B, entonces $r \circ \mathrm{id}_A = r$ y $\mathrm{id}_B \circ r = r$, i.e., los diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "r"'] & A \arrow[d, "r"] \\
 & B
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "r"'] & B \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

conmutan.

5.5. Imágenes directas e inversas. Nos ocupamos ahora de definir cinco operadores de la clase Rel, de las relaciones, en V^V: la *imagen directa*, la *imagen inversa*, la *imagen universal*, la *imagen directa de Galois* y la *imagen inversa de Galois.*

Proposición 5.5.1. *Sea R una relación, y X un conjunto. Entonces hay un único conjunto cuyos miembros son exactamente aquellos y para los que hay un x tal que $x \in X$ y $(x, y) \in R$. Denominamos a tal conjunto la R-*imagen directa *o* existencial *de X y lo denotamos por $R[X]$ o por $R_*(X)$.*

Demostración. Es suficiente tomar como $R[X]$ el conjunto definido como:

$$R[X] = \{\, y \in \mathrm{Im}(R) \mid \exists x \in X((x, y) \in R) \,\}.$$

□

Observemos que el operador unario R_*, de formación de la imagen directa de un conjunto, es el resultado de la acción del operador $(\cdot)_*$ sobre R:

$$(\cdot)_* \begin{cases} \mathrm{Rel} \longrightarrow V^V \\ R \longmapsto R_* \begin{cases} V \longrightarrow V \\ X \longmapsto R_*(X) = R[X]. \end{cases} \end{cases}$$

Proposición 5.5.2. *Sea R una relación, e Y un conjunto. Entonces hay un único conjunto cuyos miembros son exactamente aquellos x para los que hay un y tal que $y \in Y$ y $(x, y) \in R$. Denominamos a tal conjunto la R-*imagen inversa *de Y y lo denotamos por $R^{-1}[Y]$ o por $R^*(Y)$.*

Demostración. Es suficiente tomar como $R^{-1}[Y]$ el conjunto definido como:

$$R^{-1}[Y] = \{\, x \in \mathrm{Dom}(R) \mid \exists y \in Y((x, y) \in R) \,\}.$$

□

No debemos confundir, a pesar de la notación, para una relación R, la relación R^{-1}, que es el resultado de la acción del operador unario $(\cdot)^{-1}$, de formación de la inversa de una relación, sobre R:

$$(\cdot)^{-1} \begin{cases} \mathrm{Rel} \longrightarrow \mathrm{Rel} \\ R \longmapsto R^{-1}, \end{cases}$$

y el operador unario R^*, de formación de la imagen inversa de un conjunto, que es el resultado de la acción del operador $(\cdot)^*$ sobre R:

$$(\cdot)^* \begin{cases} \mathrm{Rel} \longrightarrow V^V \\ R \longmapsto R^* \begin{cases} V \longrightarrow V \\ Y \longmapsto R^*(Y). \end{cases} \end{cases}$$

De todos modos, como veremos más adelante, para una relación R y un conjunto Y, se cumple que $R^{-1}[Y] = R^*(Y)$, la R-imagen inversa de Y, coincide con $(R^{-1})_*(Y)$, la R^{-1}-imagen directa de Y y la R-imagen directa de un conjunto coincide con la R^{-1}-imagen inversa del mismo.

Proposición 5.5.3. *Sea R una relación, y X un conjunto. Entonces hay un único conjunto cuyos miembros son precisamente aquellos y tales que $R^{-1}[\{y\}] \subseteq X$. Denominamos a tal conjunto la R-*imagen universal *de X y lo denotamos por $R_![X]$.*

Demostración. Es suficiente tomar como $R_![X]$ el conjunto definido como:

$$R_![X] = \{\, y \in \mathrm{Im}(R) \mid R^{-1}[\{y\}] \subseteq X \,\}$$

□

Proposición 5.5.4. *Sea R una relación, y X un conjunto. Entonces hay un único conjunto cuyos miembros son precisamente aquellos y tales que para todo $x \in X$, $(x, y) \in R$. Denominamos a tal conjunto la R-*imagen directa de Galois *de X y lo denotamos por $R_{\triangleright}(X)$.*

Demostración. Es suficiente tomar como $R_{\triangleright}(X)$ el conjunto definido como:

$$R_{\triangleright}(X) = \{\, y \in \mathrm{Im}(R) \mid \forall x \in X((x, y) \in R) \,\}$$

□

Proposición 5.5.5. *Sea R una relación, e Y un conjunto. Entonces hay un único conjunto cuyos miembros son precisamente aquellos x tales que para todo $y \in Y$, $(x, y) \in R$. Denominamos a tal conjunto la R-*imagen inversa de Galois *de X y lo denotamos por $R^{\triangleleft}(Y)$.*

Demostración. Es suficiente tomar como $R_{\triangleleft}(Y)$ el conjunto definido como:

$$R^{\triangleleft}(Y) = \{\, x \in \mathrm{Dom}(R) \mid \forall y \in Y((x, y) \in R) \,\}$$

□

Proposición 5.5.6. *Sea R una relación y X un conjunto. Entonces la R-imagen inversa de X coincide con la R^{-1}-imagen directa de X, i.e., $R^*(X) = (R^{-1})_*(X)$, y la R-imagen directa de X coincide con la R^{-1}-imagen inversa de X, i.e., $R_*(X) = (R^{-1})^*(X)$.*

Demostración. □

Proposición 5.5.7. *Sean R y S dos relaciones y A y B dos conjuntos. Entonces:*

1. *Si* $\mathrm{Dom}(R) \subseteq A$*, entonces* $R[A] = \mathrm{Im}(R)$ *y si* $\mathrm{Im}(R) \subseteq B$*, entonces* $R^{-1}[B] = \mathrm{Dom}(R)$.
2. *Si* $A \cap \mathrm{Dom}(R) = \varnothing$*, entonces* $R[A] = \varnothing$ *y si* $B \cap \mathrm{Im}(R) = \varnothing$*, entonces* $R^{-1}[B] = \varnothing$.
3. $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$.
4. $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$.
5. $R^{-1}[A \cup B] = R^{-1}[A] \cup R^{-1}[B]$.
6. $R^{-1}[A \cap B] \subseteq R^{-1}[A] \cap R^{-1}[B]$.
7. $A \subseteq R^{-1}[R[A]]$ *si y sólo si* $A \subseteq \mathrm{Dom}(R)$.
8. $B \subseteq R[R^{-1}[B]]$ *si y sólo si* $B \subseteq \mathrm{Im}(R)$.
9. *Si* $A \subseteq B$*, entonces* $R[A] \subseteq R[B]$ *y* $R^{-1}[A] \subseteq R^{-1}[B]$.
10. $(R \circ S)[A] = R[S[A]]$ *y* $(R \circ S)^{-1}[B] = S^{-1}[R^{-1}[A]]$.
11. $\Delta_A[A] = A$ *y* $\Delta_B^{-1}[B] = B$.
12. $\mathrm{Dom}(R \circ S) \subseteq S^{-1}[\mathrm{Dom}(R)]$ *e* $\mathrm{Im}(R \circ S) \subseteq R[\mathrm{Im}(S)]$.

Demostración. □

Ejercicio 5.5.8. Demuéstrese que si R y S dos relaciones y A, B y C tres conjuntos entonces:

1. Si $x \notin \mathrm{Dom}(R)$, entonces $R[\{x\}] = \varnothing$ y si $y \notin \mathrm{Im}(R)$, entonces $R^{-1}[\{y\}] = \varnothing$.
2. $R[\varnothing] = \varnothing$ y $R^{-1}[\varnothing] = \varnothing$.
3. $\varnothing[A] = \varnothing$ y $\varnothing^{-1}[B] = \varnothing$.
4. $R[A] - R[B] \subseteq R[A - B]$.
5. $R^{-1}[A] - R^{-1}[B] \subseteq R^{-1}[A - B]$.
6. Si $A \cap C \neq \varnothing$, entonces $(A \times B)[C] = B$ y si $A \cap C = \varnothing$, entonces $(A \times B)[C] = \varnothing$.

Definición 5.5.9. Si $r\colon A \multimap B$ es una aplicación no determinista de A en B, de modo que $r = (A, R, B)$, y $X \subseteq A$, entonces convenimos que $r[X]$ significa lo mismo que $R[X]$ y lo denominamos la *imagen directa* o *existencial* de X bajo la aplicación no determinista r y $r_![X]$ significa lo mismo que $R_![X]$ y lo denominamos la *imagen universal* de X bajo la aplicación no determinista r. Del mismo modo, si $Y \subseteq B$, entonces $r^{-1}[Y]$ significa lo mismo que $R^{-1}[Y]$ y lo denominamos la *imagen inversa* de Y bajo la aplicación no determinista r.

5.6. Restricciones. Consideramos ahora un operador binario que asigna a una relación y un conjunto una relación, la restricción de la relación al conjunto en cuestión.

Proposición 5.6.1. *Sea R una relación y A un conjunto. Entonces hay un único conjunto cuyos miembros son exactamente aquellos pares ordenados (x, y) tales que $x \in A$. Denominamos a tal conjunto la* restricción *de R a A y lo denotamos por $R \restriction A$.*

Demostración. Es suficiente tomar como $R \restriction A$ el conjunto definido como:

$$R \restriction A = \{\, (x, y) \in R \mid x \in A \,\},$$

o, lo que es equivalente, el conjunto $R \cap (A \times \operatorname{Im}(R))$. □

6. Funciones.

En esta sección estudiamos el concepto de función, fundamental para toda la matemática, y los de función parcial y función de un conjunto en otro, así como los derivados de estos últimos, los de aplicación parcial y aplicación, que incorporan en su definición explícitamente tanto a los conjuntos de partida como de llegada. Además, demostramos la existencia del exponencial de dos conjuntos, caracterizado por una cierta propiedad universal, debida a Schönfinkel y Curry, que sirve, entre otras cosas, para poner de manifiesto que el concepto de función de dos o más variables, puede ser reducido al de función de una sola variable, pero a costa (todo proceso reduccionista tiene un costo) de complejizar el codominio de las mismas. Por último, demostramos, siguiendo a Lawvere, que el conjunto 2 es un clasificador de subconjuntos, i.e., que los subconjuntos de un conjunto están en correspondencia biunívoca con las aplicaciones desde tal conjunto hasta el 2 y ello sujeto a cumplir una cierta propiedad universal.

6.1. Funciones, aplicaciones parciales y aplicaciones.

Definición 6.1.1. Decimos que un conjunto F es una *función*, *relación funcional* o una *familia*, si cumple las siguientes condiciones:

1. F es una relación.
2. $\forall x, y, z\,(((x, y) \in F \wedge (x, z) \in F) \rightarrow y = z)$.

Si F es una función y $x \in \operatorname{Dom}(F)$, entonces denotamos por $F(x)$ al único miembro del conjunto $\{\, y \in \operatorname{Im}(F) \mid (x, y) \in F \,\}$, i.e.,

$$F(x) = \bigcup \{\, y \in \operatorname{Im}(F) \mid (x, y) \in F \,\}$$

y lo denominamos el *valor* o la *imagen* de la función F en x. Además, cuando F sea una función y $\operatorname{Dom}(F) = I$, diremos que F es una *familia indexada* o *coordinada* por el conjunto de *índices* I y la denotaremos por $(F(i))_{i \in I}$ o por $(F_i)_{i \in I}$.

Así pues, un conjunto F no será una función si no es una relación, i.e., si tiene algún miembro que no sea un par ordenado, o si hay tres conjuntos x, y y z tales que $(x, y) \in F$ y $(x, z) \in F$ pero $y \neq z$, i.e., si hay dos pares ordenados distintos en F con la misma primera coordenada.

Por otra parte, si $(F_i)_{i\in I}$ es una familia indexada por I, entonces $\bigcup_{i\in I} F_i$ es $\bigcup_{i\in I} \mathrm{Im}((F_i)_{i\in I})$, y si $I \neq \varnothing$, entonces $\bigcap_{i\in I} F_i$ es $\bigcap_{i\in I} \mathrm{Im}((F_i)_{i\in I})$.

Ejercicio 6.1.2. Demuéstrese que un conjunto F es una función si y sólo si es una relación y para cada $x \in \mathrm{Dom}(F)$, hay un único $y \in \mathrm{Im}(F)$ tal que $(x, y) \in F$.

Ejercicio 6.1.3. Demuéstrese que:

1. $\varnothing$ es una función.
2. Para cada conjunto A, Δ_A es una función.
3. No hay un conjunto del cual sean miembros exactamente todas las funciones.
4. Si F es una función y A, B dos conjuntos, entonces
   a) $F^{-1}[A \cap B] = F^{-1}[A] \cap F^{-1}[B]$.
   b) $F^{-1}[A - B] = F^{-1}[A] - F^{-1}[B]$.

Proposición 6.1.4. *Sea F una función y A un conjunto. Entonces:*

1. $F\restriction A$ *es una función.*
2. $\mathrm{Dom}(F\restriction A) = A \cap \mathrm{Dom}(F)$.
3. $\mathrm{Im}(F\restriction A) = F[A]$.
4. *Para cada* $x \in \mathrm{Dom}(F\restriction A)$, *se cumple que* $(F\restriction A)(x) = F(x)$.

Demostración. □

Puesto que las funciones son un caso particular de las relaciones, para ellas también se cumple el principio de extensionalidad, como pone de manifiesto la siguiente proposición.

Proposición 6.1.5. *Sean F y G dos funciones. Entonces:*

1. $F \subseteq G$ *si y sólo si* $\mathrm{Dom}(F) \subseteq \mathrm{Dom}(G)$ *y para cada* $x \in \mathrm{Dom}(F)$, $F(x) = G(x)$.
2. (Principio de extensionalidad para las funciones). *Una condición necesaria y suficiente para que $F = G$ es que* $\mathrm{Dom}(F) = \mathrm{Dom}(G)$ *y que para cada* $x \in \mathrm{Dom}(F)$, $F(x) = G(x)$.

Demostración. □

Si entre dos funciones F y G se da la relación $F \subseteq G$, entonces decimos que G es una *extensión* de F o que F es una *restricción* de G.

Ejercicio 6.1.6. Demuéstrese que si F es una función, entonces cualquier subconjunto de F es una función.

Proposición 6.1.7.

1. *Si $\mathcal{F}$ es un conjunto no vacío de funciones, entonces $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$ es una función.*
2. *Si $\mathcal{F}$ es un conjunto de funciones tal que, para cada $F, G \in \mathcal{F}$, existe un $H \in \mathcal{F}$ tal que $F \cup G \subseteq H$, entonces $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F$ es una función.*

Demostración. Es evidente que $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F$ es una función. Ahora bien, para demostrar que $\mathrm{Dom}(\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F) = \bigcup\{\, \mathrm{Dom}(F) \mid F \in \mathcal{F}\,\}$ e $\mathrm{Im}(\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F) = \bigcup\{\, \mathrm{Im}(F) \mid F \in \mathcal{F}\,\}$, hemos de establecer previamente que existen los conjuntos $\{\, \mathrm{Dom}(F) \mid F \in \mathcal{F}\,\}$ y $\{\, \mathrm{Im}(F) \mid F \in \mathcal{F}\,\}$, pero éso ya fué demostrado, en el caso de los conjuntos de relaciones, aplicando las instancias adecuadas del esquema axiomático de reemplazo. □

Proposición 6.1.8. *Sean F y G dos funciones. Entonces una condición necesaria y suficiente para que $F \cup G$ sea una función es que:*

$$F\restriction \mathrm{Dom}(F) \cap \mathrm{Dom}(G) = G\restriction \mathrm{Dom}(F) \cap \mathrm{Dom}(G).$$

Demostración. □

Corolario 6.1.9. *Sean F y G dos funciones. Si* $\mathrm{Dom}(F) \cap \mathrm{Dom}(G) = \varnothing$*, entonces* $F \cup G$ *es una función.*

Demostración. □

Si F es una función, entonces F^{-1} es, con toda seguridad una relación, pero no es, en general, una función. La proposición que sigue establece una condición necesaria y suficiente para que la relación inversa de una relación sea también una función.

Proposición 6.1.10. *Sea F una función. Una condición necesaria y suficiente para que F^{-1} sea una función es que F sea inyectiva, i.e., que, para cada $x, y \in \mathrm{Dom}(F)$, si $x \neq y$, entonces $F(x) \neq F(y)$.*

Demostración. □

Proposición 6.1.11. *Sean A y B dos conjuntos. Entonces hay un único conjunto cuyos miembros son exactamente aquellas funciones F para las que se cumple que* $\mathrm{Dom}(F) \subseteq A$ *e* $\mathrm{Im}(F) \subseteq B$*. Denominamos a tal conjunto el conjunto de las* funciones parciales *de A en B y lo denotamos por* $\mathrm{Pfnc}(A, B)$*.*

Demostración. Es suficiente tomar como $\mathrm{Pfnc}(A, B)$ el conjunto definido como:

$$\mathrm{Pfnc}(A, B) = \{\, F \in \mathrm{Sub}(A \times B) \mid \forall x \in A\, \exists^{\leq 1} y \in B\, ((x, y) \in F) \,\}$$

□

Ejercicio 6.1.12. Demuéstrese que hay cuatro conjuntos A, B, A' y B' tales que $(A, B) \neq (A', B')$, pero que $\mathrm{Pfnc}(A, B) \cap \mathrm{Pfnc}(A', B') \neq \varnothing$.

En ciertos contextos matemáticos, e.g., en la teoría de la recursión, es necesaria una noción más fina que la de función parcial, en la que ocurra explícitamente, tanto el conjunto que contiene al dominio de definición de la función parcial en cuestión, como el que contiene a la imagen de la misma, debido a que hay funciones parciales recursivas que no admiten ninguna extensión hasta una función recursiva, en la que el dominio de definición de la misma coincida con el conjunto en el que está incluido.

Definición 6.1.13. Sean A y B dos conjuntos. Una *aplicación parcial de A en B* es un triplo ordenado $f = (A, F, B)$, denotado por $f\colon A \rightharpoonup B$, en el que F es una función parcial de A en B, denominada la *función parcial subyacente* de f. Al conjunto de las aplicaciones parciales de A en B lo denotamos por $\mathrm{Hom_p}(A, B)$, y es el conjunto

$$\mathrm{Hom_p}(A, B) = \{A\} \times \mathrm{Pfnc}(A, B) \times \{B\}.$$

En particular, a las aplicaciones parciales de A en A las denominamos endoaplicaciones parciales de A, y al conjunto de todas ellas lo denotamos por $\mathrm{End}_p(A)$

Además, siguiendo el hábito categorial, al conjunto A de la aplicación parcial $f = (A, R, B)$ lo denominamos el *dominio* de f y lo denotamos por $\mathrm{d}_0(f)$, y al B el *codominio* de f y lo denotamos por $\mathrm{d}_1(f)$.

En general, $\mathrm{d}_0(f)$ será distinto del dominio de definición de la función parcial F de A en B, subyacente de la apicación parcial f, y también $\mathrm{d}_1(f)$ lo será de la imagen de F.

Proposición 6.1.14. *Sean A, B, A' y B' cuatro conjuntos. Si $(A, B) \neq (A', B')$, entonces* $\mathrm{Hom_p}(A, B) \cap \mathrm{Hom_p}(A', B') = \varnothing$

Demostración. □

Proposición 6.1.15. *Sean A y B dos conjuntos. Entonces hay un único conjunto cuyos miembros son exactamente aquellas funciones F para las que se cumple que* $\mathrm{Dom}(F) = A$ *e* $\mathrm{Im}(F) \subseteq B$. *Denominamos a tal conjunto el conjunto de las* funciones *de A en B y lo denotamos por* $\mathrm{Fnc}(A, B)$ *o por* B^A.

Demostración. Es suficiente tomar como $\mathrm{Fnc}(A, B)$ el conjunto definido como:

$$\mathrm{Fnc}(A, B) = \{\, F \in \mathrm{Pfnc}(A, B) \mid \mathrm{Dom}(F) = A \,\}$$

□

Así pues, el conjunto de las funciones de A en B consta precisamente de todos los subconjuntos F de $A \times B$ tales que para cada $x \in A$, hay un único $y \in B$ tal que $(x, y) \in F$

Ejercicio 6.1.16. Demuéstrese que hay cuatro conjuntos A, B, A' y B' tales que $(A, B) \neq (A', B')$, pero que $\mathrm{Fnc}(A, B) \cap \mathrm{Fnc}(A', B') \neq \varnothing$.

Definición 6.1.17. Sean A y B dos conjuntos. Una *aplicación de A en B* es un triplo ordenado $f = (A, F, B)$, denotado por $f\colon A \longrightarrow B$, en el que F es una función de A en B, denominada la *función subyacente* de f. Al conjunto de las aplicaciones de A en B lo denotamos por $\mathrm{Hom}(A, B)$, y es el conjunto

$$\mathrm{Hom}(A, B) = \{A\} \times \mathrm{Fnc}(A, B) \times \{B\}.$$

En particular, a las aplicaciones de A en A las denominamos endoaplicaciones de A, y al conjunto de todas ellas lo denotamos por $\mathrm{End}(A)$.

Además, siguiendo el hábito categorial, al conjunto A de la aplicación $f = (A, R, B)$ lo denominamos el *dominio* de f y lo denotamos por $\mathrm{d}_0(f)$, y al B el *codominio* de f y lo denotamos por $\mathrm{d}_1(f)$.

En general, $\mathrm{d}_1(f)$ será distinto de la imagen de la función F de A en B, subyacente de la aplicación f.

Observemos que una aplicación de A en B también se puede definir, alternativa, pero equivalentemente, como un par ordenado $f = (F, B)$ en el que F es una función de A en B, ya que $A = \mathrm{Dom}(F)$.

Proposición 6.1.18. *Sean A, B, A' y B' cuatro conjuntos. Si $(A, B) \neq (A', B')$, entonces* $\mathrm{Hom}(A, B) \cap \mathrm{Hom}(A', B') = \varnothing$

Demostración. □

Observemos que una aplicación de A en B también podría ser definida, simplemente, como un par ordenado $f = (F, B)$, denotado por $f\colon A \longrightarrow B$, en el que F es una función de A en B, debido a que A coincide con $\mathrm{Dom}(F)$.

Proposición 6.1.19. *Sean A y B dos conjuntos. Entonces se cumple que:*

1. $\mathrm{Fnc}(A, B) \subseteq \mathrm{Pfnc}(A, B)$.
2. $\mathrm{Pfnc}(A, B) \subseteq \mathrm{Rel}(A, B)$.
3. $\mathrm{Hom}(A, B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathrm{p}}(A, B)$.
4. $\mathrm{Hom}_{\mathrm{p}}(A, B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathrm{nd}}(A, B)$.

Además, en general, las inclusiones inversas no se cumplen.

Demostración. □

Proposición 6.1.20. *Si F y G son dos funciones. Entonces:*

1. *$G \circ F$ es una función.*
2. $\mathrm{Dom}(G \circ F) = \{\, x \in \mathrm{Dom}(F) \mid F(x) \in \mathrm{Dom}(G) \,\}$.
3. *Para cada $x \in \mathrm{Dom}(G \circ F)$, $G \circ F(x) = G(F(x))$.*

Demostración. □

Ejercicio 6.1.21. Demuéstrese que si F y G son dos funciones, entonces

$$\mathrm{Dom}(G \circ F) = \mathrm{Dom}(F) \cap F^{-1}[\mathrm{Dom}(G)].$$

Corolario 6.1.22. *Sean A, B y C tres conjuntos. Entonces:*

1. *Si F es una función parcial de A en B y G lo es de B en C, entonces $G \circ F$ es una función parcial de A en C y la denominamos la* composición *de las funciones parciales F y G. Además, si $f\colon A \rightharpoonup B$ es una aplicación parcial de A en B y $g\colon B \rightharpoonup C$ lo es de B en C, entonces $g \circ f = (A, G \circ F, C)$ es una aplicación parcial de A en C, a la que denotamos por $g \circ f\colon A \rightharpoonup C$ y la denominamos la* composición *de las aplicaciones parciales f y g.*
2. *Si F es una función de A en B y G lo es de B en C, entonces $G \circ F$ es una función de A en C y la denominamos la* composición *de las funciones F y G. Además, si $f\colon A \longrightarrow B$ es una aplicación de A en B y $g\colon B \longrightarrow C$ lo es de B en C, entonces $g \circ f = (A, G \circ F, C)$ es una aplicación de A en C, a la que denotamos por $g \circ f\colon A \longrightarrow C$ y la denominamos la* composición *de las aplicaciones f y g.*

Proposición 6.1.23. *Las diferentes composiciones del corolario 6.1.22 son asociativas y tienen neutros por la izquierda y por la derecha. En particular, si $f\colon A \longrightarrow B$, $g\colon B \longrightarrow C$ y $h\colon C \longrightarrow D$ son tres aplicaciones, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, i.e., el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] \arrow[drr, bend left=60, "(h \circ g) \circ f"] \arrow[drr, bend right=60, "h \circ (g \circ f)"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\
 & C \arrow[r, "h"'] & D
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, se cumple que $f \circ \mathrm{id}_A = f$ y $\mathrm{id}_B \circ f = f$, i.e., los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \\
 & B
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Definición 6.1.24. Sean A, A', B y B' cuatro conjuntos y $h\colon A' \longrightarrow A$ y $g\colon B \longrightarrow B'$ dos aplicaciones. Entonces:

1. Denotamos por $\mathrm{H}(\mathrm{id}_A, g)$ la aplicación
$$\mathrm{H}(\mathrm{id}_A, g) : \mathrm{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B'),$$
que a un $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ le asigna $\mathrm{H}(\mathrm{id}_A, g)(f) = g \circ f$.
2. Denotamos por $\mathrm{H}(h, \mathrm{id}_B)$ la aplicación
$$\mathrm{H}(h, \mathrm{id}_B) : \mathrm{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A', B),$$
que a un $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ le asigna $\mathrm{H}(h, \mathrm{id}_B)(f) = f \circ h$.

Proposición 6.1.25. *Sean A, A', A'' B, B' y B'' seis conjuntos y $f'\colon A'' \longrightarrow A'$, $f\colon A' \longrightarrow A$, $g\colon B \longrightarrow B'$ y $g'\colon B' \longrightarrow B''$ cuatro aplicaciones. Entonces los diagramas:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(A,B) \arrow[r, "\mathrm{H}(\mathrm{id}_A, g)"] \arrow[dr, "\mathrm{H}(\mathrm{id}_A, g' \circ g)"'] & \mathrm{Hom}(A,B') \arrow[d, "\mathrm{H}(\mathrm{id}_A, g')"] \\
 & \mathrm{Hom}(A,B')
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(A,B) \arrow[r, "\mathrm{H}(f, \mathrm{id}_B)"] \arrow[dr, "\mathrm{H}(f \circ f', \mathrm{id}_B)"'] & \mathrm{Hom}(A',B) \arrow[d, "\mathrm{H}(f', \mathrm{id}_B)"] \\
 & \mathrm{Hom}(A'',B)
\end{tikzcd}
$$

conmutan.

6.2. Exponenciales. El teorema que presentamos a continuación, junto con las proposiciones que le siguen, afirma, esencialmente, que hay una biyección natural entre el conjunto de las aplicaciones de un conjunto C en el conjunto $\mathrm{Hom}(A,B)$ y el conjunto de las aplicaciones de $A \times C$ en B, situación que representamos por:

$$\frac{C \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,B)}{A \times C \longrightarrow B}.$$

Teorema 6.2.1 (Schönfinkel-Curry)**.** *Sean A y B dos conjuntos. Entonces el conjunto* $\mathrm{Hom}(A,B)$*, el* exponencial *de A y B, junto con la aplicación* $\mathrm{ev}_{A,B}\colon A \times \mathrm{Hom}(A,B) \longrightarrow B$*, la* evaluación *para A y B, definida como:*

$$\mathrm{ev}_{A,B} \begin{cases} A \times \mathrm{Hom}(A,B) & \longrightarrow & B \\ \quad (x,h) & \longmapsto & h(x), \end{cases}$$

son tales que, para cada conjunto C y cada aplicación $f\colon A \times C \longrightarrow B$, existe una única aplicación $f^{@}\colon C \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,B)$ tal que el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
A \times C \arrow[d, "\mathrm{id}_A \times f^{@}"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A \times \mathrm{Hom}(A,B) \arrow[r, "\mathrm{ev}_{A,B}"'] & B
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Demostración. □

Corolario 6.2.2. *El par ordenado $(\mathrm{ev}_{A,B}, \mathrm{Hom}(A,B))$ es único, salvo un único isomorfismo, i.e., para cada par ordenado (e,E) en el que E es un conjunto y e una aplicación de $A \times E$ en B, si (e,E) es tal que, para cada conjunto C y cada aplicación $f\colon A \times C \longrightarrow B$, existe una única aplicación $f^{@}\colon C \longrightarrow E$ tal que el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
A \times C \arrow[d, "\mathrm{id}_A \times f^{@}"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A \times E \arrow[r, "e"'] & B
\end{tikzcd}
$$

conmuta, entonces hay un único isomorfismo $t\colon E \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,B)$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A\times E \arrow[d, "\mathrm{id}_A\times t"'] \arrow[dr, "e"] & \\
A\times \mathrm{Hom}(A,B) \arrow[r, "\mathrm{ev}_{A,B}"'] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposición 6.2.3. *Sean* $f\colon A' \longrightarrow A$ *y* $g\colon B \longrightarrow B'$ *dos aplicaciones. Entonces hay una única aplicación* $g^f\colon \mathrm{Hom}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A',B')$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A'\times \mathrm{Hom}(A,B) \arrow[r, "f\times \mathrm{id}"] \arrow[dd, "\mathrm{id}\times g^f"'] & A\times \mathrm{Hom}(A,B) \arrow[d, "\mathrm{ev}_{A,B}"] \\
 & B \arrow[d, "g"] \\
A'\times \mathrm{Hom}(A',B') \arrow[r, "\mathrm{ev}_{A',B'}"'] & B'
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposición 6.2.4. *Sean* A*,* A'*,* A'' B*,* B' *y* B'' *seis conjuntos y* $f'\colon A'' \longrightarrow A'$*,* $f\colon A' \longrightarrow A$*,* $g\colon B \longrightarrow B'$ *y* $g'\colon B' \longrightarrow B''$ *cuatro aplicaciones. Entonces:*

$$(g'\circ g)^{f\circ f'} = {g'}^{f'}\circ g^f.$$

Demostración. Porque, por una parte, debido a que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A''\times \mathrm{Hom}(A,B) \arrow[r, "f'\times \mathrm{id}"] \arrow[dd, "\mathrm{id}\times g^f"'] & A'\times \mathrm{Hom}(A,B) \arrow[r, "f\times \mathrm{id}"] \arrow[dd, "\mathrm{id}\times g^f"'] & A\times \mathrm{Hom}(A,B) \arrow[d, "\mathrm{ev}_{A,B}"] \\
 & & B \arrow[d, "g"] \\
A''\times \mathrm{Hom}(A',B') \arrow[r, "f'\times \mathrm{id}"] \arrow[dd, "\mathrm{id}\times {g'}^{f'}"'] & A'\times \mathrm{Hom}(A',B') \arrow[r, "\mathrm{ev}_{A',B'}"'] \arrow[d, "\mathrm{ev}_{A',B'}"] & B' \\
 & B' \arrow[d, "g'"] & \\
A''\times \mathrm{Hom}(A'',B'') \arrow[r, "\mathrm{ev}_{A'',B''}"'] & B'' &
\end{tikzcd}$$

conmuta, también conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A''\times \mathrm{Hom}(A,B) \arrow[r, "f\circ f'\times \mathrm{id}"] \arrow[dd, "\mathrm{id}\times ({g'}^{f'}\circ g^f)"'] & A\times \mathrm{Hom}(A,B) \arrow[d, "\mathrm{ev}_{A,B}"] \\
 & B \arrow[d, "g'\circ g"] \\
A''\times \mathrm{Hom}(A'',B'') \arrow[r, "\mathrm{ev}_{A'',B''}"'] & B''
\end{tikzcd}$$

Pero, por otra, $(g' \circ g)^{f \circ f'}$ es la única aplicación de $\mathrm{Hom}(A, B)$ en $\mathrm{Hom}(A'', B'')$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A'' \times \mathrm{Hom}(A,B) \arrow[r, "f \circ f' \times \mathrm{id}"] \arrow[dd, "\mathrm{id} \times (g' \circ g)^{f \circ f'}"'] & A \times \mathrm{Hom}(A,B) \arrow[d, "\mathrm{ev}_{A,B}"] \\
 & B \arrow[d, "g' \circ g"] \\
A'' \times \mathrm{Hom}(A'', B'') \arrow[r, "\mathrm{ev}_{A'',B''}"'] & B''
\end{tikzcd}$$

conmuta. Luego

$$(g' \circ g)^{f \circ f'} = {g'}^{f'} \circ g^f.$$

□

Ejercicio 6.2.5. Estúdiese lo que ocurre en la proposición anterior si alguna de las aplicaciones fuera una identidad.

Sea A un conjunto. Entonces el par $(\mathrm{Sub}(A), \varepsilon_A)$ en el que ε_A es la aplicación de $A \times \mathrm{Sub}(A)$ en 2 que a un par (a, X) de $A \times \mathrm{Sub}(A)$ le asigna 1 si, y sólo si, $x \in X$ es tal que, para cada conjunto B y cada aplicación f de $A \times B$ en 2, existe una única aplicación $f^@$ de B en $\mathrm{Sub}(A)$ tal el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[d, "\mathrm{id}_A \times f^@"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A \times \mathrm{Sub}(A) \arrow[r, "\varepsilon_A"'] & 2
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Sea $h\colon A \longrightarrow B$ una aplicación. Entonces la aplicación $h^{-1}[\cdot]$ de $\mathrm{Sub}(B)$ en $\mathrm{Sub}(A)$ es $(\varepsilon_B \circ (h \times \mathrm{id}_{\mathrm{Sub}(B)}))^@$, tal como muestra el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & B \times \mathrm{Sub}(B) \arrow[dr, "\varepsilon_B"] & \\
A \times \mathrm{Sub}(B) \arrow[ur, "h \times \mathrm{id}_{\mathrm{Sub}(B)}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A \times h^{-1}[\cdot]"'] & & 2 \\
 & A \times \mathrm{Sub}(A) \arrow[ur, "\varepsilon_A"'] &
\end{tikzcd}$$

6.3. El clasificador de subconjuntos. Vamos a demostrar que el conjunto $2 = \{0, 1\}$, interpretado en este caso como el conjunto de *valores de verdad* del universo de los conjuntos, con el 0 como lo *falso* y el 1 como lo *verdadero*, junto con la aplicación vd de 1 en 2, que al único miembro de 1 le asigna como valor 1, lo verdadero, tiene la propiedad de establecer una correspondencia biunívoca entre los subconjuntos de un conjunto y las aplicaciones del conjunto en cuestión en el conjunto de valores de verdad 2

Proposición 6.3.1 (Borel-La Vallée Poussin-Lawvere)**.** *El par* $(2, \mathrm{vd})$*, en el que* $2 = \{\,0, 1\,\}$ *y* vd *es la aplicación de* 1 *en* 2*, que al único miembro de* 1 *le asigna como valor* 1*, tiene la propiedad de que para cada conjunto* A *y cada subconjunto* X *de*

A, hay una única aplicación $\mathrm{ch}_X\colon A \longrightarrow 2$, *la aplicación* característica *o* indicatriz *de X, tal que, por una parte, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\omega_X"] \arrow[d, "\mathrm{in}_X"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{vd}"] \\ A \arrow[r, "\mathrm{ch}_X"'] & 2 \end{tikzcd}$$

conmuta, siendo ω_X la única aplicación de X en 1, y, por otra, para cada conjunto Y y cualquier aplicación $u\colon Y \longrightarrow A$ si el diagrama:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\omega_Y"] \arrow[d, "u"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{vd}"] \\ A \arrow[r, "\mathrm{ch}_X"'] & 2 \end{tikzcd}$$

conmuta, siendo ω_Y la única aplicación de Y en 1, entonces hay una única aplicación $t\colon Y \longrightarrow X$ tal que los dos triángulos del diagrama:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, bend left, "\omega_Y"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\ & X \arrow[r, "\omega_X"] \arrow[d, "\mathrm{in}_X"] & 1 \\ & A & \end{tikzcd}$$

conmutan.

Demostración. La aplicación ch_X es la única de A en 2 que cumple las citadas condiciones. Porque si otra aplicación de A en 2 las cumple, entonces, en particular, cumple la primera condición, luego, necesariamente, debe ser del tipo $\mathrm{ch}_{X\cup Z}$, para un subconjunto Z de A tal que $Z \neq \varnothing$ y $X \cap Z = \varnothing$. Pero entonces tal aplicación no cumpliría la segunda condición tomando como Y precisamente a Z y como u la inclusión canónica de Z en A, contradicción. □

7. Conjuntos y aplicaciones especiales.

7.1. El conjunto inicial y los conjuntos terminales. El conjunto vacío fue caracterizado *internamente*, i.e., respecto de la relación de pertenencia, como el único conjunto sin miembros. Ahora que disponemos del concepto de aplicación, lo caracterizamos *externamente*, i.e., respecto de las relaciones que guarda con los demás conjuntos del universo de los conjuntos, a través de las aplicaciones; con esta caracterización confirmaremos, una vez más, que lo que sea un objeto (cuando el *ser* se interpreta dinámicamente) equivale, esencialmente, a lo que haga.

Proposición 7.1.1. *El conjunto vacío es el único conjunto que tiene la propiedad de que para conjunto A, hay una única aplicación de $\varnothing$ en A; es por ello que al conjunto vacío también lo denominamos el conjunto* inicial*, respecto de las aplicaciones. Denotamos por α_A a la única aplicación de $\varnothing$ en A.*

Demostración. Sea A un conjunto. Entonces el triplo ordenado $\alpha_A = (\varnothing, \varnothing, A)$ es una aplicación de $\varnothing$ en A, porque su segunda coordenada es una función de $\varnothing$ en

A. Si f fuera otra aplicación de $\varnothing$ en A, entonces su función subyacente, F, por ser un subconjunto de $\varnothing \times A$, debería ser el conjunto vacío, luego, por el principio de extensionalidad para las funciones, $\alpha_A = f$. Con ello queda demostrado que desde el conjunto vacío, hasta cualquier otro conjunto, hay una única aplicación.

Ahora demostramos que si X no es el conjunto vacío, entonces hay un conjunto A para el cual no hay una única aplicación de X en A, i.e., o bien no hay ninguna o bien hay dos distintas de X en A. Sea pues X un conjunto no vacío. Si tomamos, e.g., como A el conjunto vacío, entonces no hay ninguna aplicación de X en A. □

Debemos observar que para el conjunto vacío, $\alpha_\varnothing$, la única aplicación de $\varnothing$ en $\varnothing$, es $id_\varnothing$, que coincide con $(\varnothing, \varnothing, \varnothing)$.

Ejercicio 7.1.2. Demuéstrese que para cada aplicación $f\colon A \longrightarrow B$, $f \circ \alpha_A = \alpha_B$.

El concepto dual del de conjunto inicial, es el de conjunto *final* o *terminal*.

Definición 7.1.3. Un conjunto T es *final* o *terminal* si para cada conjunto A, hay una única aplicación de A en T. Si tal es el caso, denotamos por ω_A la única aplicación de A en T.

Proposición 7.1.4. *Una condición necesaria y suficiente para que un conjunto T sea final es que exista un conjunto t tal que $T = \{t\}$.*

Demostración. La condición es suficiente. En efecto, sea T un conjunto tal que, para algún conjunto t, se cumpla que $T = \{t\}$ y sea A un conjunto. Entonces el triplo $\omega_A = (A, A \times \{t\}, \{t\})$ es una aplicación de A en $\{t\}$ y, por el principio de extensionalidad para las funciones, es la única aplicación de A en $\{t\}$.

La condición es necesaria. En efecto, si para cada conjunto A se cumple que hay una única aplicación de A en T, entonces, por una parte, T no puede ser vacío, ya que si lo fuera, entonces tomando como A un conjunto no vacío, e.g., $\{\varnothing\}$, no existiría ninguna aplicación de A en T, lo cual entraría en contradicción con lo supuesto; por otra parte, T no puede tener dos o más miembros distintos, ya si ése fuera el caso, entonces tomando como A el conjunto $\{\varnothing\}$, existirían al menos dos aplicaciones distintas de A en T, que también entraría en contradicción con lo supuesto. Por consiguiente, ya que T no puede ser ni vacío ni tener dos o más miembros distintos, T tiene necesariamente un único miembro, i.e., hay un (único, por el axioma de extensionalidad,) t tal que $T = \{t\}$. □

Aunque los conceptos de conjunto inicial y final son, formalmente, duales, no obstante, hay una diferencia entre ellos, además de la evidente, de que uno es vacío y los otros no.

El conjunto inicial, i.e., el conjunto vacío, es absolutamente único; pero ocurre que hay más de dos conjuntos finales distintos, de hecho hay tantos como conjuntos en el universo de los conjuntos; sin embargo, dos cualesquiera de ellos son unívocamente isomorfos (como demostraremos, una vez dispongamos de la noción de isomorfismo), i.e., entre dos conjuntos finales hay una y sólo una biyección.

De manera que la definición de conjunto final, y algunas posteriores, no especifica, de hecho, un único conjunto, sino que determina a toda una clase de conjuntos, la de los finales; pero, siendo dos cualesquiera de ellos indistinguibles, por existir entre ellos un único isomorfismo, se puede elegir a uno, el de menor complejidad, como representante canónico. En nuestro caso será el conjunto $\{\varnothing\}$, al que denotamos por 1.

Ejercicio 7.1.5.

1. Demuéstrese que no existe el conjunto cuyos miembros sean exactamente aquellos conjuntos que sean finales.
2. Demuéstrese que para cada aplicación $f\colon B \longrightarrow A$, $\omega_A \circ f = \omega_B$.

Proposición 7.1.6. *No hay ningún conjunto que, respecto de las aplicaciones, sea inicial y final. Pero el conjunto vacío, respecto de las aplicaciones parciales y de las aplicaciones no deterministas, es inicial y final; y si A y B son dos conjuntos, entonces hay tanto una única aplicación parcial, como una única aplicacíon no determinista de A en B, que resulta de componer ω_A y α_B, a la que denotamos por $\theta_{A,B}$ y la denominamos la aplicación parcial o la aplicación no determinista* cero *de A en B.*

Además, si $f\colon A \rightharpoonup B$ y $g\colon C \rightharpoonup D$ son dos aplicaciones parciales o $r\colon A \multimap B$ y $s\colon C \multimap D$ dos aplicaciones no deterministas, entonces

$$g \circ \theta_{B,C} \circ f = \theta_{A,D} \quad y \quad s \circ \theta_{B,C} \circ r = \theta_{A,D}.$$

Demostración. No puede haber un conjunto que sea simultáneamente inicial y final, porque, para cada conjunto t, $\varnothing \neq \{t\}$.

Si A y B son dos conjuntos, entonces el triplo $\theta_{A,B} = (A, \varnothing, B)$ es tanto una aplicación parcial como una aplicación no determinista de A en B y es la única de A en B. Además, $\alpha_B \circ \omega_A = (A, \varnothing, B)$, i.e., se tiene que $\theta_{A,B} = \alpha_B \circ \omega_A$.

La última parte de la Proposición se cumple porque, tanto la función subyacente de $g \circ \theta_{B,C} \circ f$ como la relación subyacente de $s \circ \theta_{B,C} \circ r$, coinciden con la de $\theta_{A,B}$, que es $\varnothing$. □

7.2. Separadores. La noción que definimos a continuación, la de *separador* o *generador*, la usaremos, cuando dispongamos de los conceptos pertinentes, para demostrar que cualquier conjunto, y algún tipo de conjunto estructurado es, esencialmente, un cociente de un coproducto de generadores del tipo que se considere.

Definición 7.2.1. Un conjunto X es un *separador* o *generador* si dados dos conjuntos A, B y dos aplicaciones distintas f y g de A en B, existe una aplicación h de X en A tal que $f \circ h \neq g \circ h$, i.e., si

$$\forall A, B\, \forall f, g\colon A \longrightarrow B\, (\, f \neq g \rightarrow \exists h\colon X \longrightarrow A\, (\, f \circ h \neq g \circ h\,)).$$

Así pues, un conjunto X no será un separador cuando existan dos conjuntos A, B y dos aplicaciones distintas f, g de A en B, tales que, para cada aplicación h de X en A se cumpla que $f \circ h = g \circ h$.

Proposición 7.2.2. *Una condición necesaria y suficiente para que un conjunto X sea un separador es que no sea vacío.*

Demostración. La condición es suficiente. En efecto, supongamos que X no sea vacío y sean f, g dos aplicaciones distintas de A en B. Entonces hay un $a \in A$ tal que $f(a) \neq g(a)$ y para la aplicación $h = (X, X \times \{a\}, A)$ de X en A se cumple que $f \circ h \neq g \circ h$.

La condición es necesaria. En efecto, si X es vacío, entonces X no es un separador, porque para $A = 1$, siendo $1 = \{\varnothing\}$ y $B = 2$, siendo $2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ hay dos aplicaciones distintas $f = (1, \{(\varnothing, \varnothing)\}, 2)$ y $g = (1, \{(\varnothing, 1)\}, 2)$ tales que $f \circ \alpha_1 = g \circ \alpha_1$. □

7.3. Aplicaciones inyectivas y monomorfismos. Empezamos la clasificación de las aplicaciones definiendo las aplicaciones inyectivas y los monomorfismos, y demostrando que ambas clases de aplicaciones coinciden.

Definición 7.3.1. Sea $f\colon A \longrightarrow B$ una aplicación.

1. Decimos que $f\colon A \longrightarrow B$ es una aplicación *inyectiva* si
$$\forall x, y \in A\, (\, x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)\,),$$
o, lo que es equivalente, si
$$\forall x, y \in A\, (\, f(x) = f(y) \rightarrow x = y\,).$$

2. Decimos que $f\colon A \longrightarrow B$ es un *monomorfismo* si, para cada conjunto X y cualesquiera aplicaciones $g, h\colon X \longrightarrow A$, si el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] \arrow[rr, bend left=50, "f \circ g"] \arrow[rr, bend right=50, "f \circ h"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $g = h$, i.e., si cuando $f \circ g = f \circ h$, entonces $g = h$; es por ello que a este tipo de aplicaciones también se las denomina *simplificables a la izquierda*. Denotamos al conjunto de los monomorfismos de A en B por $\mathrm{Mono}(A, B)$. Convenimos entonces que $f : A \rightarrowtail B$ significa que la aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ es un monomorfismo.

Por consiguiente, una aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ no será inyectiva precisamente cuando

$$\exists x, y \in A\,(\, x \neq y \wedge f(x) = f(y)\,);$$

y no será un monomorfismo precisamente cuando

$$\exists g, h\colon X \longrightarrow A\,(\, f \circ g = f \circ h \wedge g \neq h\,).$$

Además, para demostrar que dos aplicaciones $g, h\colon X \longrightarrow A$, coinciden, será entonces suficiente que determinemos un monomorfismo $f\colon A \rightarrowtail B$ tal que $f \circ g = f \circ h$.

Observemos que el concepto de aplicación inyectiva se define *internamente*, i.e., haciendo uso de la relación de pertenencia; mientras que el de monomorfismo se define *externamente*, i.e., considerando las relaciones que guarda la aplicación en cuestión, con las demás aplicaciones del universo de los conjuntos. No obstante, ambos conceptos son equivalentes, según demostramos a continuación.

Proposición 7.3.2. *Una condición necesaria y suficiente para que $f\colon A \longrightarrow B$ sea inyectiva es que sea un monomorfismo.*

Demostración. La condición es necesaria. En efecto, supongamos que $f\colon A \longrightarrow B$ sea inyectiva y sean $g, h\colon X \longrightarrow A$, tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] \arrow[rr, bend left=50, "f \circ g"] \arrow[rr, bend right=50, "f \circ h"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

conmute. Entonces, dado un $x \in X$, se cumple que $f(g(x)) = f(h(x))$, luego $g(x) = h(x)$, por lo tanto $g = h$.

La condición es suficiente. En efecto, si $f\colon A \longrightarrow B$ no fuera inyectiva, entonces existirían $x, y \in A$ tales que $x \neq y$ y $f(x) = f(y)$. Luego, para $X = \{\varnothing\}$ y para $g = (X, \{(\varnothing, x)\}, A)$ y $h = (X, \{(\varnothing, y)\}, A)$ se tendría que $f \circ g = f \circ h$ pero que $g \neq h$, i.e., que f no sería un monomorfismo. Así pues, si f es un monomorfismo, entonces f es inyectiva. □

Ejercicio 7.3.3. Demuéstrese directamente que si $f\colon A \longrightarrow B$ es un monomorfismo, entonces es inyectiva.

Ejercicio 7.3.4. Demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que $f\colon A \longrightarrow B$ sea inyectiva es que, para cada $X \subseteq A$, $X = f^{-1}[f[X]]$.

A continuación demostramos algunas de las propiedades de clausura de la clase de las aplicaciones inyectivas.

Proposición 7.3.5. *Sean A, B y C tres conjuntos, X un subconjunto de A, f una aplicación de A en B y g una aplicación de B en C. Entonces:*

1. id_A*, la aplicación identidad de A, es un monomorfismo.*
2. $\mathrm{in}_{X,A} = (X, \Delta_X, A)$*, la* inclusión canónica *de X en A, también denotada por* in_X*, si queda claro por el contexto cuál es el conjunto que se está considerando que contiene al conjunto X, es un monomorfismo.*
3. *Si f y g son monomorfismos, entonces $g \circ f$ es un monomorfismo.*
4. *Si $g \circ f$ es un monomorfismo, entonces f es un monomorfismo.*

Demostración. Nos limitamos a demostrar las dos últimas partes, dejando el resto como ejercicio.

Por lo que respecta a 3, si M es un conjunto y $u, v : M \longrightarrow A$ dos aplicaciones tales que $(g \circ f) \circ u = (g \circ f) \circ v$, entonces, por la asociatividad, $g \circ (f \circ u) = g \circ (f \circ v)$, luego, por ser g monomorfismo, $f \circ u = f \circ v$, y entonces, por ser f monomorfismo, $u = v$.

Respecto de 4, si M es un conjunto y $u, v : M \longrightarrow A$ dos aplicaciones tales que $f \circ u = f \circ v$, entonces $g \circ (f \circ u) = g \circ (f \circ v)$, luego $(g \circ f) \circ u = (g \circ f) \circ v$, por lo tanto $u = v$.

$\square$

Ejercicio 7.3.6. Demuéstrese que dado un $n \geq 1$ y, para cada $i \in n + 1$, una aplicación $f_i\colon A_i \longrightarrow A_{i+1}$, si $f_n \circ \cdots \circ f_0\colon A_0 \longrightarrow A_{n+1}$ es inyectiva, entonces f_0 también lo es. Además, demuéstrese que si cada una de las aplicaciones f_i es inyectiva también lo es su composición.

7.4. La relación de dominación. Haciendo uso del concepto de aplicación inyectiva, definimos una clase relacional binaria sobre el universo de los conjuntos, la de *dominación*, sobre la que se fundamentará, en una sección posterior, la comparación entre los *cardinales*.

Definición 7.4.1. Sean A y B dos conjuntos. Decimos que B *domina* a A, o que A está *dominado* por B, si hay un monomorfismo de A en B. Si tal es el caso lo denotamos por $A \leq B$.

Ejercicio 7.4.2. Demuéstrese que no existe el conjunto $\{\, (A, B) \mid A \leq B \,\}$.

Respecto de la relación de dominación puede ocurrir, a priori, para dos conjuntos arbitrarios A y B, la siguiente tetracotomía:

1. $A \leq B$ y $B \leq A$.
2. $A \leq B$ pero $B \nleq A$.
3. $A \nleq B$ pero $B \leq A$.
4. $A \nleq B$ y $B \nleq A$.

Posteriormente, demostraremos que en el primer caso obtenemos que A y B son isomorfos, i.e., que son indistinguibles en la teoría de conjuntos, que es el Teorema de Cantor-Bernstein; y que el último caso no puede darse, ya que, como consecuencia del axioma de elección, siempre se cumple que, para cualesquiera conjuntos A y B, $A \leq B$ o $B \leq A$.

La proposición que sigue establece que la relación binaria, $\leq$, de dominación sobre el universo de los conjuntos, tiene las propiedades de una relación de preorden, i.e., es reflexiva y transitiva.

Proposición 7.4.3. *Sean A, B y C tres conjuntos. Entonces:*

1. $A \leq A$.
2. *Si* $A \leq B$ *y* $B \leq C$, *entonces* $A \leq C$.

Demostración. Esta Proposición se deduce inmediatamente de la Proposición 7.3.5. □

Ejercicio 7.4.4. Demuéstrese que la clase relacional $\leq \cap \leq^{-1}$ tiene las propiedades de una relación de equivalencia, i.e., es reflexiva simétrica y transitiva.

El teorema de Cantor que sigue, establece que cada conjunto está dominado por otro conjunto, concretamente, por el conjunto de sus partes.

Teorema 7.4.5 (Cantor)**.** *Para cada conjunto A, hay un monomorfismo* natural *de A en* $\mathrm{Sub}(A)$, *i.e., hay un* $\{\cdot\}_A\colon A \rightarrowtail \mathrm{Sub}(A)$ *tal que, para cada aplicación* $f\colon A \longrightarrow B$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "\{\cdot\}_A"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Sub}(A) \arrow[d, "f[\cdot]"] \\
B \arrow[r, tail, "\{\cdot\}_B"'] & \mathrm{Sub}(B)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Así pues, con la terminología anterior, cada conjunto A está dominado por $\mathrm{Sub}(A)$.

Demostración. Sea A un conjunto. Entonces la aplicación $\{\cdot\}_A\colon A \rightarrowtail \mathrm{Sub}(A)$, definida como:

$$\{\cdot\}_A \begin{cases} A & \longrightarrow \ \mathrm{Sub}(A) \\ a & \longmapsto \ \{a\}, \end{cases}$$

es un monomorfismo.

Por otra parte, si $f\colon A \longrightarrow B$ y $a \in A$, entonces

$$\{\cdot\}_B(f(a)) = \{f(a)\} \quad \text{y} \quad f[\{\cdot\}_A(a)] = \{f(a)\},$$

luego $\{\cdot\}_B \circ f = f[\cdot] \circ \{\cdot\}_A$. Por consiguiente el diagrama conmuta. □

Obsérvese que la definición de las aplicaciones $\{\cdot\}_A$ y $\{\cdot\}_B$ es la misma, i.e., es independiente del conjunto que se considere, dicho de otro modo la familia de aplicaciones $(\{\cdot\}_A)_{A \in V}$ es una transformación natural entre dos functores convenientes. Mas adelante demostraremos que $\mathrm{Sub}(A)$ no está dominado por A.

7.5. Conjuntos inyectivos.

Definición 7.5.1. Un conjunto I es *inyectivo* si dada una aplicación inyectiva $f\colon A \rightarrowtail B$ y una aplicación $g\colon A \longrightarrow I$, hay una aplicación $h\colon B \longrightarrow I$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, "h"] \\
I &
\end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., si

$$\forall A, B\, \forall f\colon A \rightarrowtail B\, \forall g\colon A \longrightarrow I\, \exists h\colon B \longrightarrow I\, (\, h \circ f = g\,).$$

Por consiguiente, un conjunto I no será inyectivo si

$$\exists A, B\, \exists f\colon A \rightarrowtail B \exists\, g\colon A \longrightarrow I\, \forall h\colon B \longrightarrow I\, (\, h \circ f \neq g\,).$$

Proposición 7.5.2. *Una condición necesaria y suficiente para que un conjunto sea inyectivo es que no sea vacío.*

Demostración. La condición es suficiente. En efecto, sea I un conjunto no vacío y consideremos la situación descrita por el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \\ I & \end{tikzcd}$$

Entonces, para un $i \in I$, arbitrario, pero fijo, definimos la aplicación $h : B \longrightarrow I$ como:

$$h \begin{cases} B \longrightarrow I \\ b \;\longmapsto\; h(b) = \begin{cases} g(a), & \text{si } b \in \mathrm{Im}(f), \text{ y siendo } \{a\} = f^{-1}[\{b\}]; \\ i, & \text{si } b \notin \mathrm{Im}(f). \end{cases} \end{cases}$$

Para la aplicación h se cumple que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, "h"] \\ I & \end{tikzcd}$$

conmuta.

La condición es necesaria. En efecto, si $I = \varnothing$, entonces para la aplicación inyectiva $\alpha_{\{\varnothing\}}\colon \varnothing \longrightarrow \{\varnothing\}$ se cumple que no hay ninguna aplicación de $\{\varnothing\}$ en $\varnothing$, luego no hay ninguna aplicación h de $\{\varnothing\}$ en $\varnothing$ tal que $h \circ \alpha_{\{\varnothing\}} = \mathrm{id}_\varnothing$. Por consiguiente, si $I = \varnothing$, entonces I no es inyectivo. □

7.6. Secciones. Siguiendo con la clasificación de las aplicaciones, definimos a continuación las secciones, de las que demostraremos que son estrictamente más fuertes que los monomorfismos, i.e., demostraremos que toda sección es un monomorfismo, pero que hay monomorfismos que no son secciones.

Definición 7.6.1. Una aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ es una *sección* o es *invertible por la izquierda* si hay una aplicación $g\colon B \longrightarrow A$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta. Así pues, $f\colon A \longrightarrow B$ es una sección si y sólo si

$$\exists g\colon B \longrightarrow A\, (\, g \circ f = \mathrm{id}_A\,).$$

Obsérvese que para que $f\colon A \longrightarrow B$ sea una sección, sólo se exige que exista al menos una aplicación $g\colon B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$, y no que sea única tal aplicación.

Establecemos a continuación algunas de las propiedades de clausura de la clase de las secciones.

Proposición 7.6.2. *Sean A, B y C tres conjuntos, T un conjunto terminal, f una aplicación de A en B y g una aplicación de B en C. Entonces:*

1. id_A *es una sección.*
2. *Si $f\colon T \longrightarrow A$, entonces f es una sección.*
3. *Si f y g son secciones, entonces $g \circ f$ es una sección.*
4. *Si $g \circ f$ es una sección, entonces f es una sección.*

Demostración. Demostramos sólo las dos últimas partes, dejando el resto como ejercicio.

Por lo que respecta a 3, si f y g son secciones, entonces hay dos aplicaciones $u\colon B \longrightarrow A$ y $v\colon C \longrightarrow B$, tales que los diagramas:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[d, "u"] \\ & A \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_B"'] & C \arrow[d, "v"] \\ & B \end{tikzcd}$$

conmutan. Luego el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & C \arrow[d, "u \circ v"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta. Por consiguiente $g \circ f$ es una sección.

Respecto de 4, si $g \circ f$ es una sección, entonces hay una aplicación $h\colon C \longrightarrow A$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & C \arrow[d, "h"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta. Luego el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[d, "h \circ g"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta. Por consiguiente f es una sección. □

Ejercicio 7.6.3. Demuéstrese que dado un $n \geq 1$ y, para cada $i \in n+1$, una aplicación $f_i\colon A_i \longrightarrow A_{i+1}$, si $f_n \circ \cdots \circ f_0\colon A_0 \longrightarrow A_{n+1}$ es una sección, entonces f_0 también lo es. Además, demuéstrese que si cada una de las aplicaciones f_i es una sección también lo es su composición.

La proposición que sigue caracteriza la clase de las secciones.

Proposición 7.6.4. *Una condición necesaria y suficiente para que una aplicación sea una sección es que sea un monomorfismo y que no sea la única aplicación del conjunto vacío en un conjunto no vacío.*

Demostración. La condición es necesaria. En efecto, supongamos que $f\colon A \longrightarrow B$ sea una sección y sean $g, h\colon X \longrightarrow A$ dos aplicaciones tales que $f \circ g = f \circ h$. Entonces, por ser f una sección, hay una aplicación $t\colon B \longrightarrow A$ tal que $t \circ f = \mathrm{id}_A$, luego $t\circ(f\circ g) = t\circ(f\circ h)$, por lo tanto $(t\circ f)\circ g = (t\circ f)\circ h$, así que $\mathrm{id}_A\circ g = \mathrm{id}_A\circ h$, de donde $g = h$. Por consiguiente f es un monomorfismo. Además, f no puede ser la única aplicación del conjunto vacío en un conjunto no vacío, porque si lo fuera, no podría ser una sección.

La condición es suficiente. En efecto, supongamos que $f\colon A \longrightarrow B$ sea un monomorfismo y que no sea la única aplicación del conjunto vacío en un conjunto no vacío. Entonces, o bien $f = \mathrm{id}_\varnothing$, en cuyo caso f se tiene a sí misma como inversa por la izquierda, y es por lo tanto una sección; o bien $f \neq \mathrm{id}_\varnothing$, y entonces, además de ser monomorfismo y no ser la única aplicación del conjunto vacío en un conjunto no vacío, se tiene, necesariamente, que $A \neq \varnothing$, en cuyo caso, eligiendo un $i \in A$, y definiendo la aplicación $g\colon B \longrightarrow A$ como:

$$g \begin{cases} B \longrightarrow A \\ b \longmapsto g(b) = \begin{cases} a, & \text{si } b \in \mathrm{Im}(f), \text{ y siendo } \{a\} = f^{-1}(\{b\}); \\ i, & \text{si } b \notin \mathrm{Im}(f), \end{cases} \end{cases}$$

se cumple que $g \circ f = \mathrm{id}_A$, y por consiguiente, f es una sección. □

Ejercicio 7.6.5.

1. Demuéstrese que toda sección es un monomorfismo, pero que hay monomorfismos que no son secciones.
2. Demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que una aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ sea inyectiva es que $A = \varnothing$ o que $A \neq \varnothing$ y exista una aplicación $g\colon B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Observemos que $\varnothing \in \mathrm{Fnc}(\varnothing, \varnothing)\cap\mathrm{Fnc}(\varnothing, A)$, para cualquier conjunto A, y que, $\varnothing$, en tanto que función de $\varnothing$ en $\varnothing$, tiene, en particular un inverso a la izquierda, pero que, en tanto que función de $\varnothing$ en A, no tiene un inverso a la izquierda, si A no es vacío. Así pues, un mismo conjunto, el vacío, tendría dos propiedades incompatibles. Es por ello y, sobre todo, por otros casos que se presentan en el álgebra homológica y la topología algebraica, que es necesario introducir el concepto de aplicación, en el que está incorporado, a diferencia de lo que ocurre con las funciones, explícitamente el codominio (además del dominio, que es común a ambos conceptos).

7.7. Coseparadores. Ahora definimos el concepto dual del de separador, que es el de *coseparador*, y que usaremos para demostrar, cuando dispongamos de los conceptos pertinentes, que cualquier conjunto es isomorfo a un subconjunto de un producto de copias del 2. Además, tal concepto se usa en la demostración de que las nociones de aplicación *sobreyectiva* y de *epimorfismo*, definidas después, son equivalentes.

Definición 7.7.1. Un conjunto X es un *coseparador* o *cogenerador* si dados dos conjuntos A, B y dos aplicaciones distintas f y g de A en B, existe una aplicación h de B en X tal que $h \circ f \neq h \circ g$, i.e., si

$$\forall A, B\, \forall f, g\colon A \longrightarrow B\, (\, f \neq g \rightarrow \exists h\colon B \longrightarrow X\, (\, h \circ f \neq h \circ g\,))$$

Así pues, un conjunto X no será un coseparador cuando existan dos conjuntos A, B y dos aplicaciones distintas f, g de A en B, tales que, para cada aplicación h de B en X se cumpla que $h \circ f = h \circ g$.

Proposición 7.7.2. *Una condición necesaria y suficiente para que un conjunto X sea un coseparador es que tenga al menos dos miembros distintos.*

Demostración. La condición es suficiente. En efecto, sea X un conjunto que tenga al menos dos miembros distintos y sean x e y, dos de ellos, arbitrarios, pero fijos, y sean f y g dos aplicaciones distintas de A en B. Entonces hay un $a \in A$ tal que $f(a) \neq g(a)$. Luego, definiendo la aplicación $h\colon B \longrightarrow X$ como:

$$h \begin{cases} B \longrightarrow X \\ b \longmapsto h(b) = \begin{cases} x, & \text{si } b = f(a); \\ y, & \text{si } b \in B - \{f(a)\}, \end{cases} \end{cases}$$

se cumple que $h \circ f \neq h \circ g$. Por lo tanto X es un coseparador.

La condición es necesaria. En efecto, si X no tiene al menos dos miembros distintos, entonces, o bien no tiene ninguno, en cuyo caso, tomando como A el conjunto $1 = \{\varnothing\}$, como B el conjunto $2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, y las aplicaciones $f, g\colon 1 \longrightarrow 2$, que al único miembro del primero le asignan, rep., $\varnothing$ y $\{\varnothing\}$, se cumple, por no haber ninguna, que para cada aplicación h de B en X, $h \circ f = h \circ g$; o bien tiene un único miembro, en cuyo caso, tomando, también, como A el conjunto 1, como B el conjunto 2, y las mismas aplicaciones $f, g\colon 1 \longrightarrow 2$, que antes, se cumple que, para la única aplicación ω_B de B en X, $\omega_B \circ f = \omega_B \circ g$. Así pues, X no es un coseparador, si no tiene al menos dos miembros distintos. □

7.8. Aplicaciones sobreyectivas y epimorfismos. Continuamos con la clasificación de las aplicaciones especificando las aplicaciones sobreyectivas y los epimorfismos, de las que demostraremos que son equivalentes.

Definición 7.8.1. Sea $f\colon A \longrightarrow B$ una aplicación.

1. Decimos que $f\colon A \longrightarrow B$ es una aplicación *sobreyectiva* si
$$\forall b \in B\, \exists a \in A(\, f(a) = b\,),$$
i.e., si $\mathrm{Im}(f) = B$.
2. Decimos que $f\colon A \longrightarrow B$ es un *epimorfismo* si, para cada conjunto Y y cualesquiera aplicaciones $g, h\colon B \longrightarrow Y$, si el diagrama
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] \arrow[rr, bend right, "h \circ f"'] & B \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$
conmuta, entonces $g = h$, i.e., si cuando $g \circ f = h \circ f$, entonces $g = h$; es por ello que a este tipo de aplicaciones también se las denomina *simplificables a la derecha*. Convenimos entonces que $f\colon A \twoheadrightarrow B$ significa que la aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ es un epimorfismo, y denotamos al conjunto de los epimorfismos de A en B por $\mathrm{Epi}(A, B)$.

Por consiguiente, una aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ no será sobreyectiva precisamente cuando
$$\exists b \in B\, \forall a \in A\, (\, f(a) \neq b\,);$$

y no será un epimorfismo precisamente cuando

$$\exists g, h\colon B \longrightarrow Y\ (\, g \circ f = h \circ f \wedge g \neq h\,).$$

Además, para demostrar que dos aplicaciones $g, h\colon B \longrightarrow Y$, coinciden, será entonces suficiente que se determine un epimorfismo $f\colon A \twoheadrightarrow B$ tal que $g \circ f = h \circ f$.

Observemos que el concepto de aplicación sobreyectiva, lo mismo que el de inyectiva, se define *internamente*, i.e., haciendo uso de la relación de pertenencia; mientras que el de epimorfismo se define *externamente*, i.e., considerando las relaciones que guarda la aplicación en cuestión, con las demás aplicaciones del universo de los conjuntos. No obstante, ambos conceptos también son equivalentes, según demostramos a continuación.

Proposición 7.8.2. *Una condición necesaria y suficiente para que $f\colon A \longrightarrow B$ sea sobreyectiva es que sea un epimorfismo.*

Demostración. La condición es necesaria. En efecto, supongamos que $f\colon A \longrightarrow B$ sea sobreyectiva y sea Y un conjunto y $g, h\colon B \longrightarrow Y$ dos aplicaciones tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left=50, "g \circ f"] \arrow[rr, bend right=50, "h \circ f"'] & B \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & Y
\end{tikzcd}$$

conmute. Entonces, dado un $b \in B$, por ser f sobreyectiva, hay un $a \in A$ tal que $f(a) = b$, por lo tanto $g(b) = g(f(a))$ y $h(b) = h(f(a))$, luego $g(b) = h(b)$, ya que $g \circ f = h \circ f$, Por consiguiente $g = h$. Así pues, si f es sobreyectiva, entonces f es un epimorfismo.

La condición es suficiente. En efecto, si f no fuera sobreyectiva, entonces existiría un $x \in B$ tal que, para cada $a \in A$, $f(a) \neq x$, sea x uno de ellos, arbitrario, pero fijo. Entonces, tomando como Y el conjunto 2 y como aplicaciones $g, h\colon B \longrightarrow 2$ las definidas, resp., como:

$$g \begin{cases} B \longrightarrow 2 \\ b \longmapsto h(b) = 1 \end{cases} \quad \text{y}$$

$$h \begin{cases} B \longrightarrow 2 \\ b \longmapsto h(b) = \begin{cases} 1, & \text{si } b \in \operatorname{Im}(f); \\ 0, & \text{si } b \in B - \operatorname{Im}(f), \end{cases} \end{cases}$$

se tendría que $g \neq h$, porque $g(x) = 1$ y $h(x) = 0$, pero $g \circ f = h \circ f$, i.e., f no sería un epimorfismo. Por consiguiente, si f es un epimorfismo, entonces es sobreyectiva. □

Ejercicio 7.8.3. Demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que $f\colon A \longrightarrow B$ sea sobreyectiva es que, para cada $Y \subseteq B$, $Y = f[f^{-1}[Y]]$.

Establecemos a continuación algunas de las propiedades de clausura de la clase de los epimorfismos.

Proposición 7.8.4. *Sean A, B y C tres conjuntos, f una aplicación de A en B y g una aplicación de B en C. Entonces:*

1. id_A *es un epimorfismo.*
2. *Si f y g son epimorfismos, entonces $g \circ f$ es un epimorfismo.*
3. *Si $g \circ f$ es un epimorfismo, entonces g es un epimorfismo.*

Demostración. La demostración es similar a la de la Proposición 7.3.5. □

Ejercicio 7.8.5. Demuéstrese que dado un $n \geq 1$ y, para cada $i \in n+1$, una aplicación $f_i\colon A_i \longrightarrow A_{i+1}$, si $f_n \circ \cdots \circ f_0\colon A_0 \longrightarrow A_{n+1}$ es un epimorfismo, entonces f_n también lo es. Además, demuéstrese que si cada una de las aplicaciones f_i es un epimorfismo también lo es su composición.

7.9. El método de la diagonalización. La demostración del teorema que sigue, que establece, junto con un teorema anterior de Cantor, para cada conjunto, el inicio de una escala de conjuntos con el conjunto en cuestión como primer término, usa en su demostración el método de la diagonalización de Du Bois-Reymond[1]-Cantor, que generalmente se atribuye sólo a Cantor, método que consiste en partir de un dominio de objetos y atribuirle una cierta propiedad, y procediendo por reducción al absurdo, suponiendo que la extensión de la propiedad coincida con el dominio dado, mostrar un objeto del dominio que no cumpla la propiedad. Tal método tiene aplicaciones, no sólo en la teoría de conjuntos, sino en otros ámbitos, e.g., en la teoría de las aplicaciones recursivas.

Teorema 7.9.1 (Cantor)**.** *Para cada conjunto A, no hay ningún epimorfismo de A en* $\mathrm{Sub}(A)$.

Demostración. El teorema es evidente si A es vacío. Supongamos que A no sea vacío, entonces la demostración la llevamos a cabo usando el *método de la diagonalización de Du Bois-Reymond-Cantor*. Supongamos que exista un epimorfismo f de A en $\mathrm{Sub}(A)$. Entonces para el subconjunto X_f de A, definido como:

$$X_f = \{\, x \in A \mid x \notin f(x) \,\},$$

se cumple, por ser f un epimorfismo, que hay un $a \in A$ tal que $f(a) = X_f$. Sea a uno de ellos, arbitrario, pero fijo. Entonces, tendríamos, en virtud de la definición de X_f, que

$$a \in X_f \quad \text{si y sólo si} \quad a \notin f(a),$$

y ya que $f(a) = X_f$, tendríamos, en definitiva, que

$$a \in X_f \quad \text{si y sólo si} \quad a \notin X_f,$$

lo cual es una contradicción. Por consiguiente no hay ningún epimorfismo de A en $\mathrm{Sub}(A)$.

Observemos que si A no es vacío, entonces X_f no es vacío. Ya que si $X_f = \varnothing$, i.e., si no fuera el caso que para algún $x \in A$ se tiene que $x \notin f(x)$, entonces, para cada $x \in A$, tendríamos que $x \in f(x)$. Pero, siendo f sobreyectiva, se cumpliría que $X_f = \varnothing = f(a)$, para algún $a \in A$. Por lo tanto $a \in f(a) = \varnothing$, contradicción. De modo que si A no es vacío, entonces X_f tampoco es vacío.

□

7.10. El axioma de elección. El concepto dual del de inyectivo es el de *proyectivo*, y aunque para los conjuntos, aparentemente, no presenta ningún interés, porque, según demostraremos, todos los conjuntos son proyectivos, sin embargo, sí lo tiene, ya que, por una parte, tal concepto se puede predicar de otros objetos matemáticos para los que no se trivializa y, por otra, el *axioma de elección* equivale a que todos los conjuntos sean proyectivos y tal axioma, que fue formulado explícitamente por primera vez por Zermelo, y del que hizo uso para demostrar la conjetura de Cantor de que sobre todo conjunto hay una buena ordenación, es fundamental tanto para el desarrollo de la teoría de conjuntos, como para el de otras ramas de las matemáticas. De hecho, hay universos de discurso en matemáticas, las

[1]Du Bois-Reymond fué uno, no dos individuos en uno

categorías, en los que se cumple la versión del axioma de elección que afirma que todos los objetos de la misma son proyectivos.

Además, el concepto de conjunto proyectivo, se puede generalizar para conjuntos estructurados de alguna especie (y para los morfismos adecuados entre los mismos), en cuyo caso, ya no ocurre que todos ellos sean necesariamente proyectivos, y tiene por lo tanto interés determinar cuáles lo son.

Damos a continuación las versiones de Baer y de Zermelo del axioma de elección, y algunas otras, y de las que demostraremos que son equivalentes entre sí, por ser éstas la más conveniente para lo que ahora pretendemos demostrar, que es, por una parte, la equivalencia del axioma de elección con el que todos los conjuntos sean proyectivos y, por otra, con el que todos los epimorfismos sean retracciones; siendo las retracciones las duales de las secciones, como definiremos en lo que sigue.

Convenimos, para abreviar el enunciado del axioma de elección de Baer, que $\mathrm{Rel}(R)$ significa que R es una relación y $\mathrm{Fnc}(F)$ que F es una función.

Axioma de elección de Baer. *Para cualquier relación se cumple que existe una función contenida en la relación y que tiene el mismo dominio de definición que ésta, i.e.,*

$$\forall R\,(\,\mathrm{Rel}(R) \rightarrow \exists F\,(\,\mathrm{Fnc}(F) \wedge F \subseteq R \wedge \mathrm{Dom}(F) = \mathrm{Dom}(R)\,))$$

Observemos que el axioma de elección de Baer, y lo mismo se aplica a las otras versiones del axioma de elección, sólo afirma, para una relación dada, la existencia de al menos una función sujeta a cumplir ciertas condiciones, pero, a diferencia de los axiomas hasta ahora enunciados, no se puede deducir, en general, la unicidad de la misma. Además, el sentido en el que una tal función existe es, en general, el puramente ideal, según el cual una entidad, con ciertas propiedades, existe, cuando la admisión de una tal situación no conduce a ninguna contradicción; y no el sentido constructivo, en virtud del cual, el existir (de una entidad, con ciertas propiedades), se identifica, en una versión débil de constructivo, con la posibilidad de construirlo de manera efectiva, y, en una versión fuerte de constructivo, con la construcción de hecho del mismo.

Para abreviar el enunciado del axioma de elección de Zermelo, convenimos que, para un conjunto $\mathcal{X}$, $\mathrm{Disj}(\mathcal{X})$ significa que $\mathcal{X}$ está formado por conjuntos dos a dos disjuntos, i.e., que, para cada $X, Y \in \mathcal{X}$, si cuando $X \neq Y$, entonces $X \cap Y = \varnothing$

Axioma de elección de Zermelo. *Si el conjunto $\mathcal{X}$ es tal que $\varnothing \notin \mathcal{X}$ y $\mathrm{Disj}(\mathcal{X})$, entonces hay una función*

$$F\colon \mathcal{X} \longrightarrow \bigcup \mathcal{X}$$

tal que, para cada $X \in \mathcal{X}$, $F(X) \in X$, i.e.,

$$\forall \mathcal{X}\,((\,\varnothing \notin \mathcal{X} \wedge \mathrm{Disj}(\mathcal{X})\,) \rightarrow \exists F\colon \mathcal{X} \longrightarrow \bigcup \mathcal{X}\,(\forall X \in \mathcal{X}(F(X) \in X\,))).$$

A tales funciones las denominamos funciones de elección *para el conjunto $\mathcal{X}$.*

Teorema 7.10.1. *Los axiomas de elección de Baer y de Zermelo son equivalentes.*

Demostración. Supongamos el axioma de Baer y sea $\mathcal{X}$ un conjunto tal que $\varnothing \notin \mathcal{X}$ y, para cada $X, Y \in \mathcal{X}$, si cuando $X \neq Y$, entonces $X \cap Y = \varnothing$. Entonces para la relación R de $\mathcal{X}$ en $\bigcup \mathcal{X}$ definida como:

$$R = \{\,(X, x) \in \mathcal{X} \times \bigcup \mathcal{X} \mid x \in X\,\},$$

se cumple, en virtud del axioma de elección de Baer, que hay una función F tal que $F \subseteq R$ y $\mathrm{Dom}(F) = \mathrm{Dom}(R)$. Pero $\mathrm{Dom}(R) = \mathcal{X}$, porque, para cada $X \in \mathcal{X}$, $X \neq \varnothing$, así que $\mathrm{Dom}(F) = \mathcal{X}$ y, puesto que $\mathrm{Im}(R) \subseteq \bigcup \mathcal{X}$, también $\mathrm{Im}(F) \subseteq \bigcup \mathcal{X}$. Además, para cada $X \in \mathcal{X}$, $F(X) \in X$.

Recíprocamente, supongamos el axioma de Zermelo y sea R una relación. Entonces el subconjunto $\mathcal{X}$ de $\mathrm{Sub}(\mathrm{Im}(R) \times \mathrm{Dom}(R))$, definido como:

$$\mathcal{X} = \{\, R[\{x\}] \times \{x\} \mid x \in \mathrm{Dom}(R) \,\},$$

o, con mayor precisión, como:

$$\mathcal{X} = \{\, X \in \mathrm{Sub}(\mathrm{Im}(R) \times \mathrm{Dom}(R)) \mid \exists x \in \mathrm{Dom}(R)(X = R[\{x\}] \times \{x\}) \,\},$$

es tal que $\varnothing \notin \mathcal{X}$, porque si $x \in \mathrm{Dom}(R)$, entonces , $R[\{x\}] \times \{x\} \neq \varnothing$, y además, si $x, y \in \mathrm{Dom}(R)$ y $x \neq y$, entonces $R[\{x\}] \times \{x\} \cap R[\{y\}] \times \{y\} = \varnothing$. Por lo tanto, en virtud del axioma de Zermelo, hay una función de elección E para $\mathcal{X}$. Sea E una de ellas, arbitraria, pero fija. Entonces para la función F de $\mathrm{Dom}(R)$ en $\mathrm{Im}(R)$, que se obtiene componiendo la función de $\mathrm{Dom}(R)$ en $\mathcal{X}$, que a cada $x \in \mathrm{Dom}(R)$ le asigna $R[\{x\}] \times \{x\}$, la función de elección E y la función de $\bigcup \mathcal{X}$ en $\mathrm{Im}(R)$, que a cada $(y, x) \in \bigcup \mathcal{X}$ le asigna y, se cumple que $F \subseteq R$ y que $\mathrm{Dom}(F) = \mathrm{Dom}(R)$.

□

Russell, en 1906, y Zermelo, en 1908, propusieron la siguiente forma del axioma de elección, a la que se conoce por el *axioma de elección multiplicativo.*

Axioma de elección de Russell-Zermelo. *Si* $\varnothing \notin \mathcal{X}$ *y* $\mathrm{Disj}(\mathcal{X})$, *entonces hay un subconjunto* T *de* $\bigcup \mathcal{X}$ *tal que, para cada* $X \in \mathcal{X}$, *hay un único* x *para el que* $x \in T \cap X$, *i.e.,*

$$\forall \mathcal{X}\, ((\, \varnothing \notin \mathcal{X} \wedge \mathrm{Disj}(\mathcal{X})\,) \rightarrow \exists T \subseteq \bigcup \mathcal{X}\, (\, \forall X \in \mathcal{X}\, \exists! x\, (\, x \in T \cap X\,))).$$

A tales subconjuntos los denominamos conjuntos de elección *o* transversales *para el conjunto* $\mathcal{X}$.

Teorema 7.10.2. *Los axiomas de elección de Zermelo y de Russell-Zermelo son equivalentes.*

Demostración. Supongamos el axioma de Zermelo y sea $\mathcal{X}$ un conjunto tal que $\varnothing \notin \mathcal{X}$ y, para cada $X, Y \in \mathcal{X}$, si cuando $X \neq Y$, entonces $X \cap Y = \varnothing$. Entonces, tomando como subconjunto de $\bigcup \mathcal{X}$ la imagen de una función de elección F para el conjunto $\mathcal{X}$, se cumple que, para cada $X \in \mathcal{X}$, hay un único x para el que $x \in \mathrm{Im}(F) \cap X$.

Recíprocamente, supongamos el axioma de Russell-Zermelo y sea $\mathcal{X}$ un conjunto tal que $\varnothing \notin \mathcal{X}$ y, para cada $X, Y \in \mathcal{X}$, si cuando $X \neq Y$, entonces $X \cap Y = \varnothing$. Entonces, siendo T un conjunto de elección para $\mathcal{X}$, se cumple que la función F de $\mathcal{X}$ en $\bigcup \mathcal{X}$, que asigna a un $X \in \mathcal{X}$ el único miembro de $T \cap X$, es una función de elección para $\mathcal{X}$.

□

Principio general de elección de Zermelo. *Para cada* $\mathcal{X}$, *si* $\varnothing \notin \mathcal{X}$, *entonces hay una función* F *de* $\mathcal{X}$ *en* $\bigcup \mathcal{X}$ *tal que, para cada* $X \in \mathcal{X}$, $F(X) \in X$, *i.e.,*

$$\forall \mathcal{X}\, (\, \varnothing \notin \mathcal{X} \rightarrow \exists F \colon \mathcal{X} \rightarrow \bigcup \mathcal{X}\, (\, \forall X \in \mathcal{X}\, (\, F(X) \in X\,))).$$

Teorema 7.10.3. *El axioma de Zermelo equivale al* principio general de elección.

Demostración. Es evidente que del principio general de elección se deduce el axioma de Zermelo.

Recíprocamente, supongamos el axioma de Zermelo y sea $\mathcal{X}$ un conjunto tal que $\varnothing \notin \mathcal{X}$. Entonces para el subconjunto $\mathcal{Y}$ de $\mathrm{Sub}((\bigcup \mathcal{X}) \times \mathcal{X})$ definido como:

$$\mathcal{Y} = \{\, X \times \{X\} \mid X \in \mathcal{X} \,\},$$

o, con mayor precisión, como:

$$\mathcal{Y} = \{\, Y \in \mathrm{Sub}((\bigcup \mathcal{X}) \times \mathcal{X}) \mid \exists X \in \mathcal{X}(Y = X \times \{X\}) \,\},$$

se cumple que $\varnothing \notin \mathcal{Y}$, porque $\varnothing \notin \mathcal{X}$, y que si $X, Y \in \mathcal{X}$ y $X \neq Y$, entonces $(X \times \{X\}) \cap (Y \times \{Y\}) = \varnothing$, luego hay una función $E\colon \mathcal{Y} \longrightarrow \bigcup \mathcal{Y}$ tal que, para cada $X \in \mathcal{X}$, $E(X \times \{X\}) \in X \times \{X\}$. Entonces para la función F de $\mathcal{X}$ en $\bigcup \mathcal{X}$ que se obtiene componiendo la función de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ que a un $X \in \mathcal{X}$ le asigna $X \times \{X\}$, la función E y la función de $\bigcup \mathcal{Y}$ en $\bigcup \mathcal{X}$ que a un $(x, X) \in \bigcup \mathcal{Y}$ le asigna x, se cumple que, para cada $X \in \mathcal{X}$, $F(X) \in X$.

□

Definición 7.10.4. Un conjunto P es *proyectivo* si dada una aplicación sobreyectiva $f\colon A \twoheadrightarrow B$ y una aplicación $g\colon P \longrightarrow B$, se cumple que hay una aplicación $t\colon P \longrightarrow A$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "t"'] \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, two heads, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta.

Teorema 7.10.5. *El axioma de elección, equivale a que todo conjunto sea proyectivo.*

Demostración. Supongamos el axioma de Baer y sean P un conjunto, $f\colon A \twoheadrightarrow B$ y $g\colon P \longrightarrow B$. Entonces para la función subyacente F de la aplicación f, se cumple que $F^{-1} \subseteq B \times A$ y que $\mathrm{Dom}(F^{-1}) = B$, luego, en virtud del axioma de Baer, hay una función H tal que $H \subseteq F^{-1}$ y $\mathrm{Dom}(H) = \mathrm{Dom}(F^{-1})$. Es suficiente entonces tomar como t la aplicación de P en A definida como $t = (P, H \circ G, A)$, para que $f \circ t = g$.

Ahora demostramos que si todo conjunto es proyectivo, entonces se cumple el axioma de elección de Zermelo. Sea $\mathcal{X}$ un conjunto tal que $\varnothing \notin \mathcal{X}$ y, para cada $X, Y \in \mathcal{X}$, si cuando $X \neq Y$, entonces $X \cap Y = \varnothing$. Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{X} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathcal{X}}"] \\ \bigcup \mathcal{X} \arrow[r, two heads, "f"'] & \mathcal{X}, \end{tikzcd}$$

siendo f la aplicación que a un $x \in \bigcup \mathcal{X}$ le asigna el único X de $\mathcal{X}$ para el que $x \in X$. Entonces, por ser $\mathcal{X}$ proyectivo, hay una aplicación $t\colon \mathcal{X} \longrightarrow \bigcup \mathcal{X}$ que completa el diagrama anterior, i.e., el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{X} \arrow[dl, "t"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathcal{X}}"] \\ \bigcup \mathcal{X} \arrow[r, two heads, "f"'] & \mathcal{X}, \end{tikzcd}$$

conmuta. Por consiguiente, hay una función T, la función subyacente de la aplicación t, de $\mathcal{X}$ en $\bigcup \mathcal{X}$ tal que, para cada $X \in \mathcal{X}$, $T(X) \in X$.

□

7.11. Retracciones. Siguiendo con la clasificación de las aplicaciones, introducimos ahora el concepto dual del de sección, que es el de *retracción*.

Definición 7.11.1. Una aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ es una *retracción* o es *inversible por la derecha*, si hay una aplicación $g\colon B \longrightarrow A$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_B"] & \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta. Así pues, $f\colon A \longrightarrow B$ es una *retracción* si y sólo si

$$\exists g\colon B \longrightarrow A\,(\,f \circ g = \mathrm{id}_B\,).$$

Obsérvese que para que $f\colon A \longrightarrow B$ sea una *retracción*, sólo se exige que exista al menos una aplicación $g\colon B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_B$, y no que sea única.

A diferencia de lo que ocurre entre los conceptos de sección y de monomorfismo, los de retracción y epimorfismo, como se demostrará a continuación, sí son equivalentes, y ello tiene su fundamento, en última instancia, en el *axioma de elección*.

Proposición 7.11.2. *Una condición necesaria y suficiente para que una aplicación sea una retracción es que sea un epimorfismo.*

Demostración. La condición es necesaria. En efecto, supongamos que $f : A \longrightarrow B$ sea una retracción y sean Y un conjunto y $u, v\colon B \longrightarrow Y$ tales que $u \circ f = v \circ f$. Entonces, por ser f una retracción, hay una aplicación $g\colon B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_B$, luego $(u \circ f) \circ g = (v \circ f) \circ g$, por lo tanto $u \circ (f \circ g) = v \circ (f \circ g)$, así que $u = v$. Queda con ello demostrado que f es un epimorfismo.

La condición es suficiente. En efecto, supongamos que $f\colon A \longrightarrow B$ sea una aplicación sobreyectiva. Entonces para la función subyacente F de f, se cumple que la *relación* $F^{-1} \subseteq B \times A$, luego, en virtud del axioma de elección de Baer, hay una función G incluida en F^{-1} y tal que $\mathrm{Dom}(G) = B$. Además, $\mathrm{Im}(G) \subseteq A$. Entonces, para la aplicación $g = (B, G, A)$ de B en A se tiene que $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Por lo tanto f es una retracción. □

Ejercicio 7.11.3. Sean A y B dos conjuntos. Demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que A esté dominado por B es que $A = \varnothing$ o que exista una aplicación sobreyectiva de B en A.

Teorema 7.11.4. *El axioma de elección equivale a que todo epimorfismo sea una retracción.*

Demostración. En la Proposición 7.11.2 hemos demostrado que del axioma de elección, bajo la forma de Baer, se deduce que todo epimorfismo es una retracción.

Recíprocamente, supongamos que todo epimorfismo sea una retracción. Puesto que, por el Teorema 7.10.5, el axioma de elección equivale a que todo conjunto sea proyectivo; vamos a demostrar que de lo supuesto se deduce que todo conjunto es proyectivo. Sea P un conjunto, $f\colon A \twoheadrightarrow B$ y $g\colon P \longrightarrow B$. Entonces hay un $h\colon B \longrightarrow A$ tal que $f \circ h = \mathrm{id}_B$, luego para $t = h \circ g$, que es una aplicación de P en A, se cumple que $f \circ t = f \circ (h \circ g)$, pero, por la asociatividad, $f \circ (h \circ g) = (f \circ h) \circ g$ y puesto que $f \circ h = \mathrm{id}_B$, tenemos, en definitiva, que $f \circ t = g$. Así pues, todo conjunto es proyectivo.

Otra demostración de la recíproca. Supongamos que todo epimorfismo sea una retracción. Queremos demostrar que, para cada conjunto I y para cada familia de conjuntos $(A_i)_{i\in I}$, si, para cada $i \in I$, $A_i \neq \varnothing$, entonces $\prod_{i\in I} A_i$, i.e., el producto cartesiano de $(A_i)_{i\in I}$, que es el conjunto

$$\prod_{i\in I} A_i = \{x = (x_i)_{i\in I} \in \mathrm{Fnc}(I, \bigcup_{i\in I} A_i) \mid \forall i \in I(x_i \in A_i)\}$$

no es vacío, i.e., existe una función $x = (x_i)_{i\in I}$ de I en $\bigcup_{i\in I} A_i$ tal que, para cada $i \in I$, $x_i \in A_i$. Para ello consideremos, por cada $i \in I$, la aplicación κ_i de A_i en I definida, para cada $a \in A_i$, como $\kappa_i(a) = i$, y entonces la aplicación $[\kappa_i]_{i\in I}$ de $\coprod_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(A_i \times \{i\})$ en I definida, para cada $(a, i) \in \coprod_{i\in I} A_i$, como $[\kappa_i]_{i\in I}(a, i) = i$. Se cumple que la aplicación $[\kappa_i]_{i\in I}$ es sobreyectiva, luego, en virtud de la hipótesis, tiene (al menos) una inversa por la derecha g. Entonces, recordando que para un par ordenado (x, y) se tiene que $\bigcap\bigcap(x, y) = x$, y definiendo, para cada $i \in I$, x_i como $\bigcap\bigcap g(i)$, se tiene que $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$. $\square$

En la proposición que sigue establecemos algunas de las propiedades de clausura de la clase de las retracciones

Proposición 7.11.5. *Sean A, B y C tres conjuntos, f una aplicación de A en B y g una aplicación de B en C. Entonces:*

1. id_A *es una retracción.*
2. *Si $f\colon A \longrightarrow \varnothing$, entonces f es una retracción.*
3. *Si f y g son retracciones, entonces $g \circ f$ es una retracción.*
4. *Si $g \circ f$ es una retracción, entonces g es una retracción.*

Demostración. La demostración de esta Proposición es similar a la de la Proposición 7.6.2. $\square$

Ejercicio 7.11.6. Demuéstrese que dado un $n \geq 1$ y, para cada $i \in n + 1$, una aplicación $f_i\colon A_i \longrightarrow A_{i+1}$, si $f_n \circ \cdots \circ f_0\colon A_0 \longrightarrow A_{n+1}$ es una retracción, entonces f_n también lo es. Además, demuéstrese que si cada una de las aplicaciones f_i es una retracción también lo es su composición.

7.12. Isomorfismos y bimorfismos. Hasta ahora hemos definido, en particular, dos pares de nociones duales:

$$\frac{\text{Sección}}{\text{Retracción}} \quad \text{y} \quad \frac{\text{Monomorfismo}}{\text{Epimorfismo}}.$$

A continuación definimos dos nociones, las de *isomorfismo* y *bimorfismo*, que pueden ser consideradas, resp., como la síntesis de los dos pares duales anteriores; dándose la circunstancia de que las nociones de isomorfismo y de bimorfismo son equivalentes y, además, que los productos cruzados de las fracciones que los representan coinciden con la de isomorfismo. Sobre el concepto de isomorfismo recordamos que para Weyl:

> A science can only determine its domain of investigation up to an isomorphic mapping. In particular, it remains quite indifferent as to the 'essence' of its objects. That which distinguishes the real points in space from number triads or other interpretations of geometry one can only *know* by immediate intuitive perception. But intuition is not a blissful repose never to be broken; it is driven on toward the dialectic and adventure of cognition. It would be folly to expect cognition to reveal to intuition some secret essence of things hidden behind what is manifestly given by intuition. The idea of isomorphism demarcates the self-evident insurmountable boundary of cognition. This reflection has enlightening value, too, for the metaphysical speculations about a world of things in themselves behind the phenomena. For it is clear that under such a hypothesis the absolute world must be isomorphic to the phenomenal one . . . Thus even if we do not *know* things in themselves, still we have just as much *cognition* about them as we do about the phenomena.

Definición 7.12.1. Una aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ es un *isomorfismo* si existe una aplicación $g\colon B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Por otra parte, $f\colon A \longrightarrow B$ es una aplicación *biyectiva* o un *bimorfismo* si es un monomorfismo y un epimorfismo.

Proposición 7.12.2. *Si $f\colon A \longrightarrow B$, $g\colon B \longrightarrow A$ y $h\colon B \longrightarrow A$ son tales que se cumple $g \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ h = \mathrm{id}_B$, entonces $g = h$.*

Demostración. □

Corolario 7.12.3. *Si $f\colon A \longrightarrow B$, $g\colon B \longrightarrow A$ y $h\colon B \longrightarrow A$ son tales que se cumple $g \circ f = \mathrm{id}_A$, $f \circ g = \mathrm{id}_B$, $h \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ h = \mathrm{id}_B$, entonces $g = h$. Por consiguiente, si $f\colon A \longrightarrow B$ es un isomorfismo, entonces hay una única aplicación, denotada por f^{-1}, de B en A, y denominada la* inversa *de f, tal que $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$, i.e., tal que los diagramas:*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[d, "f^{-1}"] \\
& A
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_B"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& B
\end{tikzcd}
$$

conmutan.

Demostración. □

Proposición 7.12.4. *Una condición necesaria y suficiente para que una aplicacion sea un isomorfismo es que sea una sección y una retracción.*

Demostración. □

Proposición 7.12.5. *Una condición necesaria y suficiente para que una aplicacion sea un isomorfismo es que sea una biyección.*

Demostración. □

Proposición 7.12.6. *Sean A, B y C tres conjuntos, f una aplicación de A en B y g una aplicación de B en C. Entonces:*

1. *id_A es una biyección y $\mathrm{id}_A^{-1} = \mathrm{id}_A$.*
2. *Si f y g son biyecciones, entonces $g \circ f$ es una biyección y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*
3. *Si f es una biyección, entonces f^{-1} es una biyección y $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Demostración. □

Corolario 7.12.7. *Sea A un conjunto. Entonces $\mathbf{Aut}(A) = (\mathrm{Aut}(A), \circ, {}^{-1}, \mathrm{id}_A)$ es un grupo, el* grupo de los automorfismos *o de las* permutaciones *del conjunto A.*

Definición 7.12.8. Sean A y B dos conjuntos. Decimos que A y B son *isomorfos* o *equipotentes*, y lo denotamos por $A \cong B$, si hay un isomorfismo de A en B. Por otra parte, decimos que A está *estrictamente dominado* por B o que B *domina estrictamente* a A, y lo denotamos por $A < B$, si A está dominado por B y si A y B no son isomorfos.

Proposición 7.12.9. *Sean A y B dos conjuntos. Entonces*

1. *$A < B$ si y sólo si $A \leq B$ y $B \not\leq A$.*
2. *Si $A \neq \varnothing$, entonces no existe el conjunto $\{\, X \mid X \cong A \,\}$; pero sí existe el conjunto $\{\, X \mid X \cong \varnothing \,\}$.*

Corolario 7.12.10. *Sean A, B y C tres conjuntos. Entonces:*

1. *$A \cong A$.*
2. *Si $A \cong B$, entonces $B \cong A$.*
3. *Si $A \cong B$ y $B \cong C$ entonces $A \cong C$.*

Ejercicio 7.12.11. Demuéstrese que dos conjuntos finales son isomorfos y que entre dos de ellos hay un único isomorfismo.

7.13. Los operadores P^+ y P^-. Sean A y B dos conjuntos. Entonces denotamos por $\mathrm{P}^+_{A,B}$ la aplicación de $\mathrm{Hom}(A,B)$ en $\mathrm{Hom}(\mathrm{Sub}(A),\mathrm{Sub}(B))$ que a una aplicación f de A en B le asigna la aplicación $\mathrm{P}^+_{A,B}(f) = f[\cdot]$ de $\mathrm{Sub}(A)$ en $\mathrm{Sub}(B)$ que a un subconjunto X de A le hace corresponder el subconjunto $f[X]$ de B.

La aplicación $\mathrm{P}^+_{A,B}\colon \mathrm{Hom}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Sub}(A),\mathrm{Sub}(B))$ es inyectiva y, por lo tanto refleja monomorfismos (i.e., si f es una aplicación de A en B tal que la aplicación $f[\cdot]$ es un monomorfismo de $\mathrm{Sub}(A)$ en $\mathrm{Sub}(B)$, entonces f es un monomorfismo) y epimorfismos (i.e., si f es una aplicación de A en B tal que la aplicación $f[\cdot]$ es un epimorfismo de $\mathrm{Sub}(A)$ en $\mathrm{Sub}(B)$, entonces f es un epimorfismo), luego también isomorfismos (i.e., si f es una aplicación de A en B tal que la aplicación $f[\cdot]$ es un isomorfismo de $\mathrm{Sub}(A)$ en $\mathrm{Sub}(B)$, entonces f es un isomorfismo).

Observemos que la aplicación $\mathrm{P}^+_{A,B}\colon \mathrm{Hom}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Sub}(A),\mathrm{Sub}(B))$ no es, en general, sobreyectiva. Además, si C es un tercer conjunto y g una aplicación de B en C, entonces

$$\mathrm{P}^+_{A,C}(g \circ f) = \mathrm{P}^+_{B,C}(g)\mathrm{P}^+_{A,B}(f),$$

y

$$\mathrm{P}^+_{A,A}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathrm{Sub}(A)}.$$

Sean A y B dos conjuntos. Entonces denotamos por $\mathrm{P}^-_{A,B}$ la aplicación de $\mathrm{Hom}(A,B)$ en $\mathrm{Hom}(\mathrm{Sub}(B),\mathrm{Sub}(A))$ que a una aplicación f de A en B le asigna la aplicación $\mathrm{P}^-_{A,B}(f) = f^{-1}[\cdot]$ de $\mathrm{Sub}(B)$ en $\mathrm{Sub}(A)$ que a un subconjunto Y de B le hace corresponder el subconjunto $f^{-1}[Y]$ de B.

La aplicación $\mathrm{P}^-_{A,B}\colon \mathrm{Hom}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Sub}(B),\mathrm{Sub}(A))$ es inyectiva y es tal que si f es una aplicación de A en B tal que la aplicación $f^{-1}[\cdot]$ es un monomorfismo de $\mathrm{Sub}(B)$ en $\mathrm{Sub}(A)$, entonces f es un epimorfismo, y si f es una aplicación de A en B tal que la aplicación $f^{-1}[\cdot]$ es un epimorfismo de $\mathrm{Sub}(B)$ en $\mathrm{Sub}(A)$, entonces f es un monomorfismo, luego si f es una aplicación de A en B tal que la aplicación $f^{-1}[\cdot]$ es un isomorfismo de $\mathrm{Sub}(B)$ en $\mathrm{Sub}(A)$, entonces f es un isomorfismo.

Observemos que la aplicación $\mathrm{P}^-_{A,B}\colon \mathrm{Hom}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Sub}(B),\mathrm{Sub}(A))$ no es, en general, sobreyectiva. Además, si C es un tercer conjunto y g una aplicación de B en C, entonces

$$\mathrm{P}^-_{A,C}(g \circ f) = \mathrm{P}^-_{A,B}(f)\mathrm{P}^-_{B,C}(g),$$

y

$$\mathrm{P}^-_{A,A}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathrm{Sub}(A)}.$$

7.14. Algunos isomorfismos naturales. Demostramos en primer lugar que el concepto de aplicación no determinista de un conjunto A en otro B equivale al de aplicación de A en $\mathrm{Sub}(B)$.

Proposición 7.14.1. *Sean A y B dos conjuntos. Entonces hay una biyección, $\gamma_{A,B}$, del conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathrm{nd}}(A,B)$ en el conjunto $\mathrm{Hom}(A,\mathrm{Sub}(B))$. Además, hay una biyección $\Gamma_{A,B}$ entre el conjunto de las funciones completamente aditivas de $\mathrm{Sub}(A)$ en $\mathrm{Sub}(B)$ y el conjunto de las relaciones de A en B.*

Demostración. □

En la proposición que sigue establecemos que hay tantos elementos en un conjunto como aplicaciones desde el terminal 1 hasta el conjunto en cuestión.

Proposición 7.14.2. *Sea A un conjunto. Entonces hay una biyección natural de A en $\mathrm{Hom}(1, A)$, i.e., hay una biyección $\kappa_A\colon A \longrightarrow \mathrm{Hom}(1, A)$ tal que, para cada conjunto B y cada aplicación $f\colon A \longrightarrow B$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\kappa_A"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}(1, A) \arrow[d, "\mathrm{H}(\mathrm{id}_1, f)"] \\
B \arrow[r, "\kappa_B"'] & \mathrm{Hom}(1, B)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Ahora demostramos que el terminal 1 es neutro por la izquierda y por la derecha respecto del producto cartesiano.

Proposición 7.14.3. *Sea A un conjunto. Entonces, por una parte, hay una biyección natural de $1 \times A$ en A, i.e., hay una biyección $\lambda_A\colon 1 \times A \longrightarrow A$ tal que, para cada conjunto B y cada aplicación $f\colon A \longrightarrow B$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
1 \times A \arrow[r, "\lambda_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_1 \times f"'] & A \arrow[d, "f"] \\
1 \times B \arrow[r, "\lambda_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta, y, por otra, hay una biyección natural de $A \times 1$ en A, i.e., hay una biyección $\rho_A\colon A \times 1 \longrightarrow A$ tal que, para cada conjunto B y cada aplicación $f\colon A \longrightarrow B$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \times 1 \arrow[r, "\rho_A"] \arrow[d, "f \times \mathrm{id}_1"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B \times 1 \arrow[r, "\rho_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Sabemos que el producto cartesiano de dos conjuntos no es, en general conmutativo, pero la proposición que sigue establece un isomorfismo natural entre los dos modos de multiplicar dos conjuntos, en un orden dado.

Proposición 7.14.4. *Sean A y B dos conjuntos. Entonces hay una biyección natural $\mathrm{tw}_{A,B}\colon A \times B \longrightarrow B \times A$ tal que, para cualesquiera conjuntos C, D y cualesquiera aplicaciones $f\colon A \longrightarrow C$, $g\colon B \longrightarrow D$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "\mathrm{tw}_{A,B}"] \arrow[d, "f \times g"'] & B \times A \arrow[d, "g \times f"] \\
C \times D \arrow[r, "\mathrm{tw}_{C,D}"'] & D \times C
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. $\square$

Lo mismo que antes, sabemos que el producto cartesiano de dos conjuntos no es, en general asociativo, pero la proposición que sigue afirma que hay un isomorfismo natural entre los dos modos de asociar tres conjuntos, en un orden dado.

Proposición 7.14.5. *Sean A, B y C tres conjuntos. Entonces hay una biyección natural* $\mathrm{a}_{A,B,C}\colon (A\times B)\times C \longrightarrow A\times(B\times C)$ *tal que, para cualesquiera conjuntos D, E, F y cualesquiera aplicaciones $f\colon A\longrightarrow D$, $g\colon B\longrightarrow E$ y $h\colon C\longrightarrow F$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(A\times B)\times C \arrow[r, "\mathrm{a}_{A,B,C}"] \arrow[d, "(f\times g)\times h"'] & A\times(B\times C) \arrow[d, "f\times(g\times h)"] \\
(D\times E)\times F \arrow[r, "\mathrm{a}_{D,E,F}"'] & D\times(E\times F)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Teorema 7.14.6 (Cantor)**.** *Sea A un conjunto. Entonces:*

1. *No hay ninguna biyección de A en* $\mathrm{Sub}(A)$.
2. $\mathrm{Sub}(A)$ *es naturalmente isomorfo al conjunto* $\mathrm{Hom}(A,2)$ *de las aplicaciones de A en $2=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, i.e., hay una biyección η_A de* $\mathrm{Sub}(A)$ *en* $\mathrm{Hom}(A,2)$ *tal que, para cada aplicación $f\colon A\longrightarrow B$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sub}(B) \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "f^{-1}[\cdot]"'] & \mathrm{Hom}(B,2) \arrow[d, "\mathrm{H}(f,\mathrm{id}_2)"] \\
\mathrm{Sub}(A) \arrow[r, "\eta_A"'] & \mathrm{Hom}(A,2)
\end{tikzcd}$$

Demostración. Demostramos de nuevo que no hay ninguna biyección de A en $\mathrm{Sub}(A)$, haciendo uso del isomorfismo natural entre $\mathrm{Sub}(A)$ y $\mathrm{Hom}(A,2)$. Supongamos que exista una aplicación sobreyectiva $f\colon A\twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(A,2)$. Entonces obtenemos la aplicación *diagonal* de f, $\mathrm{D}(f)\colon A\longrightarrow 2$, definida como:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathrm{d}_A"] \arrow[dr, "\mathrm{D}(f)"'] & A\times A \arrow[d, "\mathrm{ev}_{A,2}\circ(f\times\mathrm{id}_A)"] \\
 & 2
\end{tikzcd}$$

A partir de ella obtenemos la aplicación *codiagonal* de f, $\mathrm{Cd}(f)\colon A\longrightarrow 2$, definida como:

$$\mathrm{Cd}(f)\begin{cases} A \longrightarrow 2 \\ a \longmapsto \mathrm{Cd}(f)(a) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad \mathrm{D}(f)(a)=0; \\ 0, & \text{si} \quad \mathrm{D}(f)(a)=1. \end{cases}\end{cases}$$

Puesto que $\mathrm{Cd}(f)\in\mathrm{Hom}(A,2)$ y f es sobreyectiva, $\mathrm{Cd}(f)=f(a)$, para algún $a\in A$. Sea a uno de ellos, arbitrario, pero fijo. Entonces tenemos, por una parte que:

$$\mathrm{Cd}(f)(a) = (f(a))(a) = \mathrm{D}(f)(a),$$

y, por otra que:

$$\mathrm{Cd}(f)(a) \neq \mathrm{D}(f)(a).$$

Lo cual es una contradicción. Por consiguiente no hay ningún epimorfismo de A en $\mathrm{Hom}(A, 2)$, sea cual sea el conjunto A. □

7.15. Factorización a través de la imagen. Para estudiar las aplicaciones, y, esencialmente, por el mismo motivo que para estudiar los números naturales, conviene factorizarlas como composiciones de otras aplicaciones que tengan propiedades específicas, por ejemplo que estas últimas sean sobreyectivas o inyectivas. A esta tarea nos dedicamos ahora. Pero antes establecemos una propiedad universal que tienen los subconjuntos de los conjuntos, y que usaremos para descomponer las aplicaciones, a través de su imagen, en la composición de una sobreyectiva y de una inyectiva.

Proposición 7.15.1. *Sean A, B y C tres conjuntos, f una aplicación inyectiva de A en B y g una aplicación de C en B. Entonces:*

1. *Una condición necesaria y suficiente para que exista una aplicación h de C en A tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, tail, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmute, es que $\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

2. (Propidad universal del subconjunto). *Si $A \subseteq B$, entonces una condición necesaria y suficiente para que exista una aplicación h de C en A tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, tail, "\mathrm{in}_A"'] & B \end{tikzcd}$$

conmute, es que $\mathrm{Im}(g) \subseteq A$.

Además, tanto en el primero como en el segundo caso h está unívocamente determinada y recibe el nombre de correstricción *de g a A.*

Demostración. Supongamos que $\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$. Entonces, para cada $c \in C$, se cumple que existe un único $a \in A$ tal que $g(c) = f(a)$. Luego, recordando que, para cada conjunto x, $\bigcup\{x\} = x$, definimos la aplicación $h\colon C \longrightarrow A$ asignando a $c \in C$ precisamente

$$h(c) = \bigcup\{a \in A \mid g(c) = f(a)\}.$$

Así definida, la aplicación h es tal que $f \circ h = g$. Además, por ser f inyectiva, hay una única aplicación h de C en A tal que $f \circ h = g$. □

La propiedad universal del subconjunto significa que el par (A, in_A) es un igualador de las aplicaciones ch_A y κ_1 desde B hasta 2, i.e., que $\mathrm{ch}_A \circ \mathrm{in}_A = \kappa_1 \circ \mathrm{in}_A$ y que, para cada conjunto C y cada aplicación g de C en B, si $\mathrm{ch}_A \circ g = \kappa_1 \circ g$, entonces existe una única aplicación h de C en A tal que $\mathrm{in}_A \circ h = g$:

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "g"] & & \\
A \arrow[r, "\mathrm{in}_A"'] & B \arrow[r, shift left, "\mathrm{ch}_A"] \arrow[r, shift right, "\kappa_1"'] & 2
\end{tikzcd}
$$

Ahora que disponemos de la propiedad universal del subconjunto, obtenemos como corolario la *factorización canónica a través de la imagen* de una aplicación, siendo la imagen, esencialmente, el mínimo subconjunto del codominio de la aplicación, a través del cual la aplicación factoriza.

Corolario 7.15.2 (Noether)**.** *Sea f una aplicación de A en B. Entonces hay una única aplicación sobreyectiva f^{s}, la* sobreyectivizada *de f, de A en* $\mathrm{Im}(f)$ *tal que el diagrama*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, two heads, "f^{\mathrm{s}}"'] & B \\
& \mathrm{Im}(f) \arrow[u, tail, "\mathrm{in}_{\mathrm{Im}(f)}"']
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Esta es la factorización canónica a través de la imagen *de una aplicación. Además, si f es inyectiva, entonces f^{s} es inyectiva, luego biyectiva.*

Por otra parte, se cumple que para cada conjunto C, cualquier aplicación $g\colon A \longrightarrow C$ y cualquier aplicación inyectiva $h\colon C \rightarrowtail B$, si el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & B \\
& C \arrow[u, tail, "h"']
\end{tikzcd}
$$

conmuta, entonces existe un único monomorfismo $t\colon \mathrm{Im}(f) \rightarrowtail C$ tal que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr, two heads, "f^{\mathrm{s}}"'] & & B \\
& C \arrow[ur, tail, "h"'] & \\
& \mathrm{Im}(f) \arrow[u, tail, "t"'] \arrow[uur, tail, "\mathrm{in}_{\mathrm{Im}(f)}"'] &
\end{tikzcd}
$$

conmuta. De modo que $\mathrm{Im}(f)$ *es, esencialmente, el mínimo subconjunto de B a través del cual factoriza f.*

Proposición 7.15.3. *Sean A, B, C y D cuatro conjuntos, f una aplicación inyectiva de A en B, g una aplicación de D en B y h una aplicación inyectiva de C en D. Entonces:*

1. *Una condición necesaria y suficiente para que exista una aplicación t de C en A tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "t"] \arrow[d, mapsto, "h"'] & A \arrow[d, mapsto, "f"] \\ D \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

   conmute, es que $\operatorname{Im}(g \circ h) \subseteq \operatorname{Im}(f)$.
2. *Si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$, entonces una condición necesaria y suficiente para que exista una aplicación t de C en A tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "t"] \arrow[d, mapsto, "\mathrm{in}_C"'] & A \arrow[d, mapsto, "\mathrm{in}_A"] \\ D \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

   conmute, es que $g[C] \subseteq A$.

Además, tanto en el primero como en el segundo caso t está unívocamente determinada y recibe el nombre de birrestricción *de g a C y A.*

Demostración. □

Proposición 7.15.4. *Sea A un conjunto, $(X_i)_{i\in I}$ una familia no vacía de subconjuntos de A e Y un subconjunto de A tal que, para cada $i \in I$, $Y \subseteq X_i$. Entonces el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A & & X_i \arrow[ll, "\mathrm{in}_{X_i}"'] \\ & Y \arrow[ul, "\mathrm{in}_Y"] \arrow[ur, "\mathrm{i}_{Y,X_i}"'] \arrow[d, "\mathrm{i}_{Y,\bigcap_{i\in I} X_i}"] & \\ & \bigcap_{i\in I} X_i \arrow[uul, "\mathrm{in}_{\bigcap_{i\in I} X_i}"] \arrow[uur, "\mathrm{i}_{\bigcap_{i\in I} X_i, X_i}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposición 7.15.5. *Sea A un conjunto, $(X_i)_{i\in I}$ una familia no vacía de subconjuntos de A e Y un subconjunto de A tal que, para cada $i \in I$, $X_i \subseteq Y$. Entonces* *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "\mathrm{in}_{X_i}"] \arrow[dr, "\mathrm{i}_{X_i,\bigcup_{i\in I} X_i}"] \arrow[ddr, "\mathrm{i}_{X_i,Y}"'] & & A \\
& \bigcup_{i\in I} X_i \arrow[ur, "\mathrm{in}_{\bigcup_{i\in I} X_i}"'] \arrow[d, "\mathrm{i}_{\bigcup_{i\in I} X_i,Y}"] & \\
& Y \arrow[uur, "\mathrm{in}_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

7.16. Aplicaciones constantes y coconstantes. Siguiendo con la clasificación de las aplicaciones, definimos a continuación las aplicaciones constantes y las coconstantes y estudiamos algunas de las propiedades de las mismas.

Definición 7.16.1. Una aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ es *constante* si para cada conjunto X y cualesquiera aplicaciones $g, h\colon X \longrightarrow A$, $f \circ g = f \circ h$.

Proposición 7.16.2. *Una condición necesaria y suficiente para que una aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ sea constante es que $A = \varnothing$ o $\mathrm{Im}(f)$ sea final.*

Demostración. □

Proposición 7.16.3. *Sean $f\colon A \longrightarrow B$, $g\colon B \longrightarrow C$ y $h\colon C \longrightarrow D$ tres aplicaciones. Si g es constante, entonces $h \circ g \circ f$ es constante.*

Demostración. □

Definición 7.16.4. Una aplicación $f : A \longrightarrow B$ es *coconstante* si para cada conjunto Y y cualesquiera aplicaciones $g, h\colon B \longrightarrow Y$, $g \circ f = h \circ f$.

Proposición 7.16.5. *Una condición necesaria y suficiente para que una aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ sea coconstante es que $A = \varnothing$.*

Demostración. Si $A = \varnothing$, elegimos un $a_0 \in A$ y entonces definimos dos aplicaciones g y h de B en 2, de modo que $g(f(a_0)) = 0$ y $h(f(a_0)) = 1$. □

Proposición 7.16.6. *Sean $f\colon A \longrightarrow B$, $g\colon B \longrightarrow C$ y $h\colon C \longrightarrow D$ tres aplicaciones. Si g es coconstante, entonces $h \circ g \circ f$ es coconstante.*

Demostración. □

7.17. El axioma de regularidad. Hay ocasiones en las que conviene disponer de copias isomorfas, pero disjuntas, de un conjunto dado, o interesa extender un conjunto hasta otro que lo contenga estrictamente y entre los cuales no exista ningún otro conjunto intermedio. Por otra parte, los axiomas hasta ahora enunciados, no impiden la existencia de conjuntos x para los que se cumpla que $x \in x$, o, con mayor generalidad, la existencia de círculos de longitud arbitraria, pero finita n, con $n \geq 1$:

$$x \in x_{n-1} \in \cdots \in x_0 \in x,$$

ni tampoco la existencia de cadenas infinitas $\in$-descendentes:

$$\cdots \in x_{n+1} \in x_n \in \cdots \in x_1 \in x_0.$$

Para poder obtener los resultados antes mencionados, así como para poder definir los números ordinales, en una sección posterior, de manera sencilla, y para evitar la existencia de conjuntos *irregulares* o *extraordinarios*, así denominados por Mirimanoff, i.e., de conjuntos que den lugar a círculos, o sean el origen de $\in$-descensos infinitos, es por lo que se adjunta un nuevo axioma, el *axioma de regularidad* o de *fundamentación* de Mirimanoff-Skolem-von Neumann.

Axioma de regularidad. *Cualquier conjunto no vacío tiene al menos un miembro disjunto del conjunto en cuestión:*

$$\forall A\,(\,A \neq \varnothing \rightarrow \exists x\,(\,x \in A \wedge x \cap A = \varnothing\,)).$$

Este axioma es equivalente, como demostramos a continuación, al siguiente esquema axiomático.

Esquema axiomático de regularidad. *Si en $\varphi(x, t_{[n]})$ no ocurre y, entonces una condición suficiente para que todos los conjuntos tengan la propiedad φ es que un conjunto arbitrario la tenga, cuando la tengan todos sus miembros, i.e.,*

$$\forall t_0, \ldots, t_{n-1}\,((\,\forall x\,(\,\forall y\,(\,y \in x \rightarrow \varphi(y, t_{[n]})\,)\,)) \rightarrow \varphi(x, t_{[n]})\,)\,) \rightarrow \forall x\,\varphi(x, t_{[n]})).$$

Proposición 7.17.1. *El axioma de regularidad es equivalente al esquema axiomático de regularidad.*

Demostración. □

Conviene señalar que, el esquema axiomático de regularidad, tiene como precedente el *método del descenso infinito* de Fermat, que afirma que una condición suficiente para que todos los números naturales tenga una cierta propiedad, es que un número arbitrario la tenga, cuando la tengan todos los números que le precedan estrictamente, i.e., si $\varphi(x, t_{[n]})$ es una fórmula, de la teoría de números, en la que no ocurre y, entonces

$$\forall t_0, \ldots, t_{n-1}\,((\,\forall x\,(\,\forall y\,(\,y < x \rightarrow \varphi(y, t_{[n]})\,)\,) \rightarrow \varphi(x, t_{[n]})\,)\,)) \rightarrow \forall x\,\varphi(x, t_{[n]})\,).$$

El método del descenso infinito equivale a cada uno de los siguientes enunciados:

- Una condición suficiente para que ningún número tenga una propiedad, es que cuando exista uno con la propiedad, entonces exista otro estrictamente menor que también la tenga, i.e.,

$$\forall t_0, \ldots, t_{n-1}\,((\,\exists x\,\varphi(x, t_{[n]}) \rightarrow \exists y\,(\,y < x \wedge \varphi(y, t_{[n]})\,)\,)) \rightarrow \forall x\,(\,\neg\varphi(x, t_{[n]})\,)\,).$$

- Si hay un número que tiene una propiedad, entonces hay un primero que la tiene, i.e.,

$$\forall t_0, \ldots, t_{n-1}\,(\,\exists x\,\varphi(x, t_{[n]}) \rightarrow (\,\exists x\,(\,\varphi(x, t_{[n]}) \wedge \forall y\,(\,y < x \rightarrow \neg\varphi(y, t_{[n]})\,)\,))))$$

- Si hay un número que no tiene una propiedad, entonces hay un primero que no la tiene, i.e.,

$$\forall t_0, \ldots, t_{n-1}\,(\,\exists x\,\neg\psi(x, t_{[n]}) \rightarrow (\,\exists x\,(\,\neg\psi(x, t_{[n]}) \wedge \forall y\,(\,y < x \rightarrow \psi(y, t_{[n]})\,)\,))))$$

Por consiguiente, el axioma de regularidad también es eqivalente a cada uno de los siguientes enunciados:

- Una condición suficiente para que ningún conjunto tenga una propiedad, es que cuando exista uno con la propiedad, entonces exista otro que le pertenezca que también la tenga, i.e.,

$$\forall t_0, \ldots, t_{n-1}\,((\,\exists x\,\varphi(x, t_{[n]}) \rightarrow \exists y\,(\,y \in x \wedge \varphi(y, t_{[n]})\,)\,)) \rightarrow \forall x\,(\,\neg\varphi(x, t_{[n]})\,)\,).$$

- Si hay un conjunto que tiene una propiedad, entonces hay uno que la tiene, y es tal que ninguno de los que le pertenezcan la tiene i.e.,

$$\forall t_0, \ldots, t_{n-1}\,(\,\exists x\,\varphi(x, t_{[n]}) \rightarrow (\,\exists x\,(\,\varphi(x, t_{[n]}) \wedge \forall y\,(\,y \in x \rightarrow \neg\varphi(y, t_{[n]})\,)\,))))$$

- Si hay un conjunto que no tiene una propiedad, entonces hay uno que no la tiene, pero es tal que todos los que le pertenezcan la tienen i.e.,

$$\forall t_0, \ldots, t_{n-1} \,(\, \exists x \, \neg\psi(x, t_{[n]}) \to (\, \exists x \,(\, \neg\psi(x, t_{[n]}) \wedge \forall y \,(\, y \in x \to \psi(y, t_{[n]})\,)\,)\,)\,)$$

Una justificación del axioma de regularidad vendría dada por la siguiente línea argumental. Un conjunto α es un ordinal si α es $\in$-transitivo y si $\in\!\restriction_\alpha$ es una buena ordenación sobre α. Ordinales hay de tres tipos: El cero, los ordinales sucesores, i.e., aquéllos que son de la forma β^+, y, por último, los que no son ni cero ni sucesores, que reciben el nombre de ordinales límite. Una vez disponemos del concepto de ordinal, lo usamos para definir la familia, indexada por la clase On de los ordinales, $(V_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{On}}$ de los universos parciales de von Neumann, que darán lugar al universo V de von Neumann, que será la unión de los distintos universos parciales V_α, cuando $\alpha \in \mathrm{On}$.

$$V_\alpha = \begin{cases} \varnothing, & \text{si } \alpha = 0; \\ \mathrm{Sub}(V_\beta), & \text{si } \alpha = \beta^+; \\ \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta, & \text{si } \alpha \text{ es un ordinal límite.} \end{cases}$$

Observemos que la familia $(V_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{On}}$ constituye una jerarquía estrictamente creciente, de hecho se la conoce como la jerarquía acumulativa de los conjuntos de von Neumann.

Ahora, dado un conjunto no vacío A, existirá un primer ordinal α para el que $A \cap V_\alpha \neq \varnothing$. Sea $x \in A \cap V_\alpha$, arbitrario, pero fijo. Entonces $x \cap A = \varnothing$. En caso contrario, i.e., si $x \cap A \neq \varnothing$, sea $y \in x \cap A$. Entonces, ya que α o es un ordinal sucesor β^+ o es un ordinal límite, tenemos que $x \subseteq V_\beta$, en el primer caso, o $x \in V_\beta$, para algún $\beta \in \alpha$, en el segundo. Por lo tanto $y \in V_\beta$, en cualquier caso (en el segundo, porque los universos parciales V_α, entre otras propiedades, tienen la de ser $\in$-transitivos). Así que A tendría un elemento, y, de un universo parcial, V_β, estrictamente anterior al universo parcial V_α, contradicción. Por lo tanto el conjunto no vacío A tiene un elemento disjunto del propio A.

El corolario que establecemos a continuación se muestra de utilidad en diferentes ramas de la matemática, por ejemplo, en topología para la compactificación de Alexandroff, o para demostrar la equivalencia del teorema de Tychonoff con el axioma de elección, en álgebra para el teorema de reemplazo de Steinitz, o para las valoraciones.

Corolario 7.17.2.

1. *No hay un conjunto A tal que $A \in A$.*
2. *No hay dos conjuntos A y B tales que $A \in B \in A$.*
3. *No hay tres conjuntos A, B y C tales que $A \in B \in C \in A$.*
4. *Sean A y B dos conjuntos. Entonces hay un conjunto C y una biyección f de B en C tal que $A \cap C = \varnothing$, i.e., se pueden reetiquetar los elementos de B de modo que A y B sean disjuntos. En particular, para A, hay un conjunto C y una biyección f de A en C tal que $A \cap C = \varnothing$.*

Demostración. Para la última parte considérese $C = B \times \{\, A \,\}$ □

Antes de establecer el siguiente corolario, conviene introducir la siguiente definición.

Definición 7.17.3. Sea A un conjunto. Entonces denotamos por A^+ el conjunto $A \cup \{A\}$. De modo que, para un conjunto x, $x \in A^+$ precisamente si $x \in A$ o $x = A$. Al conjunto A^+ lo denominamos el conjunto *sucesor* de A

Ejercicio 7.17.4. Demuéstrese que existe el conjunto sucesor de cualquier conjunto. De hecho $(\cdot)^+$ es una clase funcional unaria.

Corolario 7.17.5. *Para cada conjunto A se cumple que:*

1. $A \subset A^+$.
2. *No hay ningún conjunto X tal que $A \subset X$ y $X \subset A^+$.*

Además, si B es otro conjunto y $A^+ = B^+$, entonces $A = B$, i.e., la clase funcional $(\cdot)^+$ es inyectiva.

Demostración. □

Demostramos a continuación, como otra aplicación del axioma de regularidad, que toda aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ se puede representar como la composición de una aplicación inyectiva seguida de una sobreyectiva. Para ello consideramos el conjunto

$$[\bigcup_{b\in \mathrm{Im}(f)}(f^{-1}[b] \times \{b\})] \cup [(B - \mathrm{Im}(f)) \times \{\bigcup_{b\in \mathrm{Im}(f)}(f^{-1}[b] \times \{b\})\}],$$

en el que $\bigcup_{b\in \mathrm{Im}(f)}(f^{-1}[b]\times\{b\})$ es isomorfo a A y $(B-\mathrm{Im}(f))\times\{\bigcup_{b\in \mathrm{Im}(f)}(f^{-1}[b]\times \{b\})\}$ es, por una aplicación del axioma de regularidad, disjunto de $\bigcup_{b\in \mathrm{Im}(f)}(f^{-1}[b]\times \{b\})$. Entonces la aplicación

$$g\begin{cases} A \longrightarrow [\bigcup_{b\in \mathrm{Im}(f)}(f^{-1}[b] \times \{b\})] \cup [(B - \mathrm{Im}(f)) \times \{\bigcup_{b\in \mathrm{Im}(f)}(f^{-1}[b] \times \{b\})\}] \\ a \longmapsto g(a) = (a, f(a)) \end{cases},$$

cuya imagen es parte de $\bigcup_{b\in \mathrm{Im}(f)}(f^{-1}[b] \times \{b\})$, es inyectiva. Por otra parte, la aplicación h de $[\bigcup_{b\in \mathrm{Im}(f)}(f^{-1}[b] \times \{b\})] \cup [(B - \mathrm{Im}(f)) \times \{\bigcup_{b\in \mathrm{Im}(f)}(f^{-1}[b] \times \{b\})\}]$ en B es la que a un par (a, b) de $\bigcup_{b\in \mathrm{Im}(f)}(f^{-1}[b]\times\{b\})$ le asigna como valor $f(a) = b$ y a un par $(b, \bigcup_{b\in \mathrm{Im}(f)}(f^{-1}[b] \times \{b\}))$ de $(B - \mathrm{Im}(f)) \times \{\bigcup_{b\in \mathrm{Im}(f)}(f^{-1}[b] \times \{b\})\}$ le asigna b, es sobreyectiva. Además, se cumple que $f = h \circ g$.

7.18. Relaciones de equivalencia y particiones. Una clasificación de un conjunto, es una distribución de los miembros del conjunto en subconjuntos no vacíos, de manera que sean dos a dos disjuntos y se cumpla que su reunión sea el conjunto en cuestión. Esta noción se formaliza en la teoría de conjuntos mediante la de relación de *equivalencia* o, lo que es equivalente, según demostraremos, la de *partición.*

Definición 7.18.1. Sea A un conjunto y R una relación (binaria) en A. Decimos que R es una relación de *equivalencia* sobre A o que es una *clasificación* de A, si cumple las siguientes condiciones:

1. R es *reflexiva*, i.e., $\forall x \in A((x, x) \in R)$, o, lo que es equivalente, $\Delta_A \subseteq R$.
2. R es *simétrica*, i.e., $\forall x, y \in A((x, y) \in R \to (y, x) \in R)$, o, lo que es equivalente, $R^{-1} \subseteq R$.
3. R es *transitiva*, i.e., $\forall x, y, z \in A(((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \to (x, z) \in R)$, o, lo que es equivalente, $R \circ R \subseteq R$.

Denotamos por $\mathrm{Eqv}(A)$ el conjunto de las relaciones de equivalencia sobre A y, si $R \in \mathrm{Eqv}(A)$, entonces al par ordenado (A, R) lo denominamos *conjunto clasificado.* Además, si (A, R) y (B, S) son dos conjuntos clasificados, un *morfismo* de (A, R) en (B, S) es un triplo ordenado $((A, R), f, (B, S))$, denotado por $f\colon (A, R) \longrightarrow (B, S)$, en el que f es una aplicación de A en B tal que:

$$\forall x, y \in A\,(\,(x, y) \in R \to (f(x), f(y)) \in S\,).$$

Proposición 7.18.2. *Sea A un conjunto. Entonces:*

1. *Δ_A y $A\times A$, también denotado este último por ∇_A y denominado la* codiagonal *de A, son relaciones de equivalencia sobre A y, respecto de la inclusión, son, resp. la mínima y la máxima.*
2. *Si $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Eqv}(A)$ y $\mathcal{R} \neq \varnothing$, entonces $\bigcap_{R\in\mathcal{R}} R \in \mathrm{Eqv}(A)$.*

3. *Si* $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Eqv}(A)$, $\mathcal{R} \neq \varnothing$ *y si dados* $R, S \in \mathcal{R}$, *hay un* $T \in \mathcal{R}$ *tal que* $R \cup S \subseteq T$, *entonces* $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \in \mathrm{Eqv}(A)$.

Demostración. □

Corolario 7.18.3. *Sea* A *un conjunto y* R *una relación en* A. *Entonces se cumple que* $\bigcap\{\, E \in \mathrm{Eqv}(A) \mid R \subseteq E \,\}$ *es la mínima relación de equivalencia sobre* A *que contiene a* R. *Denominamos a esa relación de equivalencia sobre* A, *la relación de equivalencia* generada *por* R *y la denotamos por* $\mathrm{Eg}_A(R)$.

Demostración. □

Proposición 7.18.4. *Sea* A *un conjunto. Entonces la endoaplicación,* Eg_A, *del conjunto* $\mathrm{Sub}(A \times A)$, *definida como:*

$$\mathrm{Eg}_A \begin{cases} \mathrm{Sub}(A \times A) & \longrightarrow \mathrm{Sub}(A \times A) \\ \quad R & \longmapsto \bigcap\{\, E \in \mathrm{Eqv}(A) \mid R \subseteq E \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{Eg}_A) \subseteq \mathrm{Eqv}(A)$.
2. $\{\, R \in \mathrm{Sub}(A \times A) \mid R = \mathrm{Eg}_A(R) \,\} = \mathrm{Eqv}(A)$.
3. Eg_A *es* extensiva *o* inflacionaria, *i.e., para cada* $R \in \mathrm{Sub}(A \times A)$, $R \subseteq \mathrm{Eg}_A(R)$.
4. Eg_A *es* isótona, *i.e., para cada* $R, S \in \mathrm{Sub}(A \times A)$, *si* $R \subseteq S$, *entonces se cumple que* $\mathrm{Eg}_A(R) \subseteq \mathrm{Eg}_A(S)$.
5. Eg_A *es* idempotente, *i.e., para cada* $R \in \mathrm{Sub}(A \times A)$, $\mathrm{Eg}_A(R) = \mathrm{Eg}_A(\mathrm{Eg}_A(R))$.
6. Eg_A *es* algebraica, *i.e., para cada* $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Sub}(A \times A)$, *si* $\mathcal{R} \neq \varnothing$ *y para cada* $R, S \in \mathcal{R}$, *existe un* $T \in \mathcal{R}$ *tal que* $R \cup S \subseteq T$, *entonces* $\mathrm{Eg}_A(\bigcup \mathcal{R}) = \bigcup_{R \in \mathcal{R}} \mathrm{Eg}_A(R)$.

Demostración. □

Proposición 7.18.5. *Sea* R *una relación binaria sobre un conjunto* A. *Entonces son equivalentes:*

1. R *es una relación de equivalencia sobre* A.
2. $\complement R = ((\complement R^{-1}) \circ R) \cup (R^{-1} \circ (\complement R))$.

Demostración. Supongamos que R sea una relación de equivalencia sobre A. Entonces, ya que $R = R^{-1}$, tenemos que

$$((\complement R^{-1}) \circ R) \cup (R^{-1} \circ (\complement R)) = ((\complement R) \circ R) \cup (R \circ (\complement R)).$$

Por lo tanto hemos de demostrar que

$$\complement R = ((\complement R) \circ R) \cup (R \circ (\complement R)).$$

Sea $(x, y) \in (\complement R) \circ R$. Entonces hay un $a \in A$ tal que $(x, a) \in R$ y $(a, y) \in \complement R$. Si $(x, y) \in R$, entonces, ya que $(x, a) \in R$, $(a, x) \in R$, luego $(a, y) \in R$, que es una contradicción. Por lo tanto $(x, y) \in \complement R$.

Del mismo modo se demuestra que $R \circ (\complement R) \subseteq \complement R$. Por lo tanto

$$((\complement R) \circ R) \cup (R \circ (\complement R)) \subseteq \complement R.$$

Para demostrar que se cumple la inclusión inversa suponemos que, para $x, y \in A$, $(x, y) \notin (\complement R) \circ R$ y que $(x, y) \notin R \circ (\complement R)$. Entonces, para cada $a \in A$, tenemos que, si $(x, a) \in R$, entonces $(a, y) \in R$ y, para cada $b \in A$, si $(b, y) \in R$, entonces $(x, b) \in R$. Ahora bien, R es reflexiva, luego, para $x = a$, $(x, x) \in R$, así que $(x, y) \in R$. Del mismo modo, de $(y, y) \in R$, $(x, y) \in R$. Por lo tanto $(x, y) \notin \complement R$. Así que

$$\complement R \subseteq ((\complement R) \circ R) \cup (R \circ (\complement R)).$$

Supongamos que $\complement R = ((\complement R^{-1}) \circ R) \cup (R^{-1} \circ (\complement R))$. Demostrar que $\Delta_A \subseteq R$ equivale a demostrar que $\complement R \subseteq \complement \Delta_A$. Sea $(x,y) \in (\complement R^{-1}) \circ R$, entonces hay un $a \in A$ tal que $(x,a) \in R$ y $(y,a) \notin R$. Si $x = y$, entonces $(x,a) \in R$ y $(x,a) \notin R$, que es una contradicción. Por lo tanto $(x,y) \in \complement \Delta_A$. Del mismo modo se demuestra que $R^{-1} \circ (\complement R) \subseteq \complement \Delta_A$.

Demostrar que $R = R^{-1}$ equivale a demostrar que $\complement R = \complement R^{-1}$. Pero se cumple que $\complement R^{-1} = (\complement R)^{-1}$, así que hay que demostrar que $\complement R = (\complement R)^{-1}$. Ahora bien, esta última ecuación se cumple debido a que

$$\begin{aligned}
(\complement R)^{-1} &= [((\complement R^{-1}) \circ R) \cup (R^{-1} \circ (\complement R))]^{-1} \\
&= [(\complement R^{-1}) \circ R]^{-1} \cup [R^{-1} \circ (\complement R)]^{-1} \\
&= (R^{-1} \circ (\complement R^{-1})^{-1}) \cup ((\complement R)^{-1} \circ (R^{-1})^{-1}) \\
&= (R^{-1} \circ (\complement R)) \cup ((\complement R^{-1}) \circ R) \\
&= \complement R.
\end{aligned}$$

Para demostrar la transitividad, i.e., que, para cualesquiera $x, y, z \in A$, si $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$, entonces $(x,z) \in R$, procedemos tomando tres elementos $x, y, z \in A$ y suponiendo que $(x,z) \in \complement R$ y $(x,y) \in R$, para acabar demostrando que $(y,z) \in \complement R$. Ahora bien, por una parte, si $(x,z) \in \complement R$, entonces hay un $a \in A$ tal que $(x,a) \in R$ y $(a,z) \in \complement R^{-1}$ o hay un $b \in A$ tal que $(x,b) \in \complement R$ y $(b,z) \in R^{-1}$ y, por otra parte, si $(x,y) \in R$, entonces $(x,y) \notin (\complement R^{-1}) \circ R$ y $(x,y) \notin R^{-1} \circ (\complement R)$, luego, en el caso de que $(x,y) \in R$, se cumple que, para cada $a \in A$, si $(x,a) \in R$, entonces $(y,a) \in R$ y que, para cada $b \in A$, si $(x,b) \in \complement R$, entonces $(y,b) \in \complement R$. Por lo tanto tenemos que $(y,a) \in R$ y $(a,z) \in \complement R^{-1}$ o $(y,b) \in \complement R$ y $(b,z) \in R^{-1}$, i.e., que $(y,z) \in \complement R$.

□

Proposición 7.18.6. *Sean (A,R), (B,S), (C,T) y (D,U) cuatro conjuntos clasificados, f un morfismo de (A,R) en (B,S), g uno de (B,S) en (C,T) y h uno de (C,T) en (D,U). Entonces:*

1. $\mathrm{id}_{(A,R)} \colon (A,R) \longrightarrow (A,R)$ *es un endomorfismo de* (A,R).
2. $g \circ f \colon (A,R) \longrightarrow (C,T)$ *es un morfismo de* (A,R) *en* (C,T).
3. (Asociatividad). *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(A,R) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] \arrow[drr, bend left=60, "(h \circ g) \circ f"] \arrow[drr, bend right=60, "h \circ (g \circ f)"'] & (B,S) \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\
& (C,T) \arrow[r, "h"'] & (D,U)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

4. (Neutros). *Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd} (A,R) \arrow[r, "\mathrm{id}_{(A,R)}"] \arrow[dr, "f"'] & (A,R) \arrow[d, "f"] \\ & (B,S) \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} (A,R) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & (B,S) \arrow[d, "\mathrm{id}_{(B,S)}"] \\ & (B,S) \end{tikzcd}$$

conmutan.

Proposición 7.18.7. *Sea A un conjunto y R, S dos relaciones de equivalencia sobre A. Entonces una condición necesaria y suficiente para que $R \circ S$ sea una relación de equivalencia sobre A es que $R \circ S = S \circ R$, en cuyo caso decimos que* conmutan.

Demostración. □

Proposición 7.18.8. *Sea A un conjunto y R, S dos relaciones de equivalencia sobre A, entonces la relación $R \circ S$, que no es necesariamente una relación de equivalencia, contiene a R y a S y está contenida en cualquier relación de equivalencia sobre A que contenga a R y a S.*

Demostración. □

Corolario 7.18.9. *Sea A un conjunto y R, S dos relaciones de equivalencia sobre A. Si $R \circ S$ es una relación de equivalencia sobre A, entonces $R \circ S$ es la mínima relación de equivalencia sobre A que contiene a R y a S, i.e., $R \circ S = \mathrm{Eg}_A(R \cup S)$.*

Demostración. □

Estudiar el ejemplo del espacio proyectivo determinado por un espacio vectorial. También los cocientes del anillo de los enteros entre un ideal, o los cocientes de una estructura algebraica entre una congruencia. Además, cada subconjunto X de un conjunto A determina dos cocientes:

1. $(\{ X \} \cup \{ A - X \}) - \{ \varnothing \}$.
2. $(\{ X \} \cup \{ \{a\} \mid a \in A - X \}) - \{ \varnothing \}$.

Consideramos a continuación la noción de *partición* de un conjunto, que resultará ser equivalente a la de relación de equivalencia sobre un conjunto.

Definición 7.18.10. Sea A un conjunto y $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{Sub}(A)$. Decimos que $\mathcal{P}$ es una *partición* de A si cumple las siguientes condiciones:

1. $\varnothing \notin \mathcal{P}$.
2. $\forall X, Y \in \mathcal{P}(X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \varnothing)$.
3. $\bigcup \mathcal{P} = A$.

Denotamos por $\mathrm{Part}(A)$ el conjunto de las particiones de A, y, si $\mathcal{P} \in \mathrm{Part}(A)$, entonces al par ordenado $(A, \mathcal{P})$ lo denominamos *espacio estratificado*. Además, si $(A, \mathcal{P})$ y $(B, \mathcal{Q})$ son dos espacios estratificados, un *morfismo* de $(A, \mathcal{P})$ en $(B, \mathcal{Q})$ es un triplo ordenado $((A, \mathcal{P}), f, (B, \mathcal{Q}))$, denotado por $f\colon (A, \mathcal{P}) \longrightarrow (B, \mathcal{Q})$, en el que f es una aplicación de A en B tal que:

$$\forall P \in \mathcal{P}\, \exists Q \in \mathcal{Q}\, (\, f[P] \subseteq Q\,).$$

Observemos que si A es vacío, entonces $\mathrm{Sub}(A) = \{\varnothing\}$, luego el único subconjunto $\mathcal{P}$ de $\{\varnothing\}$ que es una partición del conjunto vacío es $\varnothing$, i.e., $\mathrm{Part}(\varnothing) = \{\varnothing\}$.

Dar una función F de un conjunto A en otro B equivale a dar una partición $\mathcal{P}$ de $A \coprod B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$ que cumpla las siguientes condiciones

1. Para cada $b, c \in B$, si $b \neq c$, entonces, denotando por $P_{(b,1)}$ el único bloque P de $\mathcal{P}$ tal que $(b,1) \in P$ y por $P_{(c,1)}$ el único bloque Q de $\mathcal{P}$ tal que $(c,1) \in Q$, se tiene que $P_{(b,1)} \cap P_{(c,1)} = \varnothing$.
2. Para cada $P \in \mathcal{P}$ existe un $b \in B$ tal que $(b,1) \in P$, o, lo que es equivalente, $P_{(b,1)} = P$.

En efecto, si F es una función de A en B, entonces F induce la partición

$$\{\, (F^{-1}[b] \times \{0\}) \cup \{(b,1)\} \mid b \in B \,\}$$

de $A \coprod B$ y tal partición cumple las condiciones mencionadas. Recíprocamente, si $\mathcal{P}$ es una partición de $A \coprod B$ que cumple las dos condiciones anteriores, entonces hay una biyección de B en $\mathcal{P}$ (porque la primera condición significa que la composición de la inclusión canónica de B en $A \coprod B$ y de la proyección canónica de de $A \coprod B$ en $\mathcal{P}$ es inyectiva, y la segunda condición que la misma composición es sobreyectiva), luego componiendo la inclusión canónica de A en $A \coprod B$, la proyección canónica de $A \coprod B$ en $\mathcal{P}$ y la inversa de la biyección citada, obtenemos una aplicación de A en B.

Proposición 7.18.11. *Sean $(A, \mathcal{P})$, $(B, \mathcal{Q})$, $(C, \mathcal{R})$ y $(D, \mathcal{S})$ cuatro espacios estratificados, f un morfismo de $(A, \mathcal{P})$ en $(B, \mathcal{Q})$, g uno de $(B, \mathcal{Q})$ en $(C, \mathcal{R})$ y h uno de $(C, \mathcal{R})$ en $(D, \mathcal{S})$. Entonces:*

1. $\mathrm{id}_{(A,\mathcal{P})} \colon (A, \mathcal{P}) \longrightarrow (A, \mathcal{P})$ *es un endomorfismo de* $(A, \mathcal{P})$.
2. $g \circ f \colon (A, \mathcal{P}) \longrightarrow (C, \mathcal{R})$ *es un morfismo de* $(A, \mathcal{P})$ *en* $(C, \mathcal{R})$.
3. (Asociatividad). *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(A,\mathcal{P}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] \arrow[drr, bend left=60, "(h\circ g)\circ f"] \arrow[drr, bend right=60, "h\circ(g\circ f)"'] & (B,\mathcal{Q}) \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\
 & (C,\mathcal{R}) \arrow[r, "h"'] & (D,\mathcal{S})
\end{tikzcd}$$

conmuta.

4. (Neutros). *Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
(A,\mathcal{P}) \arrow[r, "\mathrm{id}_{(A,\mathcal{P})}"] \arrow[dr, "f"'] & (A,\mathcal{P}) \arrow[d, "f"] \\
 & (B,\mathcal{Q})
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
(A,\mathcal{P}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & (B,\mathcal{Q}) \arrow[d, "\mathrm{id}_{(B,\mathcal{Q})}"] \\
 & (B,\mathcal{Q})
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Antes de establecer la relación que existe entre las relaciones de equivalencia y las particiones sobre un conjunto, enunciamos dos lemas que nos permitirán obtener relaciones de equivalencia y particiones, de manera optimal, sobre el dominio de una aplicación cuando el codominio de la misma esté dotado de una relación de equivalencia o de una partición.

Lema 7.18.12. *Sea A un conjunto, (B, S) un conjunto clasificado y $f\colon A \longrightarrow B$ una aplicación; situación que indicaremos por:*

$$f\colon A \longrightarrow (B, S).$$

Entonces hay un levantamiento optimal de S a través de f*, i.e., hay una relación de equivalencia sobre A, denotada por* $\mathrm{L}^f(S)$*, el* levantamiento optimal de S a través de f*, tal que $((A, \mathrm{L}^f(S)), f, (B, S))$ es un morfismo del conjunto clasificado $(A, \mathrm{L}^f(S))$ en el conjunto clasificado (B, S) y para cada conjunto clasificado (C, T) y cada aplicación $g\colon C \longrightarrow A$, si $((C, T), f \circ g, (B, S))$ es un morfismo de (C, T) en (B, S), entonces $((C, T), g, (A, \mathrm{L}^f(S)))$ lo es de (C, T) en $(A, \mathrm{L}^f(S))$. Además, se cumple que:*

1. *Para cada relación de equivalencia $R \in \mathrm{Eqv}(A)$:*
$$\mathrm{L}^{\mathrm{id}_A}(R) = R.$$
2. *Si $f\colon A \longrightarrow B$, $g\colon B \longrightarrow C$ son aplicaciones y $T \in \mathrm{Eqv}(C)$, entonces:*
$$\mathrm{L}^{g \circ f}(T) = \mathrm{L}^f(\mathrm{L}^g(T)).$$

Demostración. Es suficiente tomar como $\mathrm{L}^f(R)$ la relación sobre A definida como:

$$\mathrm{L}^f(R) = \{\, (x, y) \in A \times A \mid (f(x), f(y)) \in R \,\}.$$

□

Lema 7.18.13. *Sea A un conjunto, $(B, \mathcal{Q})$ un espacio estratificado y $f\colon A \longrightarrow B$ una aplicación; situación que indicaremos por:*

$$f\colon A \longrightarrow (B, \mathcal{Q}).$$

Entonces hay un levantamiento optimal de $\mathcal{Q}$ a través de f*, i.e., hay una partición sobre A, denotada por* $\mathrm{L}^f(\mathcal{Q})$*, el* levantamiento optimal de $\mathcal{Q}$ a través de f*, tal que $((A, \mathrm{L}^f(\mathcal{Q})), f, (B, \mathcal{Q}))$ es un morfismo del espacio estratificado $(A, \mathrm{L}^f(\mathcal{Q}))$ en el espacio estratificado $(B, \mathcal{Q})$ y para cada espacio estratificado $(C, \mathcal{R})$ y cada aplicación $g\colon C \longrightarrow A$, si $((C, \mathcal{R}), f \circ g, (B, \mathcal{Q}))$ es un morfismo de $(C, \mathcal{R})$ en $(B, \mathcal{Q})$, entonces $((C, \mathcal{R}), g, (A, \mathrm{L}^f(\mathcal{Q})))$ lo es de $(C, \mathcal{R})$ en $(A, \mathrm{L}^f(\mathcal{Q}))$*

Demostración. Es suficiente tomar como $\mathrm{L}^f(\mathcal{Q})$ la partición sobre A definida como:

$$\mathrm{L}^f(\mathcal{Q}) = \{\, f^{-1}[Q] \mid Q \in \mathcal{Q} \,\} - \{\varnothing\}.$$

□

Proposición 7.18.14. *Sea A un conjunto. Entonces hay una biyección natural del conjunto* $\mathrm{Eqv}(A)$ *en el conjunto* $\mathrm{Part}(A)$*, i.e., hay una biyección ξ_A de* $\mathrm{Eqv}(A)$ *en* $\mathrm{Part}(A)$ *tal que, para cada conjunto B y cada aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ el diagrama:*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Eqv}(A) & \xrightarrow{\ \xi_A\ } & \mathrm{Part}(A) \\
{\scriptstyle \mathrm{L}^f}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{L}^f} \\
\mathrm{Eqv}(B) & \xrightarrow[\ \xi_B\ ]{} & \mathrm{Part}(B)
\end{array}$$

conmuta. Además, si R y S son dos relaciones de equivalencia sobre A, entonces $R \subseteq S$ si y sólo si la partición $\xi_A(R)$ es un refinamiento *de la partición $\xi_A(S)$, i.e., se cumple que*

$$\forall P \in \xi_A(R)\, \exists Q \in \xi_A(S)\, (\, P \subseteq Q\,).$$

*Si R es una relación de equivalencia sobre A, a la partición $\xi_A(R)$, canónicamente asociada a R, la denotamos por A/R, a sus miembros los denominamos R-*bloques *o* R-clases de equivalencia *y si* $x \in A$*, entonces al* R*-bloque determinado por* x *lo denotamos por* $[x]_R$ *y no es más que* $R[\{x\}]$*, i.e., el conjunto* $\{\, y \in A \mid (x,y) \in R \,\}$*. Además, denotamos por* pr_R *la aplicación sobreyectiva de* A *en* A/R *que a un* $a \in A$ *le asigna* $[a]_R$*, y la denominamos la* proyección canónica *determinada por* R*.*

Demostración. □

7.19. Factorización a través de la coimagen. Ahora que disponemos del concepto de relación de equivalencia sobre un conjunto, demostramos la existencia de la factorización de una aplicación a través de un conjunto cociente del dominio de la misma. Pero antes demostramos la propiedad universal que tienen los cocientes de los conjuntos entre las relaciones de equivalencia, y que usaremos para descomponer las aplicaciones, a través de su coimagen, en la composición de una sobreyectiva y de una inyectiva.

Proposición 7.19.1. *Sean* A*,* B *y* C *tres conjuntos,* f *una aplicación sobreyectiva de* A *en* B *y* g *una aplicación de* A *en* C*. Entonces:*

1. *Una condición necesaria y suficiente para que exista una aplicación* h *de* B *en* C *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[dr, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\ & C \end{tikzcd}$$

   conmute, es que, para cada $x, y \in A$*, si* $f(x) = f(y)$*, entonces* $g(x) = g(y)$*.*
2. (Propidad universal del cociente). *Si* $R \in \mathrm{Eqv}(A)$*, entonces una condición necesaria y suficiente para que exista una aplicación* h *de* A/R *en* C *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_R"] \arrow[dr, "g"'] & A/R \arrow[d, "h"] \\ & C \end{tikzcd}$$

   conmute, es que, para cada $x, y \in A$*, si* $(x,y) \in R$*, entonces* $g(x) = g(y)$*.*

Además, tanto en el primero como en el segundo caso h *está unívocamente determinada.*

Demostración. □

La propiedad universal del cociente significa que el par $(\mathrm{pr}_R, A/R)$ es un coigualador de las aplicaciones $\mathrm{pr}_0\restriction R$ y $\mathrm{pr}_1\restriction R$ desde R hasta A, i.e., que $\mathrm{pr}_R \circ \mathrm{pr}_0\restriction R = \mathrm{pr}_R \circ \mathrm{pr}_1\restriction R$ y que, para cada conjunto C y cada aplicación g de A en C, si $g \circ \mathrm{pr}_0\restriction R = g \circ \mathrm{pr}_1\restriction R$, entonces existe una única aplicación h de A/R en C tal que $h \circ \mathrm{pr}_R = g$:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "\mathrm{pr}_0\restriction R"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{pr}_1\restriction R"'] & A \arrow[r, "\mathrm{pr}_R"] \arrow[dr, "g"'] & A/R \arrow[d, "h"] \\ & & C \end{tikzcd}$$

Ahora que disponemos de la propiedad universal del cociente, obtenemos como corolario la *factorización canónica* de una aplicación a través de la *coimagen*, siendo la coimagen, esencialmente, el máximo cociente del dominio de la aplicación, a través del cual la aplicación factoriza.

Corolario 7.19.2 (Noether). *Sea f una aplicación de A en B. Entonces* $\mathrm{Ker}(f)$*, definido como:*

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\, (x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y) \,\},$$

y denominado el núcleo *de la aplicación f, es una relación de equivalencia sobre A, y hay una única aplicación inyectiva f^{i}, la* inyectivizada *de f, de $A/\mathrm{Ker}(f)$, la* coimagen *de f, en B tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[drr, two heads, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(f)}"'] & & B \\
 & & A/\mathrm{Ker}(f) \arrow[u, tail, "f^{\mathrm{i}}"']
\end{tikzcd}$$

conmuta. Esta es la factorización canónica a través de la coimagen *de una aplicación. Además, si f es sobreyectiva, entonces f^{i} es sobreyectiva, luego biyectiva.*

Por otra parte, se cumple que para cada conjunto C, cualquier aplicación sobreyectiva $g\colon A \twoheadrightarrow C$ y cualquier aplicación $h\colon C \longrightarrow B$, si el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, two heads, "g"'] & B \\
 & C \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces existe un único epimorfismo $t\colon C \twoheadrightarrow A/\mathrm{Ker}(f)$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(f)}"] \arrow[ddr, two heads, "g"'] & & B \\
 & A/\mathrm{Ker}(f) \arrow[ur, tail, "f^{\mathrm{i}}"'] & \\
 & C \arrow[u, two heads, "t"'] \arrow[uur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Corolario 7.19.3 (Noether). *Sea f una aplicación de A en B. Entonces hay una única aplicación biyectiva f^{b}, la* biyectivizada *de f, de $A/\mathrm{Ker}(f)$ en $\mathrm{Im}(f)$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(f)}"'] & B \\
A/\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "f^{\mathrm{b}}"'] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, tail, "\mathrm{in}_{\mathrm{Im}(f)}"']
\end{tikzcd}$$

conmuta. Esta es la factorización canónica *de una aplicación, a través de la* coimagen *y de la* imagen.

Proposición 7.19.4. *Sean A, B, C, D cuatro conjuntos, f una aplicación sobreyectiva de B en A, h una aplicación sobreyectiva de D en C y g una aplicación de B en D . Entonces:*

1. *Una condición necesaria y suficiente para que exista una aplicación t de A en C tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "t"] \\ D \arrow[r, "h"'] & C \end{tikzcd}$$

   conmute, es que $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(h \circ g)$.

2. *Si R es una relación de equivalencia sobre B y S una relación de equivalencia sobre D, entonces una condición necesaria y suficiente para que exista una aplicación t de B/R en D/S tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\mathrm{pr}_R"] \arrow[d, "g"'] & B/R \arrow[d, "t"] \\ D \arrow[r, "\mathrm{pr}_S"'] & D/S \end{tikzcd}$$

   conmute, es que, para cada $x, y \in B$, si $(x, y) \in R$, entonces $(g(x), g(y)) \in S$

Además, tanto en el primero como en el segundo caso t está unívocamente determinada.

Demostración. □

Proposición 7.19.5. *Sea A un conjunto, y R, S dos relaciones de equivalencia sobre A tales que $R \subseteq S$. Entonces hay una única aplicación sobreyectiva $\mathrm{p}_{R,S}$ de A/R en A/S tal que $\mathrm{p}_{R,S} \circ \mathrm{pr}_{A/R} = \mathrm{pr}_{A/S}$ y si denotamos por S/R el $\mathrm{Ker}(\mathrm{p}_{R,S})$, entonces $\mathrm{p}^{i}_{R,S}$, la inyectivizada de $\mathrm{p}_{R,S}$, es un isomorfismo. Así que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\mathrm{pr}_R"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_S"] & \\ A/R \arrow[rr, "\mathrm{p}_{R,S}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{S/R}"'] & & A/S \\ & (A/R)/(S/R) \arrow[ur, "\mathrm{p}^{\mathrm{i}}_{R,S}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposición 7.19.6. *Sea A un conjunto, $(R_i)_{i \in I}$ una familia no vacía de relaciones de equivalencia sobre A y S una relación de equivalencia sobre A tal que, para* *cada $i \in I$, $S \subseteq R_i$. Entonces el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\mathrm{pr}_{R_i}"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_S"] \arrow[ddr, "\mathrm{pr}_{\bigcap_{i\in I} R_i}"'] & & A/R_i \\
& A/S \arrow[ur, "\mathrm{p}_{S,R_i}"'] \arrow[d, "\mathrm{p}_{S,\bigcap_{i\in I} R_i}"] & \\
& A/\bigcap_{i\in I} R_i \arrow[uur, "\mathrm{p}_{\bigcap_{i\in I} R_i, R_i}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposición 7.19.7. *Sea A un conjunto, $(R_i)_{i\in I}$ una familia no vacía de relaciones de equivalencia sobre A y S una relación de equivalencia sobre A tal que, para cada $i \in I$, $R_i \subseteq S$. Entonces el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A/R_i \arrow[dr, "\mathrm{p}_{R_i,\bigvee_{i\in I} R_i}"] \arrow[ddr, "\mathrm{p}_{R_i,S}"'] & & A \arrow[ll, "\mathrm{pr}_{R_i}"'] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{\bigvee_{i\in I} R_i}"'] \arrow[ddl, "\mathrm{pr}_S"] \\
& A/\bigvee_{i\in I} R_i \arrow[d, "\mathrm{p}_{\bigvee_{i\in I} R_i, S}"] & \\
& A/S &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposición 7.19.8. *Sea A un conjunto y $R \in \mathrm{Eqv}(A)$. Entonces la aplicación del conjunto $\{\, S \in \mathrm{Eqv}(A) \mid R \subseteq S \,\}$ en el conjunto $\mathrm{Eqv}(A/R)$ que a cada S del primero, le asigna la relación de equivalencia S/R sobre A/R, definida como*

$$R/S = \{\, ([x]_R, [y]_R) \in A/R \times A/R \mid (x, y) \in S \,\},$$

es una biyección.

Además, si $S, T \in \{\, S \in \mathrm{Eqv}(A) \mid R \subseteq S \,\}$, entonces $S \subseteq T$ si y sólo si $S/R \subseteq T/R$.

7.20. Saturación.

Definición 7.20.1. Sea A un conjunto, $R \in \mathrm{Eqv}(A)$ y X un subconjunto de A. Decimos que X está *R-saturado* si, para cada $x \in X$, se cumple que $[x]_R \subseteq X$, i.e., si

$$X = \textstyle\bigcup_{x\in X} [x]_R.$$

Denotamos por $\mathrm{Sat}_R(A)$ el conjunto de los subconjuntos de A que están R-saturados, i.e., el conjunto

$$\mathrm{Sat}_R(A) = \{\, X \in \mathrm{Sub}(A) \mid X = \textstyle\bigcup_{x\in X} [x]_R \,\}$$

Ejercicio 7.20.2. Sea A un conjunto, $R \in \mathrm{Eqv}(A)$ y X un subconjunto de A. Demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que X esté R-saturado es que $X = \mathrm{pr}_R^{-1}[\mathrm{pr}_R[X]]$

Proposición 7.20.3. *Sea A un conjunto y $R \in \mathrm{Eqv}(A)$. Entonces:*

1. *Si $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sat}_R(A)$, entonces $\bigcup_{X\in\mathcal{X}} X \in \mathrm{Sat}_R(A)$. En particular, $\varnothing \in \mathrm{Sat}_R(A)$.*

2. *Si* $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sat}_R(A)$ *y* $\mathcal{X} \neq \varnothing$, *entonces* $\bigcap_{X \in \mathcal{X}} X \in \mathrm{Sat}_R(A)$.
3. $A \in \mathrm{Sat}_R(A)$.
4. *Si* $X \in \mathrm{Sat}_R(A)$, *entonces* $A - X \in \mathrm{Sat}_R(A)$.

Demostración. □

Corolario 7.20.4. *Sea* A *un conjunto,* $R \in \mathrm{Eqv}(A)$ *y* X *un subconjunto de* A. *Entonces se cumple que* $\bigcap\{\, Y \in \mathrm{Sat}_R(A) \mid X \subseteq Y \,\}$ *es el mínimo subconjunto* R*-saturado de* A *que contiene a* X. *Denominamos a tal conjunto la* R-saturación *de* X *y lo denotamos por* $[X]_R$.

Demostración. □

Proposición 7.20.5. *Sea* A *un conjunto,* $R \in \mathrm{Eqv}(A)$ *y* X *un subconjunto de* A. *Demuéstrese que* $[X]_R = \mathrm{pr}_R^{-1}[\mathrm{pr}_R[X]]$

Proposición 7.20.6. *Sea* A *un conjunto y* $R \in \mathrm{Eqv}(A)$. *Entonces la endoaplicación,* $[\cdot]_R$, *del conjunto* $\mathrm{Sub}(A)$, *definida como:*

$$[\cdot]_R \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad X \quad \longmapsto \bigcap\{\, Y \in \mathrm{Sat}_R(A) \mid X \subseteq Y \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Im}([\cdot]_R) \subseteq \mathrm{Sat}_R(A)$.
2. $\{\, X \in \mathrm{Sub}(A) \mid X = [X]_R \,\} = \mathrm{Sat}_R(A)$.
3. $[\cdot]_R$ *es* extensiva *o* inflacionaria, *i.e., para cada* $X \in \mathrm{Sub}(A)$, $X \subseteq [X]_R$.
4. $[\cdot]_R$ *es* isótona, *i.e., para cada* $X, Y \in \mathrm{Sub}(A)$, *si* $X \subseteq Y$, *entonces se cumple que* $[X]_R \subseteq [Y]_R$.
5. $[\cdot]_R$ *es* idempotente, *i.e., para cada* $X \in \mathrm{Sub}(A)$, $[X]_R = [[X]_R]_R$.
6. $[\cdot]_R$ *es* completamente aditiva, *i.e., para cada* $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sub}(A)$, *se cumple que* $\left[\bigcup \mathcal{X}\right]_R = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} [X]_R$.

Demostración. □

Ejercicio 7.20.7. Demuéstrese que para cada $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sub}(A)$, si $\mathcal{X} \neq \varnothing$, entonces $\left[\bigcap \mathcal{X}\right]_R \subseteq \bigcap_{X \in \mathcal{X}} [X]_R$.

7.21. Otro punto de vista sobre las aplicaciones. Una aplicación f de un conjunto A en otro conjunto B, además de poder ser considerada como una familia de miembros de B indexada por A, puede ser considerada, como ya hizo, por ejemplo, Cantor, como una familia de subconjuntos de A indexada por B, de modo que tales subconjuntos sean dos a dos disjuntos y cubran A. Antes de proceder a presentar formalmente lo dicho, indicamos que tal hecho será usado en el álgebra universal para extender un álgebra universal mediante un álgebra booleana.

Definición 7.21.1. Sean A y B dos conjuntos. Entonces el conjunto $\mathrm{Cov}(B, A)$ de los cubrimientos disjuntos de A por B es

$$\mathrm{Cov}(B, A) = \left\{ \varphi\colon B \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall x, y \in B (x \neq y \;\rightarrow \varphi(x) \cap \varphi(y) = \varnothing) \\ \& \;\bigcup_{x \in B} \varphi(x) = A \end{array} \right\}.$$

Observemos que no exigimos que, para cada $x \in B$, $\varphi(x) \neq \varnothing$, i.e., el cubrimiento disjunto no es necesariamente una partición de A indexada por B.

Proposición 7.21.2. *Sean* A *y* B *dos conjuntos. Entonces el conjunto* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *de las aplicaciones de* A *en* B *es naturalmente isomorfo al conjunto* $\mathrm{Cov}(B, A)$ *de los cubrimientos disjuntos de* A *por* B.

Demostración. Es suficiente que consideremos la aplicación del conjunto $\mathrm{Hom}(A, B)$ en el conjunto $\mathrm{Cov}(B, A)$ que a una aplicación f de A en B, le asigna la aplicación $f^{-1}[\cdot] \circ \{\cdot\}_B$ de B en $\mathrm{Sub}(A)$. □

Observemos que los conjuntos de la forma $\mathrm{Cov}(B,A)$, junto con los conjuntos (en un universo de Grothendieck, arbitrario, pero fijo), constituyen una subcategoría (no plena) de la categoría de Kleisli, $\mathbf{Kl}(\mathbb{P})$, canónicamente asociada a la mónada de las partes, $\mathbb{P}$, sobre la categoría **Set** de conjuntos y aplicaciones (en un universo de Grothendieck, arbitrario, pero fijo). Además, se tiene un anti-isomorfismo entre la categoría **Set** y tal subcategoría de la categoría $\mathbf{Kl}(\mathbb{P})$.

Estudiar la relación entre el conjunto de las aplicaciones sobreyectivas de A en B y el conjunto de los cubrimientos disjuntos de A por B que son particiones de A indexadas por B.

7.22. Unión e intersección de familias de conjuntos. A continuación nos ocupamos del estudio de algunas de las propiedades de la unión y de la intersección de familias de conjuntos. Así como del de la conducta de las aplicaciones respecto de las uniones e intersecciones de familias de subconjuntos del dominio y del codominio de las mismas, y también de su conducta respecto de la complementación.

Definición 7.22.1. Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos, i.e., una función cuyo dominio de definición es I y que a cada $i\in I$ le asigna como valor el conjunto X_i. Entonces la *unión* de $(X_i)_{i\in I}$, a la que denotamos por $\bigcup_{i\in I} X_i$, es $\bigcup \mathrm{Im}((X_i)_{i\in I})$.

Proposición 7.22.2 (Conmutatividad)**.** *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos y f una permutación de I, i.e., un automorfismo de I. Entonces*

$$\textstyle\bigcup_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I} X_{f(i)}.$$

Demostración. □

Proposición 7.22.3. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos tal que, para cada $i,j\in I$, $X_i = X_j$. Entonces, denotando por X el valor común, se cumple que*

$$\textstyle\bigcup_{i\in I} X_i = X.$$

Demostración. □

Proposición 7.22.4. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Si J es el conjunto $\{\, i\in I \mid X_i = \varnothing \,\}$, entonces*

$$\textstyle\bigcup_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I-J} X_i.$$

Demostración. □

Proposición 7.22.5. *Sean $(X_i)_{i\in I}$ y $(Y_i)_{i\in I}$ dos familias de conjuntos. Si, para cada $i\in I$, $X_i\subseteq Y_i$, entonces*

$$\textstyle\bigcup_{i\in I} X_i \subseteq \bigcup_{i\in I} Y_i.$$

Por otra parte, si $J\subseteq I$, entonces

$$\textstyle\bigcup_{j\in J} X_j \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i.$$

Demostración. □

Proposición 7.22.6 (Asociatividad)**.** *Sean $(J_l)_{l\in L}$ y $(X_i)_{i\in I}$ dos familias de conjuntos tales que $I=\bigcup_{l\in L} J_l$. Entonces*

$$\textstyle\bigcup_{i\in I} X_i = \bigcup_{l\in L}(\bigcup_{i\in J_l} X_i).$$

Demostración. □

Definición 7.22.7. Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia no vacía de conjuntos. Entonces la *intersección* de $(X_i)_{i\in I}$, a la que denotamos por $\bigcap_{i\in I} X_i$, es $\bigcap \mathrm{Im}((X_i)_{i\in I})$.

Proposición 7.22.8 (Conmutatividad)**.** *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia no vacía de conjuntos y f una permutación de I. Entonces*

$$\bigcap\nolimits_{i\in I} X_i = \bigcap\nolimits_{i\in I} X_{f(i)}.$$

Demostración. $\square$

Proposición 7.22.9. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia no vacía de conjuntos tal que, para cada $i,j\in I$, $X_i = X_j$. Entonces, denotando por X el valor común, se cumple que*

$$\bigcap\nolimits_{i\in I} X_i = X.$$

Demostración. $\square$

Proposición 7.22.10. *Sean $(X_i)_{i\in I}$ y $(Y_i)_{i\in I}$ dos familias no vacías de conjuntos. Si, para cada $i\in I$, $X_i\subseteq Y_i$, entonces*

$$\bigcap\nolimits_{i\in I} X_i \subseteq \bigcap\nolimits_{i\in I} Y_i.$$

Por otra parte, si $J\subseteq I$ y J no es vacío, entonces

$$\bigcap\nolimits_{i\in I} X_i \subseteq \bigcap\nolimits_{j\in J} X_j.$$

Demostración. $\square$

Proposición 7.22.11 (Asociatividad)**.** *Sea $(J_l)_{l\in L}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos y $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos tal que $I = \bigcup(J_l \mid l\in L)$. Entonces*

$$\bigcap\nolimits_{i\in I} X_i = \bigcap\nolimits_{l\in L}(\bigcap\nolimits_{i\in J_l} X_i).$$

Demostración. $\square$

Proposición 7.22.12 (De Morgan)**.** *Sea A un conjunto y $(X_i)_{i\in I}$ una familia no vacía de subconjuntos de A. Entonces*

$$\complement_A(\bigcup\nolimits_{i\in I} X_i) = \bigcap\nolimits_{i\in I}\complement_A X_i \quad y \quad \complement_A(\bigcap\nolimits_{i\in I} X_i) = \bigcup\nolimits_{i\in I}\complement_A X_i.$$

Demostración. $\square$

7.23. Las aplicaciones y las operaciones conjuntistas. Nos ocupamos a continuación de estudiar las relaciones que subsisten entre la formación de imágenes directas e inversas mediante las aplicaciones y las operaciones conjuntistas de formación de uniones e intersecciones de familias de conjuntos y de la complementación. Debemos observar que la formación de imágenes inversas madiante las aplicaciones tiene una conducta especialmente buena respecto de las operaciones conjuntistas, ya que conmuta con todas las operaciones conjuntistas mencionadas.

Proposición 7.23.1. *Sea $r\colon A \longrightarrow\!\!\circ\, B$ una aplicación no determinista de A en B y $(X_i)_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de A. Entonces*

$$r[\bigcup\nolimits_{i\in I} X_i] = \bigcup\nolimits_{i\in I} r[X_i].$$

En particular, si $f\colon A\longrightarrow B$ es una aplicación de A en B y $(X_i)_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de A. Entonces

$$f[\bigcup\nolimits_{i\in i} X_i] = \bigcup\nolimits_{i\in I} f[X_i].$$

Demostración. $\square$

Proposición 7.23.2. *Sea $f\colon A\longrightarrow B$ una aplicación de A en B y $(Y_i)_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de B. Entonces*

$$f^{-1}[\bigcup\nolimits_{i\in I} Y_i] = \bigcup\nolimits_{i\in I} f^{-1}[Y_i].$$

Demostración. $\square$

Proposición 7.23.3. *Sea $r\colon A \multimap B$ una aplicación no determinista de A en B y $(X_i)_{i\in I}$ una familia no vacía de subconjuntos de A. Entonces*

$$r[\textstyle\bigcap_{i\in I} X_i] \subseteq \bigcap_{i\in I} r[X_i].$$

En particular, si $f\colon A \longrightarrow B$ es una aplicación de A en B y $(X_i)_{i\in I}$ una familia no vacía de subconjuntos de A. Entonces

$$f[\textstyle\bigcap_{i\in I} X_i] \subseteq \bigcap_{i\in I} f[X_i].$$

Demostración. □

Proposición 7.23.4. *Sea $f\colon A \longrightarrow B$ una aplicación de A en B y $(Y_i)_{i\in i}$ una familia no vacía de subconjuntos de B. Entonces*

$$f^{-1}[\textstyle\bigcap_{i\in I} Y_i] = \bigcap_{i\in I} f^{-1}[Y_i].$$

Corolario 7.23.5. *Sea $f\colon A \longrightarrow B$ es una aplicación inyectiva de A en B y $(X_i)_{i\in I}$ una familia no vacía de subconjuntos de A. Entonces*

$$f[\textstyle\bigcap_{i\in I} X_i] = \bigcap_{i\in I} f[X_i].$$

Demostración. □

Proposición 7.23.6. *Sea $f\colon A \longrightarrow B$ es una aplicación e Y un subconjunto de B. Entonces*

$$f^{-1}[\complement_B Y] = \complement_A f^{-1}[Y].$$

Demostración. □

Proposición 7.23.7. *Sea $f\colon A \longrightarrow B$ es una aplicación inyectiva de A en B y X un subconjunto de A. Entonces*

$$f[\complement_A X] = f[A] - f[X].$$

Demostración. □

7.24. El teorema de Cantor-Bernstein. El teorema de Cantor-Bernstein afirma que una condición suficiente para que dos conjuntos sean isomorfos, es que cada uno de ellos domine al otro, i.e., que si $A(\leq \cap \leq^{-1})B$, entonces $A \cong B$. Puesto que siempre se cumple la recíproca, i.e., que si $A \cong B$, entonces $A(\leq \cap \leq^{-1})B$, podemos afirmar que $\cong = \leq \cap \leq^{-1}$, de modo que el teorema de Cantor-Bernstein es la parte no trivial de la ecuación. Posteriormente veremos que es una buena ordenación.

Proposición 7.24.1. *Sean f y g dos aplicaciones de un conjunto A en un conjunto B y $(X_i)_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de A tal que $\bigcup_{i\in I} X_i = A$. Si, para cada $i \in I$, $f{\restriction}X_i = g{\restriction}X_i$, entonces $f = g$.*

Demostración. □

Proposición 7.24.2. *Sea Y un conjunto, $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos y $(f_i)_{i\in I}$ una familia de aplicaciones tal que, para cada $i \in I$, $f_i\colon X_i \longrightarrow Y$ y, para cada $i, j \in I$, se cumpla que $f_i{\restriction}X_i \cap X_j = f_j{\restriction}X_i \cap X_j$. Entonces hay una única aplicación $t\colon \bigcup_{i\in I} X_i \longrightarrow Y$ tal que, para cada $i \in I$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "\mathrm{in}_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & \bigcup_{i\in I} X_i \arrow[d, "t"] \\
& Y
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Corolario 7.24.3. *Sean A, B, C y D cuatro conjuntos tales que $A \cap B = \varnothing$ y $C \cap D = \varnothing$, y sean $f\colon A \longrightarrow C$ y $g\colon B \longrightarrow D$ dos aplicaciones. Entonces hay una única aplicación $t\colon A \cup B \longrightarrow C \cup D$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{in}_A"] \arrow[d, "f"'] & A \cup B \arrow[d, "t"] & B \arrow[l, "\mathrm{in}_B"'] \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "\mathrm{in}_C"'] & C \cup D & D \arrow[l, "\mathrm{in}_D"] \end{tikzcd}$$

conmuta. Además, si f y g son isomorfismos, t también lo es.

Demostración. □

Lema 7.24.4. *Sean A y B dos conjuntos tales que $B \subseteq A$ y sea f una aplicación inyectiva de A en B. Entonces A y B son isomorfos.*

Demostración. Para demostrar que A y B son isomorfos consideramos el conjunto

$$\mathcal{X}_f = \{\, X \subseteq A \mid A - B \subseteq X \wedge f[X] \subseteq X \,\},$$

formado por todos los subconjuntos X de A que contienen a la corona $A - B$ y son tales que $f[X] \subseteq X$. El conjunto $\mathcal{X}_f$ no es vacío, porque $A \in \mathcal{X}_f$, luego existe el conjunto $\bigcap \mathcal{X}_f$. Además, se cumple que $\bigcap \mathcal{X}_f \in \mathcal{X}_f$, porque, por una parte, dado cualquier $X \in \mathcal{X}_f$, $A - B \subseteq X$, así que $A - B \subseteq \bigcap \mathcal{X}_f$, y, por otra, ya que, $f[\bigcap \mathcal{X}_f] \subseteq \bigcap_{X \in \mathcal{X}_f} f[X]$ y, para cualquier $X \in \mathcal{X}_f$, $f[X] \subseteq X$, entonces $f[\bigcap \mathcal{X}_f] \subseteq \bigcap \mathcal{X}_f$.

Para el subconjunto $\bigcap \mathcal{X}_f$ de A, demostramos que tiene las siguientes propiedades:

$$\bigcap \mathcal{X}_f = f[\bigcap \mathcal{X}_f] \cup (A - B). \tag{7.1}$$

$$\bigcap \mathcal{X}_f \cong f[\bigcap \mathcal{X}_f]. \tag{7.2}$$

$$A - \bigcap \mathcal{X}_f = B - f[\bigcap \mathcal{X}_f]. \tag{7.3}$$

Por lo que respecta a 7.1, demostramos en primer lugar que $\bigcap \mathcal{X}_f \subseteq f[\bigcap \mathcal{X}_f] \cup (A - B)$, para lo cual es suficiente que demostremos, debido a que $\bigcap \mathcal{X}_f$ es el mínimo subconjunto X de A tal que $A - B \subseteq X$ y $f[X] \subseteq X$, que, por una parte, $A - B \subseteq f[\bigcap \mathcal{X}_f] \cup (A - B)$, lo cual es evidente, y, por otra, que

$$f[f[\bigcap \mathcal{X}_f] \cup (A - B)] \subseteq f[\bigcap \mathcal{X}_f] \cup (A - B).$$

Pero esto último se cumple porque, a partir de $A - B \subseteq \bigcap \mathcal{X}_f$ y de $f[\bigcap \mathcal{X}_f] \subseteq \bigcap \mathcal{X}_f$, tenemos que $f[\bigcap \mathcal{X}_f] \cup (A - B) \subseteq \bigcap \mathcal{X}_f$, luego $f[f[\bigcap \mathcal{X}_f] \cup (A - B)] \subseteq f[\bigcap \mathcal{X}_f]$, pero $f[\bigcap \mathcal{X}_f] \subseteq f[\bigcap \mathcal{X}_f] \cup (A - B)$, así que $f[f[\bigcap \mathcal{X}_f] \cup (A - B)] \subseteq f[\bigcap \mathcal{X}_f] \cup (A - B)$. Por consiguiente $\bigcap \mathcal{X}_f \subseteq f[\bigcap \mathcal{X}_f] \cup (A - B)$.

La inclusión inversa se cumple debido a que $\bigcap \mathcal{X}_{A,B} \in \mathcal{X}_f$. Luego podemos afirmar que $\bigcap \mathcal{X}_f = f[\bigcap \mathcal{X}_f] \cup (A - B)$.

Para demostrar 7.2, consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \bigcap \mathcal{X}_f \arrow[r, "\mathrm{in}_{\bigcap \mathcal{X}_f}"] & A \arrow[d, tail, "f"] \\ f[\bigcap \mathcal{X}_f] \arrow[r, "\mathrm{in}_{f[\bigcap \mathcal{X}_f]}"'] & B \end{tikzcd}$$

Puesto que $(f \circ \mathrm{in}_{\bigcap \mathcal{X}_f})[\bigcap \mathcal{X}_f] = f[\bigcap \mathcal{X}_f]$ y $f[\bigcap \mathcal{X}_f] \subseteq B$, existe una única aplicación $g\colon \bigcap \mathcal{X}_f \longrightarrow f[\bigcap \mathcal{X}_f]$ tal que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\bigcap \mathcal{X}_f \arrow[r, "\mathrm{in}_{\bigcap \mathcal{X}_f}"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, tail, "f"] \\
f[\bigcap \mathcal{X}_f] \arrow[r, "\mathrm{in}_{f[\bigcap \mathcal{X}_f]}"'] & B
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Además, g es biyectiva.

Para demostrar 7.3, i.e., que $A - \bigcap \mathcal{X}_f = B - f[\bigcap \mathcal{X}_f]$, es suficiente que consideremos la sucesión de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
A - \bigcap \mathcal{X}_f &= A - (f[\bigcap \mathcal{X}_f] \cup (A - B)) && \text{(por 7.1)} \\
&= (A - f[\bigcap \mathcal{X}_f]) \cap (A - (A - B)) && \text{(por De Morgan)} \\
&= (A - f[\bigcap \mathcal{X}_f]) \cap B && \text{(por De Morgan)} \\
&= B - f[\bigcap \mathcal{X}_f] && \text{(por ser } B \subseteq A).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $B = f[\bigcap \mathcal{X}_f] \cup (A - \bigcap \mathcal{X}_f)$, ya que, por una parte, se cumple que $B = f[\bigcap \mathcal{X}_f] \cup (B - f[\bigcap \mathcal{X}_f])$ y, por otra, que $B - f[\bigcap \mathcal{X}_f] = A - \bigcap \mathcal{X}_f$.

Por último, consideremos el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\bigcap \mathcal{X}_f \arrow[r, "\mathrm{in}_{\bigcap \mathcal{X}_f}"] \arrow[d, "g"'] & (\bigcap \mathcal{X}_f) \cup (A - \bigcap \mathcal{X}_f) & A - \bigcap \mathcal{X}_f \arrow[l, "\mathrm{in}_{A - \bigcap \mathcal{X}_f}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{A - \bigcap \mathcal{X}_f}"] \\
f[\bigcap \mathcal{X}_f] \arrow[r, "\mathrm{in}_{f[\bigcap \mathcal{X}_f]}"'] & f[\bigcap \mathcal{X}_f] \cup (B - f[\bigcap \mathcal{X}_f]) & B - f[\bigcap \mathcal{X}_f] \arrow[l, "\mathrm{in}_{B - f[\bigcap \mathcal{X}_f]}"]
\end{tikzcd}
$$

Entonces, en virtud del Corolario 7.24.3, hay una única aplicación $h\colon A \longrightarrow B$ para la cual el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\bigcap \mathcal{X}_f \arrow[r, "\mathrm{in}_{\bigcap \mathcal{X}_f}"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "h"] & A - \bigcap \mathcal{X}_f \arrow[l, "\mathrm{in}_{A - \bigcap \mathcal{X}_f}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{A - \bigcap \mathcal{X}_f}"] \\
f[\bigcap \mathcal{X}_f] \arrow[r, "\mathrm{in}_{f[\bigcap \mathcal{X}_f]}"'] & B & B - f[\bigcap \mathcal{X}_f] \arrow[l, "\mathrm{in}_{B - f[\bigcap \mathcal{X}_f]}"]
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Además, ya que g y $\mathrm{id}_{A - \bigcap \mathcal{X}_f}$ son isomorfismos, h también lo es. Por lo tanto A y B son isomorfos.

□

Teorema 7.24.5 (Cantor-Bernstein)**.** *Sean A y B dos conjuntos. Si A está dominado por B y B está dominado por A, entonces A y B son isomorfos, i.e.,*

$$\forall A, B((A \leq B \wedge B \leq A) \rightarrow A \cong B).$$

Demostración. Por hipótesis hay una aplicación inyectiva $f\colon A \rightarrowtail B$ y una aplicación inyectiva $g\colon B \rightarrowtail A$. Entonces, para g, se cumple que $g[B] \subseteq A$. Por consiguiente $g[f[A]] \subseteq g[B]$, porque $f[(A] \subseteq B$ y g_* preserva las inclusiones.

Ahora estamos ante la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, tail, "g \circ f"] & \\ g[B] \arrow[r, tail, "\mathrm{in}_{g[B]}"'] & A. \end{tikzcd}$$

Pero, ya que $g[f[A]] \subseteq g[B]$, podemos afirmar, en virtud de la Proposición 7.15.1, que hay una única aplicación $h\colon A \longrightarrow g[B]$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, tail, "g \circ f"] & \\ g[B] \arrow[r, tail, "\mathrm{in}_{g[B]}"'] & A \end{tikzcd}$$

conmuta.

Además, h es inyectiva, porque $\mathrm{in}_{g[B]} \circ h = g \circ f$ y $g \circ f$ es inyectiva. Luego, en virtud del Lema 7.24.4 , ya que $g[B] \subseteq A$ y $h\colon A \rightarrowtail g[B]$, podemos afirmar que hay un isomorfismo $t\colon A \longrightarrow g[B]$.

Ahora bien, $g\colon B \rightarrowtail A$, en virtud del Corolario 7.15.2, determina un isomorfismo g^{s} de B en $g[B]$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, tail, "g"] \arrow[dr, tail, two heads, "g^{\mathrm{s}}"'] & A \\ & g[B] \arrow[u, tail, "\mathrm{in}_{g[B]}"'] \end{tikzcd}$$

conmuta.

Por consiguiente, a partir de los isomorfismos

$$t\colon A \longrightarrow g[B] \quad \text{y} \quad g^{\mathrm{s}}\colon B \longrightarrow g[B],$$

obtenemos el isomorfismo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t"] \arrow[rr, bend right, "(g^{\mathrm{s}})^{-1} \circ t"'] & g[B] \arrow[r, "(g^{\mathrm{s}})^{-1}"] & B \end{tikzcd}$$

Queda pues demostrado que A y B son isomorfos. $\square$

8. Conjuntos ordenados y retículos completos.

En esta sección presentamos aquellas nociones de la teoría de conjuntos ordenados que son imprescindibles para demostrar el teorema de Cantor-Bernstein.

Definición 8.0.6. Un *orden estricto* sobre un conjunto A es una relación binaria $<$ sobre A que cumple las siguientes condiciones:

1. $\forall x \in A\ (x \not< x)$ (Irreflexividad);
2. $\forall x, y, z \in A\ ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$ (Transitividad).

Un *conjunto estrictamente ordenado* es un par $\mathbf{A} = (A, <)$ en el que A es un conjunto y $<$ un orden estricto sobre A.

Definición 8.0.7. Un *orden* sobre un conjunto A es una relación binaria $\leq$ sobre A que cumple las siguientes condiciones:

1. $\forall x \in A\ (x \leq x)$ (Reflexividad);
2. $\forall x, y \in A\ ((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y)$ (Antisimetría);
3. $\forall x, y, z \in A\ ((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z)$ (Transitividad).

Un *conjunto ordenado* es un par $\mathbf{A} = (A, \leq)$ en el que A es un conjunto y $\leq$ un orden sobre A.

Observemos que los conceptos acabados de definir son equivalentes, ya que si $<$ es un orden estricto sobre un conjunto A, entonces $< \cup \Delta_A$ es un orden sobre A y, recíprocamente, si $\leq$ es un orden sobre A, entonces $\leq - \Delta_A$ es un orden estricto sobre A.

Si $\mathbf{A} = (A, \leq)$ es un conjunto ordenado y X una parte de A, entonces el par ordenado $(X, \leq \cap (X \times X))$, denotado también como $\mathbf{X} = (X, \leq)$, es un conjunto ordenado.

Definición 8.0.8. Un *orden lineal* sobre un conjunto A es una relación binaria $<$ sobre A que cumple las siguientes condiciones:

1. $\forall x \in A\ (x \not< x)$ (Irreflexividad);
2. $\forall x, y \in A\ (x \neq y \rightarrow (x < y \vee y < x))$ (Disyuntividad);
3. $\forall x, y, z \in A\ ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$ (Transitividad)

Un *conjunto linealmente ordenado* es un par $\mathbf{A} = (A, <)$ en el que A es un conjunto y $<$ un orden lineal sobre A.

Un conjunto linealmente ordenado se puede definir alternativa, pero equivalentemente, como un par $(A, \leq)$ en el que A es un conjunto y $\leq$ una relación binaria sobre A que cumple las siguientes condiciones:

1. $\forall x \in A\ (x \leq x)$ (Reflexividad);
2. $\forall x, y \in A\ ((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y)$ (Antisimetría);
3. $\forall x, y, z \in A\ ((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z)$ (Transitividad);
4. $\forall x, y \in A\ (x \leq y \vee y \leq x)$ (Disyuntividad).

Debido a que en la demostración del teorema de comparabilidad de los conjuntos, hemos de hacer uso del axioma de elección, bajo la forma del lema de Zorn-Kuratowski, y en este último se mencionan las cadenas, o partes de un conjunto ordenado que están linealmente ordenadas, los supremos y los maximales, definimos a continuación tales conceptos.

Definición 8.0.9. Sea $\mathbf{A} = (A, \leq)$ un conjunto ordenado. Un elemento a de A es el *máximo* de $(A, \leq)$ precisamente si es posterior a todos los elementos de A, i.e., si para cada $x \in A$, $x \leq a$. El *mínimo* se define dualmente. Un elemento a de A es *maximal* en $(A, \leq)$ precisamente si, para cada $x \in A$, si $a \leq x$, entonces $a = x$. El concepto de *minimal* se define dualmente. Si X es una parte de A, una *cota superior* de X en $(A, \leq)$ es un $a \in A$ tal que, para cada $x \in X$, $x \leq a$, al conjunto de las cotas superiores de X en $(A, \leq)$ lo denotamos por $\mathrm{Ub}_{(A,\leq)}(X)$. El concepto de *cota inferior* se define dualmente. El *supremo* de una parte X de A es el mínimo del conjunto ordenado $(\mathrm{Ub}_{(A,\leq)}(X), \leq)$, siendo $\leq$ la restricción del orden sobre A a la parte $\mathrm{Ub}_{(A,\leq)}(X)$. El concepto de *ínfimo* se define dualmente. Por último, una cadena del conjunto ordenado $(A, \leq)$ es una parte C de A tal que $(C, \leq)$ es un conjunto linealmente ordenado, siendo $\leq$ la restricción del orden sobre A a la parte C.

También se entiende por cadena de un conjunto ordenado $(A, \leq)$ cualquier familia $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ en A tal que el subconjunto $\mathrm{Im}((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = \{\, a \in A \mid \exists \lambda \in \Lambda\, (a = x_\lambda) \,\}$ de

A sea una cadena del conjunto ordenado $(A, \leq)$. De modo que la familia $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en A es una cadena si y sólo si, para cada $\lambda, \mu \in \Lambda$, $x_\lambda \leq x_\mu$ o $x_\mu \leq x_\lambda$.

Si a es el máximo del conjunto ordenado $(A, \leq)$, entonces a es el único elemento maximal de $(A, \leq)$. Ahora bien, un conjunto ordenado $(A, \leq)$ puede tener un único maximal, pero no tener ningún máximo. Lo mismo se puede decir del mínimo y de los minimales.

Observemos que un $a \in A$ es maximal en $(A, \leq)$ si y sólo si no existe un $x \in A$ tal que $a < x$, i.e., tal que $a \leq x$ pero $a \neq x$.

Lema de Zorn-Kuratowski. *Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado. Si $A \neq \varnothing$ y toda cadena no vacía de $(A, \leq)$ tiene un supremo en $(A, \leq)$, entonces $(A, \leq)$ tiene un maximal.*

Definimos a continuación las aplicaciones isótonas y los isomorfismos entre los conjuntos ordenados. Recordemos que una vez definidos los objetos de interés, en este caso los conjuntos ordenados, se deben definir los morfismos entre tales objetos, ya que lo que sea una entidad matemática viene dado por su interacción con las demás entidades matemáticas.

Definición 8.0.10. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos conjuntos ordenados. Una *aplicación isótona* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ es un triplo ordenado $(\mathbf{A}, \varphi, \mathbf{B})$, abreviado como φ y denotado por $\varphi\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, en el que φ es una aplicación de A en B tal que

$$\forall x, y \in A\,(\, x \leq y \rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)\,).$$

Un *isomorfismo* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ es un triplo ordenado $(\mathbf{A}, \varphi, \mathbf{B})$, abreviado como φ y denotado por $\varphi\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, en el que φ es una aplicación biyectiva de A en B tal que

$$\forall x, y \in A\,(\, x \leq y \leftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)\,).$$

Definición 8.0.11. Sea $\mathbf{A}$ un conjunto ordenado. Decimos que $\mathbf{A}$ es un conjunto *reticulado completo*, o un *retículo completo*, si tiene máximo, mínimo y para cada subconjunto no vacío X de A existe tanto el supremo de X, denotado por $\bigvee X$, como el ínfimo de X, denotado por $\inf X$.

Proposición 8.0.12. *Sea $\mathbf{A}$ un conjunto ordenado no vacío. Entonces son equivalentes:*

1. $\mathbf{A}$ *es un retículo completo.*
2. $\mathbf{A}$ *tiene un máximo y todo subconjunto no vacío de A tiene un ínfimo en* $\mathbf{A}$.
3. $\mathbf{A}$ *tiene un mínimo y todo subconjunto no vacío de A tiene un supremo en* $\mathbf{A}$.

Demostración. Nos limitamos a demostrar la equivalencia entre 1 y 2, ya que la demostración de la equivalencia entre 1 y 3 es idéntica. Es evidente que si se cumple 1, entonces se cumple 2. Recíprocamente, supongamos 2. Entonces dado un subconjunto no vacío X de A, el supremo de X en $\mathbf{A}$ es:

$$\bigvee X = \inf\{\, a \in A \mid \forall x \in X\ (x \leq a)\,\}.$$

Además, el mínimo es el ínfimo de A. $\square$

Si A es un conjunto, entonces $\mathbf{Sub}(A) = (\mathrm{Sub}(A), \subseteq)$ es un retículo completo.

Estudiamos a continuación los conceptos de sección inicial y final de un conjunto dotado de una relación binaria. Demostraremos que el conjunto de las secciones iniciales de un tal conjunto, ordenado por la inclusión, es un retículo completo.

Definición 8.0.13. Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Decimos que un subconjunto X de A es una *R-sección inicial* de A, si junto a un $x \in X$

contiene al conjunto $\downarrow_R x = \{\, y \in A \mid (y, x) \in R \,\}$ de todos los *R-predecesores* de x, i.e., si

$$\forall x \in X\, (\downarrow_R x \subseteq X\,),$$

o, lo que es equivalente, ya que $R^{-1}[X] = \bigcup_{x \in X} \downarrow_R x$, si

$$R^{-1}[X] \subseteq X.$$

Denotamos por $\mathrm{Sec}_R(A)$ el conjunto de todas las R-secciones iniciales de A.

Proposición 8.0.14. *El conjunto* $\mathrm{Sec}_R(A)$*, de todas las R-secciones iniciales de A, es un sistema de clausura completamente aditivo sobre A, i.e., tiene las siguientes propiedades:*

1. $A \in \mathrm{Sec}_R(A)$.
2. $\forall \mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sec}_R(A)\, (\, \mathcal{X} \neq \varnothing \to \bigcap \mathcal{X} \in \mathrm{Sec}_R(A)\,)$.
3. $\forall \mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sec}_R(A)\, (\bigcup \mathcal{X} \in \mathrm{Sec}_R(A)\,)$.

Demostración. □

Corolario 8.0.15. *Sea A un conjunto, R una relación binaria en A y $X \subseteq A$. Entonces hay una mínima R-sección inicial de A que contiene a X.*

Demostración. Es suficiente considerar la intersección del conjunto

$$\{\, Y \in \mathrm{Sec}_R(A) \mid X \subseteq Y \,\}.$$

□

Definición 8.0.16. Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Entonces denotamos por C_R el operador clausura sobre A, canónicamente asociado al sistema de clausura completamente aditivo $\mathrm{Sec}_R(A)$, que asigna a cada subconjunto X de A, $\mathrm{C}_R(X)$, la mínima R-sección inicial de A que contiene a X, a la que denominamos el *cierre inicial* de X relativo a R. En particular, cuando $X = \{x\}$, con $x \in A$, al cierre inicial de $\{x\}$ lo denotamos, para abreviar, por $\mathrm{C}_R(x)$, y lo denominamos también, la R-sección inicial *principal* determinada por x.

Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Demuéstrese que el operador C_R, definido como:

$$\mathrm{C}_R \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad X \quad\;\; \longmapsto \bigcap\{\, Y \in \mathrm{Sec}_R(A) \mid X \subseteq Y \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{C}_R) \subseteq \mathrm{Sec}_R(A)$.
2. $\{\, X \in \mathrm{Sub}(A) \mid X = \mathrm{C}_R(X) \,\} = \mathrm{Sec}_R(A)$.
3. C_R es extensivo o inflacionario, i.e., para cada $X \in \mathrm{Sub}(A)$, $X \subseteq \mathrm{C}_R(X)$.
4. C_R es isótono, i.e., para cada $X, Y \in \mathrm{Sub}(A)$, si $X \subseteq Y$, entonces se cumple que $\mathrm{C}_R(X) \subseteq \mathrm{C}_R(Y)$.
5. C_R es idempotente, i.e., para cada $X \in \mathrm{Sub}(A)$, $\mathrm{C}_R(X) = \mathrm{C}_R^2(X)$.
6. C_R es completamente aditivo, i.e., para cada $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sub}(A)$, se cumple que $\mathrm{C}_R(\bigcup \mathcal{X}) = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{C}_R(X)$.

Proposición 8.0.17. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Entonces, para cada $x \in A$, $\mathrm{C}_R(x) = \{x\} \cup \bigcup_{y \in \downarrow_R x} \mathrm{C}_R(y)$.*

Demostración. □

Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Demuéstrese que si R es transitiva, entonces, para cada $x \in A$, se cumple que

$$\mathrm{C}_R(x) = \Downarrow_R x,$$

siendo $\Downarrow_R x = \{\, a \in A \mid (a, x) \in R \vee a = x \,\}$.

Naturalmente, considerando la relación R^{-1}, obtenemos la noción dual de la de R-sección inicial de A, que es la de R-sección final de A.

Definición 8.0.18. Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Decimos de un subconjunto X de A que es una *R-sección final* de A, si junto a un $x \in X$ contiene al conjunto $\uparrow_R x = \{\, y \in A \mid (x, y) \in R \,\}$ de todos los *R-sucesores* de x, i.e., si

$$\forall x \in X\, (\uparrow_R x \subseteq X\,),$$

o, lo que es equivalente, ya que $R[X] = \bigcup_{x \in X} \uparrow_R x$, si

$$R[X] \subseteq X.$$

Denotamos por $\mathrm{Sec}_{R^{-1}}(A)$ el conjunto de todas las R-secciones finales de A.

Proposición 8.0.19. *El conjunto* $\mathrm{Sec}_{R^{-1}}(A)$*, de todas las R-secciones finales de A, es un sistema de clausura completamente aditivo sobre A, i.e., tiene las siguientes propiedades:*

1. $A \in \mathrm{Sec}_{R^{-1}}(A)$.
2. $\forall \mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sec}_{R^{-1}}(A)\, (\, \mathcal{X} \neq \varnothing \rightarrow \bigcap \mathcal{X} \in \mathrm{Sec}_{R^{-1}}(A)\,)$.
3. $\forall \mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sec}_{R^{-1}}(A)\, (\bigcup \mathcal{X} \in \mathrm{Sec}_{R^{-1}}(A)\,)$.

Demostración. □

Corolario 8.0.20. *Sea A un conjunto, R una relación binaria en A y $X \subseteq A$. Entonces hay una mínima R-sección final de A que contiene a X.*

Demostración. Es suficiente considerar la intersección del conjunto

$$\{\, Y \in \mathrm{Sec}_{R^{-1}}(A) \mid X \subseteq Y \,\}.$$

□

Definición 8.0.21. Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Entonces denotamos por $\mathrm{C}_{R^{-1}}$ el operador clausura sobre A, canónicamente asociado al sistema de clausura completamente aditivo, $\mathrm{Sec}_{R^{-1}}(A)$, que asigna a cada subconjunto X de A, $\mathrm{C}_{R^{-1}}(X)$, la mínima R-sección final de A que contiene a X, a la que denominamos el *cierre final* de X relativo a R. En particular, cuando $X = \{x\}$, con $x \in A$, al cierre final de $\{x\}$ lo denotamos, para abreviar, por $\mathrm{C}_{R^{-1}}(x)$, y lo denominamos también, la R-sección final *principal* determinada por x.

Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Demuéstrese que el operador $\mathrm{C}_{R^{-1}}$, definido como:

$$\mathrm{C}_{R^{-1}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad X \quad\ \longmapsto \bigcap \{\, Y \in \mathrm{Sec}_{R^{-1}}(A) \mid X \subseteq Y \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{C}_{R^{-1}}) \subseteq \mathrm{Sec}_{R^{-1}}(A)$.
2. $\{\, X \in \mathrm{Sub}(A) \mid X = \mathrm{C}_{R^{-1}}(X) \,\} = \mathrm{Sec}_{R^{-1}}(A)$.
3. $\mathrm{C}_{R^{-1}}$ es extensivo o inflacionario, i.e., para cada $X \in \mathrm{Sub}(A)$, $X \subseteq \mathrm{C}_{R^{-1}}(X)$.
4. $\mathrm{C}_{R^{-1}}$ es isótono, i.e., para cada $X, Y \in \mathrm{Sub}(A)$, si $X \subseteq Y$, entonces se cumple que $\mathrm{C}_{R^{-1}}(X) \subseteq \mathrm{C}_{R^{-1}}(Y)$.
5. $\mathrm{C}_{R^{-1}}$ es idempotente, i.e., para cada $X \in \mathrm{Sub}(A)$, $\mathrm{C}_{R^{-1}}(X) = \mathrm{C}^2_{R^{-1}}(X)$.
6. $\mathrm{C}_{R^{-1}}$ es completamente aditivo, i.e., para cada $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sub}(A)$, se cumple que $\mathrm{C}_{R^{-1}}(\bigcup \mathcal{X}) = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{C}_{R^{-1}}(X)$.

Proposición 8.0.22. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Entonces, para cada $x \in A$, $\mathrm{C}_{R^{-1}}(x) = \{x\} \cup \bigcup_{y \in \uparrow_R x} \mathrm{C}_{R^{-1}}(y)$.*

Demostración. □

Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Demuéstrese que si R es transitiva, entonces, para cada $x \in A$, se cumple que

$$\mathrm{C}_{R^{-1}}(x) = \Uparrow_R x,$$

siendo $\Uparrow_R x = \{\, a \in A \mid (x, a) \in R \vee a = x \,\}$.

Proposición 8.0.23. *Si* $\mathbf{A} = (A \leq)$ *es un conjunto ordenado, entonces los conjuntos ordenados* $\mathrm{Sec}_{\leq}(A)$ *y* $\mathrm{Sec}_{\geq}(A)$ *son retículos completos. Además,* $\mathbf{A}$ *se puede encajar en el reticulo completo* $\mathrm{Sec}_{\leq}(A)$*, mediante la aplicación isótona inyectiva que asigna a un* $x \in A$*,* $\Downarrow_{\leq} x$*. Por último, la formación del complementario respecto de* A *es una involución, anti-isomorfismo de cuadrado identidad, del retículo completo* $\mathrm{Sec}_{\leq}(A)$ *en el retículo completo* $\mathrm{Sec}_{\geq}(A)$*.*

Demostración. □

9. El teorema de Cantor-Bernstein.

Teorema 9.0.24 (Tarski)**.** *Si* $\mathbf{A}$ *es un retículo completo, entonces todo endomorfismo de* $\mathbf{A}$ *tiene un punto fijo.*

Demostración. Sea $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ un endomorfismo del retículo completo $\mathbf{A}$. Queremos demostrar que f tiene al menos un punto fijo, i.e., que existe un $a \in A$ tal que $f(a) = a$.

Sea $A_f = \{\, x \in A \mid x \leq f(x) \,\}$. Se cumple que A_f no es vacío, porque, denotando por 0 el mínimo de $\mathbf{A}$, tenemos que $0 \leq f(0)$, i.e., $0 \in A_f$. Sea $a = \bigvee A_f$ el supremo de A_f. Vamos a demostrar que $f(a) = a$, para lo cual es suficiente que demostremos que $a \leq f(a)$ y que $f(a) \leq a$.

Se cumple que $a \leq f(a)$. Para demostrarlo, ya que a es el supremo de A_f, es suficiente que demostremos que $f(a)$ es una cota superior de A_f, i.e., que, para cada $x \in A_f$, $x \leq f(a)$. Sea $x \in A_f$, entonces $x \leq a$, porque a es cota superior de A_f, luego, por ser f isótona, $f(x) \leq f(a)$, pero, ya que $x \in A_f$, $x \leq f(x)$, por lo tanto, por transitividad, $x \leq f(a)$, así que $a \leq f(a)$.

Se cumple que $f(a) \leq a$. Para demostrarlo es suficiente que demostremos que $f(a) \in A_f$, i.e., que $f(a) \leq f(f(a))$. Ahora bien, $a \leq f(a)$, luego, por ser f isótona, $f(a) \leq f(f(a))$, así que $f(a) \in A_f$, de donde, por ser a cota superior de A_f, $f(a) \leq a$.

Podemos pués afirmar que $a = f(a)$. □

Proposición 9.0.25 (Cohn)**.** *Sean* $(A, \leq)$ *y* $(B, \leq)$ *dos conjuntos ordenados tales que* $(A, \leq)$ *sea isomorfo a una sección inicial de* $(B, \leq)$ *(con el orden inducido) y* $(B, \leq)$ *sea isomorfo a una sección final de* $(A, \leq)$ *(con el orden inducido). Entonces hay una biyección* $f\colon A \longrightarrow B$ *tal que, para cada* $x, y \in A$*, si* $x < y$*, entonces no ocurre que* $f(y) \leq f(x)$*.*

Demostración. Sea $g\colon (A, \leq) \longrightarrow (B_0, \leq)$ un isomorfismo de $(A, \leq)$ en $(B_0, \leq)$, siendo B_0 una sección inicial de $(B, \leq)$, y $h\colon (B, \leq) \longrightarrow (A_0, \leq)$ un isomorfismo de $(B, \leq)$ en $(A_0, \leq)$, siendo A_0 una sección final de $(A, \leq)$. Definimos una endoaplicación $\theta_{g,h}$ del conjunto $\mathrm{Sec}_{\leq}(A)$ de las secciones iniciales del conjunto ordenado $(A, \leq)$ como:

$$\theta_{g,h} \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Sec}_{\leq}(A) & \longrightarrow & \mathrm{Sec}_{\leq}(A) \\ X & \longmapsto & \complement_A h[\complement_B g[X]] \end{array} \right.$$

Se cumple que, para cada sección inicial X de $(A, \leq)$, $\theta_{g,h}(X)$ es una sección inicial de $(A, \leq)$. Para demostrarlo hemos de llevar a cabo las siguientes tareas:

1. Demostrar que $g[X]$, que es parte de $B_0 \in \mathrm{Sec}_{\leq}(B)$, es una sección inicial de $(B, \leq)$.
2. Demostrar que $\complement_B g[X]$ es una sección final de $(B, \leq)$.

3. Demostrar que $h[\complement_B g[X]]$, que es parte de $A_0 \in \mathrm{Sec}_{\geq}(A)$, es una sección final de $(A, \leq)$.
4. Demostrar que $\complement_A h[\complement_B g[X]]$ es una sección inicial de $(A, \leq)$.

Pero es suficiente que realizemos las dos primeras.

Se cumple que $g[X]$ es una sección inicial de $(B, \leq)$, porque dado un $x \in X$ y un $b \in B$ tales que $b \leq g(x)$, ya que $g[X]$ es parte de B_0 y B_0 sección inicial de $(B, \leq)$, $b \in B_0$, luego, por ser g sobreyectiva, hay un $a \in A$ tal que $b = g(a)$, de modo que $g(a) \leq g(x)$, por lo tanto, por ser g isomorfismo, $a \leq x$, así que $a \in X$, por ser X sección inicial de $(A, \leq)$, de donde $g(a) = b \in g[X]$. Es evidente que el complementario de una sección inicial es una sección final, luego $\complement_B g[X]$ es una sección final de $(B, \leq)$.

Podemos por lo tanto asegurar que $\theta_{g,h}$ está bien definida. Además, $\theta_{g,h}$ es isótona. Así que, en virtud del teorema de Tarski, el endomorfismo $\theta_{g,h}$ tiene un punto fijo, i.e., existe una sección inicial A_1 de $(A, \leq)$ tal que

$$\theta_{g,h}(A_1) = \complement_A h[\complement_B g[A_1]] = A_1.$$

Convenimos que $B_1 = g[A_1]$, con lo que $\complement_A A_1 = h[\complement_B B_1]$. Observemos que $B_1 = g[A_1] \subseteq B_0$ y que es una sección inicial de $(B, \leq)$, y que $\complement_A A_1 = h[\complement_B B_1] \subseteq A_0$ y que es una sección final de $(A, \leq)$

Sea ahora $f\colon A \longrightarrow B$ la aplicación definida como:

$$f \begin{cases} A \longrightarrow B \\ a \longmapsto f(a) = \begin{cases} g(a), & \text{si } a \in A_1; \\ h^{-1}(a), & \text{si } a \in \complement_A A_1. \end{cases} \end{cases}$$

La aplicación f es sobreyectiva porque

$$\begin{aligned} f[A] &= f[A_1 \cup \complement_A A_1] \\ &= g[A_1] \cup h^{-1}[\complement_A A_1] \\ &= g[A_1] \cup h^{-1}[h[\complement_B B_1]] \\ &= B_1 \cup \complement_B B_1 \\ &= B \end{aligned}$$

La aplicación f es inyectiva porque si $x, y \in A$ son tales que $f(x) = f(y)$, entonces, o bien $x, y \in A_1$ o bien $x, y \in \complement_A A_1$, pero ni puede ocurrir que $x \in A_1$ e $y \in \complement_A A_1$, ni tampoco que $y \in A_1$ y $x \in \complement_A A_1$. En efecto, si $x \in A_1$ e $y \in \complement_A A_1$, entonces

$$f(x) = g(x) \in g[A_1] = B_1 \quad \text{y} \quad f(y) = h^{-1}(y),$$

pero $y \in \complement_A A_1 = h[\complement_B B_1]$, así que $y = h(b)$, para un $b \in \complement_B B_1$, luego

$$f(y) = h^{-1}(y) = h^{-1}(h(b)) = b \in \complement_B B_1,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto no puede ocurrir que $x \in A_1$ e $y \in \complement_A A_1$. Del mismo modo se demuestra que tampoco puede ocurrir que $y \in A_1$ y $x \in \complement_A A_1$. Ahora bien, si $x, y \in A_1$, entonces $x = y$, porque g es inyectiva, y si $x, y \in \complement_A A_1$, entonces $x = y$, porque h^{-1} es inyectiva.

Demostramos por último que para cada $x, y \in A$, si $x < y$, entonces no ocurre que $f(y) \leq f(x)$, i.e., ni $f(y) < f(x)$ ni $f(y) = f(x)$. Sean $x, y \in A$ tales que $x < y$, entonces $f(y) \neq f(x)$, ya que si $f(y) = f(x)$, tendríamos que $x = y$, por ser f inyectiva, que entra en contradicción con que $x < y$. Falta demostrar que, para cada $x, y \in A$, si $x < y$, entonces no ocurre que $f(y) < f(x)$.

Supongamos que existan $x, y \in A$ tales que $x < y$ pero que $f(y) < f(x)$.

1. Si $y \in A_1$, entonces $x \in A_1$ y $f(x) = g(x) < g(y) = f(y)$, que entra en contradicción con que $f(y) < f(x)$.

2. Si $x \in \complement_A A_1$, entonces $y \in \complement_A A_1$, luego de $f(y) < f(x)$ obtenemos que $h(f(y)) < h(f(x))$, pero, en este caso, $f(y) = h^{-1}(y)$ y $f(x) = h^{-1}(x)$, luego $h(h^{-1}(y)) < h(h^{-1}(x))$, i.e., $y < x$, que entra en contradicción con que $x < y$.
3. Por último, si $x \in A_1$ e $y \in \complement_A A_1$, entonces $f(x) \in B_1$ y $f(y) \in \complement_B B_1$, pero al ser $\complement_B B_1$ una sección final de $(B, \leq)$ y cumplirse que $f(y) < f(x)$, $f(x) \in \complement_B B_1$, que entra en contradicción con que $f(x) \in B_1$.

El caso en que $x \in \complement_A A_1$ e $y \in A_1$, no puede darse. □

A partir de la última proposición obtenemos el teorema de Cantor-Bernstein.

Teorema 9.0.26. *Si $A \leq B$ y $B \leq A$, entonces $A \cong B$.*

Demostración. Se cumple que (A, Δ_A) y (B, Δ_B) son conjuntos ordenados. Además, las secciones iniciales y finales de (A, Δ_A) coinciden con los subconjuntos de A y las secciones iniciales y finales de (B, Δ_B) con los subconjuntos de B, luego (A, Δ_A) es isomorfo a una sección inicial de (B, Δ_B) y (B, Δ_B) lo es a una sección final de (A, Δ_A). Por lo tanto hay una biyección de A en B. □

Si hay una aplicación sobreyectiva f de A en B y una sobreyectiva g de B en A, entonces A y B son isomorfos. En efecto, por una parte, por ser f sobreyectiva es una retracción, luego hay una aplicación u de B en A tal que $f \circ u = \mathrm{id}_B$, y, por otra parte, por ser g sobreyectiva es una retracción, luego hay una aplicación v de A en B tal que $g \circ v = \mathrm{id}_A$. Por lo tanto hay una aplicación inyectiva v de A en B y una inyectiva u de B en A, así que A y B son isomorfos.

Observemos que si A está dominado por B y B por A, entonces no puede ocurrir ni que $A = \varnothing$ y $B \neq \varnothing$ ni que $B = \varnothing$ y $A \neq \varnothing$. Por lo tanto, o bien A y B son vacíos, o bien ni A ni B son vacíos.

El teorema de Cantor-Bernstein se puede usar, entre otras cosas, para demostrar, por ejemplo, que el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es isomorfo, para cada $n \geq 2$, al conjunto $\mathbb{N}^n$. En efecto, de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}^n$ se tiene la aplicación inyectiva diagonal $\delta_{\mathbb{N},\mathbb{N}^n}$ que a un $x \in \mathbb{N}$ le asigna $(x, \ldots, x)$; además, de $\mathbb{N}^n$ en $\mathbb{N}$ se tiene la aplicación inyectiva que a un $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$ le asigna $\prod_{i \in n} p_i^{x_i}$, siendo p_0 el número primo 2, p_1 el número primo 3, etc.

10. El teorema de comparabilidad.

Demostramos en esta sección que dos conjuntos cualesquiera siempre son comparables mediante la relación de dominación.

Teorema 10.0.27. *Si A y B son dos conjuntos, entonces A está dominado por B o B está dominado por A, i.e., existe una aplicación inyectiva de A en B o existe una aplicación inyectiva de B en A.*

Demostración. Sobre el conjunto $\bigcup_{\substack{X \subseteq A, \\ Y \subseteq B}} \mathrm{Iso}(X, Y)$, de los isomorfismos entre partes de A y de B consideremos la relación binaria $\leq$ que consta de los pares (f, f'), con $f \in \mathrm{Iso}(X, Y)$ y $f' \in \mathrm{Iso}(X', Y')$, para algunos subconjuntos X, X' de A y algunos subconjuntos Y, Y' de B, tales que:

1. $X \subseteq X'$.
2. $Y \subseteq Y'$.

3. El diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{in}_{X,X'}"'] & Y \arrow[d, "\mathrm{in}_{Y,Y'}"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

conmuta.

Entonces $(\bigcup_{\substack{X\subseteq A,\\ Y\subseteq B}} \mathrm{Iso}(X,Y), \leq)$ es un conjunto ordenado. Se cumple que no es vacío porque $\mathrm{Iso}(\varnothing,\varnothing) \neq \varnothing$. Además, toda cadena no vacía del conjunto ordenado $(\bigcup_{\substack{X\subseteq A,\\ Y\subseteq B}} \mathrm{Iso}(X,Y), \leq)$ tiene un supremo. Sea Λ un conjunto no vacío y $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia en $\bigcup_{\substack{X\subseteq A,\\ Y\subseteq B}} \mathrm{Iso}(X,Y)$ tal que

1. Para cada $\lambda\in\Lambda$, $f_\lambda\colon X_\lambda \longrightarrow Y_\lambda$.
2. Para cada $\lambda,\mu\in\Lambda$, $f_\lambda \leq f_\mu$ o $f_\mu \leq f_\lambda$.

Entonces el triplo

$$f = (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, F, \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda)$$

en el que F es

$$F = \{\, (x,y) \in (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda) \times (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda) \mid \exists\lambda\in\Lambda\,((x,y)\in F_\lambda) \,\}$$

o, lo que es equivalente, para cada $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, $f(x) = f_\lambda(x)$, siendo λ cualquier índice en Λ para el que $x \in X_\lambda$, es una aplicación biyectiva y es el supremo de $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Se cumple que F es una función porque si $(x,y),(x,z)\in F$, entonces, por la definición de F, existirían $\lambda,\mu\in\Lambda$ tales que $(x,y)\in F_\lambda$ y $(x,z)\in F_\mu$, pero al ser $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una cadena, tendríamos que $f_\lambda \leq f_\mu$ o $f_\mu \leq f_\lambda$, luego $(x,y),(x,z)\in F_\mu$ o $(x,y),(x,z)\in F_\lambda$, por lo tanto $y = z$. Así que podemos afirmar que f es una aplicación. Dejamos como ejercicio la demostración de que f es biyectiva. Es evidente que f es una cota superior de la familia $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Puesto que se cumplen las hipótesis del Lema de Zorn-Kuratowski, podemos afirmar que existe un maximal en el conjunto ordenado $(\bigcup_{\substack{X\subseteq A,\\ Y\subseteq B}} \mathrm{Iso}(X,Y), \leq)$. Sea $h\colon X \longrightarrow Y$ un maximal. Para h se cumple que $X = A$ o $Y = B$, ya que si $X \neq A$ e $Y \neq B$, entonces, tomando un $a_0 \in A - X$ y un $b_0 \in B - Y$, tendríamos que para la aplicación h_{a_0,b_0} definida desde $X\cup\{a_0\}$ hasta $Y\cup\{b_0\}$ y con función subyacente H_{a_0,b_0} la definida como

$$H_{a_0,b_0} = H \cup \{\, (a_0,b_0) \,\}$$

se cumpliría que $h < h_{a_0,b_0}$, luego h no sería maximal, contradicción. Por lo tanto $X = A$ o $Y = B$. Si ocurre lo primero, entonces $\mathrm{in}_{Y,B}\circ h$ es una aplicación inyectiva de A en B, mientras que si ocurre lo segundo, $\mathrm{in}_{X,A}\circ h^{-1}$ es una aplicación inyectiva de B en A. □

Respecto del teorema de comparabilidad hemos de decir que Hartogs demostró la equivalencia del mismo con el axioma de elección.

Sabemos que la clase relacional de dominación entre conjuntos, $\leq$, que no es un conjunto, tiene, entre otras, las propiedades reflexiva y transitiva, luego la conjunción de ella y de su inversa, que coincide con la clase relacional de isomorfía $\cong$, tiene las propiedades de una eqivalencia, i.e., es reflexiva, simétrica y transitiva. Ello puede inducir a pensar, como lo hicieron Frege y Russell, que una definición de lo que sea la cardinalidad de un conjunto, i.e., aquello que, según Cantor, se obtiene al hacer abstracción del orden y naturaleza de los elementos de un conjunto, pudiera consistir en definirla, para un conjunto A, como:

$$[A]_{\cong} = \{\, B \mid B \cong A \,\}.$$

Ahora bien, para $A = \varnothing$, tenemos que $[\varnothing]_{\cong} = \{\, \varnothing \,\}$ es un conjunto, sin embargo, para un conjunto no vacío A, si admitimos que $[A]_{\cong}$ es un conjunto, entonces, para cada conjunto x, se cumple que $x \in \bigcup[A]_{\cong}$, que en la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel-Skolem no existe. De modo que la definición de la cardinalidad de un conjunto ha de ir por otros derroteros, por ejemplo, por la vía de considerar que los cardinales son ordinales iniciales, involucrando de este modo el concepto de buena ordenación y el esquema axiomático de reemplazo.

11. Límites proyectivos

Cuando consideramos las relaciones, apoyándonos sobre el concepto de par ordenado, demostramos la existencia del producto cartesiano de dos conjuntos, y, por recursión, la de cualquier familia finita no vacía de conjuntos. Pero, debido a la ausencia de un concepto de tupla ordenada de longitud transfinita, que fuera la generalización natural del de tupla ordenada de longitud finita, no demostramos entonces la existencia del producto de una familia arbitraria de conjuntos.

Ahora, haciendo uso del concepto de función, nos ocupamos, en primer lugar, de demostrar tanto la existencia de productos de familias de conjuntos, como la de productos de familias de aplicaciones entre familias de conjuntos, así como, en segundo lugar, de estudiar la conducta del operador de formación de productos, respecto de las identidades y de la composición de familias de aplicaciones entre familias de conjuntos.

11.1. Productos.

Proposición 11.1.1. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Entonces hay un par ordenado $\left(\prod_{i\in I} X_i, (\mathrm{pr}_i)_{i\in I}\right)$ en el que $\prod_{i\in I} X_i$, el* producto *de $(X_i)_{i\in I}$, es un conjunto y, para cada $i \in I$, pr_i, la* proyección canónica i-ésima *del producto, es una aplicación de $\prod_{i\in I} X_i$ en X_i, que tiene la siguiente* propiedad universal*:*

Para cada par ordenado $(A, (f_i)_{i\in I})$, en el que A es un conjunto y, para cada $i \in I$, $f_i\colon A \longrightarrow X_i$, hay una única aplicación $\langle f_i\rangle_{i\in I} : A \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$ tal que, para cada $i \in I$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\langle f_i\rangle_{i\in I}"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\
\prod_{i\in I} X_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & X_i
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Sea $\prod_{i\in I} X_i$ el conjunto definido como:

$$\textstyle\prod_{i\in I} X_i = \left\{\, x \in \mathrm{Fnc}(I, \bigcup_{i\in I} X_i)) \mid \forall i \in I (x_i \in X_i) \,\right\},$$

y, para cada $i \in I$, pr_i la aplicación de $\prod_{i\in I} X_i$ en X_i definida como:

$$\mathrm{pr}_i \begin{cases} \prod_{i\in I} X_i & \longrightarrow X_i \\ \quad x & \longmapsto x_i. \end{cases}$$

Entonces, dado un par ordenado $(A, (f_i)_{i\in I})$, en el que A es un conjunto y, para cada $i \in I$, $f_i\colon A \longrightarrow X_i$, sea $\langle f_i\rangle_{i\in I}$ la aplicación de A en $\prod_{i\in I} X_i$ definida como:

$$\langle f_i\rangle_{i\in I} \begin{cases} A & \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i \\ a & \longmapsto (f_i(a))_{i\in I} \end{cases}.$$

Es evidente que, para cada $i \in I$, $\mathrm{pr}_i \circ \langle f_i \rangle_{i\in I} = f_i$. Con ello queda demostrada la existencia de al menos una aplicación de A en $\prod_{i\in I} X_i$ con la propiedad indicada. Dejamos, como ejercicio, la demostración de la unicidad. $\square$

Ejercicio 11.1.2. Sea I un conjunto no vacío, $(X_i \mid i \in I)$ una familia de conjuntos, A un conjunto y $(f_i \mid i \in I)$ una familia de aplicaciones en la que, para cada $i \in I$,$f_i\colon A \longrightarrow X_i$. Demuéstrese que:

1. $\mathrm{Ker}(\langle f_i \mid i \in I\rangle) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}(f_i)$.
2. $\mathrm{Im}(\langle f_i \mid i \in I\rangle) \subseteq \prod_{i\in I} \mathrm{Im}(f_i)$, i.e., sólo se cumple la mitad del principio de d'Artagnan.

En la proposición anterior se ha demostrado, para una familia de conjuntos, la existencia de al menos un par ordenado, formado por un conjunto y una familia de aplicaciones desde el conjunto hasta cada uno de los conjuntos de la familia dada, sujeto a cumplir una cierta propiedad universal; pero, ni hemos afirmado que tal par sea absolutamente único, ni que el producto de la familia sea no vacío, ni que las proyecciones canónicas sean necesariamente sobreyectivas.

Demostraremos en lo que sigue, entre otras cosas, que:

- El par ordenado de la proposición anterior, es único salvo isomorfismo.
- El axioma de elección es equivalente a que el producto de una familia de conjuntos no vacíos, no sea vacío.
- Una condición necesaria y suficiente para que una proyección canónica sea sobreyectiva, es que desde el codominio de tal proyección hasta cualquier otro conjunto de la familia exista al menos una aplicación.

Proposición 11.1.3. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Entonces:*

1. *Para cada conjunto A y cualesquiera aplicaciones $f, g\colon A \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$, si, para cada $i \in I$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{pr}_i \circ f"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{pr}_i \circ g"'] & \prod_{i\in I} X_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"] & X_i \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $f = g$, i.e., la familia de aplicaciones $(\mathrm{pr}_i)_{i\in I}$ es colectivamente monomórfica.

2. *Para cada par ordenado $(A, (f_i)_{i\in I})$, en el que A sea un conjunto y, para cada $i \in I$, $f_i\colon A \longrightarrow X_i$, y para cada epimorfismo $t\colon \prod_{i\in I} X_i \twoheadrightarrow A$, si, para cada $i \in I$, el digrama:*

$$\begin{tikzcd} \prod_{i\in I} X_i \arrow[rr, "\mathrm{pr}_i"] \arrow[dr, two heads, "t"'] & & X_i \\ & A \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces t es un isomorfismo, i.e., la familia de aplicaciones $(\mathrm{pr}_i)_{i\in I}$ es extremal.

Demostración. $\square$

Corolario 11.1.4. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Si un par ordenado $(P,(p_i)_{i\in I})$, en el que P es un conjunto y, para cada $i \in I$, $p_i\colon P \longrightarrow X_i$, tiene la propiedad de que para cada par ordenado $(A,(f_i)_{i\in I})$, en el que A es un conjunto y, para cada $i \in I$, $f_i\colon A \longrightarrow X_i$, hay una única aplicación $h\colon A \longrightarrow P$ tal que, para cada $i \in I$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ P \arrow[r, "p_i"'] & X_i \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único isomorfismo t de P en $\prod_{i\in I} X_i$ tal que, para cada $i \in I$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "p_i"] & \\ \prod_{i\in I} X_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & X_i \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Teorema 11.1.5. *El principio general de elección de Zermelo equivale al axioma de elección multiplicativo de Russell, según el cual el producto cartesiano de cualquier familia de conjuntos no vacíos, es no vacía, i.e., se cumple que:*

$$\forall I\, \forall (X_i)_{i\in I}\, ((\forall i \in I\, (X_i \neq \varnothing)) \rightarrow \textstyle\prod_{i\in I} X_i \neq \varnothing).$$

Demostración. Supongamos el axioma de elección, bajo la forma del principio general de elección de Zermelo, i.e., el que afirma que para cualquier conjunto $\mathcal{X}$, si $\varnothing \notin \mathcal{X}$, entonces hay una función F de $\mathcal{X}$ en $\bigcup \mathcal{X}$ tal que, para cada $X \in \mathcal{X}$, $F(X) \in X$, y sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos indexada por un conjunto I, tal que, para cada $i \in I$, $X_i \neq \varnothing$. A partir de $(X_i)_{i\in I}$ obtenemos su imagen, i.e., el conjunto $\mathrm{Im}((X_i)_{i\in I})$. Ahora bien, puesto que, para cada $i \in I$, $X_i \neq \varnothing$, tenemos que $\varnothing \notin \mathrm{Im}((X_i)_{i\in I})$, luego, por el principio general de elección, podemos afirmar que:

$$\exists F\colon \mathrm{Im}((X_i)_{i\in I}) \longrightarrow \bigcup \mathrm{Im}((X_i)_{i\in I})\, (\forall i \in I\, (\, F(X_i) \in X_i)\,).$$

Entonces tomando como x la composición de la función $(X_i)_{i\in I}$ y de la función de elección F, se cumple que, para cada $i \in I$, $x_i \in X_i$.

Recíprocamente, supongamos que para cada conjunto I y cada familia de conjuntos $(X_i)_{i\in I}$, si, para cada $i \in I$, $X_i \neq \varnothing$, entonces $\prod_{i\in I} X_i \neq \varnothing$, y sea $\mathcal{X}$ un conjunto tal que $\varnothing \notin \mathcal{X}$. Entonces para $I = \mathcal{X}$ y la familia de conjuntos $(X)_{X\in\mathcal{X}}$, que es la función diagonal para $\mathcal{X}$, se cumple que, para cada $X \in \mathcal{X}$, $X \neq \varnothing$, ya que $\varnothing \notin \mathcal{X}$; luego $\prod_{X\in\mathcal{X}} X \neq \varnothing$, i.e., hay una función $F\colon \mathcal{X} \longrightarrow \bigcup_{X\in\mathcal{X}} X$ tal que, para cada $X \in \mathcal{X}$, $F(X) \in X$. □

Ejercicio 11.1.6. Sea $(X_i \mid i \in I)$ una familia de conjuntos. Demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que $\prod_{i\in I} X_i$ sea vacío es que exista un $i \in I$ para el cual $X_i = \varnothing$

Proposición 11.1.7. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos y $j \in I$. Entonces una condición necesaria y suficiente para que pr_j sea sobreyectiva, es que desde X_j hasta cualquier otro conjunto X_i de la familia exista al menos una aplicación.*

Demostración. □

Ejercicio 11.1.8. Demuéstrese que no existe el producto de todos los conjuntos no vacíos. Si existiera tal producto, y fuera $(P, (\mathrm{pr}_X \mid X \in V - \{\varnothing\}))$, entonces existiría $\mathrm{Sub}(P)$ y, necesariamente, $\mathrm{pr}_{\mathrm{Sub}(P)}$ debería ser sobreyectiva, lo cual es imposible.

Proposición 11.1.9. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Entonces:*

1. *Si $I = \varnothing$, entonces $\prod_{i\in I} X_i = \{\varnothing\}$, i.e., el producto de la familia vacía de conjuntos es un conjunto final.*
2. *Si $(X_i)_{i\in I}$ es tal que, para cada $i, j \in I$, $X_i = X_j$, y denotamos por X el valor común, entonces*

$$\textstyle\prod_{i\in I} X_i = \mathrm{Fnc}(I, X),$$

   y a la única aplicación de X en $\mathrm{Fnc}(I, X)$, determinada por la familia de aplicaciones $(\mathrm{id}_X)_{i\in I}$, la denominamos la aplicación diagonal *de X en $\mathrm{Fnc}(I, X)$ y la denotamos por $\mathrm{dg}_{I,X}$; además, $\mathrm{dg}_{I,X}$ es un monomorfismo. Así pués, para cada $i \in I$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, tail, "\mathrm{dg}_{I,X}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"] & \\ \mathrm{Fnc}(I, X) \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & X_i \end{tikzcd}$$

   conmuta.
3. *Si A es un conjunto tal que $\bigcup_{i\in I} X_i \subseteq A$, entonces $\prod_{i\in I} X_i \subseteq \mathrm{Fnc}(I, A)$.*
4. *Si I es un conjunto final y su único miembro es i, entonces*

$$\textstyle\prod_{i\in I} X_i = \mathrm{Fnc}(\{i\}, X_i).$$

   Por consiguiente, en este caso, $\prod_{i\in I} X_i$ es isomorfo a X_i.
5. *Si I tiene exactamente dos miembros y éstos son i y j, entonces*

$$\textstyle\prod_{i\in I} X_i \cong X_i \times X_j \quad y \quad \prod_{i\in I} X_i \cong X_j \times X_i$$

6. *Si para cada $i \in I$, X_i es un conjunto final, entonces $\prod_{i\in I} X_i$ es un conjunto final.*

Demostración. □

Proposición 11.1.10 (Conmutatividad)**.** *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos y φ un automorfismo de I, entonces*

$$\textstyle\prod_{i\in I} X_i \cong \prod_{i\in I} X_{\varphi(i)}.$$

Demostración. □

Para establecer la proposición que sigue, convenimos en denotar por $(X_j)_{j\in J}$ la restricción de $(X_i)_{i\in I}$ a J, si $J \subseteq I$, que no es más que la composición de in_J y de $(X_i)_{i\in I}$. Además, usaremos pr_j para denotar la proyección canónica j-ésima, del producto de cualquier familia de conjuntos para la cual se cumpla que j sea miembro del conjunto de índices de la misma.

Proposición 11.1.11. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos y $J, K, L \subseteq I$ tales que $K \subseteq J$ y $L \subseteq K$. Entonces:*

1. $\mathrm{pr}_{J,J} = \mathrm{id}_{\prod_{j\in J} X_j}$, *siendo* $\mathrm{pr}_{J,J}$ *la única endoaplicación* $\left\langle \mathrm{pr}_j \right\rangle_{j\in J}$ *del conjunto* $\prod_{j\in J} X_j$ *tal que, para cada* $j \in J$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \prod_{j\in J} X_j \arrow[d, "\mathrm{pr}_{J,J}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_j"] & \\ \prod_{j\in J} X_j \arrow[r, "\mathrm{pr}_j"'] & X_j \end{tikzcd}$$

conmuta.

2. $\mathrm{pr}_{J,L} = \mathrm{pr}_{K,L} \circ \mathrm{pr}_{J,K}$, *i.e., el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \prod_{j\in J} X_j \arrow[d, "\mathrm{pr}_{J,K}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{J,L}"] & \\ \prod_{k\in K} X_k \arrow[r, "\mathrm{pr}_{K,L}"'] & \prod_{l\in L} X_l \end{tikzcd}$$

conmuta; siendo, para $J, K \subseteq I$, *con* $K \subseteq J$, $\mathrm{pr}_{J,K}$ *la única aplicación del conjunto* $\prod_{j\in J} X_j$ *en el conjunto* $\prod_{k\in K} X_k$ *tal que, para cada* $k \in K$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \prod_{j\in J} X_j \arrow[d, "\mathrm{pr}_{J,K}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_k"] & \\ \prod_{k\in K} X_k \arrow[r, "\mathrm{pr}_k"'] & X_k \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Ejercicio 11.1.12. Sea $(X_i \mid i \in I)$ una familia de conjuntos y $J, K \subseteq I$ tales que $K \subseteq J$. Demuéstrese que $\mathrm{pr}_{J,K}$ es sobreyectiva, si para cada $j \in J$, $X_j \neq \varnothing$. Luego, bajo la misma hipótesis, si, para cada $j \in J$, identificamos X_j con $\prod_{j\in\{j\}} X_j$, y, por lo tanto, $\mathrm{pr}_{J,\{j\}}$ con pr_j, se cumple que pr_j es sobreyectiva.

Ejercicio 11.1.13. Sea $(X_i \mid i \in I)$ una familia de conjuntos y $J, K \subseteq I$ tales que $K \subseteq J$. Demuéstrese que si para cada $j \in J$, $X_j \neq \varnothing$ y $F\colon K \longrightarrow \bigcup_{j\in J} X_j$ es tal que para cada $k \in K$, $F(k) \in X_k$, entonces hay una función G de J en $\bigcup_{j\in J} X_j$ tal que $F \subseteq G$ y para cada $j \in J$, $G(j) \in X_j$

Proposición 11.1.14. *Sean* $(X_i)_{i\in I}$ *y* $(Y_i)_{i\in I}$ *dos familias de conjuntos. Entonces:*

1. *Si, para cada* $i \in I$, $X_i \subseteq Y_i$, *entonces* $\prod_{i\in I} X_i \subseteq \prod_{i\in I} Y_i$.
2. *Si, para cada* $i \in I$, $X_i \neq \varnothing$ *y* $\prod_{i\in I} X_i \subseteq \prod_{i\in I} Y_i$, *entonces, para cada* $i \in I$, $X_i \subseteq Y_i$

Demostración. □

Proposición 11.1.15. *Sean* $(X_i)_{i\in I}$ *y* $(Y_i)_{i\in I}$ *dos familias de conjuntos y* $(f_i)_{i\in I}$ *una familia de aplicaciones en la que, para cada* $i \in I$, $f_i\colon X_i \longrightarrow Y_i$. *Entonces hay una única aplicación, denotada por* $\prod_{i\in I} f_i$ *y denominada el* producto de $(f_i)_{i\in I}$, *del conjunto $\prod_{i\in I} X_i$ en el conjunto $\prod_{i\in I} Y_i$ tal que, para cada $i \in I$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} X_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"] \arrow[d, "\prod_{i\in I} f_i"'] & X_i \arrow[d, "f_i"] \\
\prod_{i\in I} Y_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & Y_i
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposición 11.1.16. *Sean $(X_i)_{i\in I}$, $(Y_i)_{i\in I}$ y $(Z_i)_{i\in I}$ tres familias de conjuntos y $(f_i)_{i\in I}$ y $(g_i)_{i\in I}$ dos familias de aplicaciones tales que, para cada $i \in I$, $f_i\colon X_i \longrightarrow Y_i$ y $g_i\colon Y_i \longrightarrow Z_i$. Entonces:*

1. $\prod_{i\in I} \mathrm{id}_{X_i} = \mathrm{id}_{\prod_{i\in I} X_i}$.
2. $\prod_{i\in I} g_i \circ \prod_{i\in I} f_i = \prod_{i\in I} g_i \circ f_i$.

Demostración. □

Proposición 11.1.17. *Sean $(X_i)_{i\in I}$, $(Y_j)_{j\in J}$ y $(Z_k)_{k\in K}$ tres familias de conjuntos y $(f_j)_{j\in J}$ y $(g_k)_{k\in K}$ dos familias de aplicaciones tales que, para cada $j \in J$, $f_j\colon \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow Y_j$ y, para cada $k \in K$, $g_k\colon \prod_{j\in J} Y_j \longrightarrow Z_k$. Entonces la única aplicación $\left\langle g_k \circ \langle f_j\rangle_{j\in J}\right\rangle_{k\in K}$ del conjunto $\prod_{i\in I} X_i$ en el conjunto $\prod_{k\in K} Z_k$ tal que, para cada $k \in K$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} X_i \arrow[d, "\left\langle g_k \circ \langle f_j\rangle_{j\in J}\right\rangle_{k\in K}"'] \arrow[dr, "g_k \circ \langle f_j\rangle_{j\in J}"] & \\
\prod_{k\in K} Z_k \arrow[r, "\mathrm{pr}_k"'] & Z_k
\end{tikzcd}$$

conmuta, coincide con la composición de la única aplicación $\langle f_j\rangle_{j\in J}$ del conjunto $\prod_{i\in I} X_i$ en el conjunto $\prod_{j\in J} Y_j$ y de la única aplicación $\langle g_k\rangle_{k\in K}$ del conjunto $\prod_{j\in J} Y_j$ en el conjunto $\prod_{k\in K} Z_k$ tales que, resp., para cada $j \in J$ y cada $k \in K$, los dos triángulos del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} X_i \arrow[d, "\langle f_j\rangle_{j\in J}"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\
\prod_{j\in J} Y_j \arrow[r, "\mathrm{pr}_j"] \arrow[d, "\langle g_k\rangle_{k\in K}"'] \arrow[dr, "g_k"] & Y_j \\
\prod_{k\in K} Z_k \arrow[r, "\mathrm{pr}_k"'] & Z_k
\end{tikzcd}$$

conmutan. Así pués, se cumple que:

$$\langle g_k\rangle_{k\in K} \circ \langle f_j\rangle_{j\in J} = \left\langle g_k \circ \langle f_j\rangle_{j\in J}\right\rangle_{k\in K}$$

Demostración. □

Proposición 11.1.18. *Sean $(X_i)_{i\in I}$ y $(Y_i)_{i\in I}$ dos familias de conjuntos y $(f_i)_{i\in I}$ una familia de aplicaciones en la que, para cada $i \in I$, $f_i\colon X_i \longrightarrow Y_i$. Entonces:*

1. *Si para cada $i \in I$, f_i es una retracción, entonces $\prod_{i\in I} f_i$ es una retracción.*
2. *Si para cada $i \in I$, f_i es una sección, entonces $\prod_{i\in I} f_i$ es una sección.*
3. *Si para cada $i \in I$, f_i es un isomorfismo, entonces $\prod_{i\in I} f_i$ es un isomorfismo.*
4. *Si para cada $i \in I$, f_i es un monomorfismo, entonces $\prod_{i\in I} f_i$ es un monomorfismo.*
5. *Si para cada $i \in I$, f_i es constante, entonces $\prod_{i\in I} f_i$ es constante.*

Demostración. □

Corolario 11.1.19. *Sea I un conjunto y $f\colon A \longrightarrow B$ una aplicación. Si f es una retracción (resp. una sección, isomorfismo, monomorfismo, constante), entonces f^I, i.e., el producto de la familia $(f)_{i\in I}$, es una retracción (resp. una sección, isomorfismo, monomorfismo, constante) de $A^I = \mathrm{Fnc}(I, A)$ en $B^I = \mathrm{Fnc}(I, B)$.*

Demostración. □

Proposición 11.1.20 (Asociatividad del producto)**.** *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos y $(J_l)_{l\in L}$ una familia de subconjuntos de I tal que $\bigcup_{l\in L} J_l = I$ y, para cada $l, m \in L$, si $l \neq m$, entonces $J_l \cap J_m = \varnothing$. Entonces*

$$\prod_{i\in I} X_i \cong \prod_{l\in L}\prod_{i\in J_l} X_i.$$

Demostración. □

Proposición 11.1.21. *Sea $((X_{l,i})_{i\in J_l})_{l\in L}$ una familia de familias de conjuntos tal que $L \neq \varnothing$ y, para cada $l \in L$, $J_l \neq \varnothing$. Entonces:*

1. $\bigcup_{l\in L} \bigcap_{i\in J_l} X_{l,i} = \bigcap_{f\in\prod_{l\in L} J_l} \bigcup_{l\in L} X_{l,f(l)}$
   (Distributividad de la unión respecto de la intersección).
2. $\bigcap_{l\in L} \bigcup_{i\in J_l} X_{l,i} = \bigcup_{f\in\prod_{l\in L} J_l} \bigcap_{l\in L} X_{l,f(l)}$
   (Distributividad de la intersección respecto de la unión).

Demostración. □

Corolario 11.1.22. *Sean $(X_i)_{i\in I}$ y $(Y_i)_{i\in I}$ dos familias no vacías de conjuntos. Entonces:*

1. $(\bigcap_{i\in I} X_i) \cup (\bigcap_{j\in J} Y_j) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(X_i \cup Y_j)$.
2. $(\bigcup_{i\in I} X_i) \cap (\bigcup_{j\in J} Y_j) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(X_i \cap Y_j)$.

Demostración. □

Proposición 11.1.23. *Sea $((X_{l,i})_{i\in J_l})_{l\in L}$ una familia de familias de conjuntos $L \neq \varnothing$ y, para cada $l \in L$, $J_l \neq \varnothing$. Entonces:*

1. $\prod_{l\in L} \bigcup_{i\in J_l} X_{l,i} = \bigcup_{f\in\prod_{l\in L} J_l} \prod_{l\in L} X_{l,f(l)}$
   (Distributividad del producto respecto de la unión).
2. *Si $L \neq \varnothing$ y, para cada $l \in L$, $J_l \neq \varnothing$, entonces*

$$\prod_{l\in L}\bigcap_{i\in J_l} X_{l,i} = \bigcap_{f\in\prod_{l\in L} J_l}\prod_{l\in L} X_{l,f(l)}$$

   (Distributividad del producto respecto de la intersección).

Demostración. □

Corolario 11.1.24. *Sea $((X_{l,i})_{i\in J_l})_{l\in L}$ una familia de familias de conjuntos.Si para cada $l \in L$, $\{\, X_{l,i} \mid i \in J_l \,\}$ es una partición de $\bigcup (X_{l,i})_{i\in J_l}$, entonces $\{\, \prod (X_{l,f(l)} \mid l \in L) \mid f \in \prod (J_l \mid l \in L) \,\}$ es una partición de $\prod_{l\in L} \bigcup_{i\in J_l} X_{l,i}$.*

Demostración. □

Corolario 11.1.25. *Sean $(X_i)_{i\in I}$ y $(Y_i)_{i\in I}$ dos familias de conjuntos. Entonces:*

1. $(\bigcup_{i\in I} X_i) \times \left(\bigcup_{j\in J} Y_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} X_i \times Y_j$.

2. *Si I y J no son vacíos, entonces*

$$\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} X_i \times Y_j.$$

Demostración. □

Proposición 11.1.26. *Sea $(X_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ una familia de conjuntos. Si $J \neq \varnothing$, entonces*

$$\bigcap_{j\in J} \left(\prod_{i\in I} X_{i,j}\right) = \prod_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J} X_{i,j}\right).$$

Demostración. □

Corolario 11.1.27. *Sean $(X_i)_{i\in I}$ y $(Y_i)_{i\in I}$ dos familias no vacías de conjuntos. Entonces:*

1. $\left(\prod_{i\in I} X_i\right) \cap \left(\prod_{i\in I} Y_i\right) = \prod_{i\in I}(X_i \cap Y_i)$.
2. $\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \times \left(\bigcap_{i\in i} Y_i\right) = \bigcap_{i\in I}(X_i \times Y_i)$.

Demostración. □

11.2. Igualadores.

Proposición 11.2.1. *Sean $f, g\colon A \longrightarrow B$ dos aplicaciones. Entonces existe un par ordenado* $(\mathrm{Eq}(f,g), \mathrm{eq}(f,g))$*, el* igualador *de f y g, en el que* $\mathrm{Eq}(f,g)$ *es un conjunto y* $\mathrm{eq}(f,g)$ *una aplicación de* $\mathrm{Eq}(f,g)$ *en A, que tiene las siguientes propiedades:*

1. $f \circ \mathrm{eq}(f,g) = g \circ \mathrm{eq}(f,g)$.
2. (Propiedad universal del igualador) *Para cualquier conjunto X y cada aplicación $h\colon X \longrightarrow A$, si $f \circ h = g \circ h$, entonces hay una única aplicación $t\colon X \longrightarrow \mathrm{Eq}(f,g)$ tal que $\mathrm{eq}(f,g) \circ t = h$.*

La situación descrita por las condiciones anteriores la expresamos diagramáticamente como:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
\mathrm{Eq}(f,g) \arrow[r, "\mathrm{eq}(f,g)"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $\mathrm{Eq}(f,g)$ el subconjunto de A definido como:

$$\mathrm{Eq}(f,g) = \{\, a \in A \mid f(a) = g(a) \,\},$$

y $\mathrm{eq}(f,g)$ la inclusión canónica de $\mathrm{Eq}(f,g)$ en A. Es evidente que $f \circ \mathrm{eq}(f,g) = g \circ \mathrm{eq}(f,g)$.

Además, si X es un conjunto y $h\colon X \longrightarrow A$ una aplicación tal que $f \circ h = g \circ h$, entonces $\mathrm{Im}(h) \subseteq \mathrm{Eq}(f,g)$, luego, por la propiedad universal del subconjunto, hay una única aplicación $t\colon X \longrightarrow \mathrm{Eq}(f,g)$, definida como:

$$t \begin{cases} X \longrightarrow \mathrm{Eq}(f,g) \\ x \longmapsto h(x), \end{cases}$$

tal que $\mathrm{eq}(f,g) \circ t = h$.

□

En la proposición anterior hemos demostrado, para un par de aplicaciones, ambas con el mismo dominio y codominio, la existencia de al menos un par ordenado, formado por un conjunto y una aplicación desde el conjunto hasta el dominio de las aplicaciones dadas, sujeto a cumplir un par de condiciones; pero no hemos afirmado que tal par sea absolutamente único. Demostramos a continuación que el par ordenado de la proposición anterior, es único, sólo, salvo isomorfismo.

Proposición 11.2.2. *Sean $f, g\colon A \longrightarrow B$ dos aplicaciones. Si un par ordenado (E, e), en el que E es un conjunto y $e\colon E \longrightarrow A$, tiene las propiedades:*

1. *$f \circ e = g \circ e$.*
2. *Para cualquier conjunto X y cada aplicación $h\colon X \longrightarrow A$, si $f \circ h = g \circ h$, entonces hay una única aplicación $u\colon X \longrightarrow E$ tal que $e \circ u = h$.*

Entonces hay un único isomorfismo $t\colon E \longrightarrow \mathrm{Eq}(f, g)$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "e"] & \\
\mathrm{Eq}(f,g) \arrow[r, "\mathrm{eq}(f,g)"'] & A
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Ejercicio 11.2.3. Defínase el concepto de igualador para familias arbitrarias no vacías de aplicaciones entre dos conjuntos cualesquiera, al que denominamos el *multiigualador* de la familia en cuestión, y demuéstrese de tal multiigualador es único, salvo isomorfismo

Proposición 11.2.4. *Si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "v"] \\
A' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & B'
\end{tikzcd}$$

conmuta serialmente, i.e., si $v \circ f = f' \circ u$ y $v \circ g = g' \circ u$, entonces hay una única aplicación $\mathrm{Eq}(u, v)\colon \mathrm{Eq}(f, g) \longrightarrow \mathrm{Eq}(f', g')$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Eq}(f,g) \arrow[r, "\mathrm{eq}(f,g)"] \arrow[d, "\mathrm{Eq}(u,v)"'] & A \arrow[d, "u"] \\
\mathrm{Eq}(f',g') \arrow[r, "\mathrm{eq}(f',g')"'] & A'
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Ejercicio 11.2.5. Demuéstrese que:

1. Para el diagrama, serialmente, conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] \\
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

se cumple que

$$\mathrm{Eq}(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_{\mathrm{Eq}(f,g)}.$$

2. Si los diagramas:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "v"] \\ A' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & B' \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} A' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] \arrow[d, "u'"'] & B' \arrow[d, "v'"] \\ A'' \arrow[r, shift left, "f''"] \arrow[r, shift right, "g''"'] & B'' \end{tikzcd}$$

son, serialmente, conmutativos, entonces se cumple que

$$\mathrm{Eq}(u', v') \circ \mathrm{Eq}(u, v) = \mathrm{Eq}(u' \circ u, v' \circ v).$$

Definición 11.2.6. Una aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ es un *monomorfismo regular* si existen dos aplicaciones $u, v\colon B \longrightarrow C$ tales que el par ordenado (A, f) es un igualador de u y v.

Proposición 11.2.7. *Una condición necesaria y suficiente para que una aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ sea un monomorfismo regular es que sea inyectiva.*

11.3. Productos fibrados. Ahora que disponemos de los conceptos de producto y de igualador, demostramos, apoyándonos en ellos, la existencia de un nuevo tipo de límite proyectivo, el de *producto fibrado* de dos aplicaciones con el mismo codominio.

Proposición 11.3.1. *Sean $f\colon A \longrightarrow C$ y $g\colon B \longrightarrow C$ dos aplicaciones con el mismo codominio. Entonces existe un par ordenado $(A \times_C B, (p_0, p_1))$, el* producto fibrado de A y B sobre C relativo a f y g, *en el que $A \times_C B$ es un conjunto, p_0 una aplicación de $A \times_C B$ en A y p_1 una aplicación de $A \times_C B$ en B, que tiene las siguientes propiedades:*

1. *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A \times_C B \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

conmuta.

2. (Propiedad universal del producto fibrado) *Para cada conjunto X y cualesquiera aplicaciones $u\colon X \longrightarrow A$ y $v\colon X \longrightarrow B$ si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay una única aplicación $t\colon X \longrightarrow A \times_C B$ *tal que los dos triángulos del diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\
& A \times_C B \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"'] & B \\
& A &
\end{tikzcd}$$

conmutan.

La situación descrita por las condiciones anteriores la expresamos diagramáticamente como:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\
& A \times_C B \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $A \times_C B$ el subconjunto de $A \times B$ definido como:

$$A \times_C B = \{\, (a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b) \,\},$$

$p_0 = \mathrm{pr}_0 \restriction A \times_C B$ y $p_1 = \mathrm{pr}_1 \restriction A \times_C B$. Es evidente que entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \times_C B \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Además, si X es un conjunto y $u\colon X \longrightarrow A$, $v\colon X \longrightarrow B$ dos aplicaciones tales que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces, por la propiedad universal del producto, hay una única aplicación $\langle u, v\rangle : X \longrightarrow A \prod B$ tal que $\mathrm{pr}_0 \circ \langle u, v\rangle = u$ y $\mathrm{pr}_1 \circ \langle u, v\rangle = v$ y, por cumplirse que $f \circ u = g \circ v$, tenemos que $\mathrm{Im}(\langle u, v\rangle) \subseteq A \times_C B$, luego, por la propiedad universal del subconjunto, hay una única aplicación t de X en $A \times_C B$ tal que

$\mathrm{in}_{A\times_C B}\circ t = \langle u, v\rangle$. Para la aplicación t se cumple que los dos triángulos del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\
& A\times_C B \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"'] & B \\
& A &
\end{tikzcd}$$

conmutan. Dejamos, como ejercicio, la demostración de que t es la única aplicación de X en $A\times_C B$ con las propiedades indicadas. $\square$

Cuando digamos que un diagrama de la forma:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

es un *cuadrado cartesiano*, ello significará que el conjunto X es un producto fibrado de A y B sobre C relativo a f y g, y que u y v son las aplicaciones estructurales.

En la proposición anterior hemos demostrado, para un par de aplicaciones, ambas con el mismo codominio, la existencia de al menos un par ordenado, formado por un conjunto y dos aplicaciones desde el conjunto hasta los dominios de las aplicaciones dadas, sujeto a cumplir un par de condiciones; pero no hemos afirmado que tal par sea absolutamente único. Demostramos a continuación que el par ordenado de la proposición anterior, es único, sólo, salvo isomorfismo.

Proposición 11.3.2. *Sean $f\colon A\longrightarrow C$ y $g\colon B\longrightarrow C$ dos aplicaciones con el mismo codominio. Si un par ordenado $(E,(p,q))$, en el que E es un conjunto, $p\colon E\longrightarrow A$ y $q\colon E\longrightarrow B$ tiene las propiedades:*

1. *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

conmuta.

2. *Para cada conjunto X y cualesquiera aplicaciones $u\colon X\longrightarrow A$ y $v\colon X\longrightarrow B$ si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay una única aplicación $t : X \longrightarrow E$ *tal que los dos triángulos del diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\
& E \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & B \\
& A &
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Entonces hay un único isomorfismo $t : E \longrightarrow A \times_C B$ *tal que los dos triángulos del diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, bend left, "q"] \arrow[ddr, bend right, "p"'] & & \\
& A \times_C B \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"] & B \\
& A &
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Demostración. $\square$

Proposición 11.3.3. *Si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& & B \arrow[dl, "g"'] \arrow[dd, "v"] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[dd, "u"'] & C \arrow[dd, "w"'] & \\
& & B' \arrow[dl, "g'"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & C' &
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay una única aplicación $u \times_w v : A \times_C B \longrightarrow A' \times_{C'} B'$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& A \times_C B \arrow[rr, "p_1"] \arrow[dl, "p_0"'] \arrow[dd, "u \times_w v"] & & B \arrow[dl, "g"] \arrow[dd, "v"] \\
A \arrow[rr, "f"'] \arrow[dd, "u"'] & & C \arrow[dd, "w"] & \\
& A' \times_{C'} B' \arrow[rr, "p_1'"] \arrow[dl, "p_0'"'] & & B' \arrow[dl, "g'"] \\
A' \arrow[rr, "f'"'] & & C' &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposición 11.3.4. *Si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"] \arrow[ddd, "r"'] & & C \arrow[ddd, "t"] \\
& B \arrow[ur, "g"'] \arrow[d, "s"'] & \\
& E \arrow[dr, "v"] & \\
D \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, "v \circ u"'] & & F
\end{tikzcd}$$

conmuta y el trapecio de la derecha es cartesiano, entonces el de la izquierda lo es precisamente si lo es el rectángulo.

Demostración. □

Ejercicio 11.3.5. Demuéstrese que:

1. Para el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& & B \arrow[dl, "g"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}_B"] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_A"'] & C \arrow[dd, "\mathrm{id}_C"'] & \\
& & B \arrow[dl, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C &
\end{tikzcd}$$

se cumple que

$$\mathrm{id}_A \times_{\mathrm{id}_C} \mathrm{id}_B = \mathrm{id}_{A \times_C B}.$$

2. Si los diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
 & & B \arrow[dl, "g"'] \arrow[dd, "v"] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[dd, "u"'] & C \arrow[dd, "w"] & \\
 & & B' \arrow[dl, "g'"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & C' &
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
 & & B' \arrow[dl, "g'"'] \arrow[dd, "v'"] \\
A' \arrow[r, "f'"] \arrow[dd, "u'"'] & C' \arrow[dd, "w'"] & \\
 & & B'' \arrow[dl, "g''"] \\
A'' \arrow[r, "f''"'] & C'' &
\end{tikzcd}
$$

conmutan, entonces se cumple que

$$(u' \times_{w'} v') \circ (u \times_w v) = (u' \circ u) \times_{w' \circ w} (v' \circ v).$$

Ejercicio 11.3.6. Sean R y S dos relaciones de equivalencia sobre un conjunto A y B otro conjunto. Demuéstrese que:

1. El diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A/R \cap S \arrow[r, "\mathrm{p}_{R\cap S,S}"] \arrow[d, "\mathrm{p}_{R\cap S,R}"'] & A/S \arrow[d, "\mathrm{p}_{S,\mathrm{Eg}(R\cup S)}"] \\
A/R \arrow[r, "\mathrm{p}_{R,\mathrm{Eg}(R\cup S)}"'] & A/\mathrm{Eg}(R \cup S)
\end{tikzcd}
$$

conmuta, pero que no es necesariamente un cuadrado cartesiano.

2. El diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \cap B \arrow[r, "\mathrm{in}_{A\cap B,B}"] \arrow[d, "\mathrm{in}_{A\cap B,A}"'] & B \arrow[d, "\mathrm{in}_{B,A\cup B}"] \\
A \arrow[r, "\mathrm{in}_{A,A\cup B}"'] & A \cup B
\end{tikzcd}
$$

es un cuadrado cartesiano.

Las cuatro proposiciones que siguen establecen que los conceptos de núcleo de una aplicación, intersección de dos subconjuntos de un conjunto, imagen inversa de un subconjunto del codominio de una aplicación y producto cartesiano de dos conjuntos, son todos casos particulares del concepto de producto fibrado, de donde su gran importancia.

Proposición 11.3.7. *Sea $f\colon A \longrightarrow B$ una aplicación. Entonces el producto fibrado de A y A sobre B relativo a f y f es, esencialmente, i.e., salvo isomorfismo, $(\mathrm{Ker}(f), (p_0, p_1))$, siendo p_0, la restricción de pr_0 a $\mathrm{Ker}(f)$ y p_1, la restricción de pr_1 a $\mathrm{Ker}(f)$.*

Demostración. $\square$

Proposición 11.3.8. *Sean A y B dos subconjuntos de X. Entonces el producto fibrado de A y B sobre X relativo a in_A e in_B es, esencialmente, i.e., salvo isomorfismo, $(A \cap B, (\mathrm{in}_{A\cap B,A}, \mathrm{in}_{A\cap B,B}))$.*

Demostración. $\square$

Proposición 11.3.9. *Sea $f\colon A \longrightarrow B$ una aplicación e Y un subconjunto de B. Entonces el producto fibrado de A e Y sobre B relativo a f y in_Y es, esencialmente, i.e., salvo isomorfismo, $(f^{-1}[Y], (\mathrm{in}_{f^{-1}[Y]}, f\big|_{f^{-1}[Y]}^{Y}))$.*

Proposición 11.3.10. *Sean A y B dos conjuntos. Entonces el producto fibrado de A y B sobre 1 relativo a $\omega_A\colon A \longrightarrow 1$ y $\omega_B\colon B \longrightarrow 1$ es $(A \times B, (\mathrm{pr}_A, \mathrm{pr}_B))$.*

Demostración. □

El concepto de producto depende de dos parámetros, el conjunto de índices y la familia de conjuntos indexada por tal conjunto; es por ello que introducimos, a continuación, por una parte, el concepto de conjunto *heterogéneo* y, por otra, para comparar los conjuntos heterogéneos entre sí, la noción de *morfismo proyectivo* entre conjuntos heterogéneos. Además, demostramos que tales morfismos proyectivos tienen asociadas, canónicamente, ciertas aplicaciones entre los productos de las familias de conjuntos, subyacentes a los conjuntos heterogéneos que se comparan mediante los mismos, que cumplen cierta propiedad universal, similar a la que cumplen los productos.

11.4. Conjuntos heterogéneos y morfismos proyectivos.

Definición 11.4.1.

1. Un *conjunto heterogéneo* es un par ordenado (S, A) en el que S es un conjunto y $A = (A_s \mid s \in S)$ una familia de conjuntos indexada por S.
2. Si (S, A) y (T, B) son dos conjuntos heterogéneos, un *morfismo proyectivo* de (S, A) en (T, B) es un triplo ordenado $((S, A), \Phi, (T, B))$, abreviado como Φ y denotado por $\Phi\colon (S, A) \longrightarrow (T, B)$, en el que $\Phi = (\varphi, f)$, con $\varphi\colon T \longrightarrow S$ y $f = (f_t \mid t \in T)$, siendo, para cada $t \in T$, $f_t\colon A_{\varphi(t)} \longrightarrow B_t$, i.e., $(f_t \mid t \in T) \in \prod_{t\in T} \mathrm{Hom}(A_{\varphi(t)}, B_t)$. Además, (T, A_φ) es el conjunto heterogéneo para el que la coordenada t-ésima de A_φ es $A_{\varphi(t)}$, para cada $t \in T$.
3. Si (S, A) es un conjunto heterogéneo, entonces el morfismo proyectivo *identidad* de (S, A) es:
$$\mathrm{id}_{(S,A)} = (\mathrm{id}_S, \mathrm{id}_A),$$
en el que $\mathrm{id}_A = (\mathrm{id}_{A_s} \mid s \in S)$.
4. Si (S, A), (T, B) y (U, C) son tres conjuntos heterogéneos, $\Phi = (\varphi, f)$ un morfismo proyectivo del primero en el segundo y $\Psi = (\psi, g)$ uno del segundo en el tercero, entonces el morfismo proyectivo *composición* de ambos es:
$$\Psi \circ \Phi = (\varphi \circ \psi, g \circ f_\psi),$$
siendo f_ψ la familia indexada por U, cuya coordenada u-ésima es:
$$f_{\psi(u)}\colon A_{\varphi(\psi(u))} \longrightarrow B_{\psi(u)},$$
y, por lo tanto, siendo $g \circ f_\psi$ la familia de aplicaciones, indexada por U, cuya coordenada u-ésima es:
$$A_{\varphi(\psi(u))} \xrightarrow{f_{\psi(u)}} B_{\psi(u)} \xrightarrow{g_u} C_u$$

Proposición 11.4.2. *Sean (S, A), (T, B), (U, C) y (V, D) cuatro conjuntos heterogéneos, Φ un morfismo proyectivo de (S, A) en (T, B), Ψ uno de (T, B) en (U, C) y Ξ uno de (U, C) en (V, D). Entonces:*

1. (Asociatividad). *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(S,A) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Psi\circ\Phi"'] \arrow[drr, bend left=60, "(\Xi\circ\Psi)\circ\Phi"] \arrow[drr, bend right=60, "\Xi\circ(\Psi\circ\Phi)"'] & (T,B) \arrow[d, "\Psi"'] \arrow[dr, "\Xi\circ\Psi"] & \\
 & (U,C) \arrow[r, "\Xi"'] & (V,D)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

2. (Neutros). *Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
(S,A) \arrow[r, "\mathrm{id}_{(S,A)}"] \arrow[dr, "\Phi"'] & (S,A) \arrow[d, "\Phi"] \\
 & (T,B)
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
(S,A) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Phi"'] & (T,B) \arrow[d, "\mathrm{id}_{(T,B)}"] \\
 & (T,B)
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Demostración. □

Definición 11.4.3. Si (S,A) es un conjunto heterogéneo, entonces el *límite proyectivo* de (S,A) es el producto de la familia $(A_s)_{s\in S}$, i.e.,

$$\varprojlim(S,A) = \textstyle\prod_{s\in S} A_s.$$

Proposición 11.4.4. *Si* $\Phi\colon (S,A) \longrightarrow (T,B)$ *es un morfismo proyectivo, entonces hay una única aplicación*

$$\varprojlim\Phi\colon \varprojlim(S,A) \longrightarrow \varprojlim(T,B),$$

denominada el límite proyectivo *de* Φ *tal que, para cada* $t\in T$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim(S,A) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\varphi(t)}"] \arrow[d, "\varprojlim\Phi"'] & A_{\varphi(t)} \arrow[d, "f_t"] \\
\varprojlim(T,B) \arrow[r, "\mathrm{pr}_t"'] & B_t
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim(S,A) \arrow[d, "\mathrm{pr}_\varphi"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{\varphi(t)}"] \arrow[dd, bend right=70, "\varprojlim\Phi"'] & \\
\varprojlim(T,A_\varphi) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\varphi(t)}"'] \arrow[d, "\prod f"'] & A_{\varphi(t)} \arrow[d, "f_t"] \\
\varprojlim(T,B) \arrow[r, "\mathrm{pr}_t"'] & B_t
\end{tikzcd}$$

conmuta, siendo pr_φ *la única aplicación de* $\varprojlim(S,A)$ *en* $\varprojlim(T,A_\varphi)$ *tal que, para cada* $t\in T$, $\mathrm{pr}_{\varphi(t)} = \mathrm{pr}_{\varphi(t)} \circ \mathrm{pr}_\varphi$. *Así que*

$$\varprojlim \Phi = \prod f \circ \mathrm{pr}_\varphi.$$

Proposición 11.4.5. *Sean* $\Phi\colon (S,A) \longrightarrow (T,B)$ *y* $\Psi\colon (T,B) \longrightarrow (U,C)$ *dos morfismos proyectivos. Entonces:*

1. $\varprojlim \mathrm{id}_{(S,A)} = \mathrm{id}_{\varprojlim(S,A)}$.
2. $\varprojlim(\Psi\circ\Phi) = \varprojlim \Psi \circ \varprojlim \Phi$.

Además, si $\Phi = (\varphi, f)$ *y* $\Psi = (\psi, g)$, *entonces el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim(S,A) \arrow[rr, "\varprojlim \Phi"] \arrow[rrrr, bend left, "\varprojlim \Psi\circ\Phi"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_\varphi"'] \arrow[ddrr, bend right, "\mathrm{pr}_{\varphi\circ\psi}"'] & & \varprojlim(T,B) \arrow[rr, "\varprojlim \Psi"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_\psi"] & & \varprojlim(U,C) \\
& \varprojlim(T,A_\varphi) \arrow[ur, "\prod f"'] \arrow[rr, "\varprojlim(\psi, f_\psi)"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_\psi"'] & & \varprojlim(U,B_\psi) \arrow[ur, "\prod g"'] & \\
& & \varprojlim(U,A_{\varphi\circ\psi}) \arrow[ur, "\prod f_\psi"'] \arrow[uurr, bend right, "\prod(g\circ f_\psi)"'] & &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

A continuación, generalizamos los conceptos de conjunto heterogéneo y de morfismo proyectivo entre conjuntos heterogéneos, hasta los de sistema proyectivo de conjuntos y morfismo proyectivo entre sistemas proyectivos de conjuntos, nociones debidas, en casos particulares, a Čech y Herbrand y, con toda generalidad, a Steenrod, y que son de gran importancia para la topología algebraica y el álgebra homológica. Para ello, definimos las nociones de *conjunto preordenado*, y de *aplicación isótona* entre los mismos, así como las de *conjunto preordenado dirigido superiormente* y *subconjunto cofinal* de un conjunto preordenado, de las que tendremos necesidad para poder demostrar ciertas proposiciones relativas a los límites proyectivos de los sistemas proyectivos de conjuntos.

11.5. Sistemas proyectivos de conjuntos.

Definición 11.5.1. Sea S un conjunto. Un *preorden* sobre S es una relación binaria $\preceq$ en S tal que:

1. $\preceq$ es reflexiva, i.e., $\Delta_S \subseteq \preceq$.
2. $\preceq$ es transitiva, i.e., $\preceq \circ \preceq \subseteq \preceq$.

Denotamos al conjunto de los preórdenes sobre S por $\mathrm{Pord}(S)$.

Un *conjunto preordenado* es un par ordenado $(S,\preceq)$, abreviado como $\mathbf{S}$, en el que $\preceq\in \mathrm{Pord}(S)$. Un *conjunto preordenado dirigido superiormente*, abreviado como *conjunto preordenado d.s.*, es un conjunto preordenado $\mathbf{S}$ tal que para cada $s, s' \in S$, hay un $s'' \in S$ tal que $s \preceq s''$ y $s' \preceq s''$. Un *subconjunto cofinal* de un conjunto preordenado $\mathbf{S}$ es una parte S' de S tal que, para cada $s\in S$, existe un $s'\in S'$ tal que $s \preceq s'$.

Proposición 11.5.2. *Sea* S *un conjunto. Entonces:*

1. Δ_S, $\nabla_S \in \mathrm{Pord}(S)$.
2. *Si* $\preceq \in \mathrm{Pord}(S)$, *entonces* $\Delta_S \subseteq \preceq \subseteq \nabla_S$.
3. $\mathrm{Eqv}(S) \subseteq \mathrm{Pord}(S)$.
4. *Si* $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{Pord}(S)$ *y* $\mathcal{P} \neq \varnothing$, *entonces* $\bigcap \mathcal{P} \in \mathrm{Pord}(S)$.
5. *Si* $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{Pord}(S)$, $\mathcal{P} \neq \varnothing$ *y si, para cualesquiera* $P, Q \in \mathcal{P}$, *hay un* $R \in \mathcal{P}$ *tal que* $P \cup Q \subseteq R$, *entonces* $\bigcup \mathcal{P} \in \mathrm{Pord}(S)$.
6. *Si* $\preceq \in \mathrm{Pord}(S)$, *entonces* $\preceq^{-1} \in \mathrm{Pord}(S)$ *y al par ordenado* $(S, \preceq^{-1})$ *lo denominamos el conjunto preordenado* dual *de* $(S, \preceq)$.
7. *Si* $\preceq \in \mathrm{Pord}(S)$, *entonces* $\preceq \cap \preceq^{-1} \in \mathrm{Eqv}(S)$.

Demostración. □

Corolario 11.5.3. *Sea* S *un conjunto y* P *una relación en* S. *Entonces*

$$\bigcap \{\, Q \in \mathrm{Pord}(S) \mid P \subseteq Q \,\}$$

es el mínimo preorden sobre S *que contiene a* P. *Denominamos a tal preorden sobre* S *el* preorden generado *por* P *y lo denotamos por* $\mathrm{Pog}(P)$.

Demostración. □

Definición 11.5.4. Sean $\mathbf{S}$ y $\mathbf{T}$ dos conjuntos preordenados. Una *aplicación isótona* de $\mathbf{S}$ en $\mathbf{T}$ es un triplo ordenado $(\mathbf{S}, \varphi, \mathbf{T})$, abreviado como φ y denotado por $\varphi\colon \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{T}$, en el que φ es una aplicación de S en T tal que

$$\forall s, s' \in S (s \preceq s' \rightarrow \varphi(s) \preceq \varphi(s')).$$

Proposición 11.5.5. *Sean* $\varphi\colon \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{T}$, $\psi\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{U}$ *y* $\xi\colon \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{V}$ *tres aplicaciones isótonas. Entonces:*

1. *Siendo* $\mathrm{id}_{\mathbf{S}} = (\mathbf{S}, \mathrm{id}_S, \mathbf{S})$, *se cumple que* $\mathrm{id}_{\mathbf{S}}\colon \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ *es un endomorfismo de* $\mathbf{S}$.
2. *Siendo* $\psi \circ \varphi = (\mathbf{S}, \psi \circ \varphi, \mathbf{U})$, *se cumple que* $\psi \circ \varphi\colon \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{U}$ *es una aplicación isótona de* $\mathbf{S}$ *en* $\mathbf{U}$.
3. (Asociatividad). *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{S} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi \circ \varphi"'] \arrow[drr, bend left=60, "(\xi \circ \psi) \circ \varphi"] \arrow[drr, bend right=60, "\xi \circ (\psi \circ \varphi)"'] & \mathbf{T} \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr, "\xi \circ \psi"] & \\
 & \mathbf{U} \arrow[r, "\xi"'] & \mathbf{V}
\end{tikzcd}$$

conmuta.
4. (Neutros). *Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{S} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbf{S}}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathbf{S} \arrow[d, "\varphi"] \\
 & \mathbf{T}
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{S} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathbf{T} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{T}}"] \\
 & \mathbf{T}
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Definición 11.5.6. Un *sistema proyectivo de conjuntos* es un par ordenado $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ en el que $\mathbf{S}$ es un conjunto preordenado y $\mathcal{A} = ((A_s \mid s \in S), (a_{s',s} \mid (s, s') \in \preceq))$ tal que:

1. Para cada $(s, s') \in \preceq$, $a_{s',s} \colon A_{s'} \longrightarrow A_s$.
2. Para cada $s \in S$, $a_{s,s} = \mathrm{id}_{A_s}$.
3. Para cada $s, s', s'' \in S$, si $(s, s') \in \preceq$ y $(s', s'') \in \preceq$, entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A_{s''} \arrow[r, "a_{s'',s}"] \arrow[dr, "a_{s'',s}"'] & A_{s'} \arrow[d, "a_{s',s}"] \\
 & A_s.
\end{tikzcd}$$

A las aplicaciones $a_{s',s} \colon A_{s'} \longrightarrow A_s$ las denominamos las *aplicaciones de transición* del sistema proyectivo de conjuntos $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$.

Ejemplo 11.5.7. Sean S un conjunto y $(A_s \mid s \in S)$ una familia de conjuntos indexada por S. Entonces $(\mathbf{Sub}_f(S), ((\prod(A_s \mid s \in F) \mid F \in \mathrm{Sub}_f(S)), (\mathrm{pr}_{G,F} \mid F \subseteq G)))$ es un sistema proyectivo de conjuntos.

Ejemplo 11.5.8. Sean S un conjunto no vacío, A un conjunto y $(X_s \mid s \in S)$ una familia de subconjuntos de A tal que, para cualesquiera $s, s' \in S$ exista un $s'' \in S$ de modo que $X_{s''} \subseteq X_s \cap X_{s'}$. Entonces, considerando sobre S el preorden $\preceq$ definido como:

$$s \preceq s' \leftrightarrow X_{s'} \subseteq X_s,$$

tenemos que $(\mathbf{S}, ((X_s \mid s \in S), (\mathrm{in}_{X_{s'}, X_s} \mid s \preceq s')))$ es un sistema proyectivo de conjuntos.

11.6. Límites proyectivos de los sistemas proyectivos.

Proposición 11.6.1. *Sea* $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ *un sistema proyectivo de conjuntos. Entonces hay un par ordenado* $(\varprojlim(\mathbf{S}, \mathcal{A}), (a_s \mid s \in S))$*, el* límite proyectivo *del sistema proyectivo* $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$*, en el que* $\varprojlim(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ *es un conjunto y, para cada* $s \in S$*,* a_s*, la* proyección canónica *s-ésima, es una aplicación de* $\varprojlim(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ *en* A_s*, tal que:*

1. *Para cada* $(s, s') \in \preceq$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & \varprojlim(\mathbf{S}, \mathcal{A}) \arrow[dl, "a_{s'}"'] \arrow[dr, "a_s"] & \\
A_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & A_s
\end{tikzcd}$$

conmuta.

2. (Propiedad universal.) *Para cada par ordenado* $(L, (l_s \mid s \in S))$ *en el que, para cada* $s \in S$*,* $l_s \colon L \longrightarrow A_s$*, si, para cada* $(s, s') \in \preceq$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "l_{s'}"'] \arrow[dr, "l_s"] & \\
A_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & A_s
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay una única aplicación $u\colon L \longrightarrow \varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A})$ *tal que, para cada* $s \in S$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "l_s"] & \\
\varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) \arrow[r, "a_s"'] & A_s
\end{tikzcd}$$

conmuta.

La situación descrita por las condiciones anteriores la expresamos diagramáticamente como:

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[d, "u"] \arrow[ddl, bend right, "l_{s'}"'] \arrow[ddr, bend left, "l_s"] & \\
& \varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) \arrow[dl, "a_{s'}"'] \arrow[dr, "a_s"] & \\
A_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & A_s
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $\varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A})$ el subconjunto de $\prod(A_s \mid s \in S)$ definido como:

$$\varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) = \{\, x \in \textstyle\prod_{s\in S} A_s \mid \forall (s,s') \in \preceq \ (\, a_{s',s}(\mathrm{pr}_{s'}(x)) = \mathrm{pr}_s(x)\,)\,\}.$$

De manera que los miembros de $\varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A})$ son precisamente aquellas funciones de elección x, para $(A_s \mid s \in S)$, tales que, para cada $(s,s') \in \preceq$, la coordenada s-ésima de x es la transformada mediante $a_{s',s}$ de la coordenada s'-ésima de x. Además, para cada $s \in S$, sea a_s la restricción de pr_s al subconjunto $\varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A})$ de $\prod_{s\in S} A_s$. Entonces el par ordenado $(\varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A}), (a_s \mid s \in S))$ cumple las condiciones de la proposición. En efecto, por una parte, es evidente, en virtud de las definiciones, que, para cada $(s,s') \in \preceq$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& \varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) \arrow[dl, "a_{s'}"'] \arrow[dr, "a_s"] & \\
A_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & A_s
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por otra parte, si un par ordenado $(L, (l_s \mid s \in S))$, arbitrario, pero fijo, en el que, para cada $s \in S$, $l_s\colon L \longrightarrow A_s$, es tal que, para cada $(s,s') \in \preceq$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "l_{s'}"'] \arrow[dr, "l_s"] & \\
A_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & A_s
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces, en virtud de la conmutatividad del diagrama anterior, se cumple que $\mathrm{Im}(\langle l_s \mid s \in S\rangle) \subseteq \varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A})$, luego, por la propiedad universal del subconjunto, hay una única aplicación $u\colon L \longrightarrow \varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A})$ tal que el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "\langle l_s \mid s \in S\rangle"] & \\
\varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A})}"'] & \prod_{s\in S} A_s
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Ahora bien, puesto que, para cada $s \in S$, en el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "\langle l_s \mid s \in S\rangle"] \arrow[drr, bend left, "l_s"] & & \\
\varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A})}"'] \arrow[rr, bend right, "a_s"'] & \prod_{s\in S} A_s \arrow[r, "\mathrm{pr}_s"'] & A_s
\end{tikzcd}
$$

el triángulo de la izquierda, el de la derecha y el inferior, conmutan, también, para cada $s \in S$, conmuta el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "l_s"] & \\
\varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) \arrow[r, "a_s"'] & A_s.
\end{tikzcd}
$$

Por consiguiente hay al menos una aplicación u de L en $\varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A})$ tal que, para cada $s \in S$, $a_s \circ u = l_s$. Dejamos, como ejercicio, la demostración de que hay a lo sumo una aplicación u de L en $\varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A})$ tal que, para cada $s \in S$, $a_s \circ u = l_s$.

□

En la proposición anterior se ha demostrado, para un sistema proyectivo de conjuntos, la existencia de al menos un par ordenado, formado por un conjunto y una familia de aplicaciones desde el conjunto hasta cada uno de los conjuntos de la familia de conjuntos subyacente a la segunda coordenada del sistema proyectivo, sujeto a cumplir, por una parte, una condición de compatibilidad respecto de las aplicaciones subyacentes a la segunda coordenada del sistema proyectivo, y, por otra, una cierta propiedad universal; pero, ni hemos afirmado que tal par sea absolutamente único, ni que el límite proyectivo de un sistema proyectivo de conjuntos sea no vacío, ni que las proyecciones canónicas sean necesariamente inyectivas o biyectivas.

Demostraremos en lo que sigue, entre otras cosas, que:

- El par ordenado de la proposición anterior, es único salvo isomorfismo.
- Una condición suficiente para que una proyección canónica sea inyectiva, resp., biyectiva, es que el conjunto preordenado, subyacente al sistema proyectivo, esté dirigido superiormente y que las aplicaciones de transición sean inyectivas, resp., biyectivas.

Proposición 11.6.2. *Sea* $(\mathbf{S},\mathcal{A})$ *un sistema proyectivo de conjuntos. Entonces:*

1. *Para cada conjunto X y cualesquiera aplicaciones $f, g\colon X \longrightarrow \varprojlim(\mathbf{S}, \mathcal{A})$, si, para cada $s \in S$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[rr, bend left=40, "a_s \circ f"] \arrow[rr, bend right=40, "a_s \circ g"'] & \varprojlim(\mathbf{S}, \mathcal{A}) \arrow[r, "a_s"] & A_s \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $f = g$, i.e., la familia de aplicaciones $(a_s \mid s \in S)$ es colectivamente monomórfica.

2. *Para cada par ordenado $(L, (l_s \mid s \in S))$, en el que L sea un conjunto y, para cada $s \in S$, $l_s\colon L \longrightarrow A_s$, si para cada $(s, s') \in \preceq$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "l_{s'}"'] \arrow[dr, "l_s"] & \\ A_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & A_s \end{tikzcd}$$

conmuta, y para cada epimorfismo $t\colon \varprojlim(\mathbf{S}, \mathcal{A}) \longrightarrow L$, si, para cada $s \in S$, el digrama:

$$\begin{tikzcd} \varprojlim(\mathbf{S}, \mathcal{A}) \arrow[rr, "a_s"] \arrow[dr, two heads, "t"'] & & A_s \\ & L \arrow[ur, "l_s"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces t es un isomorfismo, i.e., la familia de aplicaciones $(a_s \mid s \in S)$ es extremal.

Demostración. □

Corolario 11.6.3. *Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ un sistema proyectivo de conjuntos. Si un par ordenado $(P, (p_s \mid s \in S))$, en el que P es un conjunto y, para cada $s \in S$, $p_s\colon P \longrightarrow A_s$ cumple que:*

1. *Para cada $(s, s') \in \preceq$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "p_{s'}"'] \arrow[dr, "p_s"] & \\ A_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & A_s \end{tikzcd}$$

conmuta.

2. *Para cada par ordenado* $(L,(l_s \mid s \in S))$, *en el que* L *es un conjunto y, para cada* $s \in S$, $l_s\colon L \longrightarrow A_s$, *si, para cada* $(s,s') \in \preceq$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "l_{s'}"'] \arrow[dr, "l_s"] & \\ A_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & A_s \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay una única aplicación $u\colon L \longrightarrow P$ *tal que, para cada* $s \in S$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "l_s"] & \\ P \arrow[r, "p_s"'] & A_s \end{tikzcd}$$

conmuta.

Entonces hay un único isomorfismo t *de* P *en* $\varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A})$ *tal que, para cada* $s \in S$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "p_s"] & \\ \varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) \arrow[r, "a_s"'] & A_s \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Ejercicio 11.6.4. Demuéstrese que el límite proyectivo del sistema proyectivo del ejemplo 11.5.7 es isomorfo a $\prod_{s\in S} A_s$.

Ejercicio 11.6.5. Demuéstrese que el límite proyectivo del sistema proyectivo del ejemplo 11.5.8 es isomorfo a $\bigcap(X_s \mid s \in S)$.

Proposición 11.6.6. *Sea* $(\mathbf{S},\mathcal{A})$ *un sistema proyectivo de conjuntos y* $(L,(l_s \mid s \in S))$ *tal que, para cada* $s \in S$, $l_s\colon L \longrightarrow A_s$ *y para cada* $(s,s') \in \preceq$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "l_{s'}"'] \arrow[dr, "l_s"] & \\ A_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & A_s \end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces, una condición necesaria y suficiente para que la única aplicación $u\colon L \longrightarrow \varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A})$ *sea inyectiva es que la familia de aplicaciones* $(l_s \mid s \in S)$ separe puntos *de* L, *i.e., que sea tal que, para cada* $x,y \in L$, *si* $x \neq y$, *entonces exista un* $s \in S$ *tal que* $l_s(x) \neq l_s(y)$.

Demostración. La condición es necesaria. En efecto, si $u\colon L \longrightarrow \varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A})$ es inyectiva y $x,y \in L$ son tales que $x \neq y$, entonces $u(x) \neq u(y)$, pero $u(x),u(y) \in \varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A})$ y, por ser este conjunto subconjunto de $\prod_{s\in S} A_s$, $u(x),u(y)$ son funciones de elección distintas, luego hay un $s \in S$ tal que $u(x)_s \neq u(y)_s$. Sea $s \in S$ uno de ellos, arbitrario, pero fijo. Ahora bien, por la definición de u, $u(x) = (l_s(x) \mid s \in S)$ y $u(y) = (l_s(y) \mid s \in S)$, luego $l_s(x) \neq l_s(y)$.

La condición es suficiente. En efecto, si la familia de aplicaciones $(l_s \mid s \in S)$ separa puntos de L y $x, y \in L$ son tales que $x \neq y$, entonces hay un $s \in S$ tal que $l_s(x) \neq l_s(y)$. Ahora bien, $u(x) = (l_s(x) \mid s \in S)$ y $u(y) = (l_s(y) \mid s \in S)$, luego $u(x) \neq u(y)$.

□

Proposición 11.6.7. *Sea* $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ *un sistema proyectivo de conjuntos. Si* $\mathbf{S}$ *está dirigido superiormente y, para cada* $(s, s') \in \preceq$, $a_{s',s} \colon A_{s'} \longrightarrow A_s$, *es inyectiva, resp., biyectiva, entonces, para cada* $s \in S$, $a_s \colon \varprojlim(\mathbf{S}, \mathcal{A}) \longrightarrow A_s$, *es inyectiva, resp., biyectiva.*

Demostración. □

11.7. Morfismos proyectivos entre sistemas proyectivos.

Definición 11.7.1. Si $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ y $(\mathbf{T}, \mathcal{B})$ son dos sistemas proyectivos de conjuntos, un *morfismo proyectivo* de $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ en $(\mathbf{T}, \mathcal{B})$ es un triplo ordenado $((\mathbf{S}, \mathcal{A}), \Phi, (\mathbf{T}, \mathcal{B}))$, abreviado como Φ y denotado por $\Phi \colon (\mathbf{S}, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbf{T}, \mathcal{B})$, en el que $\Phi = (\varphi, f)$, con $\varphi \colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{S}$ y $f = (f_t \mid t \in T)$, siendo, para cada $t \in T$, $f_t \colon A_{\varphi(t)} \longrightarrow B_t$, i.e., $(f_t \mid t \in T) \in \prod_{t \in T} \mathrm{Hom}(A_{\varphi(t)}, B_t)$, tal que, para cada $(t, t') \in \preceq$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A_{\varphi(t')} \arrow[r, "f_{t'}"] \arrow[d, "a_{\varphi(t'),\varphi(t)}"'] & B_{t'} \arrow[d, "b_{t',t}"] \\ A_{\varphi(t)} \arrow[r, "f_t"'] & B_t \end{tikzcd}$$

conmuta. Además, $(\mathbf{T}, \mathcal{A}_\varphi)$ es el sistema proyectivo de conjuntos para el que la coordenada t-ésima de la primera componente de $\mathcal{A}_\varphi$ es $A_{\varphi(t)}$, para cada $t \in T$, y la coordenada (t, t')-ésima de la segunda componente de $\mathcal{A}_\varphi$ es $a_{\varphi(t'),\varphi(t)}$, para cada $(t, t') \in \preceq$.

Proposición 11.7.2.

1. *Si* $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ *es un sistema proyectivo de conjuntos, entonces*
$$\mathrm{id}_{(\mathbf{S}, \mathcal{A})} = (\mathrm{id}_{\mathbf{S}}, \mathrm{id}_A),$$
es un endomorfismo proyectivo de $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$*, el morfismo proyectivo* identidad *de* $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$.
2. *Si* $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$, $(\mathbf{T}, \mathcal{B})$ *y* $(\mathbf{U}, \mathcal{C})$ *son tres sistemas proyectivos de conjuntos,* $\Phi = (\varphi, f)$ *un morfismo proyectivo del primero en el segundo y* $\Psi = (\psi, g)$ *uno del segundo en el tercero, entonces*
$$\Psi \circ \Phi = (\varphi \circ \psi, g \circ f_\psi),$$
siendo f_ψ *la familia indexada por* U*, cuya coordenada* u*-ésima es:*
$$f_{\psi(u)} \colon A_{\varphi(\psi(u))} \longrightarrow B_{\psi(u)},$$
y, por lo tanto, siendo $g \circ f_\psi$ *la familia de aplicaciones, indexada por* U*, cuya coordenada* u*-ésima es:*
$$A_{\varphi(\psi(u))} \xrightarrow{f_{\psi(u)}} B_{\psi(u)} \xrightarrow{g_u} C_u$$
es un morfismo proyectivo de $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ *en* $(\mathbf{T}, \mathcal{B})$*, el morfismo proyectivo* composición *de ambos.*

Demostración. Puesto que la primera parte es obvia, nos limitamos a demostrar la segunda.

Por ser $\Phi = (\varphi, f)$ y $\Psi = (\psi, g)$ morfismos proyectivos, los diagramas:

$$\begin{tikzcd} A_{\varphi(t')} \arrow[r, "f_{t'}"] \arrow[d, "a_{\varphi(t'),\varphi(t)}"'] & B_{t'} \arrow[d, "b_{t',t}"] \\ A_{\varphi(t)} \arrow[r, "f_t"'] & B_t \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} B_{\psi(u')} \arrow[r, "g_{u'}"] \arrow[d, "b_{\psi(u'),\psi(u)}"'] & C_{u'} \arrow[d, "c_{u',u}"] \\ B_{\psi(u)} \arrow[r, "g_u"'] & C_u \end{tikzcd}$$

conmutan. Por consiguiente el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A_{\varphi(\psi(u'))} \arrow[r, "g_{u'} \circ f_{\psi(u')}"] \arrow[d, "a_{\varphi(\psi(u')),\varphi(\psi(u))}"'] & C_{u'} \arrow[d, "c_{u',u}"] \\ A_{\varphi(\psi(u))} \arrow[r, "g_u \circ f_{\psi(u)}"'] & C_u \end{tikzcd}$$

también conmuta. □

Proposición 11.7.3. *Sean* $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$*,* $(\mathbf{T}, \mathcal{B})$*,* $(\mathbf{U}, \mathcal{C})$ *y* $(\mathbf{V}, \mathcal{D})$ *cuatro sistemas proyectivos de conjuntos,* Φ *un morfismo proyectivo de* $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ *en* $(\mathbf{T}, \mathcal{B})$*,* Ψ *uno de* $(\mathbf{T}, \mathcal{B})$ *en* $(\mathbf{U}, \mathcal{C})$ *y* Ξ *uno de* $(\mathbf{U}, \mathcal{C})$ *en* $(\mathbf{V}, \mathcal{D})$*. Entonces:*

1. (Asociatividad)*. El diagrama:*

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{S}, \mathcal{A}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Psi \circ \Phi"'] \arrow[drr, bend left=60, "(\Xi \circ \Psi) \circ \Phi"] \arrow[drr, bend right=60, "\Xi \circ (\Psi \circ \Phi)"'] & (\mathbf{T}, \mathcal{B}) \arrow[d, "\Psi"'] \arrow[dr, "\Xi \circ \Psi"] & \\ & (\mathbf{U}, \mathcal{C}) \arrow[r, "\Xi"'] & (\mathbf{V}, \mathcal{D}) \end{tikzcd}$$

conmuta.

2. (Neutros)*. Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{S}, \mathcal{A}) \arrow[r, "\mathrm{id}_{(\mathbf{S},\mathcal{A})}"] \arrow[dr, "\Phi"'] & (\mathbf{S}, \mathcal{A}) \arrow[d, "\Phi"] \\ & (\mathbf{T}, \mathcal{B}) \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} (\mathbf{S}, \mathcal{A}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Phi"'] & (\mathbf{T}, \mathcal{B}) \arrow[d, "\mathrm{id}_{(\mathbf{T},\mathcal{B})}"] \\ & (\mathbf{T}, \mathcal{B}) \end{tikzcd}$$

conmutan.

Demostración. □

11.8. Límites proyectivos de los morfismos proyectivos.

Proposición 11.8.1. *Si* $\Phi\colon (\mathbf{S},\mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbf{T},\mathcal{B})$ *es un morfismo proyectivo, entonces hay una única aplicación*

$$\varprojlim \Phi\colon \varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) \longrightarrow \varprojlim(\mathbf{T},\mathcal{B}),$$

denominada el límite proyectivo *de* Φ *tal que, para cada* $t \in T$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) \arrow[r, "a_{\varphi(t)}"] \arrow[d, "\varprojlim \Phi"'] & A_{\varphi(t)} \arrow[d, "f_t"] \\
\varprojlim(\mathbf{T},\mathcal{B}) \arrow[r, "b_t"'] & B_t
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) \arrow[d, "\mathrm{p}_\varphi"'] \arrow[dr, "a_{\varphi(t)}"] \arrow[dd, bend right=60, "\varprojlim \Phi"'] & \\
\varprojlim(\mathbf{T},\mathcal{A}_\varphi) \arrow[r, "a_{\varphi(t)}"'] \arrow[d, "\prod f"'] & A_{\varphi(t)} \arrow[d, "f_t"] \\
\varprojlim(\mathbf{T},\mathcal{B}) \arrow[r, "b_t"'] & B_t
\end{tikzcd}$$

conmuta, siendo p_φ *la única aplicación de* $\varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A})$ *en* $\varprojlim(\mathbf{T},\mathcal{A}_\varphi)$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A})}"] \arrow[d, "\mathrm{p}_\varphi"'] & \prod(A_s \mid s \in S) \arrow[d, "\mathrm{pr}_\varphi"] \\
\varprojlim(\mathbf{T},\mathcal{A}_\varphi) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\varprojlim(\mathbf{T},\mathcal{A}_\varphi)}"'] & \prod(A_{\varphi(t)} \mid t \in T)
\end{tikzcd}$$

conmuta, y, denotándola por el mismo símbolo, $\prod f$ *la única aplicación de* $\varprojlim(\mathbf{T},\mathcal{A}_\varphi)$ *en* $\varprojlim(\mathbf{T},\mathcal{B})$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim(\mathbf{T},\mathcal{A}_\varphi) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\varprojlim(\mathbf{T},\mathcal{A}_\varphi)}"] \arrow[d, "\prod f"'] & \prod(A_{\varphi(t)} \mid t \in T) \arrow[d, "\prod f"] \\
\varprojlim(\mathbf{T},\mathcal{B}) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\varprojlim(\mathbf{T},\mathcal{B})}"'] & \prod(B_t \mid t \in T)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Así que

$$\varprojlim \Phi = \prod f \circ \mathrm{p}_\varphi.$$

Demostración. □

Proposición 11.8.2. *Sean* $\Phi\colon (\mathbf{S},\mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbf{T},\mathcal{B})$ *y* $\Psi\colon (\mathbf{T},\mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbf{U},\mathcal{C})$ *dos morfismos proyectivos. Entonces:*

1. $\varprojlim \mathrm{id}_{(\mathbf{S},\mathcal{A})} = \mathrm{id}_{\varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A})}$.
2. $\varprojlim(\Psi \circ \Phi) = \varprojlim \Psi \circ \varprojlim \Phi$.

Además, si $\Phi = (\varphi, f)$ *y* $\Psi = (\psi, g)$*, entonces el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) \arrow[rrr, "\varprojlim \Phi"] \arrow[rrrrrr, bend left, "\varprojlim \Psi \circ \Phi"] \arrow[dr, "\mathrm{p}_{\varphi}"'] \arrow[ddrrr, bend right, "\mathrm{p}_{\varphi\circ\psi}"'] & & & \varprojlim(\mathbf{T},\mathcal{B}) \arrow[rrr, "\varprojlim \Psi"] \arrow[drr, "\mathrm{p}_{\psi}"] & & & \varprojlim(\mathbf{U},\mathcal{C}) \\
& \varprojlim(\mathbf{T},\mathcal{A}_{\varphi}) \arrow[urr, "\prod f"'] \arrow[rrrr, "\varprojlim(\psi, f_{\psi})"] \arrow[drr, "\mathrm{p}_{\psi}"] & & & & \varprojlim(\mathbf{U},\mathcal{B}_{\psi}) \arrow[ur, "\prod g"'] & \\
& & & \varprojlim(\mathbf{U},\mathcal{A}_{\varphi\circ\psi}) \arrow[urr, "\prod f_{\psi}"'] \arrow[uurrr, bend right, "\prod(g \circ f_{\psi})"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Demostración. □

Proposición 11.8.3. *Sea* $\Phi\colon (\mathbf{S},\mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbf{T},\mathcal{B})$ *un morfismo proyectivo. Si* $\mathbf{S}$ *y* $\mathbf{T}$ *están dirigidos superiormente y hay un subconjunto* T' *de* T *que es cofinal en* $\mathbf{T}$, $\varphi[T']$ *es cofinal en* $\mathbf{S}$ *y, para cada* $t' \in T'$, $f_{t'}\colon A_{\varphi(t')} \longrightarrow B_{t'}$ *es biyectiva, entonces* $\varprojlim \Phi$ *es biyectiva.*

Demostración. □

Antes de enunciar un corolario de la proposición anterior, convenimos que si $(\mathbf{S},\mathcal{A})$ es un sistema proyectivo de conjuntos y S' un subconjunto de S, y siendo $\mathbf{S}'$ el par ordenado $(S', \preceq \cap (S' \times S'))$, que es, a su vez, un conjunto preordenado, entonces $(\mathbf{S},\mathcal{A}){\restriction}S'$, la *restricción de* $(\mathbf{S},\mathcal{A})$ *a* $\mathbf{S}'$, denota el sistema proyectivo de conjuntos cuya primera coordenada es $(S', \preceq \cap (S' \times S'))$ y cuya segunda coordenada tiene como primera componente la restricción de $(A_s \mid s \in S)$ a S' y como segunda componente la restricción de $(a_{s',s} \mid (s,s') \in \preceq)$ a $\preceq \cap (S' \times S')$.

Corolario 11.8.4. *Si* $(\mathbf{S},\mathcal{A})$ *es un sistema proyectivo de conjuntos tal que* $\mathbf{S}$ *está dirigido superiormente y* S' *es un subconjunto cofinal de* $\mathbf{S}$*, entonces para el morfismo proyectivo canónico* $\Phi = (\mathrm{in}_{\mathbf{S}'}, (\mathrm{id}_{A_{s'}} \mid s' \in S'))$ *de* $(\mathbf{S},\mathcal{A})$ *en* $(\mathbf{S},\mathcal{A}){\restriction}S'$ *se cumple que* $\varprojlim \Phi$ *es una aplicación biyectiva.*

Demostración. □

Corolario 11.8.5. *Si* $(\mathbf{S},\mathcal{A})$ *es un sistema proyectivo de conjuntos tal que* $\mathbf{S}$ *está dirigido superiormente y* S' *es un subconjunto cofinal de* $\mathbf{S}$*, entonces una condición necesaria y suficiente para que dos miembros de* $\varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A})$ *coincidan es que coincidan sus restricciones a* S'.

Demostración. □

11.9. Algunos límites y colímites de familias de sistemas proyectivos. Del mismo modo que para el universo de conjuntos y aplicaciones, demostramos la existencia de productos y coproductos de familias de conjuntos así como la de coigualadores de pares de aplicaciones con el mismo dominio y codominio, ahora, para el universo de discurso formado por los sistemas proyectivos de conjuntos y los morfismos entre ellos, demostramos la existencia de productos y coproductos de familias de sistemas proyectivos de conjuntos, así como la de coigualadores de pares de morfismos con el mismo dominio y codominio.

Proposición 11.9.1. *Sea* $((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I)$ *una familia de sistemas proyectivos de conjuntos. Entonces hay un par ordenado* $\big(\prod((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I), (\mathrm{pr}^i \mid i \in I)\big)$*, también denotado por* $\big(\prod_{i\in I}(\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i), (\mathrm{pr}^i \mid i \in I)\big)$*, en el que* $\prod((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I)$*, el* producto *de* $((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I)$*, es un sistema proyectivo de conjunto y, para cada* $i \in I$*,* pr^i*, la* proyección canónica i-ésima *del producto, es un morfismo proyectivo de* $\prod((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I)$ *en* $(\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i)$*, que tiene la siguiente* propiedad universal*:*

Para cada par ordenado $((\mathbf{T}, \mathcal{B}), (\Psi^i \mid i \in I))$*, en el que* $(\mathbf{T}, \mathcal{B})$ *es un sistema proyectivo de conjuntos y, para cada* $i \in I$*,* $\Psi^i \colon (\mathbf{T}, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i)$*, hay un único morfismo proyectivo* $\langle \Psi^i \mid i \in I \rangle : (\mathbf{T}, \mathcal{B}) \longrightarrow \prod((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I)$ *tal que, para cada* $i \in I$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{T}, \mathcal{B}) \arrow[d, "\langle \Psi^i \mid i \in I \rangle"'] \arrow[dr, "\Psi^i"] & \\
\prod((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I) \arrow[r, "\mathrm{pr}^i"'] & (\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Es suficiente tomar como primera coordenada de $\prod((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I)$ el coproducto de la familia de conjuntos preordenados $(\mathbf{S}^i \mid i \in I)$, que es $(\coprod(S^i \mid i \in I), \preceq)$, siendo $\preceq$ el preorden sobre $\coprod(S^i \mid i \in I)$ definido como:

$$(s, i) \preceq (s', j) \text{ si y sólo si } i = j \text{ y } s \preceq^i s',$$

y, como segunda coordenada, el par ordenado cuya primera componente es

$$(A^i_s \mid (s, i) \in \textstyle\coprod(S^i \mid i \in I))$$

y cuya segunda componente es

$$(a^i_{s',s} \mid ((s, i), (s', i)) \in \preceq);$$

y, por otra parte, para cada $i \in I$, como primera coordenada de pr^i, in_i, la inclusión canónica de $\mathbf{S}^i$ en $\coprod(\mathbf{S}^i \mid i \in I)$, y, como segunda coordenada $(\mathrm{id}_{A^i_s} \mid (s, i) \in \coprod_{i \in I} S^i)$.

□

Proposición 11.9.2. *Sea* $((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I)$ *una familia de sistemas proyectivos de conjuntos. Entonces hay un par ordenado* $\big(\coprod((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I), (\mathrm{in}^i \mid i \in I)\big)$*, también denotado por* $\big(\coprod_{i\in I}(\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i), (\mathrm{in}^i \mid i \in I)\big)$*, en el que* $\coprod((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I)$*, el* coproducto *de* $((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I)$*, es un sistema proyectivo de conjuntos y, para cada* $i \in I$*,* in^i*, la* inclusión canónica i-ésima *del coproducto, es un morfismo proyectivo de* $(\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i)$ *en* $\coprod((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I)$*, que tiene la siguiente* propiedad universal*:*

Para cada par ordenado $((\mathbf{T}, \mathcal{B}), (\Psi^i \mid i \in I))$*, en el que* $(\mathbf{T}, \mathcal{B})$ *es un sistema proyectivo de conjuntos y, para cada* $i \in I$*,* $\Psi_i \colon (\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \longrightarrow (\mathbf{T}, \mathcal{B})$*, hay un único morfismo proyectivo* $[\Psi^i \mid i \in I] : \coprod((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I) \longrightarrow (\mathbf{T}, \mathcal{B})$ *tal que, para cada* $i \in I$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \arrow[r, "\mathrm{in}^i"] \arrow[dr, "\Psi^i"'] & \coprod((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I) \arrow[d, "{[f_i \mid i \in I]}"] \\
& (\mathbf{T}, \mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Es suficiente tomar como primera coordenada de $\coprod((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I)$ el producto de la familia de conjuntos preordenados $(\mathbf{S}^i \mid i \in I)$, que es $(\prod(S^i \mid i \in I), \preceq)$, siendo $\preceq$ el preorden sobre $\prod(S^i \mid i \in I)$ definido como:

$$(s_i \mid i \in I) \preceq (s'_i \mid i \in I) \text{ si y sólo si } \forall i \in I\, (s_i \preceq^i s'_i),$$

y, como segunda coordenada, el par ordenado cuya primera componente es

$$\left(\coprod(A^i_{s_i} \mid i \in I) \mid (s_i \mid i \in I) \in \prod(S^i \mid i \in I)\right)$$

y cuya segunda componente es

$$\left(\coprod(a^i_{s'_i, s_i} \mid i \in I) \mid ((s_i \mid i \in I), (s'_i \mid i \in I)) \in \preceq\right);$$

y, por otra parte, para cada $i \in I$, como primera coordenada de in^i, pr_i, la proyección canónica de $\prod(\mathbf{S}^i \mid i \in I)$ en $\mathbf{S}^i$, y, como segunda coordenada, $(\mathrm{in}_{A^i_{s_i}} \mid (s_i \mid i \in I) \in \prod(S^i \mid i \in I))$

□

Proposición 11.9.3. *Sean* $\Phi, \Psi \colon (\mathbf{S}, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbf{T}, \mathcal{B})$ *dos morfismos proyectivos, con* $\Phi = (\varphi, f)$ *y* $\Psi = (\psi, g)$*. Entonces existe un par ordenado* $(\mathrm{Ceq}(\Phi, \Psi), \mathrm{ceq}(\Phi, \Psi))$*, el* coigualador *de* Φ *y* Ψ*, en el que* $\mathrm{Ceq}(\Phi, \Psi)$ *es un sistema proyectivo de conjuntos y* $\mathrm{ceq}(\Phi, \Psi)$ *un morfismo proyectivo de* $(\mathbf{T}, \mathcal{B})$ *en* $\mathrm{Ceq}(\Phi, \Psi)$*, que tiene las siguientes propiedades:*

1. $\mathrm{ceq}(\Phi, \Psi) \circ \Phi = \mathrm{ceq}(\Phi, \Psi) \circ \Psi$.
2. (Propiedad universal del coigualador) *Para cualquier sistema proyectivo de conjuntos* $(\mathbf{U}, \mathcal{C})$ *y cada morfismo proyectivo* $\Xi \colon (\mathbf{T}, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbf{U}, \mathcal{C})$*, si* $\Xi \circ \Phi = \Xi \circ \Psi$*, entonces hay un único morfismo proyectivo* $\Gamma \colon \mathrm{Ceq}(\Phi, \Psi) \longrightarrow (\mathbf{U}, \mathcal{C})$ *tal que* $\Gamma \circ \mathrm{ceq}(\Phi, \Psi) = \Xi$.

Demostración. Es suficiente tomar como primera coordenada de $\mathrm{Ceq}(\Phi, \Psi)$, el conjunto preordenado $\mathbf{Eq}(\varphi, \psi)$, formado por el igualador de $\varphi, \psi \colon T \longrightarrow S$ y la restricción del preorden de $\mathbf{T}$ a ésa parte, y como segunda coordenada, $\mathcal{E}$, el par cuya primera componente, E_t, para cada $t \in \mathrm{Eq}(\varphi, \psi)$, es $\mathrm{Ceq}(f_t, g_t)$, y cuya segunda componente, $e_{t',t}$, para cada $t, t' \in \mathrm{Eq}(\varphi, \psi)$, tal que $t \preceq t'$, es la única aplicación de $\mathrm{Ceq}(f_{t'}, g_{t'})$ en $\mathrm{Ceq}(f_t, g_t)$ tal que $\mathrm{Ceq}(f_t, g_t) \circ b_{t',t} = e_{t',t} \circ \mathrm{Ceq}(f_t, g_t)$; y, por otra parte, como primera coordenada de $\mathrm{ceq}(\Phi, \Psi)$, $\mathrm{eq}(\varphi, \psi)$, la aplicación isótona canónica de $\mathbf{Eq}(\varphi, \psi)$ en $\mathbf{T}$, y, como segunda coordenada, $(\mathrm{ceq}(f_t, g_t) \mid t \in \mathrm{eq}(\varphi, \psi))$.

□

12. Límites inductivos

En esta sección demostramos tanto la existencia de coproductos de familias de conjuntos, como la de coproductos de familias de aplicaciones entre familias de conjuntos, y estudiamos la conducta del operador de formación de coproductos, respecto de las identidades y de la composición de familias de aplicaciones entre familias de conjuntos.

12.1. Coproductos.

Proposición 12.1.1. *Sea* $(X_i)_{i \in I}$ *una familia de conjuntos. Entonces hay un par ordenado* $\left(\coprod_{i \in I} X_i, (\mathrm{in}_i)_{i \in I}\right)$*, en el que* $\coprod_{i \in I} X_i$*, el* coproducto *de* $(X_i)_{i \in I}$*, es un conjunto y, para cada* $i \in I$*,* in_i*, la* inclusión canónica i-ésima *del coproducto, es una aplicación de* X_i *en* $\coprod_{i \in I} X_i$*, que tiene la siguiente* propiedad universal*:*

Para cada par ordenado $(A,(f_i)_{i\in I})$, en el que A es un conjunto y, para cada $i\in I$, $f_i\colon X_i \longrightarrow A$, hay una única aplicación $[f_i]_{i\in I}\colon \coprod_{i\in I} X_i \longrightarrow A$ tal que, para cada $i\in I$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "\mathrm{in}_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & \coprod_{i\in I} X_i \arrow[d, "{[f_i]_{i\in I}}"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Sea $\coprod_{i\in I} X_i$ el conjunto definido como:

$$\textstyle\coprod_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I}(X_i\times\{i\}),$$

y, para cada $i\in I$, in_i la aplicación de X_i en $\coprod_{i\in I} X_i$ definida como:

$$\mathrm{in}_i \begin{cases} X_i & \longrightarrow \coprod_{i\in I} X_i \\ x & \longmapsto (x,i). \end{cases}$$

Entonces, dado un par ordenado $(A,(f_i)_{i\in I})$, en el que A es un conjunto y, para cada $i\in I$, $f_i\colon X_i \longrightarrow A$, sea $[f_i]_{i\in I}$ la aplicación de $\coprod_{i\in I} X_i$ en A definida como:

$$[f_i]_{i\in I} \begin{cases} \coprod_{i\in I} X_i & \longrightarrow A \\ (x,i) & \longmapsto f_i(x). \end{cases}$$

Es evidente que, para cada $i\in I$, $[f_i]_{i\in I}\circ \mathrm{in}_i = f_i$. Con ello queda demostrada la existencia de al menos una aplicación de $\coprod_{i\in I} X_i$ en A con la propiedad indicada. Dejamos, como ejercicio, la demostración de la unicidad. □

Proposición 12.1.2. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Entonces*

1. *Para cada $i\in I$, in_i es inyectiva.*
2. *Para cualesquiera $i,j\in I$, si $i\neq j$, entonces el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r, "\alpha_{X_j}"] \arrow[d, "\alpha_{X_i}"'] & X_j \arrow[d, "\mathrm{in}_j"] \\
X_i \arrow[r, "\mathrm{in}_i"'] & \coprod_{i\in I} X_i
\end{tikzcd}$$

   es cartesiano.
3. *Para cada aplicación $f\colon A \longrightarrow \coprod_{i\in I} X_i$, se cumple que el par $(A,(q_i \mid i\in I))$, siendo, para cada $i\in I$, q_i la aplicación de $X_i\times_{\coprod_{i\in I} X_i} A$ en A que junto a la aplicación p_i de $X_i\times_{\coprod_{i\in I} X_i} A$ en X_i, dan lugar al producto fibrado*

$$\begin{tikzcd}
X_i\times_{\coprod_{i\in I} X_i} A \arrow[r, "q_i"] \arrow[d, "p_i"'] & A \arrow[d, "f"] \\
X_i \arrow[r, "\mathrm{in}_{X_i}"'] & \coprod_{i\in I} X_i
\end{tikzcd}$$

   es un coproducto de la familia $(X_i\times_{\coprod_{i\in I} X_i} A)_{i\in I}$

Demostración. □

Ejercicio 12.1.3. Sea $(X_i \mid i \in I)$ una familia de conjuntos. Demuéstrese que

$$\mathrm{Sub}\left(\coprod_{i\in I} X_i\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Sub}(X_i).$$

Ejercicio 12.1.4. Demuéstrese que no existe el coproducto de todos los conjuntos. Si existiera tal coproducto, y fuera $(S, (\mathrm{in}_X \mid X \in V))$, entonces existiría $\mathrm{Sub}(S)$ y, necesariamente, $\mathrm{in}_{\mathrm{Sub}(S)}$ debería ser inyectiva, pero ya que existe una aplicación inyectiva de S en $\mathrm{Sub}(S)$, tendríamos, en virtud del teorema de Cantor-Bernstein, que $S \cong \mathrm{Sub}(S)$, lo cual, por un teorema de Cantor, es imposible.

En la Proposición 12.1.1 hemos demostrado, para una familia de conjuntos, la existencia de al menos un par ordenado, formado por un conjunto y una familia de aplicaciones desde cada uno de los conjuntos de la familia dada hasta el conjunto, sujeto a cumplir una cierta propiedad universal; pero, no hemos afirmado que tal par sea absolutamente único. De hecho, el conjunto $\bigcup_{i\in I}(\{i\} \times X_i)$ junto con las inclusiones evidentes, tiene, respecto de los conjuntos y las aplicaciones, la misma propiedad universal que tiene el conjunto $\bigcup_{i\in I}(X_i \times \{i\})$ junto con sus inclusiones.

Demostraremos en lo que sigue, entre otras cosas, que el par ordenado de la proposición anterior, es único salvo isomorfismo.

Proposición 12.1.5. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Entonces:*

1. *Para cada conjunto A y cualesquiera aplicaciones $f, g\colon \coprod_{i\in I} X_i \longrightarrow A$, si, para cada $i \in I$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "\mathrm{in}_i"] \arrow[rr, bend left=50, "f \circ \mathrm{in}_i"] \arrow[rr, bend right=50, "g \circ \mathrm{in}_i"'] & \coprod_{i\in I} X_i \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & A
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $f = g$, i.e., la familia de aplicaciones $(\mathrm{in}_i)_{i\in I}$ es colectivamente epimórfica.

2. *Para cada par ordenado $(A, (f_i)_{i\in I})$, en el que A sea un conjunto y, para cada $i \in I$, $f_i\colon X_i \longrightarrow A$, y para cada monomorfismo $t\colon A \rightarrowtail \coprod_{i\in I} X_i$, si, para cada $i \in I$, el digrama:*

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "\mathrm{in}_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & & \coprod_{i\in I} X_i \\
& A \arrow[ur, tail, "t"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces t es un isomorfismo, i.e., la familia de aplicaciones $(\mathrm{in}_i \mid i \in I)$ es extremal.

Demostración. □

Corolario 12.1.6. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Si un par ordenado $(C, (q_i)_{i\in I})$, en el que C es un conjunto y, para cada $i \in I$, $q_i\colon X_i \longrightarrow C$, tiene la propiedad de que para cada par ordenado $(A, (f_i)_{i\in I})$, en el que A es un conjunto y, para cada $i \in I$, $f_i\colon X_i \longrightarrow A$, hay una única aplicación $h\colon C \longrightarrow A$ tal que,* *para cada $i \in I$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "q_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & C \arrow[d, "h"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único isomorfismo t de $\coprod_{i\in I} X_i$ en C tal que, para cada $i \in I$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\mathrm{in}_i"] \arrow[dr, "q_i"'] & \coprod_{i\in I} X_i \arrow[d, "t"] \\ & C \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposición 12.1.7. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Entonces:*

1. *Si $I = \varnothing$, entonces $\coprod_{i\in I} X_i = \varnothing$, i.e., el coproducto de la familia vacía de conjuntos es el conjunto inicial.*
2. *Si $(X_i)_{i\in I}$ es tal que, para cada $i, j \in I$, $X_i = X_j$, y denotamos por X el valor común, entonces*

   $$\textstyle\coprod_{i\in I} X_i = X \times I,$$

   y a la única aplicación de $X \times I$ en X, determinada por la familia de aplicaciones $(\mathrm{id}_X)_{i\in I}$, la denominamos la aplicación codiagonal *de $X \times I$ en X y la denotamos por $\mathrm{cdg}_{I,X}$; además, si $X \neq \varnothing$, entonces $\mathrm{cdg}_{I,X}$ es un epimorfismo. Así pués, para cada $i \in I$, el diagrama:*

   $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{in}_i"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"'] & X \times I \arrow[d, two heads, "\mathrm{cdg}_{I,X}"] \\ & X \end{tikzcd}$$

   conmuta.
3. *Si I es un conjunto final y su único miembro es i, entonces*

   $$\textstyle\coprod_{i\in I} X_i \cong X_i.$$

4. *Si para cada $i \in I$, X_i es vacío, entonces $\coprod_{i\in I} X_i$ es vacío.*
5. *Si $(X_i \mid i \in I)$ es una familia de conjuntos dos a dos disjuntos, entonces*

   $$\textstyle\coprod_{i\in I} X_i \cong \bigcup_{i\in I} X_i.$$

Demostración. □

Proposición 12.1.8 (Conmutatividad)**.** *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos y φ un automorfismo de I, entonces*

$$\textstyle\coprod_{i\in I} X_i \cong \coprod_{i\in I} X_{\varphi(i)}.$$

Demostración. □

Para establecer la proposición que sigue, convenimos en denotar por $(X_j)_{j\in J}$ la restricción de $(X_i)_{i\in I}$ a J, si $J \subseteq I$, que no es más que la composición de in_J y de $(X_i)_{i\in I}$. Además, usaremos in_j para denotar la proyección canónica j-ésima, del coproducto de cualquier familia de conjuntos para la cual se cumpla que j sea miembro del conjunto de índices de la misma.

Proposición 12.1.9. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos y $J, K, L \subseteq I$ tales que $K \subseteq J$ y $L \subseteq K$. Entonces:*

1. $\mathrm{in}_{J,J} = \mathrm{id}_{\coprod_{j\in J} X_j}$, *siendo $\mathrm{in}_{J,J}$ la única endoaplicación $[\mathrm{in}_j]_{j\in J}$ del conjunto $\coprod_{j\in J} X_j$ tal que, para cada $j \in J$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[r, "\mathrm{in}_j"] \arrow[dr, "\mathrm{in}_j"'] & \coprod_{j\in J} X_j \arrow[d, "\mathrm{in}_{J,J}"] \\ & \coprod_{j\in J} X_j \end{tikzcd}$$

   conmuta.

2. $\mathrm{in}_{L,J} = \mathrm{in}_{K,J} \circ \mathrm{in}_{L,K}$, *i.e., el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \coprod_{l\in L} X_l \arrow[r, "\mathrm{in}_{L,K}"] \arrow[dr, "\mathrm{in}_{L,J}"'] & \coprod_{k\in K} X_k \arrow[d, "\mathrm{in}_{K,J}"] \\ & \coprod_{j\in J} X_j \end{tikzcd}$$

   conmuta; siendo, para $J, K \subseteq I$, con $K \subseteq J$, $\mathrm{in}_{K,J}$ la única aplicación del conjunto $\coprod_{k\in K} X_k$ en el conjunto $\coprod_{j\in J} X_j$ tal que, para cada $k \in K$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X_k \arrow[r, "\mathrm{in}_k"] \arrow[dr, "\mathrm{in}_k"'] & \coprod_{k\in K} X_k \arrow[d, "\mathrm{in}_{K,J}"] \\ & \coprod_{j\in J} X_j \end{tikzcd}$$

   conmuta.

Demostración. □

Proposición 12.1.10. *Sean $(X_i)_{i\in I}$ y $(Y_i)_{i\in I}$ dos familias de conjuntos y $(f_i)_{i\in I}$ una familia de aplicaciones en la que, para cada $i \in I$, $f_i\colon X_i \longrightarrow Y_i$. Entonces hay una única aplicación, denotada por $\coprod(f_i)_{i\in I}$ y denominada el* coproducto *de $(f_i)_{i\in I}$, del conjunto $\coprod_{i\in I} X_i$ en el conjunto $\coprod_{i\in I} Y_i$ tal que, para cada $i \in I$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\mathrm{in}_i"] \arrow[d, "f_i"'] & \coprod_{i\in I} X_i \arrow[d, "\coprod_{i\in I} f_i"] \\ Y_i \arrow[r, "\mathrm{in}_i"'] & \coprod_{i\in I} Y_i \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposición 12.1.11. *Sean $(X_i)_{i\in I}$, $(Y_i)_{i\in I}$ y $(Z_i)_{i\in I}$ tres familias de conjuntos y $(f_i)_{i\in I}$ y $(g_i)_{i\in I}$ dos familias de aplicaciones tales que, para cada $i \in I$, $f_i\colon X_i \longrightarrow Y_i$ y $g_i\colon Y_i \longrightarrow Z_i$. Entonces:*

1. $\coprod_{i\in I} \mathrm{id}_{X_i} = \mathrm{id}_{\coprod_{i\in I} X_i}$.
2. $\coprod_{i\in I} g_i \circ \coprod_{i\in I} f_i = \coprod_{i\in I} g_i \circ f_i$.

Demostración. □

Proposición 12.1.12. *Sean $(X_i)_{i\in I}$, $(Y_j)_{j\in J}$ y $(Z_k)_{k\in K}$ tres familias de conjuntos y $(f_j)_{j\in J}$ y $(g_k)_{k\in K}$ dos familias de aplicaciones tales que, para cada $j \in J$, $f_j\colon Y_j \longrightarrow \coprod_{i\in I} X_i$ y, para cada $k \in K$, $g_k\colon Z_k \longrightarrow \coprod_{j\in J} Y_j$. Entonces la única aplicación $\left[[f_j]_{j\in J} \circ g_k\right]_{k\in K}$ del conjunto $\coprod_{k\in K} Z_k$ en el conjunto $\coprod_{i\in I} X_i$ tal que, para cada $k \in K$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} Z_k \arrow[r, "\mathrm{in}_k"] \arrow[dr, "{[f_j]_{j\in J}\circ g_k}"'] & \coprod_{k\in K} Z_k \arrow[d, "{\left[[f_j]_{j\in J}\circ g_k\right]_{k\in K}}"] \\ & \coprod_{i\in I} X_i \end{tikzcd}$$

conmuta, coincide con la composición de la única aplicación $[g_k]_{k\in K}$ del conjunto $\coprod_{k\in K} Z_k$ en el conjunto $\coprod_{j\in J} Y_j$ y de la única aplicación $[f_j]_{j\in J}$ del conjunto $\coprod_{j\in J} Y_j$ en el conjunto $\coprod_{i\in I} X_i$ tales que, resp., para cada $k \in K$ y cada $j \in J$, los dos triángulos del diagrama:

$$\begin{tikzcd} Z_k \arrow[r, "\mathrm{in}_k"] \arrow[dr, "g_k"'] & \coprod_{k\in K} Z_k \arrow[d, "{[g_k]_{k\in K}}"] \\ Y_j \arrow[r, "\mathrm{in}_j"] \arrow[dr, "f_j"'] & \coprod_{j\in J} Y_j \arrow[d, "{[f_j]_{j\in J}}"] \\ & \coprod_{i\in I} X_i \end{tikzcd}$$

conmutan. Así pués, se cumple que:

$$[f_j]_{j\in J} \circ [g_k]_{k\in K} = \left[[f_j]_{j\in J} \circ g_k\right]_{k\in K}$$

Demostración. □

Proposición 12.1.13. *Sean $(X_i)_{i\in I}$ y $(Y_i)_{i\in I}$ dos familias de conjuntos y $(f_i)_{i\in I}$ una familia de aplicaciones en la que, para cada $i \in I$, $f_i\colon X_i \longrightarrow Y_i$. Entonces:*

1. *Si para cada $i \in I$, f_i es una retracción, entonces $\coprod_{i\in I} f_i$ es una retracción.*
2. *Si para cada $i \in I$, f_i es una sección, entonces $\coprod_{i\in I} f_i$ es una sección.*
3. *Si para cada $i \in I$, f_i es un isomorfismo, entonces $\coprod_{i\in I} f_i$ es un isomorfismo.*
4. *Si para cada $i \in I$, f_i es un monomorfismo, entonces $\coprod_{i\in I} f_i$ es un monomorfismo.*
5. *Si para cada $i \in I$, f_i es coconstante, entonces $\coprod_{i\in I} f_i$ es coconstante.*

Demostración. □

Corolario 12.1.14. *Sea I un conjunto y $f\colon A \longrightarrow B$ una aplicación. Si f es una retracción (resp. una sección, isomorfismo, monomorfismo, coconstante), entonces*

$f \times \mathrm{id}_I$, i.e., el coproducto de la familia $(f)_{i\in I}$, es una retracción (resp. una sección, isomorfismo, monomorfismo, coconstante) de $A \times I$ en $B \times I$.

Demostración. □

Proposición 12.1.15 (Asociatividad del coproducto)**.** *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos y $(J_l)_{l\in L}$ una familia de subconjuntos de I tal que $\bigcup_{l\in L} J_l = I$ y, para cada $l, m \in L$, si $l \neq m$, entonces $J_l \cap J_m = \varnothing$. Entonces*

$$\textstyle\coprod_{i\in I} X_i \cong \coprod_{l\in L} \coprod_{i\in J_l} X_i.$$

Demostración. □

Proposición 12.1.16. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Entonces $\prod_{i\in I} X_i$ es isomorfo a un subconjunto de* $\mathrm{Sub}\left(\coprod_{i\in I} X_i\right)$

Demostración. □

Demostración. □

Proposición 12.1.17. *Sea A un conjunto y $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos indexada por el conjunto I. Entonces existe una aplicación* natural *de $\coprod_{i\in I}(A \times X_i)$ en $A \times (\coprod_{i\in I} X_i)$.*

Demostración. Por cada índice $i \in I$ consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& A \times X_i \arrow[dl, "\mathrm{pr}_A"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_{X_i}"] \arrow[dr, "\mathrm{in}_{X_i} \circ \mathrm{pr}_{X_i}"] & X_i \arrow[d, "\mathrm{in}_{X_i}"] \\
A & A \times (\coprod_{i\in I} X_i) \arrow[l, "\mathrm{pr}_A"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\coprod_{i\in I} X_i}"'] & \coprod_{i\in I} X_i
\end{tikzcd}$$

Entonces existe una única aplicación $\langle \mathrm{pr}_A, \mathrm{in}_{X_i} \circ \mathrm{pr}_{B_i}\rangle$ de $A \times X_i$ en $A \times (\coprod_{i\in I} X_i)$ tal que $\mathrm{pr}_A \circ \langle \mathrm{pr}_A, \mathrm{in}_{X_i} \circ \mathrm{pr}_{X_i}\rangle = \mathrm{pr}_A$ y $\mathrm{pr}_{\coprod_{i\in I} X_i} \circ \langle \mathrm{pr}_A, \mathrm{in}_{X_i} \circ \mathrm{pr}_{X_i}\rangle = \mathrm{in}_{X_i} \circ \mathrm{pr}_{X_i}$.

Ahora, por cada índice $i \in I$, consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \times X_i \arrow[r, "\mathrm{in}_{A\times X_i}"] \arrow[dr, "\langle \mathrm{pr}_A, \mathrm{in}_{X_i} \circ \mathrm{pr}_{X_i}\rangle"'] & \coprod_{i\in I}(A \times X_i) \\
& A \times (\coprod_{i\in I} X_i)
\end{tikzcd}$$

entonces existe una única aplicación $[\langle \mathrm{pr}_A, \mathrm{in}_{X_i} \circ \mathrm{pr}_{X_i}\rangle]_{i\in I}$ de $\coprod_{i\in I}(A \times X_i)$ en $A \times (\coprod_{i\in I} X_i)$ tal que, para cada $i \in I$,

$$[\langle \mathrm{pr}_A, \mathrm{in}_{X_i} \circ \mathrm{pr}_{X_i}\rangle]_{i\in I} \circ \mathrm{in}_{A\times X_i} = \langle \mathrm{pr}_A, \mathrm{in}_{X_i} \circ \mathrm{pr}_{X_i}\rangle.$$

□

Proposición 12.1.18. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos y A un conjunto. Entonces*

$$\begin{aligned} &(\textstyle\coprod_{i\in I} X_i) \times A \cong \coprod_{i\in I}(X_i \times A) \quad \textit{y} \\ &A \times (\textstyle\coprod_{i\in I} X_i) \cong \coprod_{i\in I}(A \times X_i) \end{aligned}$$

Además, los isomorfismos son naturales.

12.2. Coigualadores.

Proposición 12.2.1. *Sean* $f, g\colon A \longrightarrow B$ *dos aplicaciones. Entonces existe un par ordenado* $(\mathrm{Ceq}(f,g), \mathrm{ceq}(f,g))$*, el* coigualador *de* f *y* g*, en el que* $\mathrm{Ceq}(f,g)$ *es un conjunto y* $\mathrm{ceq}(f,g)$ *una aplicación de* B *en* $\mathrm{Ceq}(f,g)$*, que tiene las siguientes propiedades:*

1. $\mathrm{ceq}(f,g) \circ f = \mathrm{ceq}(f,g) \circ g$.
2. (Propiedad universal del coigualador) *Para cualquier conjunto* Y *y cada aplicación* $h\colon B \longrightarrow Y$*, si* $h \circ f = h \circ g$*, entonces hay una única aplicación* $t\colon \mathrm{Ceq}(f,g) \longrightarrow Y$ *tal que* $t \circ \mathrm{ceq}(f,g) = h$.

La situación descrita por las condiciones anteriores la expresamos diagramáticamente como:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "\mathrm{ceq}(f,g)"] \arrow[dr, "h"'] & \mathrm{Ceq}(f,g) \arrow[d, "t"] \\ & & Y \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $\mathrm{Ceq}(f,g)$ el conjunto cociente de B entre la relación de equivalencia $R_{f,g}$, generada por la relación

$$\{\,(f(a), g(a)) \mid a \in A\,\},$$

en B, y $\mathrm{ceq}(f,g)$ la proyección canónica de B en $\mathrm{Ceq}(f,g)$. Es evidente que $\mathrm{ceq}(f,g) \circ f = \mathrm{eq}(f,g) \circ g$.

Además, si Y es un conjunto y $h\colon B \longrightarrow Y$ una aplicación tal que $h \circ f = h \circ g$, entonces $R_{f,g} \subseteq \mathrm{Ker}(h)$, porque $\{\,(f(a), g(a)) \mid a \in A\,\} \subseteq \mathrm{Ker}(h)$, $\mathrm{Ker}(h)$ es una relación de equivalencia sobre B y $R_{f,g}$ es la mínima relación de equivalencia sobre B que contiene a $\{\,(f(a), g(a)) \mid a \in A\,\}$, luego, por la propiedad universal del cociente, hay una única aplicación $t\colon \mathrm{Ceq}(f,g) \longrightarrow Y$, definida como:

$$t \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Ceq}(f,g) & \longrightarrow & Y \\ [b]_{R_{f,g}} & \longmapsto & h(b), \end{array} \right.$$

tal que $t \circ \mathrm{ceq}(f,g) = h$. □

En la proposición anterior hemos demostrado, para un par de aplicaciones, ambas con el mismo dominio y codominio, la existencia de al menos un par ordenado, formado por un conjunto y una aplicación desde el codominio de las aplicaciones dadas hasta el conjunto, sujeto a cumplir un par de condiciones; pero no hemos afirmado que tal par sea absolutamente único. Demostramos a continuación que el par ordenado de la proposición anterior, es único, sólo, salvo isomorfismo.

Proposición 12.2.2. *Sean* $f, g\colon A \longrightarrow B$ *dos aplicaciones. Si un par ordenado* (C, c)*, en el que* C *es un conjunto y* $c\colon B \longrightarrow C$*, tiene las propiedades:*

1. $c \circ f = c \circ g$.
2. *Para cualquier conjunto* Y *y cada aplicación* $h\colon B \longrightarrow Y$*, si* $h \circ f = h \circ g$*, entonces hay una única aplicación* $u\colon C \longrightarrow Y$ *tal que* $u \circ c = h$.

Entonces hay un único isomorfismo $t\colon \mathrm{Ceq}(f,g) \longrightarrow C$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\mathrm{ceq}(f,g)"] \arrow[dr, "c"'] & \mathrm{Ceq}(f,g) \arrow[d, "t"] \\ & C \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Ejercicio 12.2.3. Defínase el concepto de coigualador para familias arbitrarias no vacías de aplicaciones entre dos conjuntos cualesquiera, al que denominamos el *multicoigualador* de la familia en cuestión, y demuéstrese de tal multicoigualador es único, salvo isomorfismo

Proposición 12.2.4. *Si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "v"] \\ A' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & B' \end{tikzcd}$$

conmuta serialmente, i.e., si $v \circ f = f' \circ u$ *y* $v \circ g = g' \circ u$*, entonces hay una única aplicación* $\mathrm{Ceq}(u, v)\colon \mathrm{Ceq}(f, g) \longrightarrow \mathrm{Ceq}(f', g')$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\mathrm{ceq}(f,g)"] \arrow[d, "v"'] & \mathrm{Ceq}(f,g) \arrow[d, "\mathrm{Ceq}(u,v)"] \\ B' \arrow[r, "\mathrm{ceq}(f',g')"'] & \mathrm{Ceq}(f',g') \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Ejercicio 12.2.5. Demuéstrese que:

1. Para el diagrama, serialmente, conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] \\ A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

   se cumple que

$$\mathrm{Ceq}(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_{\mathrm{Ceq}(f,g)}.$$

2. Si los diagramas:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "v"] \\ A' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & B' \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} A' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] \arrow[d, "u'"'] & B' \arrow[d, "v'"] \\ A'' \arrow[r, shift left, "f''"] \arrow[r, shift right, "g''"'] & B'' \end{tikzcd}$$

   son, serialmente, conmutativos, entonces se cumple que

$$\mathrm{Ceq}(u', v') \circ \mathrm{Ceq}(u, v) = \mathrm{Ceq}(u' \circ u, v' \circ v).$$

Definición 12.2.6. Una aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ es un *epimorfismo regular* si existen dos aplicaciones $u, v\colon C \longrightarrow A$ tales que el par ordenado (B, f) es un coigualador de u y v.

Proposición 12.2.7. *Una condición necesaria y suficiente para que una aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ sea un epimorfismo regular es que sea sobreyectiva.*

12.3. El teorema de König-Zermelo.

Proposición 12.3.1. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Si I es vacío o I tiene un único miembro o, por último, I tiene dos o más miembros y en $\prod_{i\in I} X_i$ hay dos funciones de elección x e y tales que, para cada $i \in I$, $x_i \neq y_i$, entonces $\coprod_{i\in I} X_i$ es isomorfo a un subconjunto de $\prod_{i\in I} X_i$.*

Demostración. Nos ocupamos sólo del último caso, ya que los dos primeros son triviales.

Supongamos pues que I, tenga al menos dos miembros distintos y que x e y sean dos miembros de $\prod_{i\in I} X_i$, arbitrarios, pero fijos, tales que, para cada $i \in I$, $x_i \neq y_i$. Entonces se cumple que

$$\textstyle\coprod_{i\in I} X_i = \left(\coprod_{i\in I} X_i - \{x_i\}\right) \cup \{\, (x_i, i) \mid i \in I \,\},$$

y que

$$\textstyle\left(\coprod_{i\in I} X_i - \{x_i\}\right) \cap \{\, (x_i, i) \mid i \in I \,\} = \varnothing.$$

Usaremos el hecho de que $\coprod_{i\in I} X_i$ sea la unión disjunta de los conjuntos $\coprod_{i\in I} X_i - \{x_i\}$ y $\{\, (x_i, i) \mid i \in I \,\}$, para obtener una aplicación inyectiva de $\coprod_{i\in I} X_i$ en $\prod_{i\in I} X_i$, a partir de dos aplicaciones inyectivas de $\coprod_{i\in I} X_i - \{x_i\}$ y $\{\, (x_i, i) \mid i \in I \,\}$ en dos subconjuntos complementarios de $\prod_{i\in I} X_i$.

Sea f la aplicación de $\coprod_{i\in I} X_i - \{x_i\}$ en $\prod_{i\in I} X_i$ definida como:

$$f \begin{cases} \coprod_{i\in I} X_i - \{x_i\} & \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i \\ \quad (a, i) & \longmapsto x^{(i|a)}, \end{cases}$$

siendo, a su vez, $x^{(i|a)}$ la función de I en $\bigcup_{i\in I} X_i$ definida como:

$$x^{(i|a)} \begin{cases} I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i \\ j \longmapsto x^{(i|a)}(j) = \begin{cases} a, & \text{si } j = i; \\ x_j, & \text{si } j \neq i. \end{cases} \end{cases}$$

Puesto que, para cada $j \in J$, $x^{(i|a)}(j) \in X_j$, tenemos que, para cada $(a, i) \in \coprod_{i\in I} X_i - \{x_i\}$, $f(a, i) \in \prod_{i\in I} X_i$.

De hecho, la función de elección $f(a, i)$ coincide con la función de elección x en todas las coordenadas, salvo en una y sólo una, la i-ésima, en la que su valor es a, que es miembro de $X_i - \{x_i\}$.

Ahora, para demostrar que f es inyectiva, definimos una aplicación g de $\mathrm{Im}(f)$ en $\coprod_{i\in I} X_i - \{x_i\}$, que será inversa por la izquierda de f^s, como:

$$g \begin{cases} \mathrm{Im}(f) & \longrightarrow \coprod_{i\in I} X_i - \{x_i\} \\ \quad z & \longmapsto (a, i), \end{cases}$$

siendo a la coordenada i-ésima de z para la que se cumple que $a \in X_i - \{x_i\}$.

En virtud de la definición de g, se cumple que $g \circ f^s = \mathrm{id}_{\coprod_{i\in I} X_i - \{x_i\}}$, i.e., que f^s es una sección, luego f^s es un monomorfismo, por lo tanto f es un monomorfismo, ya que $f = \mathrm{in}_{\mathrm{Im}(f)} \circ f^s$ y la composición de monomorfismos es un monomorfismo.

Por último, definimos una aplicación h de $\{\, (x_i, i) \mid i \in I \,\}$ en $\prod_{i\in I} X_i - \mathrm{Im}(f)$ como:

$$h \begin{cases} \{\, (x_i, i) \mid i \in I \,\} & \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i - \mathrm{Im}(f) \\ \quad (x_i, i) & \longmapsto y^{(i|x_i)}, \end{cases}$$

siendo, a su vez, $y^{(i|x_i)}$ la función de I en $\bigcup_{i\in I} X_i$ definida como:

$$y^{(i|x_i)} \begin{cases} I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i \\ j \longmapsto y^{(i|x_i)}(j) = \begin{cases} x_i, & \text{si} \quad j = i; \\ y_j, & \text{si} \quad j \neq i. \end{cases} \end{cases}$$

De modo que $h(x_i, i)$ es tal que todas sus coordenadas coinciden con las de y, excepto la i-ésima, en la que su valor es x_i. Se cumple que h es inyectiva y que $\mathrm{Im}(h)$ está incluido en $\prod_{i\in I} X_i - \mathrm{Im}(f)$.

Ahora podemos afirmar, en virtud del corolario 7.24.3, que hay una única aplicación $f \coprod h\colon \coprod_{i\in I} X_i \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$ para la cual el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} X_i - \{x_i\} \arrow[r, "\mathrm{in}"] \arrow[d, "f"'] & \coprod_{i\in I} X_i \arrow[d, "f \coprod h"] & \{ (x_i, i) \mid i \in I \} \arrow[l, "\mathrm{in}"'] \arrow[d, "h"] \\
\mathrm{Im}(f) \arrow[r, "\mathrm{in}"'] & \prod_{i\in I} X_i & \prod_{i\in I} X_i - \mathrm{Im}(f) \arrow[l, "\mathrm{in}"]
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, en virtud de la prop. 12.1.13, $f \coprod h$ es inyectiva. □

Corolario 12.3.2. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Si, para cada $i \in I$, X_i tiene al menos dos miembros distintos, entonces $\coprod_{i\in I} X_i$ es isomorfo a un subconjunto de $\prod_{i\in I} X_i$.*

Demostración. □

Teorema 12.3.3 (König-Zermelo)**.** *Sean $(X_i)_{i\in I}$ e $(Y_i)_{i\in I}$ dos familias de conjuntos. Si, para cada $i \in I$, X_i está estrictamente dominado por Y_i, entonces $\coprod_{i\in I} X_i$ está estrictamente dominado por $\prod_{i\in I} Y_i$.*

Demostración. Por hipótesis, para cada $i \in I$, X_i está estrictamente dominado por Y_i, i.e., para cada $i \in I$, hay un monomorfismo $f_i\colon X_i \rightarrowtail Y_i$ y no hay ningún isomorfismo entre X_i y Y_i. Entonces, en virtud del axioma de elección, sea

$$(f_i)_{i\in I} \in \textstyle\prod_{i\in I} \mathrm{Mono}(X_i, Y_i),$$

arbitraria, pero fija.

A partir de la familia $(f_i)_{i\in I}$ de aplicaciones inyectivas, obtenemos, para cada $i \in I$, el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, tail, "f_i"] \arrow[d, "\mathrm{in}_i"'] & Y_i \arrow[d, "\mathrm{in}_i"] \\
\coprod_{i\in I} X_i \arrow[r, tail, "\coprod_{i\in I} f_i"'] & \coprod_{i\in I} Y_i.
\end{tikzcd}$$

Así pues $\coprod_{i\in I} X_i$ está dominado por $\coprod_{i\in I} Y_i$.

Distinguimos dos casos, según que, para cada $i \in I$, $X_i \neq \varnothing$, o que, exista un $i \in I$ tal que $X_i = \varnothing$. Si, para cada $i \in I$, $X_i \neq \varnothing$, entonces, ya que por hipótesis, X_i está estrictamente dominado por Y_i, se cumple que, para cada $i \in I$, Y_i tiene al menos dos miembros distintos. Por consiguiente, en virtud del corolario 12.3.2, $\coprod_{i\in I} Y_i$ está dominado por $\prod_{i\in I} Y_i$, luego $\coprod_{i\in I} X_i$ está dominado por $\prod_{i\in I} Y_i$.

Ahora, bajo la hipótesis de que, para cada $i \in I$, $X_i \neq \varnothing$, demostramos, por reducción al absurdo, que no hay ningún isomorfismo entre $\coprod_{i\in I} X_i$ y $\prod_{i\in I} Y_i$. Supongamos que exista un isomorfismo f de $\coprod_{i\in I} X_i$ en $\prod_{i\in I} Y_i$. Entonces obtenemos el diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
X_i \arrow[dr, "\mathrm{in}_i^s"] \arrow[dd, "\mathrm{in}_i"'] & & \\
& X_i \times \{i\} \arrow[dl, "\mathrm{in}_{X_i \times \{i\}}"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_i \circ f\big|_{X_i \times \{i\}}^{(\mathrm{pr}_i \circ f)[X_i \times \{i\}]}"] & \\
\coprod_{i \in I} X_i \arrow[d, "f"'] \arrow[drr, "\mathrm{pr}_i \circ f"] & & (\mathrm{pr}_i \circ f)[X_i \times \{i\}] \arrow[d, "\mathrm{in}_{(\mathrm{pr}_i \circ f)[X_i \times \{i\}]}"] \\
\prod_{i \in I} Y_i \arrow[rr, "\mathrm{pr}_i"'] & & Y_i
\end{tikzcd}
$$

Puesto que $\mathrm{pr}_i \circ f\big|_{X_i \times \{i\}}^{(\mathrm{pr}_i \circ f)[X_i \times \{i\}]}$ es sobreyectiva, tiene una inversa por la derecha, luego $(\mathrm{pr}_i \circ f)[X_i \times \{i\}]$, que es un subconjunto de Y_i, está dominado por $X_i \times \{i\}$, y, ya que $X_i \times \{i\}$ es isomorfo a X_i, está dominado por X_i. Ahora bien, por estar X_i estrictamente dominado por Y_i, se cumple que $(\mathrm{pr}_i \circ f)[X_i \times \{i\}]$ es un subconjunto estricto de Y_i, ya que si no lo fuera $(\mathrm{pr}_i \circ f)[X_i \times \{i\}] = Y_i$, luego Y_i estaría dominado por X_i, pero éso es imposible, porque X_i, por hipótesis, está estrictamente dominado por Y_i. Así que, para cada $i \in I$, $Y_i - (\mathrm{pr}_i \circ f)[X_i \times \{i\}] \neq \varnothing$, luego, en virtud del axioma de elección:

$$\textstyle\prod_{i \in I}(Y_i - (\mathrm{pr}_i \circ f)[X_i \times \{i\}]) \neq \varnothing.$$

Sea y un miembro de tal conjunto, arbitrario, pero fijo. Puesto que el conjunto $\prod_{i \in I}(Y_i - (\mathrm{pr}_i \circ f)[X_i \times \{i\}])$ está incluido en $\prod_{i \in I} Y_i$, $y \in \prod_{i \in I} Y_i$, luego, ya que f es, en particular, sobreyectiva, hay un $(x, i) \in \coprod_{i \in I} X_i$ tal que $f(x, i) = y$. Por lo tanto, para cada $i \in I$, $y_i = (pr_i \circ f)(x, i)$, pero $(pr_i \circ f)(x, i) \in (\mathrm{pr}_i \circ f)[X_i \times \{i\}]$. De donde la contradicción, ya que, para cada $i \in I$, $y_i \in Y_i - (\mathrm{pr}_i \circ f)[X_i \times \{i\}]$. Luego no hay ningún isomorfismo entre los conjuntos $\coprod_{i \in I} X_i$ y $\prod_{i \in I} Y_i$, y, por lo tanto, $\coprod_{i \in I} X_i$ está estrictamente dominado por $\prod_{i \in I} Y_i$.

Supongamos ahora que exista un $i \in I$ tal que $X_i = \varnothing$. Entonces para el conjunto $J = \{\, i \in I \mid X_i \neq \varnothing \,\}$, se cumple que $\coprod_{i \in I} X_i = \coprod_{i \in J} X_i$ y que, para cada $i \in J$, Y_i tiene al menos dos miembros, y estamos, respecto de las familias $(X_i)_{i \in J}$ y $(Y_i)_{i \in J}$, en el caso anterior. Por lo tanto $\coprod_{i \in J} X_i$, que es $\coprod_{i \in I} X_i$, está estrictamente dominado por $\prod_{i \in J} Y_i$. Pero $\prod_{i \in J} Y_i$ está dominado por $\prod_{i \in I} Y_i$, porque, por una parte, para cada $i \in J$, Y_i tiene al menos dos miembros, luego no es vacío, y, por otra, para cada $i \in I - J$, Y_i tiene al menos un miembro, porque $X_i = \varnothing$ está estrictamente dominado por Y_i, así que, para cada $i \in I$, $Y_i \neq \varnothing$, luego $\mathrm{pr}_{I,J} \colon \prod_{i \in I} Y_i \longrightarrow \prod_{i \in J} Y_i$ es sobreyectiva, por consiguiente hay un monomorfismo de $\prod_{i \in J} Y_i$ en $\prod_{i \in I} Y_i$, luego $\coprod_{i \in I} X_i$ está estrictamente dominado por $\prod_{i \in I} Y_i$.

□

12.4. Sumas amalgamadas. Ahora que disponemos de los conceptos de coproducto y de coigualador, demostramos, apoyándonos en ellos, la existencia de un nuevo tipo de límite inductivo, el de *suma amalgamada* de dos aplicaciones con el mismo dominio.

Proposición 12.4.1. *Sean $f\colon C \longrightarrow A$ y $g\colon C \longrightarrow B$ dos aplicaciones con el mismo dominio. Entonces existe un par ordenado $(A \amalg_C B, (i_0, i_1))$, la* suma amalgamada de A y B bajo C relativa a f y g, *en el que $A \amalg_C B$ es un conjunto, i_0 una aplicación de A en $A \amalg_C B$ e i_1 una aplicación de B en $A \amalg_C B$, que tiene las siguientes propiedades:*

1. *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "i_1"] \\ A \arrow[r, "i_0"'] & A \amalg_C B \end{tikzcd}$$

   conmuta.
2. (Propiedad universal de la suma amalgamada) *Para cada conjunto Y y cualesquiera aplicaciones $u\colon A \longrightarrow Y$ y $v\colon B \longrightarrow Y$ si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "v"] \\ A \arrow[r, "u"'] & Y \end{tikzcd}$$

   conmuta, entonces hay una única aplicación $t\colon A \amalg_C B \longrightarrow Y$ tal que los dos triángulos del diagrama:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "v"] & \\ A \arrow[r, "i_0"'] \arrow[drr, bend right, "u"'] & A \amalg_C B \arrow[dr, "t"] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

   conmutan.

La situación descrita por las condiciones anteriores la expresamos diagramáticamente como:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "v"] & \\ A \arrow[r, "i_0"'] \arrow[drr, bend right, "u"'] & A \amalg_C B \arrow[dr, "t"] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $A \amalg_C B$ el conjunto cociente del coproducto de A y B entre la relación de equivalencia $R_{\mathrm{in}_A\circ f,\mathrm{in}_B\circ g}$ sobre $A \amalg B$ generada por la relación

$$\{\, (\mathrm{in}_A(f(x)), \mathrm{in}_B(g(x))) \mid x \in C \,\},$$

en $A\amalg B$, i_0 la composición de la inclusión canónica de A en $A\amalg B$ y de la proyección canónica de $A \amalg B$ en $A \amalg_C B$ e i_1 la composición de la inclusión canónica de B en $A \amalg B$ y de la proyección canónica de $A \amalg B$ en $A \amalg_C B$. Es evidente que entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "i_1"] \\ A \arrow[r, "i_0"'] & A \amalg_C B \end{tikzcd}$$

conmuta.

Además, si Y es un conjunto y $u\colon A \longrightarrow Y$, $v\colon B \longrightarrow Y$ dos aplicaciones tales que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "v"] \\ A \arrow[r, "u"'] & Y \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces, por la propiedad universal del coproducto, hay una única aplicación $[u, v] : A \amalg B \longrightarrow Y$ tal que $[u, v] \circ \mathrm{in}_0 = u$ y $[u, v] \circ \mathrm{in}_1 = v$ y, por cumplirse que $u \circ f = v \circ g$, tenemos que $\mathrm{Ker}([u, v])$ contiene a la relación de equivalencia $R_{\mathrm{in}_A\circ f,\mathrm{in}_B\circ g}$ en $A \amalg B$, luego, por la propiedad universal del conjunto cociente, hay una única aplicación t de $A \amalg_C B$ en X tal que $t \circ \mathrm{pr}_{R_{\mathrm{in}_A\circ f,\mathrm{in}_B\circ g}} = [u, v]$. Para la aplicación t se cumple que los dos triángulos del diagrama:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "v"] & \\ A \arrow[r, "i_0"'] \arrow[drr, bend right, "u"'] & A \amalg_C B \arrow[dr, "t"] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

conmutan. Dejamos, como ejercicio, la demostración de que t es la única aplicación de $A \amalg_C B$ en X con las propiedades indicadas. □

Cuando digamos de un diagrama de la forma:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "v"] \\ A \arrow[r, "u"'] & Y \end{tikzcd}$$

que es un *cuadrado cocartesiano*, ello significará que el conjunto Y es una suma amalgamada de A y B bajo C relativa a f y g, y que u y v son las aplicaciones estructurales.

En la proposición anterior hemos demostrado, para un par de aplicaciones, ambas con el mismo dominio, la existencia de al menos un par ordenado, formado por un conjunto y dos aplicaciones desde los codominios de las aplicaciones dadas hasta el conjunto, sujeto a cumplir un par de condiciones; pero no hemos afirmado que tal par sea absolutamente único. Demostramos a continuación que el par ordenado de la proposición anterior, es único, sólo, salvo isomorfismo.

Proposición 12.4.2. *Sean $f\colon C \longrightarrow A$ y $g\colon C \longrightarrow B$ dos aplicaciones con el mismo dominio. Si un par ordenado $(E,(p,q))$, en el que E es un conjunto, $p\colon A \longrightarrow E$ y $q\colon B \longrightarrow E$ tiene las propiedades:*

1. *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "q"] \\ A \arrow[r, "p"'] & E \end{tikzcd}$$

conmuta.

2. *Para cada conjunto Y y cualesquiera aplicaciones $u\colon A \longrightarrow Y$ y $v\colon B \longrightarrow Y$ si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "v"] \\ A \arrow[r, "u"'] & Y \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay una única aplicación $t\colon E \longrightarrow Y$ tal que los dos triángulos del diagrama:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "v"] & \\ A \arrow[r, "i_0"'] \arrow[drr, bend right, "u"'] & E \arrow[dr, "t"] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

conmutan,

entonces hay un único isomorfismo $t\colon A \amalg_C B \longrightarrow E$ tal que los dos triángulos del diagrama:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "q"] & \\ A \arrow[r, "i_0"'] \arrow[drr, bend right, "p"'] & A \amalg_C B \arrow[dr, "t"] & \\ & & E \end{tikzcd}$$

conmutan.

Demostración. □

Proposición 12.4.3. *Si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"] \arrow[ddd, "r"'] & & C \arrow[ddd, "t"] \\
& B \arrow[ur, "g"] \arrow[d, "s"'] & \\
& E \arrow[dr, "v"] & \\
D \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, "v \circ u"'] & & F
\end{tikzcd}$$

conmuta y el trapecio de la izquierda es cocartesiano, entonces el de la derecha lo es precisamente si lo es el rectángulo.

Demostración. □

Proposición 12.4.4. *Si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, "w"] & B \arrow[dd, "v"] \\
A \arrow[dd, "u"'] & & \\
& C' \arrow[r, "g'"] \arrow[dl, "f'"'] & B' \\
A' & &
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay una única aplicación $u \amalg_w v \colon A \amalg_C B \longrightarrow A' \amalg_{C'} B'$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[rr, "g"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, "w"] & & B \arrow[dl, "i_1"] \arrow[dd, "v"] \\
A \arrow[rr, "i_0"'] \arrow[dd, "u"'] & & A \amalg_C B \arrow[dd, "u \amalg_w v"] & \\
& C' \arrow[rr, "g'"] \arrow[dl, "f'"'] & & B' \arrow[dl, "i'_1"] \\
A' \arrow[rr, "i'_0"'] & & A' \amalg_{C'} B' &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Ejercicio 12.4.5. Demuéstrese que:

1. Para el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}_C"] & B \arrow[dd, "\mathrm{id}_B"] \\
A \arrow[dd, "\mathrm{id}_A"'] & & \\
& C \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "f"'] & B \\
A & &
\end{tikzcd}$$

se cumple que

$$\mathrm{id}_A \amalg_{\mathrm{id}_C} \mathrm{id}_B = \mathrm{id}_{A \amalg_C B}.$$

2. Si los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, "w"] & B \arrow[dd, "v"] \\
A \arrow[dd, "u"'] & & \\
& C' \arrow[r, "g'"] \arrow[dl, "f'"'] & B' \\
A' & &
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
& C' \arrow[r, "g'"] \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dd, "w'"] & B' \arrow[dd, "v'"] \\
A' \arrow[dd, "u'"'] & & \\
& C'' \arrow[r, "g''"] \arrow[dl, "f''"'] & B'' \\
A'' & &
\end{tikzcd}$$

conmutan, entonces se cumple que

$$(u' \amalg_{w'} v') \circ (u \amalg_w v) = (u' \circ u) \amalg_{w' \circ w} (v' \circ v).$$

Sean X e Y dos subconjuntos de un conjunto A. Entonces $X \cup Y$ es isomorfo a la suma amalgamada de las aplicaciones $\mathrm{in}_{X\cap Y,X}$ y $\mathrm{in}_{X\cap Y,Y}$. En efecto, $X \amalg_{X\cap Y} Y$ es el conjunto cociente de $X \coprod Y$ entre la relación de equivalencia sobre tal conjunto generada por la relación binaria:

$$R_{X,Y} = \{\, ((x,0),(x,1)) \mid x \in X \cap Y \,\}.$$

Porque, dado un conjunto C y dos aplicaciones f de X en C y g de Y en C, si $f \circ \mathrm{in}_{X\cap Y,X} = g \circ \mathrm{in}_{X\cap Y,Y}$, entonces $\mathrm{Ker}([f,g]) \supseteq R_{X,Y}$, luego existe una única aplicación t de $X \coprod Y/\mathrm{Eg}(R_{X,Y})$ tal que $t \circ \mathrm{pr}_{\mathrm{Eg}(R_{X,Y})} = [f,g]$.

Lo mismo que el concepto de producto, el de coproducto depende de dos parámetros, el conjunto de índices y la familia de conjuntos indexada por tal conjunto; es por ello que introducimos ahora, para comparar los conjuntos heterogéneos entre sí, la noción de *morfismo inductivo* entre conjuntos heterogéneos. Además, demostramos que tales morfismos inductivos tienen asociadas, canónicamente, ciertas aplicaciones entre los coproductos de las familias de conjuntos, subyacentes a los conjuntos heterogéneos que se comparan mediante los mismos, que cumplen cierta propiedad universal, similar a la que cumplen los coproductos.

12.5. Conjuntos heterogéneos y morfismos inductivos.

Definición 12.5.1.

1. Si (S,A) y (T,B) son dos conjuntos heterogéneos, un *morfismo inductivo* de (S,A) en (T,B) es un triplo ordenado $((S,A),\Phi,(T,B))$, abreviado como Φ y denotado por $\Phi\colon (S,A) \longrightarrow (T,B)$, en el que $\Phi = (\varphi, f)$, con $\varphi\colon S \longrightarrow T$ y $f = (f_s \mid s \in S)$, siendo, para cada $s \in S$, $f_s\colon A_s \longrightarrow B_{\varphi(s)}$, i.e., $(f_s \mid$

$s \in S) \in \prod_{s\in S} \mathrm{Hom}(A_s, B_{\varphi(s)})$. Además, (S, B_φ) es el conjunto heterogéneo para el que la coordenada s-ésima de B_φ es $B_{\varphi(s)}$, para cada $s \in S$.

2. Si (S, A) es un conjunto heterogéneo, entonces el morfismo inductivo *identidad* de (S, A) es:
$$\mathrm{id}_{(S,A)} = (\mathrm{id}_S, \mathrm{id}_A),$$
en el que $\mathrm{id}_A = (\mathrm{id}_{A_s} \mid s \in S)$.
3. Si (S, A), (T, B) y (U, C) son tres conjuntos heterogéneos, $\Phi = (\varphi, f)$ un morfismo inductivo del primero en el segundo y $\Psi = (\psi, g)$ uno del segundo en el tercero, entonces el morfismo inductivo *composición* de ambos es:
$$\Psi \circ \Phi = (\psi \circ \varphi, g_\varphi \circ f),$$
siendo g_φ la familia indexada por S, cuya coordenada s-ésima es:
$$g_{\varphi(s)} \colon B_{\varphi(s)} \longrightarrow C_{\psi(\varphi(s))},$$
y, por lo tanto, siendo $g_\varphi \circ f$ la familia de aplicaciones, indexada por S, cuya coordenada s-ésima es:
$$A_s \xrightarrow{f_s} B_{\varphi(s)} \xrightarrow{g_{\varphi(s)}} C_{\psi(\varphi(s))}$$

Proposición 12.5.2. *Sean (S, A), (T, B), (U, C) y (V, D) cuatro conjuntos heterogéneos, Φ un morfismo inductivo de (S, A) en (T, B), Ψ uno de (T, B) en (U, C) y Ξ uno de (U, C) en (V, D). Entonces:*

1. (Asociatividad). *El diagrama:*
$$\begin{tikzcd}
(S,A) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Psi\circ\Phi"'] \arrow[drr, bend left=60, "(\Xi\circ\Psi)\circ\Phi"] \arrow[drr, bend right=60, "\Xi\circ(\Psi\circ\Phi)"'] & (T,B) \arrow[d, "\Psi"] \arrow[dr, "\Xi\circ\Psi"] & \\
 & (U,C) \arrow[r, "\Xi"'] & (V,D)
\end{tikzcd}$$
conmuta.
2. (Neutros). *Los diagramas:*
$$\begin{tikzcd}
(S,A) \arrow[r, "\mathrm{id}_{(S,A)}"] \arrow[dr, "\Phi"'] & (S,A) \arrow[d, "\Phi"] \\
 & (T,B)
\end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd}
(S,A) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Phi"'] & (T,B) \arrow[d, "\mathrm{id}_{(T,B)}"] \\
 & (T,B)
\end{tikzcd}$$
conmutan.

Demostración. □

Definición 12.5.3. Si (S, A) es un conjunto heterogéneo, entonces el *límite inductivo* de (S, A) es el coproducto de la familia $(A_s \mid s \in S)$, i.e.,
$$\varinjlim(S, A) = \coprod(A_s \mid s \in S).$$

Proposición 12.5.4. *Si* $\Phi\colon (S,A) \longrightarrow (T,B)$ *es un morfismo inductivo, entonces hay una única aplicación*

$$\varinjlim \Phi\colon \varinjlim(S,A) \longrightarrow \varinjlim(T,B),$$

denominada el límite inductivo *de* Φ *tal que, para cada* $s \in S$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A_s \arrow[r, "\mathrm{in}_s"] \arrow[d, "f_s"'] & \varinjlim(S,A) \arrow[d, "\varinjlim \Phi"] \\
B_{\varphi(s)} \arrow[r, "\mathrm{in}_{\varphi(s)}"'] & \varinjlim(T,B)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A_s \arrow[r, "\mathrm{in}_s"] \arrow[d, "f_s"'] & \varinjlim(S,A) \arrow[d, "\coprod f"] \arrow[dd, bend left=60, "\varinjlim \Phi"] \\
B_{\varphi(s)} \arrow[r, "\mathrm{in}_{\varphi(s)}"'] \arrow[dr, "\mathrm{in}_{\varphi(s)}"'] & \varinjlim(S,B_\varphi) \arrow[d, "\mathrm{in}_\varphi"] \\
 & \varinjlim(T,B)
\end{tikzcd}$$

conmuta, siendo in_φ *la única aplicación de* $\varinjlim(S,B_\varphi)$ *en* $\varinjlim(T,B)$ *tal que, para cada* $s \in S$, $\mathrm{in}_{\varphi(s)} = \mathrm{in}_\varphi \circ \mathrm{in}_{\varphi(s)}$. *Así que*

$$\varinjlim \Phi = \mathrm{in}_\varphi \circ \coprod f.$$

Proposición 12.5.5. *Sean* $\Phi\colon (S,A) \longrightarrow (T,B)$ *y* $\Psi\colon (T,B) \longrightarrow (U,C)$ *dos morfismos inductivos. Entonces:*

1. $\varinjlim \mathrm{id}_{(S,A)} = \mathrm{id}_{\varinjlim(S,A)}$.
2. $\varinjlim(\Psi \circ \Phi) = \varinjlim \Psi \circ \varinjlim \Phi$.

Además, si $\Phi = (\varphi, f)$ *y* $\Psi = (\psi, g)$, *entonces el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim(S,A) \arrow[rr, "\varinjlim \Phi"] \arrow[rrrr, bend left, "\varinjlim \Psi \circ \Phi"] \arrow[dr, "\coprod f"'] \arrow[ddrr, bend right, "\coprod(g_\varphi \circ f)"'] & & \varinjlim(T,B) \arrow[rr, "\varinjlim \Psi"] \arrow[dr, "\coprod g"] & & \varinjlim(U,C) \\
 & \varinjlim(S,B_\varphi) \arrow[ur, "\mathrm{in}_\varphi"] \arrow[rr, "\varinjlim(\varphi, g_\varphi)"] \arrow[dr, "\coprod g_\varphi"'] & & \varinjlim(T,C_\psi) \arrow[ur, "\mathrm{in}_\psi"'] & \\
 & & \varinjlim(S,C_{\psi\circ\varphi}) \arrow[ur, "\mathrm{in}_\varphi"'] \arrow[uurr, bend right, "\mathrm{in}_{\psi\circ\varphi}"'] & &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

A continuación, generalizamos los conceptos de conjunto heterogéneo y de morfismo inductivo entre conjuntos heterogéneos, hasta los de sistema inductivo de conjuntos y morfismo inductivo entre sistemas inductivos de conjuntos, nociones debidas, en casos particulares, a Pontrjagin y que son de gran importancia para la topología algebraica y el álgebra homológica.

12.6. Sistemas inductivos de conjuntos.

Definición 12.6.1. Un *sistema inductivo de conjuntos* es un par ordenado $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ en el que $\mathbf{S}$ es un conjunto preordenado y $\mathcal{A} = ((A_s \mid s \in S), (a_{s,s'} \mid (s,s') \in \preceq))$ tal que:

1. Para cada $(s,s') \in \preceq$, $a_{s,s'} \colon A_s \longrightarrow A_{s'}$.
2. Para cada $s \in S$, $a_{s,s} = \mathrm{id}_{A_s}$.
3. Para cada $s, s', s'' \in S$, si $(s,s') \in \preceq$ y $(s',s'') \in \preceq$, entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A_s \arrow[r, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "a_{s,s''}"'] & A_{s'} \arrow[d, "a_{s',s''}"] \\ & A_{s''}, \end{tikzcd}$$

conmuta.

A las aplicaciones $a_{s,s'} \colon A_s \longrightarrow A_{s'}$ las denominamos las *aplicaciones de transición* del sistema inductivo de conjuntos $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$.

Ejemplo 12.6.2. Sean A y B dos conjuntos y $V, W \subseteq A$ tales que $W \subseteq V$. Entonces tenemos la aplicación

$$\mathrm{H}(\mathrm{in}_{W,V}, \mathrm{id}_B) \colon \mathrm{Hom}(V,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(W,B),$$

que a un $g \colon V \longrightarrow B$ le asigna $g{\restriction}W$.

Sea $\mathbf{S}$ un conjunto preordenado dirigido superiormente y $(V_s \mid s \in S)$ una aplicación isótona de $\mathbf{S}$ en $(\mathrm{Sub}(A), \subseteq^{-1})$; así que, para cada $(s,s') \in \preceq$, $V_{s'} \subseteq V_s$. Entonces

$$(\mathbf{S}, ((\mathrm{Hom}(V_s, B) \mid s \in S), (a_{s,s'} \mid (s,s') \in \preceq))),$$

en el que, para cada $(s,s') \in \preceq$, $a_{s,s'}$ es la aplicación $\mathrm{H}(\mathrm{in}_{V_{s'},V_s}, \mathrm{id}_B)$ de $\mathrm{Hom}(V_s, B)$ en $\mathrm{Hom}(V_{s'}, B)$ que a un $g \colon V_s \longrightarrow B$ le asigna $g{\restriction}V_{s'}$, es un sistema inductivo de conjuntos.

Ejemplo 12.6.3. Sean I un conjunto y $(A_i \mid i \in I)$ una familia de conjuntos indexada por I. Entonces $(\mathbf{Sub}_f(I), ((\coprod_{i\in I} A_i \mid J \in \mathrm{Sub}_f(I)), (\mathrm{in}_{K,J} \mid K \subseteq J)))$ es un sistema inductivo de conjuntos.

Ejemplo 12.6.4. Sean S un conjunto, A un conjunto y $(X_s \mid s \in S)$ una familia de subconjuntos de A tal que, para cualesquiera $s, s' \in S$ exista un $s'' \in S$ de modo que $X_s \cup X_{s'} \subseteq X_{s''}$. Entonces, considerando sobre S el preorden $\preceq$ definido como:

$$s \preceq s' \leftrightarrow X_s \subseteq X_{s'},$$

tenemos que $(\mathbf{S}, ((X_s \mid s \in S), (\mathrm{in}_{X_s, X_{s'}} \mid s \preceq s')))$ es un sistema inductivo de conjuntos.

Ejemplo 12.6.5. Para el conjunto ordenado $(\mathbb{N}, \leq)$ de los números naturales el par

$$((\mathrm{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}, (f_{m,n})_{m\leq n})$$

en el que, para cada $n \in \mathbb{N}$, Z_n es el conjunto de los números enteros y, para $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, $f_{m,n}$ la endoaplicación de Z que a un $x \in \mathrm{Z}$ le asigna $\frac{n!}{m!}x$, es un sistema inductivo de conjuntos.

12.7. Límites inductivos de los sistemas inductivos.

Proposición 12.7.1. *Sea* $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ *un sistema inductivo de conjuntos. Entonces hay un par ordenado* $(\varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A}), (a_s \mid s \in S))$, *el* límite inductivo *del sistema inductivo* $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$, *en el que* $\varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ *es un conjunto y, para cada* $s \in S$, a_s, *la* inclusión canónica *s-ésima, es una aplicación de* A_s *en* $\varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A})$, *tal que:*

1. *Para cada* $(s, s') \in \preceq$, *el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
A_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "a_s"'] & & A_{s'} \arrow[dl, "a_{s'}"] \\
& \varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A}) &
\end{tikzcd}
$$

   conmuta.

2. *Para cada par ordenado* $(L, (l_s \mid s \in S))$ *en el que, para cada* $s \in S$, $l_s \colon A_s \longrightarrow L$, *si, para cada* $(s, s') \in \preceq$, *el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
A_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "l_s"'] & & A_{s'} \arrow[dl, "l_{s'}"] \\
& L &
\end{tikzcd}
$$

   conmuta, entonces hay una única aplicación $u \colon \varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A}) \longrightarrow L$ *tal que, para cada* $s \in S$, *el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
A_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A}) \arrow[d, "u"] \\
& L
\end{tikzcd}
$$

   conmuta.

La situación descrita por las condiciones anteriores la expresamos diagramáticamente como:

$$
\begin{tikzcd}
A_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "a_s"'] \arrow[ddr, bend right, "l_s"'] & & A_{s'} \arrow[dl, "a_{s'}"] \arrow[ddl, bend left, "l_{s'}"] \\
& \varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A}) \arrow[d, "u"] & \\
& L &
\end{tikzcd}
$$

Demostración. Sea $R_{(\mathbf{S}, \mathcal{A})}$ la mínima relación de equivalencia sobre $\coprod_{s \in S} A_s$ que contiene a todos los pares ordenados de $\coprod_{s \in S} A_s$ de la forma $((x, s), (a_{s,s'}(x), s'))$, con $x \in A_s$ y $(s, s') \in \preceq$, i.e., por definición:

$$
R_{(\mathbf{S}, \mathcal{A})} = \mathrm{Eg}_{\coprod_{s \in S} A_s}\left(\bigcup\nolimits_{(s,s') \in \preceq} \{\, ((x, s), (a_{s,s'}(x), s')) \in \left(\coprod\nolimits_{s \in S} A_s\right)^2 \mid x \in A_s \,\}\right).
$$

Sea $\varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ el conjunto cociente $\coprod_{s \in S} A_s / R_{(\mathbf{S}, \mathcal{A})}$ y, para cada $s \in S$, sea a_s la composición de in_s y de $\mathrm{pr}_{R_{(\mathbf{S}, \mathcal{A})}}$, de manera que, para cada $s \in S$, a_s es la aplicación de A_s en $\varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ que a un $x \in A_s$ le asigna la clase de equivalencia $[(x, s)]_{R_{(\mathbf{S}, \mathcal{A})}}$.

Entonces el par ordenado $(\varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{A}),(a_s \mid s\in S))$ cumple las condiciones de la proposición. En efecto, por una parte, para cada $(s,s')\in\preceq$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "a_s"'] & & A_{s'} \arrow[dl, "a_{s'}"] \\ & \varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) & \end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., para cada $x\in A_s$, se cumple que $[(x,s)]_{R_{(\mathbf{S},\mathcal{A})}} = [(a_{s,s'}(x),s')]_{R_{(\mathbf{S},\mathcal{A})}}$, por definición de $R_{(\mathbf{S},\mathcal{A})}$

Por otra parte, si un par ordenado $(L,(l_s \mid s\in S))$, arbitrario, pero fijo, en el que, para cada $s\in S$, $l_s\colon A_s \longrightarrow L$, es tal que, para cada $(s,s')\in\preceq$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "l_s"'] & & A_{s'} \arrow[dl, "l_{s'}"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces, en virtud de la propiedad universal del coproducto, hay una única aplicación $[l_s \mid s\in S] : \coprod_{s\in S} A_s \longrightarrow L$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A_s \arrow[r, "\mathrm{in}_{A_s}"] \arrow[dr, "l_s"'] & \coprod_{s\in S} A_s \arrow[d, "{[l_s \mid s\in S]}"] \\ & L \end{tikzcd}$$

conmuta.

Además, se cumple que $R_{(\mathbf{S},\mathcal{A})} \subseteq \mathrm{Ker}([l_s \mid s\in S])$, porque, por una parte, $R_{(\mathbf{S},\mathcal{A})}$ es la mínima relación de equivalencia sobre $\coprod_{s\in S} A_s$ que contiene a

$$\bigcup\nolimits_{(s,s')\in\preceq}\{\, ((x,s),(a_{s,s'}(x),s'))\in \left(\coprod\nolimits_{s\in S} A_s\right)^2 \mid x\in A_s \,\}$$

y, por otra, porque $\mathrm{Ker}([l_s \mid s\in S])$ es una relación de equivalencia sobre $\coprod_{s\in S} A_s$ que contiene a $\bigcup_{(s,s')\in\preceq}\{\, ((x,s),(a_{s,s'}(x),s'))\in \left(\coprod_{s\in S} A_s\right)^2 \mid x\in A_s \,\}$. Entonces, en virtud de la propiedad universal del cociente, podemos afirmar que existe una única aplicación $u\colon \varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) \longrightarrow L$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \coprod_{s\in S} A_s \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\Phi(\mathbf{S},\mathcal{A})}"] \arrow[dr, "{[l_s \mid s\in S]}"'] & \varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) \arrow[d, "u"] \\ & L \end{tikzcd}$$

conmuta.

Ahora bien, puesto que, para cada $s\in S$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A_s \arrow[r, "\mathrm{in}_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \coprod_{s\in S} A_s \arrow[d, "{[l_s \mid s\in S]}"] \\ & L \end{tikzcd}$$

conmuta, también, para cada $s \in S$, el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
A_s \arrow[r, "\mathrm{in}_s"] \arrow[rr, bend left, "a_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \coprod_{s\in S} A_s \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\Phi_{(\mathbf{S},\mathcal{A})}}"] \arrow[d, "{[l_s \mid s \in S]}"] & \varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) \arrow[dl, bend left, "u"] \\
& L &
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Por consiguiente hay al menos una aplicación u de $\varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{A})$ en L tal que, para cada $s \in S$, el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
A_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) \arrow[d, "u"] \\
& L
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Dejamos, como ejercicio, la demostración de que hay a lo sumo una aplicación u de $\varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{A})$ en L tal que, para cada $s \in S$, $u \circ a_s = l_s$.

□

La relación $\Phi_{(\mathbf{S},\mathcal{A})}$ es una relación de equivalencia sobre $\coprod_{s\in S} A_s$. Puesto que la reflexividad y la simetría son sencillas de demostrar, nos limitamos a bosquejar la transitividad. Para ello, dados $(x,s),(y,s'),(z,s'') \in \coprod_{s\in S} A_s$, es suficiente tener en cuenta que, por una parte, por ser $\mathbf{S}$ un conjunto preordenado dirigido superiormente, existirán $p,q,r \in S$ tales que $s,s' \preceq p$, $s',s'' \preceq q$ y $p,q \preceq r$ y, por otra, que por ser $(\mathbf{S},\mathcal{A})$ un sistema inductivo, el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
A_s \arrow[dr, "a_{s,p}"] \arrow[ddrr, bend left, "a_{s,r}"] & & \\
& A_p \arrow[dr, "a_{p,r}"] & \\
A_{s'} \arrow[ur, "a_{s',p}"] \arrow[rr, "a_{s',r}"] \arrow[dr, "a_{s',q}"'] & & A_r \\
& A_q \arrow[ur, "a_{q,r}"'] & \\
A_{s''} \arrow[ur, "a_{s'',q}"'] \arrow[uurr, bend right, "a_{s'',r}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

conmuta. , con $((x,s),(y,s')) \in R_{(\mathbf{S},\mathcal{A})}$, entonces hay un $s'' \in S$ tal que $s, s' \preceq s''$ y $a_{s,s''}(x) = a_{s',s''}(y)$. Pero el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A_s \arrow[dr, "a_{s,s''}"] \arrow[ddr, bend right, "l_s"'] & & A_{s'} \arrow[dl, "a_{s',s''}"'] \arrow[ddl, bend left, "l_{s'}"] \\
& A_{s''} \arrow[d, "l_{s''}"] & \\
& L &
\end{tikzcd}$$

conmuta. En la proposición anterior se ha demostrado, para un sistema inductivo de conjuntos, la existencia de al menos un par ordenado, formado por un conjunto y una familia de aplicaciones desde cada uno de los conjuntos de la familia de conjuntos subyacente a la segunda coordenada del sistema inductivo, hasta el conjunto, sujeto a cumplir, por una parte, una condición de compatibilidad respecto de las aplicaciones subyacentes a la segunda coordenada del sistema inductivo, y, por otra, una cierta propiedad universal; pero, ni hemos afirmado que tal par sea absolutamente único, ni que las inclusiones canónicas sean necesariamente inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

Demostraremos en lo que sigue, entre otras cosas, que:

- El par ordenado de la proposición anterior, es único salvo isomorfismo.
- Una condición suficiente para que una inclusión canónica sea inyectiva, sobreyectiva o biyectiva, es que las aplicaciones de transición sean inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

Proposición 12.7.2. *Sea* $(\mathbf{S},\mathcal{A})$ *un sistema inductivo de conjuntos. Entonces:*

1. *Para cada conjunto* Y *y cualesquiera aplicaciones* $f, g\colon \varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) \longrightarrow Y$*, si, para cada* $s \in S$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) \arrow[r, "a_s"] \arrow[rr, bend left=50, "f \circ a_s"] \arrow[rr, bend right=50, "g \circ a_s"'] & A_s \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $f = g$*, i.e., la familia de aplicaciones* $(\mathrm{a}_s \mid s \in S)$ *es* colectivamente epimórfica.

2. *Para cada par ordenado* $(L, (l_s \mid s \in S))$*, en el que* L *sea un conjunto y, para cada* $s \in S$*,* $l_s\colon A_s \longrightarrow L$*, si para cada* $(s,s') \in \preceq$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "l_s"'] & & A_{s'} \arrow[dl, "l_{s'}"] \\
& L &
\end{tikzcd}$$

conmuta, y para cada monomorfismo $t\colon L \rightarrowtail \varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{A})$*, si, para cada* $s \in S$*, el digrama:*

$$\begin{tikzcd}
A_s \arrow[rr, "a_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & & \varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) \\
& L \arrow[ur, tail, "t"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces t *es un isomorfismo, i.e., la familia de aplicaciones* $(\mathrm{a}_s \mid s \in S)$ *es* extremal.

Demostración. □

Corolario 12.7.3. *Sea* $(\mathbf{S},\mathcal{A})$ *un sistema proyectivo de conjuntos. Si un par ordenado* $(Q,(q_s \mid s \in S))$*, en el que* Q *es un conjunto y, para cada* $s \in S$*,* $q_s\colon A_s \longrightarrow Q$ *cumple que:*

1. *Para cada* $(s,s') \in \preceq$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "q_s"'] & & A_{s'} \arrow[dl, "q_{s'}"] \\
& Q &
\end{tikzcd}$$

   conmuta.

2. *Para cada par ordenado* $(L,(l_s \mid s \in S))$*, en el que* L *es un conjunto y, para cada* $s \in S$*,* $l_s\colon A_s \longrightarrow L$*, si, para cada* $(s,s') \in \preceq$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "l_s"'] & & A_{s'} \arrow[dl, "l_{s'}"] \\
& L &
\end{tikzcd}$$

   conmuta, entonces hay una única aplicación $u\colon Q \longrightarrow L$ *tal que, para cada* $s \in S$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A_s \arrow[r, "q_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & Q \arrow[d, "u"] \\
& P
\end{tikzcd}$$

   conmuta.

Entonces hay un único isomorfismo t *de* $\varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{A})$ *en* Q *tal que, para cada* $s \in S$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[dr, "q_s"'] & \varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) \arrow[d, "u"] \\
& Q
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

En el ejemplo 12.6.2, para el sistema inductivo

$$(\mathbf{S}, ((\mathrm{Hom}(V_s, B) \mid s \in S), (a_{s,s'} \mid (s, s') \in \preceq))),$$

su límite inductivo está formado, por una parte, por las clases de equivalencia, o *gérmenes de aplicaciones*, $[(f, s)]$, con $(f, s) \in \coprod(\mathrm{Hom}(V_s, B) \mid s \in S)$, y siendo dos pares ordenados (f, s) y (g, s') equivalentes precisamente cuando exista un $s'' \in S$ tal que $V_{s''} \subseteq V_s \cap, V_{s'}$ y $f{\restriction}V_{s''} = g{\restriction}V_{s''}$, y, por otra, por la familia de aplicaciones $(a_s \mid (s, s') \in \preceq)$, en la que, para cada $s \in S$ y para cada $f \in \mathrm{Hom}(V_s, B)$, $a_s(f) = [(f, s)]$

Ejercicio 12.7.4. Demuéstrese que para un sistema inductivo de conjuntos $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$, se cumple que $\varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A}) = \bigcup_{s\in S} \mathrm{Im}(a_s)$

Ejercicio 12.7.5. Demuéstrese que el límite inductivo del sistema inductivo del ejemplo 12.6.3 es isomorfo a $\coprod_{s\in S} A_s$.

Ejercicio 12.7.6. Demuéstrese que el límite inductivo del sistema inductivo del ejemplo 12.6.4 es isomorfo a $\bigcup_{s\in S} X_s$.

Ejercicio 12.7.7. Demuéstrese que el límite inductivo del sistema inductivo del ejemplo 12.6.5 es isomorfo a Q, el conjunto de los números racionales.

Lema 12.7.8. *Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ un sistema inductivo de conjuntos, n un número natural no nulo y $(X_\alpha \mid \alpha \in n) \in \varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A})^n$. Entonces hay un $s \in S$ y una familia $(x_\alpha \mid \alpha \in n)$ en A_s^n tal que, para cada $\alpha \in n$, $a_s(x_\alpha) = X_\alpha$.*

Demostración. Para cada $\alpha \in n$, en virtud de la definición de $\varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A})$, hay un $s_\alpha \in S$ y algún $y_\alpha \in A_{s_\alpha}$ tal que $X_\alpha = a_{s_\alpha}(y_\alpha)$. Ahora bien, por ser $\mathbf{S}$ un conjunto preordenado dirigido superiormente, hay un $s \in S$ tal que, para cada $\alpha \in n$, $s_\alpha \preceq s$. Luego, ya que, para cada $\alpha \in n$,$a_s \circ a_{s_\alpha,s} = a_{s_\alpha}$, tomando como $(x_\alpha \mid \alpha \in n)$ la familia $(a_{s_\alpha,s}(y_\alpha) \mid \alpha \in n)$ en A_s, se cumple que $a_s(x_\alpha) = X_\alpha$, para cada $\alpha \in n$. $\square$

Lema 12.7.9. *Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ un sistema inductivo de conjuntos, n un número natural no nulo, $s \in S$ y $(x_\alpha \mid \alpha \in n) \in A_s^n$. Si, para cada $\alpha, \beta \in n$ se cumple que $a_s(x_\alpha) = a_s(x_\beta)$, entonces hay un $s' \in S$ tal que $s \preceq s'$ y, para cada $\alpha, \beta \in n$, $a_{s,s'}(x_\alpha) = a_{s,s'}(x_\beta)$.*

Demostración. Puesto que, para cada $\alpha, \beta \in n$, se cumple que $a_s(x_\alpha) = a_s(x_\beta)$, entonces, en virtud de la definición de a_s, tenemos que $[(x_\alpha, s)]_{\Phi_{(\mathbf{S},\mathcal{A})}} = [(x_\beta, s)]_{\Phi_{(\mathbf{S},\mathcal{A})}}$, luego, para cada $\alpha, \beta \in n$, hay un $s_{\alpha,\beta} \in S$ tal que $s \preceq s_{\alpha,\beta}$ y $a_{s,s_{\alpha,\beta}}(x_\alpha) = a_{s,s_{\alpha,\beta}}(x_\beta)$.

Ahora bien, por ser $(s_{\alpha,\beta} \mid (\alpha, \beta) \in n^2)$ una familia finita no vacía en S y $\mathbf{S}$ un conjunto preordenado dirigido superiormente, hay un $s' \in S$ tal que, para cada $\alpha, \beta \in n$, $s_{\alpha,\beta} \preceq s'$, luego $s \preceq s'$. Además, para cada $\alpha, \beta \in n$, $a_{s,s'} = a_{s_{\alpha,\beta},s'} \circ a_{s,s_{\alpha,\beta}}$ y ya que $a_{s,s_{\alpha,\beta}}(x_\alpha) = a_{s,s_{\alpha,\beta}}(x_\beta)$, $a_{s_{\alpha,\beta},s'}(a_{s,s_{\alpha,\beta}}(x_\alpha)) = a_{s_{\alpha,\beta},s'}(a_{s,s_{\alpha,\beta}}(x_\beta))$, luego $a_{s,s'}(x_\alpha) = a_{s,s'}(x_\beta)$. $\square$

Proposición 12.7.10. *Sea $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ un sistema inductivo de conjuntos y $(L, (l_s \mid s \in S))$ tal que, para cada $s \in S$, $l_s \colon A_s \longrightarrow L$ y, para cada $(s, s') \in \preceq$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "l_s"'] & & A_{s'} \arrow[dl, "l_{s'}"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

conmute. Entonces para la única aplicación $u\colon \varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) \longrightarrow L$ *tal que, para cada* $s \in S$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) \arrow[d, "u"] \\ & L \end{tikzcd}$$

conmuta, se cumple que:

1. *Una condición necesaria y suficiente para que* u *sea sobreyectiva es que* $L = \bigcup_{s\in S} \mathrm{Im}(l_s)$*.*
2. *Una condición necesaria y suficiente para que* u *sea inyectiva es que, para cada* $s \in S$ *y para cada* $x, y \in A_s$*, si* $l_s(x) = l_s(y)$*, entonces exista un* $s' \in S$ *tal que* $s \preceq s'$ *y* $a_{s,s'}(x) = a_{s,s'}(y)$*.*

Demostración. 1. Puesto que una aplicación es sobreyectiva si y sólo si su imagen coincide con su codominio, u será sobreyectiva precisamente si $u[\varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{A})] = L$. Ahora bien, $\varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) = \bigcup_{s\in S} \mathrm{Im}(a_s)$, luego u será sobreyectiva precisamente si $u[\bigcup_{s\in S} \mathrm{Im}(a_s)] = L$, i.e., si y sólo si $\bigcup_{s\in S} \mathrm{Im}(u \circ a_s) = L$, pero, para cada $s \in S$, $u \circ a_s = l_s$, luego u será sobreyectiva cuando y sólo cuando $\bigcup_{s\in S} \mathrm{Im}(l_s) = L$.

2. *La condición es necesaria.* Supongamos que $u\colon \varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) \longrightarrow L$ sea inyectiva y sean $s \in S$ y $x, y \in A_s$ tales que $l_s(x) = l_s(y)$. Entonces, ya que, para cada $s \in S$, $u \circ a_s = l_s$, $u(a_s(x)) = u(a_s(y))$, luego, por ser u inyectiva, $a_s(x) = a_s(y)$. Por consiguiente, en virtud del lema 12.7.9, hay un $s' \in S$ tal que $s \preceq s'$ y $a_{s,s'}(x) = a_{s,s'}(y)$.

La condición es suficiente. Supongamos que para cada $s \in S$ y para cada $x, y \in A_s$, si $l_s(x) = l_s(y)$, entonces exista un $s' \in S$ tal que $s \preceq s'$ y $a_{s,s'}(x) = a_{s,s'}(y)$. Sean $X, Y \in \varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{A})$ tales que $u(X) = u(Y)$. Entonces, en virtud del lema 12.7.8, hay un $s \in S$ y $x, y \in A_s$ tales que $a_s(x) = X$ y $a_{s'}(y) = Y$. luego $u(a_s(x)) = u(a_s(y))$, pero $u \circ a_s = l_s$, así que $l_s(x) = l_s(y)$. Por lo tanto, en virtud de la hipótesis, existe un $s' \in S$ tal que $s \preceq s'$ y $a_{s,s'}(x) = a_{s,s'}(y)$; pero esto último significa precisamente que $X = Y$, ya que $X = [(x,s)]_{\Phi(\mathbf{S},\mathcal{A})}$, $Y = [(y,s)]_{\Phi(\mathbf{S},\mathcal{A})}$ y $X = Y$ si y sólo si existe un $s' \in S$ tal que $s \preceq s'$ y $a_{s,s'}(x) = a_{s,s'}(y)$

□

Proposición 12.7.11. *Sea* $(\mathbf{S},\mathcal{A})$ *un sistema inductivo de conjuntos. Entonces una condición suficiente para que* $a_s\colon A_s \longrightarrow \varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{A})$ *sea inyectiva, sea cual sea* $s \in S$*, es que, para cada* $(s,s') \in \preceq$*,* $a_{s,s'}\colon A_s \longrightarrow A_{s'}$ *sea inyectiva.*

Demostración. □

Proposición 12.7.12. *Sea* $(\mathbf{S},\mathcal{A})$ *un sistema inductivo de conjuntos. Entonces una condición suficiente para que* $a_s\colon A_s \longrightarrow \varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{A})$ *sea sobreyectiva, sea cual sea* $s \in S$*, es que, para cada* $(s,s') \in \preceq$*,* $a_{s,s'}\colon A_s \longrightarrow A_{s'}$ *sea sobreyectiva.*

Demostración. □

Corolario 12.7.13. *Sea* $(\mathbf{S},\mathcal{A})$ *un sistema inductivo de conjuntos. Entonces una condición suficiente para que* $a_s\colon A_s \longrightarrow \varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{A})$ *sea biyectiva, sea cual sea* $s \in S$*, es que, para cada* $(s,s') \in \preceq$*,* $a_{s,s'}\colon A_s \longrightarrow A_{s'}$ *sea biyectiva.*

Demostración. □

12.8. Morfismos inductivos entre sistemas inductivos.

Definición 12.8.1. Si $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ y $(\mathbf{T}, \mathcal{B})$ son dos sistemas inductivos de conjuntos, un *morfismo inductivo* de $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ en $(\mathbf{T}, \mathcal{B})$ es un triplo ordenado $((\mathbf{S}, \mathcal{A}), \Phi, (\mathbf{T}, \mathcal{B}))$, abreviado como Φ y denotado por $\Phi\colon (\mathbf{S}, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbf{T}, \mathcal{B})$, en el que $\Phi = (\varphi, f)$, con $\varphi\colon \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{T}$ y $f = (f_s \mid s \in S)$, siendo, para cada $s \in S$, $f_s\colon A_s \longrightarrow B_{\varphi(s)}$, i.e., $(f_s \mid s \in S) \in \prod_{s\in S} \mathrm{Hom}(A_s, B_{\varphi(s)})$, tal que, para cada $(s, s') \in \preceq$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A_s \arrow[r, "f_s"] \arrow[d, "a_{s,s'}"'] & B_{\varphi(s)} \arrow[d, "b_{\varphi(s),\varphi(s')}"] \\ A_{s'} \arrow[r, "f_{s'}"'] & B_{\varphi(s')} \end{tikzcd}$$

conmuta. Además, $(\mathbf{S}, \mathcal{B}_\varphi)$ es el sistema inductivo de conjuntos para el que la coordenada s-ésima de la primera componente de $\mathcal{B}_\varphi$ es $B_{\varphi(s)}$, para cada $s \in S$, y la coordenada (s, s')-ésima de la segunda componente de $\mathcal{B}_\varphi$ es $b_{\varphi(s),\varphi(s')}$, para cada $(s, s') \in \preceq$.

Proposición 12.8.2.

1. *Si* $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ *es un sistema inductivo de conjuntos, entonces*
$$\mathrm{id}_{(\mathbf{S},\mathcal{A})} = (\mathrm{id}_{\mathbf{S}}, \mathrm{id}_A),$$
es un endomorfismo inductivo de $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$*, el morfismo inductivo* identidad *de* $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$.
2. *Si* $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$*,* $(\mathbf{T}, \mathcal{B})$ *y* $(\mathbf{U}, \mathcal{C})$ *son tres sistemas inductivos de conjuntos,* $\Phi = (\varphi, f)$ *un morfismo proyectivo del primero en el segundo y* $\Psi = (\psi, g)$ *uno del segundo en el tercero, entonces*
$$\Psi \circ \Phi = (\psi \circ \varphi, g_\varphi \circ f),$$
siendo g_φ *la familia indexada por* S*, cuya coordenada* s*-ésima es:*
$$g_{\varphi(s)}\colon B_{\varphi(s)} \longrightarrow C_{\psi(\varphi(s))},$$
y, por lo tanto, siendo $g_\varphi \circ f$ *la familia de aplicaciones, indexada por* S*, cuya coordenada* s*-ésima es:*
$$A_s \xrightarrow{f_s} B_{\varphi(s)} \xrightarrow{g_{\varphi(s)}} C_{\psi(\varphi(s))},$$
es un morfismo inductivo de $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ *en* $(\mathbf{U}, \mathcal{C})$*, el morfismo inductivo* composición *de ambos.*

Demostración. Puesto que la primera parte es sencilla de demostrar, nos limitamos a demostrar la segunda.

Por ser $\Phi = (\varphi, f)$ y $\Psi = (\psi, g)$ morfismos inductivos, los diagramas:

$$\begin{tikzcd} A_s \arrow[r, "f_s"] \arrow[d, "a_{s,s'}"'] & B_{\varphi(s)} \arrow[d, "b_{\varphi(s),\varphi(s')}"] \\ A_{s'} \arrow[r, "f_{s'}"'] & B_{\varphi(s')} \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} B_t \arrow[r, "g_t"] \arrow[d, "b_{t,t'}"'] & C_{\psi(t)} \arrow[d, "c_{\psi(t),\psi(t')}"] \\ B_{t'} \arrow[r, "g_{t'}"'] & C_{\psi(t')} \end{tikzcd}$$

conmutan. Por consiguiente el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A_s \arrow[r, "g_{\varphi(s)} \circ f_s"] \arrow[d, "a_{s,s'}"'] & C_{\psi(\varphi(s))} \arrow[d, "c_{\psi(\varphi(s)),\psi(\varphi(s'))}"] \\
A_{s'} \arrow[r, "g_{\varphi(s')} \circ f_{s'}"'] & C_{\psi(\varphi(s'))}
\end{tikzcd}$$

también conmuta. □

Proposición 12.8.3. *Sean* $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$, $(\mathbf{T}, \mathcal{B})$, $(\mathbf{U}, \mathcal{C})$ *y* $(\mathbf{V}, \mathcal{D})$ *cuatro sistemas inductivos de conjuntos,* Φ *un morfismo inductivo de* $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ *en* $(\mathbf{T}, \mathcal{B})$*,* Ψ *uno de* $(\mathbf{T}, \mathcal{B})$ *en* $(\mathbf{U}, \mathcal{C})$ *y* Ξ *uno de* $(\mathbf{U}, \mathcal{C})$ *en* $(\mathbf{V}, \mathcal{D})$*. Entonces:*

1. (Asociatividad). *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{S}, \mathcal{A}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Psi \circ \Phi"'] \arrow[drr, bend left=60, "(\Xi \circ \Psi) \circ \Phi"] \arrow[drr, bend right=60, "\Xi \circ (\Psi \circ \Phi)"'] & (\mathbf{T}, \mathcal{B}) \arrow[d, "\Psi"'] \arrow[dr, "\Xi \circ \Psi"] & \\
& (\mathbf{U}, \mathcal{C}) \arrow[r, "\Xi"'] & (\mathbf{V}, \mathcal{D})
\end{tikzcd}$$

   conmuta.

2. (Neutros). *Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{S}, \mathcal{A}) \arrow[r, "\mathrm{id}_{(\mathbf{S}, \mathcal{A})}"] \arrow[dr, "\Phi"'] & (\mathbf{S}, \mathcal{A}) \arrow[d, "\Phi"] \\
& (\mathbf{T}, \mathcal{B})
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
(\mathbf{S}, \mathcal{A}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Phi"'] & (\mathbf{T}, \mathcal{B}) \arrow[d, "\mathrm{id}_{(\mathbf{T}, \mathcal{B})}"] \\
& (\mathbf{T}, \mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

   conmutan.

Demostración. □

12.9. Límites inductivos de los morfismos inductivos.

Proposición 12.9.1. *Si* $\Phi\colon (\mathbf{S}, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbf{T}, \mathcal{B})$ *es un morfismo inductivo, entonces hay una única aplicación*

$$\varinjlim \Phi\colon \varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A}) \longrightarrow \varinjlim(\mathbf{T}, \mathcal{B}),$$

denominada el límite inductivo *de* Φ *tal que, para cada* $s \in S$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[d, "f_s"'] & \varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A}) \arrow[d, "\varinjlim \Phi"] \\
B_{\varphi(s)} \arrow[r, "b_{\varphi(s)}"'] & \varinjlim(\mathbf{T}, \mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
A_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[d, "f_s"'] & \varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A}) \arrow[d, "\coprod f"] \arrow[dd, bend left=60, "\varinjlim \Phi"] \\
B_{\varphi(s)} \arrow[r, "b_{\varphi(s)}"'] \arrow[dr, "b_{\varphi(s)}"'] & \varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{B}_{\varphi}) \arrow[d, "\mathrm{i}_{\varphi}"] \\
 & \varinjlim(\mathbf{T}, \mathcal{B})
\end{tikzcd}
$$

conmuta, siendo i_{φ} *la única aplicación de* $\varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{B}_{\varphi})$ *en* $\varinjlim(\mathbf{T}, \mathcal{B})$ *tal que el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\coprod(B_{\varphi(s)} \mid s \in S) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\Phi(\mathbf{S}, \mathcal{B}_{\varphi})}"] \arrow[d, "\mathrm{in}_{\varphi}"'] & \varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{B}_{\varphi}) \arrow[d, "\mathrm{i}_{\varphi}"] \\
\coprod(B_t \mid t \in T) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\Phi(\mathbf{T}, \mathcal{B})}"'] & \varinjlim(\mathbf{T}, \mathcal{B})
\end{tikzcd}
$$

conmuta, y, denotándola por el mismo símbolo, $\coprod f$ *la única aplicación de* $\varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ *en* $\varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{B}_{\varphi})$ *tal que el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\coprod_{s \in S} A_s \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\Phi(\mathbf{S}, \mathcal{A})}"] \arrow[d, "\coprod f"'] & \varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A}) \arrow[d, "\coprod f"] \\
\coprod_{s \in S} B_{\varphi(s)} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\Phi(\mathbf{S}, \mathcal{B}_{\varphi})}"'] & \varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{B}_{\varphi})
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Así que

$$\varinjlim \Phi = \mathrm{i}_{\varphi} \circ \coprod f.$$

Demostración. $\square$

Proposición 12.9.2. *Sean* $\Phi\colon (\mathbf{S}, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbf{T}, \mathcal{B})$ *y* $\Psi\colon (\mathbf{T}, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbf{U}, \mathcal{C})$ *dos morfismos inductivos. Entonces:*

1. $\varinjlim \mathrm{id}_{(\mathbf{S}, \mathcal{A})} = \mathrm{id}_{\varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A})}$.
2. $\varinjlim(\Psi \circ \Phi) = \varinjlim \Psi \circ \varinjlim \Phi$.

Además, si $\Phi = (\varphi, f)$ *y* $\Psi = (\psi, g)$*, entonces el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{A}) \arrow[rr, "\varinjlim \Phi"] \arrow[rrrr, bend left, "\varinjlim \Psi\circ\Phi"] \arrow[dr, "\coprod f"'] \arrow[ddrr, bend right, "\coprod(g_\varphi\circ f)"'] & & \varinjlim(\mathbf{T},\mathcal{B}) \arrow[rr, "\varinjlim \Psi"] \arrow[dr, "\coprod g"] & & \varinjlim(\mathbf{U},\mathcal{C}) \\
& \varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{B}_\varphi) \arrow[ur, "\mathrm{i}_\varphi"] \arrow[rr, "\varinjlim(\varphi, g_\varphi)"] \arrow[dr, "\coprod g_\varphi"] & & \varinjlim(\mathbf{T},\mathcal{C}_\psi) \arrow[ur, "\mathrm{i}_\psi"] & \\
& & \varinjlim(\mathbf{S},\mathcal{C}_{\psi\circ\varphi}) \arrow[ur, "\mathrm{i}_\varphi"] \arrow[uurr, bend right, "\mathrm{i}_{\psi\circ\varphi}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Demostración. □

Proposición 12.9.3. *Sea* $\Phi\colon (\mathbf{S},\mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbf{T},\mathcal{B})$ *un morfismo inductivo. Si hay un subconjunto* S' *de* S *que es cofinal en* $\mathbf{S}$*,* $\varphi[S']$ *es cofinal en* $\mathbf{T}$ *y, para cada* $s' \in S'$*,* $f_{s'}\colon A_{s'} \longrightarrow B_{\varphi(s')}$ *es biyectiva, entonces* $\varinjlim \Phi$ *es biyectiva.*

Demostración. □

Antes de enunciar un corolario de la proposición anterior, convenimos que si $(\mathbf{S},\mathcal{A})$ es un sistema inductivo de conjuntos y S' un subconjunto de S tal que, siendo $\mathbf{S}'$ el par ordenado $(S', \preceq \cap (S' \times S'))$, $\mathbf{S}'$ es, a su vez, un conjunto preordenado dirigido superiormente, entonces $(\mathbf{S},\mathcal{A})\restriction S'$, la *restricción de* $(\mathbf{S},\mathcal{A})$ *a* $\mathbf{S}'$, denota el sistema inductivo de conjuntos cuya primera coordenada es $(S', \preceq \cap (S' \times S'))$ y cuya segunda coordenada tiene como primera componente la restricción de $(A_s \mid s \in S)$ a S' y como segunda componente la restricción de $(a_{s,s'} \mid (s,s') \in \preceq)$ a $\preceq \cap (S' \times S')$.

Corolario 12.9.4. *Si* $(\mathbf{S},\mathcal{A})$ *es un sistema inductivo de conjuntos y* S' *es un subconjunto cofinal de* $\mathbf{S}$*, entonces para el morfismo inductivo canónico* $\Phi = (\mathrm{in}_{\mathbf{S}'}, (\mathrm{id}_{A_{s'}} \mid s' \in S'))$ *de* $(\mathbf{S},\mathcal{A})\restriction S'$ *en* $(\mathbf{S},\mathcal{A})$ *se cumple que* $\varinjlim \Phi$ *es una aplicación biyectiva.*

Demostración. □

Del mismo modo que para el universo de conjuntos y aplicaciones, demostramos la existencia de productos y coproductos de familias de conjuntos así como la de igualadores de pares de aplicaciones con el mismo dominio y codominio, ahora, para el universo de discurso formado por los sistemas inductivos de conjuntos y los morfismos entre ellos, demostramos la existencia de productos y coproductos de familias de sistemas inductivos de conjuntos, así como la de igualadores de pares de morfismos con el mismo dominio y codominio.

12.10. Algunos límites y colímites de familias de sistemas inductivos.

Proposición 12.10.1. *Sea* $((\mathbf{S}^i,\mathcal{A}^i) \mid i \in I)$ *una familia de sistemas inductivos de conjuntos. Entonces hay un par ordenado* $\big(\prod((\mathbf{S}^i,\mathcal{A}^i) \mid i \in I), (\mathrm{pr}^i \mid i \in I)\big)$*, también denotado por* $\big(\prod_{i\in I}(\mathbf{S}^i,\mathcal{A}^i), (\mathrm{pr}^i \mid i \in I)\big)$*, en el que* $\prod((\mathbf{S}^i,\mathcal{A}^i) \mid i \in I)$*, el* producto *de* $((\mathbf{S}^i,\mathcal{A}^i) \mid i \in I)$*, es un sistema inductivo de conjunto y, para cada* $i \in I$*,* pr^i*, la* proyección canónica i-ésima *del producto, es un morfismo inductivo de* $\prod((\mathbf{S}^i,\mathcal{A}^i) \mid i \in I)$ *en* $(\mathbf{S}^i,\mathcal{A}^i)$*, que tiene la siguiente* propiedad universal*:*

Para cada par ordenado $((\mathbf{T},\mathcal{B}), (\Psi^i \mid i \in I))$*, en el que* $(\mathbf{T},\mathcal{B})$ *es un sistema inductivo de conjuntos y, para cada* $i \in I$*,* $\Psi^i\colon (\mathbf{T},\mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbf{S}^i,\mathcal{A}^i)$*, hay un único* *morfismo inductivo* $\left\langle \Psi^i \mid i \in I \right\rangle : (\mathbf{T}, \mathcal{B}) \longrightarrow \coprod((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I)$ *tal que, para cada* $i \in I$*, el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbf{T}, \mathcal{B}) \arrow[d, "\left\langle \Psi^i \mid i \in I \right\rangle"'] \arrow[dr, "\Psi^i"] & \\
\prod((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I) \arrow[r, "\mathrm{pr}^i"'] & (\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i)
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Demostración. Es suficiente tomar, por una parte, como primera coordenada de $\prod((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I)$ el producto de la familia de conjuntos preordenados d.s. $(\mathbf{S}^i \mid i \in I)$ y, como segunda coordenada, el par ordenado cuya primera componente es

$$\left(\prod(A^i_{s_i} \mid i \in I) \mid (s_i \mid i \in I) \in \prod(S^i \mid i \in I)\right)$$

y cuya segunda componente es

$$\left(\prod(a^i_{s_i, s'_i} \mid i \in I) \mid ((s_i \mid i \in I), (s'_i \mid i \in I)) \in \preceq\right);$$

y, por otra parte, para cada $i \in I$, como primera coordenada de pr^i, pr_i, la proyección canónica de $\prod(\mathbf{S}^i \mid i \in I)$ en $\mathbf{S}^i$, y, como segunda coordenada, $(\mathrm{pr}_{A^i_{s_i}} \mid (s_i \mid i \in I) \in \prod(S^i \mid i \in I))$

□

Proposición 12.10.2. *Sea* $((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I)$ *una familia de sistemas inductivos de conjuntos. Entonces hay un par ordenado* $\left(\coprod((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I), (\mathrm{in}^i \mid i \in I)\right)$*, también denotado por* $\left(\coprod_{i\in I}(\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i), (\mathrm{in}^i \mid i \in I)\right)$*, en el que* $\coprod((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I)$*, el* coproducto *de* $((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I)$*, es un sistema inductivo de conjuntos y, para cada* $i \in I$*,* in^i*, la* inclusión canónica i-ésima *del coproducto, es un morfismo inductivo de* $(\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i)$ *en* $\coprod((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I)$*, que tiene la siguiente* propiedad universal*:*

Para cada par ordenado $((\mathbf{T}, \mathcal{B}), (\Psi^i \mid i \in I))$*, en el que* $(\mathbf{T}, \mathcal{B})$ *es un sistema inductivo de conjuntos y, para cada* $i \in I$*,* $\Psi_i \colon (\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \longrightarrow (\mathbf{T}, \mathcal{B})$*, hay un único morfismo inductivo* $\left[\Psi^i \mid i \in I\right] : \coprod((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I) \longrightarrow (\mathbf{T}, \mathcal{B})$ *tal que, para cada* $i \in I$*, el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \arrow[r, "\mathrm{in}^i"] \arrow[dr, "\Psi^i"'] & \coprod((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I) \arrow[d, "{[f_i \mid i \in I]}"] \\
& (\mathbf{T}, \mathcal{B})
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Demostración. Es suficiente tomar, por una parte, como primera coordenada de $\coprod((\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i) \mid i \in I)$ el coproducto de la familia de conjuntos preordenados d.s. $(\mathbf{S}^i \mid i \in I)$ y, como segunda coordenada, el par ordenado cuya primera componente es

$$(A^i_s \mid (s, i) \in \coprod(S^i \mid i \in I))$$

y cuya segunda componente es

$$(a^i_{s,s'} \mid ((s, i), (s', i)) \in \preceq);$$

y, por otra parte, para cada $i \in I$, como primera coordenada de in^i, in_i, la inclusión canónica de $\mathbf{S}^i$ en $\coprod(\mathbf{S}^i \mid i \in I)$, y, como segunda coordenada, $(\mathrm{id}_{A^i_s} \mid (s, i) \in \coprod(S^i \mid i \in I))$.

□

Proposición 12.10.3. *Sean* $\Phi, \Psi\colon (\mathbf{S}, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbf{T}, \mathcal{B})$ *dos morfismos inductivos, con* $\Phi = (\varphi, f)$ *y* $\Psi = (\psi, g)$*. Entonces existe un par ordenado* $(\mathrm{Eq}(\Phi, \Psi), \mathrm{eq}(\Phi, \Psi))$, *el* igualador *de* Φ *y* Ψ*, en el que* $\mathrm{Eq}(\Phi, \Psi)$ *es un sistema inductivo de conjuntos y* $\mathrm{eq}(\Phi, \Psi)$ *un morfismo inductivo de* $\mathrm{Eq}(\Phi, \Psi)$ *en* $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$*, que tiene las siguientes propiedades:*

1. $\Phi \circ \mathrm{eq}(\Phi, \Psi) = \Psi \circ \mathrm{eq}(\Phi, \Psi)$.
2. (Propiedad universal del igualador) *Para cualquier sistema proyectivo de conjuntos* $(\mathbf{U}, \mathcal{C})$ *y cada morfismo proyectivo* $\Xi\colon (\mathbf{U}, \mathcal{C}) \longrightarrow (\mathbf{S}, \mathcal{A})$*, si* $\Phi \circ \Xi = \Psi \circ \Xi$*, entonces hay un único morfismo proyectivo* $\Gamma\colon (\mathbf{U}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Eq}(\Phi, \Psi)$ *tal que* $\mathrm{eq}(\Phi, \Psi) \circ \Gamma = \Xi$*.*

Demostración. Es suficiente tomar, por una parte, como primera coordenada de $\mathrm{Eq}(\Phi, \Psi)$, el conjunto preordenado $\mathbf{Eq}(\varphi, \psi)$, formado por el igualador de φ y ψ, y la restricción del preorden de $\mathbf{S}$ a ésa parte, y como segunda coordenada, $\mathcal{E}$, el par ordenado cuya primera componente, E_s, para cada $s \in \mathrm{Eq}(\varphi, \psi)$, es $\mathrm{Eq}(f_s, g_s)$, y cuya segunda componente, $e_{s,s'}$, para cada $s, s' \in \mathrm{Eq}(\varphi, \psi)$, tal que $s \preceq s'$, es la única aplicación de $\mathrm{Eq}(f_s, g_s)$ en $\mathrm{Ceq}(f_{s'}, g_{s'})$ tal que $a_{s,s'} \circ \mathrm{eq}(f_s, g_s) = \mathrm{eq}(f_{s'}, g_{s'}) \circ e_{s,s'}$; y, por otra parte, como primera coordenada de $\mathrm{eq}(\Phi, \Psi)$, $\mathrm{eq}(\varphi, \psi)$, y, como segunda coordenada $(\mathrm{eq}(f_s, g_s) \mid s \in \mathrm{eq}(\varphi, \psi))$.

□

13. Números naturales.

> It was a commonplace belief among philosophers and mathematicians of the 19th century that the existence of infinite sets could be proved, and in particular the set of natural numbers could be "constructed"out of thin air, "by logic alone."All the proposed "proofs"involved the faulty General Comprehension Principle in some form or other. We know better now: *Logic can codify the valid forms of reasoning but it cannot prove the existence of anything, let alone infinite sets.* By taking account of this fact cleanly and explicitly in the formulation of his axioms, Zermelo made a substantial contribution to the process of purging logic of ontological concerns, a necessary step in the rigurous development of logic as a science in its own right in our century.
>
> *Y. Moschovakis.*

> Brouwer made it clear, as I think beyond any doubt, that there is no evidence supporting the belief in the existential character of the totality of all natural numbers . . . The sequence of numbers which grows beyond any stage already reached by passing to the next number, is the manifold of possibilities open towards infinity: it remains forever in the state of creation but is not a closed realm of things existing in themselves. That we blindly converted one into the other is the true source of our difficulties, including the antinomies – a source of more fundamental nature than Russell's vicious principle indicated. Brouwer mathematics, nourished by a belief in the 'absolute' that transcends all possibilities of realization, goes beyond such statements as can claim real meaning and truth founded on evidence.
>
> *H. Weyl.*

En este sección enunciamos el axioma del conjunto infinito, que nos permitirá demostrar la existencia de un álgebra de Dedekind-Peano y, para tales álgebras, obtendremos el principio de la definición por recursión finita, a partir del cual demostraremos que las álgebras de Dedekind-Peano son esencialmente únicas, y que otros principios de definición por recursión más complejos, se pueden obtener a partir del mismo. Además, demostraremos que el conjunto subyacente del álgebra Dedekind-Peano, que será el conjunto de los números naturales, está dotado de una buena ordenación, y que tal ordenación es compatible con las operaciones aritméticas usuales, definidas por recursión, sobre el conjunto de los números naturales.

Los axiomas de la teoría de conjuntos de **ZFSk** hasta ahora enunciados, sólo nos permiten afirmar la existencia de una infinidad de conjuntos distintos, e.g., los conjuntos $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, ..., pero no, y éste será el primer gran salto de lo finito a lo transfinito, la existencia de un conjunto, actualmente, *infinito*. Para poder asegurar la existencia de al menos un conjunto infinito, procedemos axiomáticamente, tal como hizo Zermelo.

13.1. El axioma del conjunto infinito. Antes de enunciar el axioma del conjunto infinito, recordamos que si A es un conjunto, entonces A^+ denota el conjunto sucesor de A, que es $A \cup \{A\}$.

Axioma del conjunto infinito. *Hay al menos un conjunto del cual es miembro el conjunto vacío, y que está cerrado bajo la operación de formación del sucesor de un conjunto:*

$$\exists A\,(\varnothing \in A \wedge \forall x\,(x \in A \rightarrow x^+ \in A)).$$

El axioma del conjunto infinito, bajo la forma anterior, se debe a von Neumann; el que propuso Zermelo es:

$$\exists A\,(\varnothing \in A \wedge \forall x\,(x \in A \rightarrow \{x\} \in A)).$$

Obsérvese que lo que diferencia al axioma propuesto por von Neumann del propuesto por Zermelo, reside en la operación de formación del conjunto sucesor, que, en el caso de von Neumann, es la que a un conjunto x la asigna x^+ y, en el de Zermelo, la que a x le asigna $\{x\}$.

De ahora en adelante usaremos el propuesto por von Neumann.

Antes de proseguir con la obtención de algunas de las consecuencias de la admisión del nuevo axioma, conviene recordar que Dedekind, después de definir a los conjuntos *infinitos* como aquéllos que son isomorfos a un subconjunto estricto de sí mismos, transformando de este modo un teorema de Galileo, según el cual hay tantos números naturales como cuadrados de los mismos, en una definición; propuso, como *teorema*, la existencia de al menos un conjunto infinito. De dicho *teorema* dió la siguiente *demostración*:

> El mundo de mis pensamientos, es decir, la totalidad S de todas las cosas que pueden ser objeto de mi pensamiento es infinito. De hecho, si s indica un elemento de S, el pensamiento s' de que s puede ser objeto de mi pensamiento es él mismo un elemento de S. Si se considera s' como la imagen $\varphi(s)$ del elemento s, entonces la representación φ de S determinada de esa manera tiene la propiedad de que la imagen S' es parte de S; además, S' es parte propia de S, ya que en S hay elementos (e.g., mi propio yo) diferentes de cada pensamiento de la forma s', y por lo tanto no contenido en S'. Por último, está claro que si a y b son elementos distintos de S, entonces las imágenes a' y b' serán diferentes, es decir φ es una representación inyectiva. Por consiguiente, S es infinito.

Sin entrar en los problemas que plantean los aspectos no matemáticos de la anterior *demostración*, cabe señalar que si se admitiera la existencia del conjunto S de todas las cosas que puedan ser objeto del pensamiento (de Dedekind), entonces, ya que cada subconjunto de S, podría ser objeto del pensamiento (de Dedekind), el conjunto $\mathrm{Sub}(S)$, formado por la totalidad de los subconjuntos de S, debería estar incluido en S. Por lo tanto ambos conjuntos deberían ser isomorfos, en virtud del teorema de Cantor-Bernstein, lo cual entraría en contradicción con un teorema de Cantor. Luego, desgraciadamente, no se puede admitir como existente el conjunto de todas las cosas que puedan ser objeto del pensamiento.

Hay que decir, que Peirce también propuso, independientemente de Dedekind, el mismo concepto de infinitud que éste último; y que la *demostración* anterior de Dedekind es similar a una de Bolzano.

13.2. Algebras de Dedekind-Peano. Dedekind, en una carta dirigida a Keferstein, y después de indicarle que su ensayo sobre los números no fué escrito en un día; sino que, más bien, era una síntesis construida después de un prolongado trabajo, basado en un análisis previo de la sucesión de los números naturales tal cual como se presenta, en la experiencia, por así decir, para nuestra consideración; se pregunta por:

> What are the mutually independent fundamental properties of the sequence $\mathbb{N}$, that is, those properties that are not derivable from one another but from which all others follow? And how should we divest these properties of their specifically arithmetic character so that they are subsumed under more general notions and under activities of the understanding *whithout* which no thinking is possible but *with* which a foundation is provided for the reliability and completeness of proofs and for the construction of consistent notions and definitions?

La respuesta a lo anterior viene dada por el concepto de *álgebra de Dedekind-Peano*, de las que a continuación, apoyándonos sobre el axioma del conjunto infinito, demostraremos la existencia, y cuya definición, es la siguiente.

Definición 13.2.1. Un *álgebra de Dedekind-Peano* es un triplo ordenado $\mathbf{A} = (A, f, e)$ en el que A es un conjunto, f una endoaplicación de A y e un miembro de A, tal que:

1. f es inyectiva.
2. $\mathrm{Im}(f) \cap \{e\} = \varnothing$.
3. $\forall X \subseteq A\,((\, f[X] \subseteq X \wedge e \in X\,) \to X = A\,)$.

Observemos que la segunda claúsula de la definición anterior afirma simplemente que e no es de la forma $f(a)$, sea cual sea $a \in A$, y que la última cláusula de la misma, dice que la única parte de A que tiene las propiedades de está cerrada bajo f y contener como miembro a e, es la propia A.

Como primer paso hacia la demostración de la existencia de un álgebra de Dedekind-Peano, establecemos el siguiente teorema.

Teorema 13.2.2. *Hay un único conjunto, el conjunto de los* números naturales*, denotado por* $\mathbb{N}$*, que tiene las siguientes propiedades:*

1. $\varnothing \in \mathbb{N} \wedge \forall n\,(\, n \in \mathbb{N} \to n^+ \in \mathbb{N}\,)$.
2. $\forall B\,((\, \varnothing \in B \wedge \forall y\,(y \in B \to y^+ \in B\,)) \to \mathbb{N} \subseteq B\,)$

Demostración. Existencia. En virtud del axioma del conjunto infinito, existe al menos un conjunto A tal que $\varnothing \in A$ y para cada $x \in A$, $x^+ \in A$. Sea A uno de ellos, arbitrario, pero fijo. Entonces para el conjunto $\mathcal{X}$ definido como:

$$\mathcal{X} = \{\, X \in \mathrm{Sub}(A) \mid \varnothing \in X \wedge \forall x\,(x \in X \to x^+ \in X)\,\},$$

se cumple que $\mathcal{X} \neq \varnothing$, porque $A \subseteq A$, $\varnothing \in A$ y para cada $x \in A$, $x^+ \in A$. Luego existe el conjunto $\mathbb{N} = \bigcap \mathcal{X}$ y es tal que $\varnothing \in \mathbb{N}$, porque, para cada $X \in \mathcal{X}$, $\varnothing \in X$, y, para cada $x \in \mathbb{N}$, $x^+ \in \mathbb{N}$, ya que, para cada $X \in \mathcal{X}$, $x^+ \in X$.

Ahora demostramos que $\mathbb{N}$ está incluido en cualquier conjunto B que esté cerrado bajo la formación del conjunto sucesor y para el que $\varnothing \in B$. Sea B un tal conjunto, arbitrario, pero fijo. Entonces, ya que $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B$ está cerrado bajo la formación del conjunto sucesor y $\varnothing \in A \cap B$, se cumple que $A \cap B \in \mathcal{X}$, por lo tanto $\mathbb{N} \subseteq A \cap B$, pero $A \cap B \subseteq B$, así que $\mathbb{N} \subseteq B$.

Unicidad. Si $\mathbb{N}'$ tuviera las mismas propiedades que tiene $\mathbb{N}$, entonces $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}'$ y $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$, luego $\mathbb{N} = \mathbb{N}'$. $\square$

Definición 13.2.3. Al conjunto vacío, cuando lo consideremos como miembro del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, lo denotamos por 0. Además, 1 denota al sucesor de 0, i.e., $1 = \{0\}$, 2 al sucesor de 1, i.e., $2 = \{0, 1\}$, ..., 9 al sucesor de 8, i.e., $9 = \{0, 1, \ldots, 8\}$ y 10 al sucesor de 9, i.e., $\{0, 1, \ldots, 9\}$.

Proposición 13.2.4. *La relación binaria* Sc *sobre* $\mathbb{N}$*, definida como:*

$$\mathrm{Sc} = \{\, (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n = m^+ \,\},$$

es una endofunción de $\mathbb{N}$*.*

Demostración. Porque, para cada número natural está unívocamente determinado el conjunto sucesor del mismo y, además, tal conjunto sucesor, en este caso, es un número natural. □

Definición 13.2.5. Denotamos por sc la endoaplicación de $\mathbb{N}$ cuya función subyacente es Sc y la denominamos la aplicación *sucesor* de $\mathbb{N}$. Además, denotamos el valor de sc en n, para cada $n \in \mathbb{N}$, por n^+ o $n + 1$. Por último, denotamos por $\mathbf{N}$ el triplo ordenado $(\mathbb{N}, \mathrm{sc}, 0)$.

Proposición 13.2.6. *Para cada número natural* $n \in \mathbb{N}$*,* $\mathrm{sc}(n) \neq 0$*, o, lo que es equivalente,* $\{0\} \cap \mathrm{Im}(\mathrm{sc}) = \varnothing$*.*

Demostración. Porque, para cada número natural $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{sc}(n) = n \cup \{n\}$ no es vacío. □

Teorema 13.2.7 (Principio de la demostración por inducción finita)**.** *Para cada subconjunto* X *de* $\mathbb{N}$*, si* $0 \in X$ *y* $\mathrm{sc}[X] \subseteq X$*, entonces* $X = \mathbb{N}$*.*

Demostración. Sea X un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que $0 \in X$ y $\mathrm{sc}[X] \subseteq X$. Entonces $\mathbb{N} \subseteq X$, ya que $\mathbb{N}$ es el mínimo conjunto con tales propiedades, por lo tanto, ya que por hipótesis $X \subseteq \mathbb{N}$, $X = \mathbb{N}$. □

Proposición 13.2.8. *El principio de la demostración por inducción finita equivale a que* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{N}}(\varnothing) = \mathbb{N}$*, siendo* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{N}}(\varnothing)$ *el mínimo subconjunto de* $\mathbb{N}$ *que contiene al vacío, al que pertenece el* 0 *y que está cerrado bajo* sc*, i.e., siendo* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{N}}(\varnothing)$ *el conjunto definido como:*

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{N}}(\varnothing) = \bigcap \{\, Y \subseteq \mathbb{N} \mid 0 \in Y \wedge \mathrm{sc}[Y] \subseteq Y \,\}.$$

Demostración. Supongamos el principio de la demostración por inducción finita, i.e., que para cada subconjunto X de $\mathbb{N}$, si $0 \in X$ y $\mathrm{sc}[X] \subseteq X$, entonces $X = \mathbb{N}$. Entonces, por ser $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$ y cumplirse que $0 \in \mathbb{N}$ y que $\mathrm{sc}[\mathbb{N}] \subseteq \mathbb{N}$, tenemos que $\mathbb{N}$ pertenece al conjunto $\{\, Y \subseteq \mathbb{N} \mid 0 \in Y \wedge \mathrm{sc}[Y] \subseteq Y \,\}$, luego $\mathrm{Sg}_{\mathbf{N}}(\varnothing) \subseteq \mathbb{N}$. Además, $\mathbb{N} \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{N}}(\varnothing)$, porque $0 \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{N}}(\varnothing)$, $\mathrm{sc}[\mathrm{Sg}_{\mathbf{N}}(\varnothing)] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{N}}(\varnothing)$ y $\mathbb{N}$ es el mínimo conjunto con tales propiedades. Por lo tanto $\mathrm{Sg}_{\mathbf{N}}(\varnothing) = \mathbb{N}$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{N}}(\varnothing) = \mathbb{N}$. Entonces, si un subconjunto X de $\mathbb{N}$ es tal que $0 \in X$ y $\mathrm{sc}[X] \subseteq X$, entonces $X \in \{\, Y \subseteq \mathbb{N} \mid 0 \in Y \wedge \mathrm{sc}[Y] \subseteq Y \,\}$, luego $\mathrm{Sg}_{\mathbf{N}}(\varnothing) \subseteq X$, así que $\mathbb{N} \subseteq X$, pero $X \subseteq \mathbb{N}$, luego $X = \mathbb{N}$. □

A partir del principio de la demostración por inducción finita, se deduce que una condición suficiente para que todos los números naturales tenga una cierta propiedad, es que la tenga el 0, y que cuando un número natural arbitrario la tenga, también la tenga su sucesor, i.e., si $\varphi(x, t_{[n]})$ es una fórmula, entonces

$$\forall t_0, \ldots, t_{n-1} \, ((\, \varphi(0, t_{[n]}) \wedge \forall x \in \mathbb{N} \, (\, \varphi(x, t_{[n]}) \to \varphi(x^+, t_{[n]}) \,) \,) \to \forall x \in \mathbb{N} \, (\, \varphi(x, t_{[n]}) \,) \,)).$$

Proposición 13.2.9. *Si* $n \in \mathbb{N} - 1$*, entonces hay un* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $n = m^+$*, o, lo que es equivalente,* $\mathbb{N} - (\{0\} \cup \mathrm{Im}(\mathrm{sc})) = \varnothing$

Demostración. □

Para demostrar que la aplicación sucesor es inyectiva, definimos a continuación el concepto de conjunto $\in$-*transitivo*. Además, damos algunas caracterizaciones de dicho concepto y establecemos algunas propiedades de clausura del mismo.

Definición 13.2.10. Un conjunto A es $\in$-*transitivo* si para cualesquiera conjuntos x e y, si $y \in x$ y $x \in A$, entonces $y \in A$.

Proposición 13.2.11. *Sea A un conjunto. Entonces son equivalentes:*

1. *A es $\in$-transitivo.*
2. $\bigcup A \subseteq A$.
3. $A \subseteq \mathrm{Sub}(A)$.

Demostración. □

Proposición 13.2.12.

1. *Si A es $\in$-transitivo, entonces A^+ es $\in$-transitivo.*
2. *Si A es $\in$-transitivo, entonces $\bigcup A$ es $\in$-transitivo.*
3. *Si A es tal que todos sus miembros son $\in$-transitivos, entonces $\bigcup A$ es $\in$-transitivo.*
4. *Si A no es vacío y todos sus miembros son $\in$-transitivos, entonces $\bigcap A$ es $\in$-transitivo.*

Demostración. □

A continuación, establecemos una caracterización del concepto de conjunto $\in$-transitivo, que será especialmente útil en la demostración de que la aplicación sucesor es inyectiva.

Proposición 13.2.13. *Una condición necesaria y suficiente para que un conjunto A sea $\in$-transitivo, es que $\bigcup A^+ = A$*

Demostración. □

Proposición 13.2.14. *Cualquier número natural es $\in$-transitivo.*

Demostración. Demostramos, por inducción, que $T = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \,\text{es}\, \in\text{-transitivo} \,\}$, coincide con el conjunto de los números naturales.

Se cumple que $0 \in T$, porque $\bigcup 0^+ = 0$. Supongamos que $n \in T$, i.e., que n sea $\in$-transitivo, o, lo que es equivalente, que $\bigcup n^+ = n$. Entonces

$$\begin{aligned}
\bigcup (n^+)^+ &= \bigcup (n^+ \cup \{n^+\}) \\
&= (\bigcup n^+) \cup (\bigcup \{n^+\}) \\
&= n \cup (n \cup \{n\}) \\
&= n^+,
\end{aligned}$$

luego n^+ es $\in$-transitivo, i.e., $n^+ \in T$. Por consiguiente $T = \mathbb{N}$.

□

Teorema 13.2.15. *El triplo ordenado* $(\mathbb{N}, \mathrm{sc}, 0)$ *es un álgebra de Dedekind-Peano.*

Demostración. □

Proposición 13.2.16. *El conjunto* $\mathbb{N}$ *es $\in$-transitivo.*

Demostración. □

13.3. El principio de la definición por recursión finita. Demostramos a continuación el *principio de la definición por recursión finita*, debido a Dedekind. Este principio de definición nos permitirá demostrar que el álgebra de Dedekind-Peano $(\mathbb{N}, \mathrm{sc}, 0)$ es esencialmente única. También, a partir de dicho principio establecemos otros principios de definición por recursión, que usaremos en la teoría de las funciones recursivas.

Teorema 13.3.1 (Principio de la definición por recursión finita)**.** *Sea A un conjunto, $e \in A$ y $f\colon A \longrightarrow A$ una endoaplicación de A. Entonces se cumple que hay una única aplicación $h\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ tal que el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{N} \arrow[dd, "h"'] & \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{sc}"'] \arrow[dd, "h"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_0"] \arrow[dr, "\kappa_e"'] & & \\
 & A & A \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}
$$

en el que κ_0 es la aplicación que al único miembro de 1 *le asigna* 0 *y κ_e la aplicación que al único miembro de* 1 *le asigna e, conmuta, i.e., tal que:*

1. $h(0) = e$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}\,(h(\mathrm{sc}(n)) = f(h(n)))$.

Demostración. Decimos que una función parcial G de $\mathbb{N}$ en A es *aceptable*, respecto de e y $f = (A, F, A)$, si cumple las siguientes condiciones:

1. Si $0 \in \mathrm{Dom}(G)$, entonces $G(0) = e$.
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, si $\mathrm{sc}(n) \in \mathrm{Dom}(G)$, entonces $n \in \mathrm{Dom}(G)$ y $G(\mathrm{sc}(n)) = F(G(n))$.

Sea $\mathcal{G}$ el conjunto de todas las funciones parciales de $\mathbb{N}$ en A que sean aceptables (conjunto obtenido, mediante una aplicación del esquema axiomático de separación, a partir del conjunto de todas las funciones parciales de $\mathbb{N}$ en A). Vamos a demostrar que el conjunto $H = \bigcup \mathcal{G}$ tiene las siguientes propiedades:

1. H es una función parcial de $\mathbb{N}$ en A.
2. H es aceptable.
3. $\mathrm{Dom}(H) = \mathbb{N}$.
4. H es la única función de $\mathbb{N}$ en A tal que
   a) $H(0) = e$.
   b) $\forall n \in \mathbb{N}\,(H(\mathrm{sc}(n)) = F(H(n)))$.

Demostramos en primer lugar que hay a lo sumo una función H de $\mathbb{N}$ en A tal que

- $H(0) = e$.
- $\forall n \in \mathbb{N}\,(H(\mathrm{sc}(n)) = F(H(n)))$.

En efecto, si H' fuera otra función de $\mathbb{N}$ en A que tuviera las mismas propiedades que tiene H, entonces el igualador de H y H', i.e., el conjunto $\mathrm{Eq}(H, H') = \{\, n \in \mathbb{N} \mid H(n) = H'(n) \,\}$, coincidiría con $\mathbb{N}$, ya que, por cumplirse, por una parte, que $0 \in \mathrm{Eq}(H, H')$, debido a que $H(0) = e = H'(0)$, y, por otra, que dado un $n \in \mathbb{N}$, si $n \in \mathrm{Eq}(H, H')$, i.e., si $H(n) = H'(n)$, entonces $\mathrm{sc}(n) \in \mathrm{Eq}(H, H')$, porque

$$
\begin{aligned}
H(\mathrm{sc}(n)) &= F(H(n)) \ \text{(porque } H \text{ tiene tal propiedad)} \\
&= F(H'(n)) \ \text{(porque, por hipótesis, } H(n) = H'(n)\text{)} \\
&= H'(\mathrm{sc}(n)) \ \text{(porque } H' \text{ tiene tal propiedad),}
\end{aligned}
$$

entonces, en virtud del principio de la demostración por inducción finita, $\mathrm{Eq}(H, H') = \mathbb{N}$, luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, $H(n) = H'(n)$, i.e., $H = H'$.

Ahora demostramos que $H = \bigcup \mathcal{G}$ es una función parcial de $\mathbb{N}$ en A.

En efecto, puesto que, para cada $G \in \mathcal{G}$, G es una función parcial de $\mathbb{N}$ en A, $H \subseteq \mathbb{N} \times A$, luego H es una relación de $\mathbb{N}$ en A. Para demostrar que la relación H es una función parcial de $\mathbb{N}$ en A, hay que demostrar que, para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $y, z \in A$, si $(n, y), (n, z) \in H$, entonces $y = z$. Para ello, es suficiente que demostremos, por inducción, que el conjunto T definido como:

$$T = \{\, n \in \mathbb{N} \mid \forall y, z \in A\, ((n, y) \in H \wedge (n, z) \in H \rightarrow y = z) \,\},$$

coincide con $\mathbb{N}$.

Se cumple que $T = \mathbb{N}$, ya que, por una parte, $0 \in T$, porque si $y, z \in A$ son tales que $(0, y) \in H$ y $(0, z) \in H$, entonces, ya que $H = \bigcup \mathcal{G}$, hay un $G_y \in \mathcal{G}$ tal que $(0, y) \in G_y$ y hay un $G_z \in \mathcal{G}$ tal que $(0, z) \in G_z$, luego $0 \in \mathrm{Dom}(G_y)$ y $0 \in \mathrm{Dom}(G_z)$, por lo tanto, ya que G_y y G_z son aceptables, $G_y(0) = e = G_z(0)$, pero $G_y(0) = y$ y $G_z(0) = z$, así que $y = e = z$, por lo tanto $y = z$; y, por otra, dado un $n \in \mathbb{N}$, si $n \in T$, entonces, dados $y, z \in A$ tales que $(\mathrm{sc}(n), y) \in H$ y $(\mathrm{sc}(n), z) \in H$, ya que $H = \bigcup \mathcal{G}$, hay un $G_y \in \mathcal{G}$ tal que $(\mathrm{sc}(n), y) \in G_y$ y hay un $G_z \in \mathcal{G}$ tal que $(\mathrm{sc}(n), z) \in G_z$. Ahora bien, ya que G_y y G_z son aceptables, $n \in \mathrm{Dom}(G_y)$ y $G_y(\mathrm{sc}(n)) = F(G_y(n)) = y$ y $n \in \mathrm{Dom}(G_z)$ y $G_z(\mathrm{sc}(n)) = F(G_z(n)) = z$. Además, se cumple que $(n, G_y(n))$ y $(n, G_z(n)) \in H$, luego, por la hipótesis de inducción, $G_y(n) = G_z(n)$, por lo tanto $F(G_y(n)) = F(G_z(n))$, pero $F(G_y(n)) = y$ y $F(G_z(n)) = z$, así que $y = z$. Podemos afirmar pues que $\mathrm{sc}(n) \in T$. Por consiguiente $\mathbb{N} = T$, i.e., H es una función parcial de $\mathbb{N}$ en A.

Demostramos a continuación que H es aceptable. Si $0 \in \mathrm{Dom}(H)$, entonces, ya que $H = \bigcup \mathcal{G}$, hay un $G \in \mathcal{G}$ tal que $0 \in \mathrm{Dom}(G)$, luego $G(0) = e$, i.e., $(0, e) \in G$, pero $G \subseteq H$, así que $(0, e) \in H$, i.e., $H(0) = e$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\mathrm{sc}(n) \in \mathrm{Dom}(H)$, entonces ya que $H = \bigcup \mathcal{G}$, hay un $G \in \mathcal{G}$ tal que $\mathrm{sc}(n) \in \mathrm{Dom}(G)$, luego $n \in \mathrm{Dom}(G)$ y $G(\mathrm{sc}(n)) = F(G(n))$. De donde, en particular, $n \in \mathrm{Dom}(H)$, porque $\mathrm{Dom}(H) = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} \mathrm{Dom}(G)$. Así que $H(n) = G(n)$ y, ya que $(\mathrm{sc}(n), F(G(n))) \in G$ y $G \subseteq H$, $(\mathrm{sc}(n), F(G(n))) \in H$, i.e., $H(\mathrm{sc}(n)) = F(G(n))$, luego $H(\mathrm{sc}(n)) = F(H(n))$.

Demostramos, por último, que H es una función de $\mathbb{N}$ en A. Para ello es suficiente que demostremos, por inducción, que el conjunto $T = \{\, n \in \mathbb{N} \mid \exists y \in A\, ((n, y) \in H) \,\}$ coincide con $\mathbb{N}$.

Se cumple que $0 \in T$, porque $\{(0, e)\} \in \mathcal{G}$ y $H = \bigcup \mathcal{G}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $n \in T$. Vamos a demostrar que si $\mathrm{sc}(n) \notin T$, entonces la relación $G = H \cup \{(\mathrm{sc}(n), F(H(n)))\}$ tiene las propiedades de ser una función parcial de $\mathbb{N}$ en A, ser aceptable y contener estrictamente a H, lo cual, junto con lo demostrado hasta ahora para H, constituirá una contradicción.

G es una función parcial de $\mathbb{N}$ en A, porque H y el conjunto $\{(\mathrm{sc}(n), F(H(n)))\}$ lo son y las restricciones de ambas a la intersección de sus dominios de definición (que es el conjunto vacío) coinciden. Además, por definición de G, se cumple que $H \subset G$. Por último, G es aceptable, ya que, por una parte, si $0 \in \mathrm{Dom}(G)$, entonces $0 \in \mathrm{Dom}(H)$, luego $H(0) = e = G(0)$, y, por otra, dado un $m \in \mathbb{N}$, si $\mathrm{sc}(m) \in \mathrm{Dom}(G)$, entonces, puesto que $\mathrm{Dom}(G) = \mathrm{Dom}(H) \cup \{\mathrm{sc}(n)\}$ y $\mathrm{Dom}(H) \cap \{\mathrm{sc}(n)\} = \varnothing$, o bien $\mathrm{sc}(m) \in \mathrm{Dom}(H)$ o bien $\mathrm{sc}(m) = \mathrm{sc}(n)$. Si lo primero, entonces, por ser H aceptable, $m \in \mathrm{Dom}(H)$ y $H(\mathrm{sc}(m)) = F(H(m))$, luego $m \in \mathrm{Dom}(G)$ y $G(\mathrm{sc}(m)) = F(H(m)) = F(G(m))$. Si lo segundo, entonces por ser sc inyectiva, $m = n$, pero $n \in \mathrm{Dom}(H)$, luego $n \in \mathrm{Dom}(G)$ y $G(\mathrm{sc}(m)) = F(H(m)) = F(G(m))$. Pero esto entra en contradicción con la definición de H. Por lo tanto $\mathrm{sc}(n) \in T$ y, en consecuencia, $T = \mathbb{N}$, i.e., $\mathrm{Dom}(H) = \mathbb{N}$.

Luego, tomando como h el triplo ordenado $(\mathbb{N}, H, A)$, obtenemos el teorema. $\square$

Debemos observar que la propiedad establecida en el teorema anterior, para el álgebra de Dedekind-Peano $(\mathbb{N}, \mathrm{sc}, 0)$, no es privativa de ésa álgebra concreta, sino que es compartida por todas las álgebras de Dedekind-Peano.

Si $\mathbf{A} = (A, f, e)$ es un álgebra de Dedekind-Peano, A' un conjunto, $e' \in A'$ y $f' \colon A' \longrightarrow A'$, entonces hay una única aplicación $h \colon A \longrightarrow A'$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dd, "h"] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[dd, "h"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_e"] \arrow[dr, "\kappa_{e'}"'] & & \\
 & A' & A' \arrow[l, "f'"]
\end{tikzcd}$$

conmuta, siendo κ_e la aplicación que al único miembro de 1 le asigna e y $\kappa_{e'}$ la aplicación que al único miembro de 1 le asigna e'.

Ahora que disponemos del principio de la definición por recursión finita, podemos establecer una versión alternativa, pero equivalente, del axioma de regularidad, y también de la existencia del cierre transitivo de una relación binaria.

Proposición 13.3.2. *El axioma de regularidad equivale a que no exista ninguna función F cuyo dominio de definición sea $\mathbb{N}$ y tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $F(n^+) \in F(n)$.*

Demostración. □

Proposición 13.3.3. *Si R es una relación binaria en A, entonces la mínima relación transitiva en A que contiene a R, que es la intersección del conjunto de todas las relaciones transitivas en A que contienen a R, coincide con el* cierre transitivo *de R, denotado por R^{t}, que es:*

$$R^{\mathrm{t}} = \left\{ (a,b) \in A \times A \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists m \in \mathbb{N} - 1\, \exists (x_i \mid i \in m^+) \in A^{m^+} \\ (a = x_0 \wedge x_m = b \wedge \forall i \in m\, ((x_i, x_{i^+}) \in R)) \end{array} \right\}.$$

Demostración. □

Proposición 13.3.4. *Si $\mathbf{A} = (A, f, e)$ es un álgebra de Dedekind-Peano, entonces hay una única aplicación biyectiva $h \colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{N} \arrow[dd, "h"] & \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{sc}"'] \arrow[dd, "h"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_0"] \arrow[dr, "\kappa_e"'] & & \\
 & A & A \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Por ser $\mathbf{N}$ y $\mathbf{A}$ álgebras de Dedekind-Peano, existe una única aplicación $h \colon \mathbb{N} \longrightarrow A$, así como una única aplicación $t \colon A \longrightarrow \mathbb{N}$, de modo que los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{N} \arrow[dd, "h"'] & \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{sc}"'] \arrow[dd, "h"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_0"] \arrow[dr, "\kappa_e"'] & & \\
& A & A \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
& A \arrow[dd, "t"'] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[dd, "t"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_e"] \arrow[dr, "\kappa_0"'] & & \\
& \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{sc}"]
\end{tikzcd}$$

conmutan. Luego los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{N} \arrow[dd, "t \circ h"'] & \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{sc}"'] \arrow[dd, "t \circ h"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_0"] \arrow[dr, "\kappa_0"'] & & \\
& \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{sc}"]
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
& A \arrow[dd, "h \circ t"'] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[dd, "h \circ t"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_e"] \arrow[dr, "\kappa_e"'] & & \\
& A & A \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

conmutan. Pero los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{N} \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\mathbb{N}}"'] & \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{sc}"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\mathbb{N}}"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_0"] \arrow[dr, "\kappa_0"'] & & \\
& \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{sc}"]
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
& A \arrow[dd, "\mathrm{id}_A"'] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}_A"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_e"] \arrow[dr, "\kappa_e"'] & & \\
& A & A \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

también conmutan. De donde, por unicidad, $t \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ y $h \circ t = \mathrm{id}_A$, así que $h \colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ es una biyección que cumple las condiciones. □

Proposición 13.3.5. *Sea* $f \colon A \longrightarrow B$ *y* $g \colon B \longrightarrow B$. *Entonces hay una única aplicación* $h \colon A \times \mathbb{N} \longrightarrow B$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& A \times \mathbb{N} \arrow[dd, "h"'] & A \times \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{id}_A \times \mathrm{sc}"'] \arrow[dd, "h"] \\
A \arrow[ur, "\langle \mathrm{id}_A, \kappa_0 \circ \omega_A \rangle"] \arrow[dr, "f"'] & & \\
& B & B \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., tal que:

1. $\forall a \in A\,(h(a,0) = f(a))$.
2. $\forall a \in A\, \forall n \in \mathbb{N}\,(h(a,n^+) = g(h(a,n)))$.

Demostración. □

En lo que sigue abreviamos por “RPcP” la frase “Recursión primitiva con parámetros” por “RPcPpAP” la frase “Recursión primitiva con parámetros para aplicaciones parciales” por “RPsP” la frase “Recursión primitiva sin parámetros” y por “RPsPpAP” la frase “Recursión primitiva sin parámetros para aplicaciones parciales” .

Proposición 13.3.6 (RPcP)**.** *Sea $f\colon A \longrightarrow B$ y $g\colon A\times\mathbb{N}\times B \longrightarrow B$. Entonces hay una única aplicación $h\colon A\times\mathbb{N} \longrightarrow B$ tal que el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
 & A\times\mathbb{N} \arrow[dd, "h"] & & A\times\mathbb{N} \arrow[ll, "\mathrm{id}_A\times\mathrm{sc}"'] \arrow[dd, "\langle \mathrm{id}_{A\times\mathbb{N}}, h\rangle"] \\
A \arrow[ur, "\langle \mathrm{id}_A, \kappa_0\circ\omega_A\rangle"] \arrow[dr, "f"'] & & & \\
 & B & & A\times\mathbb{N}\times B \arrow[ll, "g"]
\end{tikzcd}
$$

conmuta, i.e., tal que:

1. $\forall a\in A\,(h(a,0) = f(a))$.
2. $\forall a\in A\,\forall n\in\mathbb{N}\,(h(a,n^+) = g(a,n,h(a,n)))$.

Demostración. □

Proposición 13.3.7 (RPcPpAP)**.** *Sea $f\colon A \rightharpoonup B$ y $g\colon A\times\mathbb{N}\times B \rightharpoonup B$. Entonces hay una única aplicación parcial $h\colon A\times\mathbb{N} \rightharpoonup B$ tal que:*

1. *Para cada $a\in A$, $(a,0)\in \mathrm{Dom}(h)$ si y sólo si $a\in\mathrm{Dom}(f)$, y si $(a,0)\in \mathrm{Dom}(h)$, entonces $h(a,0) = f(a)$.*
2. *Para cada $a\in A$ y cada $n\in\mathbb{N}$, $(a,n^+)\in\mathrm{Dom}(h)$ si y sólo si $(a,n)\in\mathrm{Dom}(f)$ y $(a,n,h(a,n))\in\mathrm{Dom}(g)$, y si $(a,n^+)\in\mathrm{Dom}(h)$, entonces $h(a,n^+) = g(a,n,h(a,n))$.*

Demostración. □

Proposición 13.3.8 (RPsP)**.** *Sea A un conjunto, $e\in A$ y $f\colon A\times\mathbb{N} \longrightarrow A$. Entonces hay una única aplicación $h\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ tal que el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{N} \arrow[dd, "h"] & & \mathbb{N} \arrow[ll, "\mathrm{sc}"'] \arrow[dd, "\langle h, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}\rangle"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_0"] \arrow[dr, "\kappa_e"'] & & & \\
 & A & & A\times\mathbb{N} \arrow[ll, "f"]
\end{tikzcd}
$$

conmuta, i.e., tal que:

1. $h(0) = e$.
2. $\forall n\in\mathbb{N}\,(h(n^+) = f(h(n),n))$.

Demostración. □

Proposición 13.3.9 (RPsPpAP)**.** *Sea A un conjunto, $e\in A$ y $f\colon A\times\mathbb{N} \rightharpoonup A$. Entonces hay una única aplicación parcial $h\colon \mathbb{N} \rightharpoonup A$ tal que:*

1. $0\in\mathrm{Dom}(h)$ *y* $h(0) = e$.
2. *Para cada $n\in\mathbb{N}$, si $n^+\in\mathrm{Dom}(h)$, entonces $h(n^+) = f(h(n),n))$.*
3. $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{N}$ *o para un $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{Dom}(h) = n^+$ y $f(h(n),n)$ no está definido.*

Demostración. □

En lo que sigue abreviamos por "PDRCV" la frase "Principio de la definición por recursión de curso de valores" .

Proposición 13.3.10 (PDRCV)**.** *Sea A un conjunto y $f\colon A^\star \longrightarrow A$. Entonces hay una única aplicación $h\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ tal que, para cada $n\in\mathbb{N}$, $h(n) = f(h{\restriction}n)$.*

Demostración. □

Proposición 13.3.11.

1. *Sea* $f\colon A \longrightarrow B$ *y* $g\colon A\times B \longrightarrow B$. *Entonces hay una única aplicación* $h\colon A\times\mathbb{N} \longrightarrow B$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & A\times\mathbb{N} \arrow[dd, "h"] & A\times\mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{id}_A\times\mathrm{sc}"'] \arrow[dd, "\langle\mathrm{pr}_A, h\rangle"] \\
A \arrow[ur, "\langle\mathrm{id}_A, \kappa_0\circ\omega_A\rangle"] \arrow[dr, "f"'] & & \\
 & B & A\times B \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., tal que:
a) $\forall a\in A\,(h(a,0)=f(a))$.
b) $\forall a\in A\,\forall n\in\mathbb{N}\,(h(a,n^+)=g(a,h(a,n)))$.

2. *Sea* $f\colon A \longrightarrow B$ *y* $g\colon \mathbb{N}\times B \longrightarrow B$. *Entonces hay una única aplicación* $h\colon A\times\mathbb{N} \longrightarrow B$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & A\times\mathbb{N} \arrow[dd, "h"] & A\times\mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{id}_A\times\mathrm{sc}"'] \arrow[dd, "\langle\mathrm{pr}_{\mathbb{N}}, h\rangle"] \\
A \arrow[ur, "\langle\mathrm{id}_A, \kappa_0\circ\omega_A\rangle"] \arrow[dr, "f"'] & & \\
 & B & \mathbb{N}\times B \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., tal que:
a) $\forall a\in A\,(h(a,0)=f(a))$.
b) $\forall a\in A\,\forall n\in\mathbb{N}\,(h(a,n^+)=g(n,h(a,n)))$.

3. *Sea* $f\colon 1 \longrightarrow B$ *y* $g\colon \mathbb{N} \longrightarrow B$. *Entonces hay una única aplicación* h *de* $\mathbb{N}$ *en* B *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{N} \arrow[dd, "h"] & \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{sc}"'] \arrow[ddl, "g"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_0"] \arrow[dr, "f"'] & & \\
 & B &
\end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., tal que:
a) $(h(0)=f(0))$.
b) $\forall n\in\mathbb{N}\,(h(n^+)=g(n))$.

13.4. Caracterización de Lawvere de las DP-álgebras. Vamos a demostrar, en lo que sigue, que una condición necesaria y suficiente para que un triplo ordenado $\mathbf{A}=(A,f,e)$ en el que A es un conjunto, f una endoaplicación de A y e un miembro de A, sea un álgebra de Dedekind-Peano, es que $\mathbf{A}$ tenga la propiedad de la definición por recursión finita, i.e., que si A' es un conjunto, $e'\in A'$ y $f'\colon A' \longrightarrow A'$, entonces exista una única aplicación $h\colon A \longrightarrow A'$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dd, "h"'] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[dd, "h"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_e"] \arrow[dr, "\kappa_{e'}"'] & & \\
 & A' & A' \arrow[l, "f'"]
\end{tikzcd}$$

conmute.

De hecho, ya hemos demostrado que la condición es necesaria. Para demostrar la suficiencia hemos de demostrar que si $\mathbf{A}$ tiene la propiedad de la definición por recursión finita, entonces se cumple que:

- f es inyectiva.
- $\mathrm{Im}(f) \cap \{e\} = \varnothing$.
- $\forall X \subseteq A\,((\,f[X] \subseteq X \wedge e \in X\,) \rightarrow X = A\,)$.

Para ello, establecemos, en primer lugar, la siguiente definición.

Definición 13.4.1. Si $\mathbf{A}$ tiene la propiedad de la definición por recursión finita, entonces denotamos por pd a la única endoaplicación de A para la que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dd, "\mathrm{pd}"'] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[ddl, "\mathrm{id}_A"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_e"] \arrow[dr, "\kappa_e"'] & & \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

conmuta, y la denominamos la aplicación *predecesor*.

Proposición 13.4.2. *Si* $\mathbf{A}$ *tiene la propiedad de la definición por recursión finita, entonces*

1. *La aplicación* $f\colon A \longrightarrow A$ *es inyectiva.*
2. *Para cada* $a \in A$, $f(a) \neq e$, *i.e.,* $\mathrm{Im}(f) \cap \{e\} = \varnothing$.
3. *Para cada* $X \subseteq A$, *si* $f[X] \subseteq X$ *y* $e \in X$, *entonces* $X = A$.

Demostración. □

13.5. El orden aritmético sobre el conjunto de los números naturales. Nos proponemos demostrar a continuación que el conjunto de los números naturales está dotado de una *buena ordenación*, i.e., de una relación binaria $<$ que cumple las siguientes condiciones:

- $<$ es irreflexiva, i.e., $\forall n \in \mathbb{N}\,(\,n \not< n\,)$.
- $<$ es transitiva, i.e., $\forall m, n, p \in \mathbb{N}\,((\,m < n \wedge n < p\,) \rightarrow m < p\,)$.
- $\forall X \subseteq \mathbb{N}\,(\,X \neq \varnothing \rightarrow \exists n \in X\,(\forall x \in X\,(\,n < x \vee n = x\,)))$.

Para ello, siguiendo a Diener, usaremos, por una parte, el hecho de que la estructura algebraica, dada por la operación unaria sc y la operación ceroaria 0, de que está dotado el conjunto de los números naturales, lo convierte en un álgebra de Dedekind-Peano, y, por otra, que a partir de ello se puede obtener, sobre el conjunto de los números naturales, una relación de orden bien fundamentada y disyuntiva, i.e., en definitiva una buena ordenación sobre $\mathbb{N}$. Pero antes introducimos una serie de nociones y proposiciones relativas a las secciones iniciales de los conjuntos ordenados y las relaciones bien fundamentadas, necesarias para alcanzar el objetivo anterior.

Definición 13.5.1. Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Decimos que un subconjunto X de A es una R-*sección inicial* de A, si junto a un $x \in X$ contiene al conjunto $\downarrow_R x = \{\, y \in A \mid (y, x) \in R \,\}$ de todos los R-*predecesores* de x, i.e., si

$$\forall x \in X\, (\, \downarrow_R x \subseteq X\,),$$

o, lo que es equivalente, ya que $R^{-1}[X] = \bigcup_{x \in X} \downarrow_R x$, si

$$R^{-1}[X] \subseteq X.$$

Denotamos por $\mathrm{Sec}_R(A)$ el conjunto de todas las R-secciones iniciales de A.

Proposición 13.5.2. *El conjunto* $\mathrm{Sec}_R(A)$, *de todas las R-secciones iniciales de A, es un sistema de clausura completamente aditivo sobre A, i.e., tiene las siguientes propiedades:*

1. $A \in \mathrm{Sec}_R(A)$.
2. $\forall \mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sec}_R(A)\, (\, \mathcal{X} \neq \varnothing \to \bigcap \mathcal{X} \in \mathrm{Sec}_R(A)\,)$.
3. $\forall \mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sec}_R(A)\, (\, \bigcup \mathcal{X} \in \mathrm{Sec}_R(A)\,)$.

Demostración. □

Corolario 13.5.3. *Sea A un conjunto, R una relación binaria en A y $X \subseteq A$. Entonces hay una mínima R-sección inicial de A que contiene a X.*

Demostración. Es suficiente considerar la intersección del conjunto

$$\{\, Y \in \mathrm{Sec}_R(A) \mid X \subseteq Y \,\}.$$

□

Definición 13.5.4. Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Entonces denotamos por C_R el operador clausura sobre A, canónicamente asociado al sistema de clausura completamente aditivo $\mathrm{Sec}_R(A)$, que asocia a cada subconjunto X de A, $\mathrm{C}_R(X)$, la mínima R-sección inicial de A que contiene a X, a la que denominamos el *cierre inicial* de X relativo a R. En particular, cuando $X = \{x\}$, con $x \in A$, al cierre inicial de $\{x\}$ lo denotamos, para abreviar, por $\mathrm{C}_R(x)$, y lo denominamos también, la R-sección inicial *principal* determinada por x.

Proposición 13.5.5. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A, entonces el operador* C_R, *definido como:*

$$\mathrm{C}_R \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad X \quad\ \longmapsto \bigcap\{\, Y \in \mathrm{Sec}_R(A) \mid X \subseteq Y \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{C}_R) \subseteq \mathrm{Sec}_R(A)$.
2. $\{\, X \in \mathrm{Sub}(A) \mid X = \mathrm{C}_R(X) \,\} = \mathrm{Sec}_R(A)$.
3. C_R *es extensivo o inflacionario, i.e., para cada* $X \in \mathrm{Sub}(A)$, $X \subseteq \mathrm{C}_R(X)$.
4. C_R *es isótono, i.e., para cada* $X, Y \in \mathrm{Sub}(A)$, *si* $X \subseteq Y$, *entonces se cumple que* $\mathrm{C}_R(X) \subseteq \mathrm{C}_R(Y)$.
5. C_R *es idempotente, i.e., para cada* $X \in \mathrm{Sub}(A)$, $\mathrm{C}_R(X) = \mathrm{C}_R(\mathrm{C}_R(X))$.
6. C_R *es completamente aditivo, i.e., para cada* $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sub}(A)$, *se cumple que* $\mathrm{C}_R(\bigcup \mathcal{X}) = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{C}_R(X)$.

Proposición 13.5.6. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A, entonces*

1. $\forall X \subseteq A\, (\mathrm{C}_R(X) = \bigcup_{x \in X} \mathrm{C}_R(x))$.
2. $\forall x \in A\, (\mathrm{C}_R(\downarrow_R x) = \bigcup_{y \in \downarrow_R x} \mathrm{C}_R(y))$.

Proposición 13.5.7. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Si R es transitiva, entonces, para cada $x \in A$, se cumple que*

$$\mathrm{C}_R(x) = \Downarrow_R x,$$

siendo $\Downarrow_R x = \{ a \in A \mid (a,x) \in R \vee a = x \}$.

Naturalmente, considerando la relación R^{-1}, obtenemos la noción dual de la de R-sección inicial de A, que es la de R-sección final de A, y las propiedades homólogas.

Ahora que disponemos del concepto de cierre inicial, damos una caracterización del cierre transitivo de una relación binaria en un conjunto, especialmente útil para algunas demostraciones posteriores.

Proposición 13.5.8. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Entonces*

$$R^{\mathrm{t}} = \{ (z,x) \in A \times A \mid \exists y \in A\,(\,(y,x) \in R \wedge z \in \mathrm{C}_R(y)\,)\,\},$$

o, lo que es equivalente

$$R^{\mathrm{t}} = \{ (z,x) \in A \times A \mid z \in \mathrm{C}_R(\downarrow_R x)\,\}.$$

Demostración. □

Corolario 13.5.9. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Entonces las R-secciones iniciales coinciden con las R^{t}-secciones iniciales y las R-secciones finales con las R^{t}-secciones finales, i.e., para cada subconjunto X de A, $\mathrm{C}_R(X) = \mathrm{C}_{R^{\mathrm{t}}}(X)$ y $\mathrm{C}_{R^{-1}}(X) = \mathrm{C}_{(R^{\mathrm{t}})^{-1}}(X)$.*

Demostración. Demostramos sólo que $\mathrm{C}_R(X) = \mathrm{C}_{R^{\mathrm{t}}}(X)$. Para demostrar que $\mathrm{C}_R(X)$ está incluido en $\mathrm{C}_{R^{\mathrm{t}}}(X)$, es suficiente que demostremos que $\mathrm{C}_{R^{\mathrm{t}}}(X)$ es una R-sección inicial. Ahora bien, si $a \in \mathrm{C}_{R^{\mathrm{t}}}(X)$, entonces $\downarrow_{R^{\mathrm{t}}} a \subseteq \mathrm{C}_{R^{\mathrm{t}}}(X)$, pero $\downarrow_R a \subseteq \downarrow_{R^{\mathrm{t}}} a$, porque si $b \in \downarrow_R a$, entonces, por ser $\downarrow_R a \subseteq \mathrm{C}_R(\downarrow_R a)$, $b \in \mathrm{C}_R(\downarrow_R a)$, luego $(b,a) \in R^{\mathrm{t}}$, i.e., $b \in \downarrow_{R^{\mathrm{t}}} a$.

Del mismo modo, para demostrar que $\mathrm{C}_{R^{\mathrm{t}}}(X) \subseteq \mathrm{C}_R(X)$, es suficiente que demostremos que $\mathrm{C}_R(X)$ es una R^{t}-sección inicial. Ahora bien, si $a \in \mathrm{C}_R(X)$, entonces $\downarrow_R a \subseteq \mathrm{C}_R(X)$, luego $\mathrm{C}_R(\downarrow_R a) \subseteq \mathrm{C}_R(X)$. Además, si $b \in \downarrow_{R^{\mathrm{t}}} a$, entonces $b \in \mathrm{C}_R(\downarrow_R a)$, por lo tanto $b \in \mathrm{C}_R(X)$, así que $\downarrow_{R^{\mathrm{t}}} a \subseteq \mathrm{C}_R(X)$. □

Definición 13.5.10. Sea A un conjunto, R una relación binaria en A, X un subconjunto de A y $m \in X$. Decimos que m es un R-*minimal* de X si $\downarrow_R m \cap X = \varnothing$. i.e., si no hay ningún $x \in X$ tal que $(x,m) \in R$.

Definición 13.5.11. Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Decimos que R es una relación *bien fundamentada* sobre A si todo subconjunto no vacío X de A tiene un R-minimal, i.e., si hay un $m \in X$ tal que $\downarrow_R m \cap X = \varnothing$. Además, si $X \subseteq A$, diremos, para abreviar, que R está bien fundamentada sobre X si $R \cap (X \times X)$ lo está sobre X, i.e., si todo subconjunto no vacío Y de X tiene un $R \cap (X \times X)$-minimal.

A continuación establecemos la equivalencia entre el concepto de relación bien fundamentada, y un principio de demostración por inducción.

Proposición 13.5.12. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Entonces una condición necesaria y suficiente para que R esté bien fundamentada sobre A es que, para cada subconjunto X de A, $X = A$, si, para cada $x \in A$, $x \in X$, si $\downarrow_R x \subseteq X$, i.e., R está bien fundamentada si y sólo si*

$$\forall X \subseteq A\,((\,\forall x \in A\,(\,\downarrow_R x \subseteq X \rightarrow x \in X\,)) \rightarrow X = A\,)$$

Demostración. La condición es necesaria. Sea X un subconjunto de A tal que para cada $x \in A$, $x \in X$, si $\downarrow_R x \subseteq X$. Si $X \neq A$, entonces $A - X \neq \varnothing$, luego, por la hipótesis, existe un $m \in A - X$ tal que $\downarrow_R m \cap (A - X) = \varnothing$, por lo tanto $\downarrow_R m \subseteq A - (A - X) = X$, así que $m \in X$, contradicción. Por consiguiente $A = X$.

La condición es suficiente. Puesto que la condición

$$\forall X \subseteq A\,((\,\forall x \in A(\downarrow_R x \subseteq X \to x \in X\,)) \to X = A\,)$$

equivale a la condición

$$\forall Y \subseteq A\,(\,A - Y \neq \varnothing \to (\,\exists x \in A\,(\,\downarrow_R x \subseteq X \wedge x \notin Y\,)),$$

si X es un subconjunto no vacío de A, entonces, tomando como subconjunto Y de A, el conjunto $A - X$, y ya que $X = A - (A - X) \neq \varnothing$, existe un $x \in A$ tal que $\downarrow_R x \subseteq A - X$ y $x \notin A - X$, luego hay un $x \in A$ tal que $\downarrow_R x \subseteq A - X$ y $x \in X$, así que hay un $x \in X$ tal que $\downarrow_R x \cap X = \varnothing$. □

Proposición 13.5.13. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Si R está bien fundamentada sobre A, entonces R es irreflexiva.*

Demostración. □

Proposición 13.5.14. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Entonces son equivalentes:*

1. *R está bien fundamentada sobre A.*
2. *R está bien fundamentada sobre cualquier R-sección inicial.*
3. *R está bien fundamentada sobre cualquier R-sección inicial principal.*

Demostración. Nos limitamos a demostrar que de la última condición se deduce la primera.

Supongamos que R esté bien fundamentada sobre cualquier R-sección inicial principal y sea X un subconjunto no vacío de A. Por ser X no vacío, sea $a \in X$, arbitrario, pero fijo. Entonces el conjunto $Y = \mathrm{C}_R(a) \cap X$, que es un subconjunto no vacío de $\mathrm{C}_R(a)$, tiene, por hipótesis, un R-minimal m, i.e., hay un $m \in Y$ tal que $\downarrow_R m \cap Y = \varnothing$. Demostramos ahora que m es un R-minimal de X. En efecto, por ser $Y \subseteq X$, se cumple que $m \in X$. Además, $\downarrow_R m \cap X = \varnothing$, ya que si $\downarrow_R m \cap X \neq \varnothing$, eligiendo un $b \in \downarrow_R m \cap X$, tendríamos que $b \in \mathrm{C}_R(a)$, porque $(b, m) \in R$ y $m \in \mathrm{C}_R(a)$; luego $b \in \downarrow_R m \cap Y$, pero éso es imposible, debido a que $\downarrow_R m \cap Y = \varnothing$. Por lo tanto $\downarrow_R m \cap X = \varnothing$, i.e., X tiene un R-minimal. □

Corolario 13.5.15. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Entonces R está bien fundamentada sobre A si y sólo si R^{t} lo está.*

Proposición 13.5.16. *La función inyectiva* $\mathrm{Sc} = \{\,(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n = m^+\,\}$*, es una relación bien fundamentada sobre* $\mathbb{N}$.

Demostración. En virtud de la prop. 13.5.14, es suficiente que demostremos que Sc está bien fundamentada sobre cada Sc-sección inicial principal $\mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n)$; para lo cual, a su vez, es suficiente que demostremos, por inducción finita, que el conjunto T definido como:

$$T = \{\, n \in \mathbb{N} \mid \text{Sc está bien fundamentada sobre } \mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n)\,\}$$

coincide con $\mathbb{N}$.

Se cumple que $0 \in T$, porque en este caso $\mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(0) = \{0\}$, ya que $\downarrow_{\mathrm{Sc}} 0 = \varnothing$ y la única parte no vacía de $\{0\}$, que es ella misma, tiene a 0 como Sc-minimal. Supongamos que $n \in T$, i.e., que Sc está bien fundamentada sobre $\mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n)$, entonces, en virtud de las condiciones definitorias del concepto de álgebra de Dedekind-Peano, y por la prop. 8.0.17, tenemos que

$$\mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n^+) = \{n^+\} \cup \mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n).$$

Sea X un subconjunto no vacío de $\mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n^+)$. Si $X \cap \mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n) = \varnothing$, entonces $X = \{n^+\}$, y n^+ es un Sc-minimal de X. Si $X \cap \mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n) \neq \varnothing$, entonces, por la hipótesis de inducción, $X \cap \mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n)$ tiene un Sc-minimal, i.e., hay un $m \in X \cap \mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n)$ tal que $\downarrow_{\mathrm{Sc}} m \cap (X \cap \mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n)) = \varnothing$, que es también un Sc-minimal de X, ya que si para algún $x \in X$ se tuviera que $(x, m) \in \mathrm{Sc}$, entonces $x \in \downarrow_{\mathrm{Sc}} m \cap (X \cap \mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n))$, lo cual es imposible. Por lo tanto $n^+ \in T$. Luego $T = \mathbb{N}$, i.e., Sc está bien fundamentada sobre toda Sc-sección inicial principal $\mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n)$. Podemos pues afirmar que Sc está bien fundamentada sobre $\mathbb{N}$. □

Corolario 13.5.17. *El cierre transitivo de* Sc*, denotado en este caso por* $<$ *y denominado el* orden aritmético *sobre* $\mathbb{N}$*, es una relación de orden bien fundamentada sobre* $\mathbb{N}$*.*

Proposición 13.5.18. *El orden aritmético sobre* $\mathbb{N}$ *es* disyuntivo*, i.e., tiene la siguiente propiedad*

$$\forall m, n \in \mathbb{N}\,(m \neq n \to (m < n \vee n < m))$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, arbitrario, pero fijo. Demostramos, por inducción sobre m, que el conjunto T definido como:

$$T = \{\, m \in \mathbb{N} \mid m = n \vee m < n \vee n < m \,\},$$

coincide con $\mathbb{N}$.

Se cumple que $0 \in T$, porque al ser $\mathrm{C}_{\mathrm{Sc}^{-1}}(0) = \mathbb{N}$, tenemos que $0 \leq n$. Supongamos que $m \in T$. Si $n \leq m$, entonces de $n \leq m$ y $m < m^+$, concluimos que $n < m^+$. Si $m < n$, entonces hay un $p \in \mathbb{N}$ tal que $p = m^+$ y $n \in \mathrm{C}_{\mathrm{Sc}^{-1}}(p)$, pero $\mathrm{C}_{\mathrm{Sc}^{-1}}(p) = \{p\} \cup \mathrm{C}_{\mathrm{Sc}^{-1}}(\uparrow_{\mathrm{Sc}^{-1}} p)$, luego $m^+ \leq n$, por lo tanto $m^+ \in T$. Así que $T = \mathbb{N}$. □

Corolario 13.5.19. *El orden aritmético sobre* $\mathbb{N}$ *es una buena ordenación sobre* $\mathbb{N}$*. Luego, para cada* $n \in \mathbb{N}$*,* $<_n = < \cap (n \times n)$*, es una buena ordenación sobre* n*.*

Demostramos a continuación que el orden sobre $\mathbb{N}$ coincide con la restricción de la relación de pertenencia al conjunto $\mathbb{N}$, i.e., con

$$\in_{\mathbb{N}} = \{\, (m, n) \in \mathbb{N} \mid m \in n \,\}.$$

Proposición 13.5.20. *Se cumple que* $< = \in_{\mathbb{N}}$*.*

Demostración. Para demostrar que $< \subseteq \in_{\mathbb{N}}$, es suficiente que demostremos que $\in_{\mathbb{N}}$ es transitivo y que contiene a Sc, porque $<$ es el cierre transitivo de Sc.

Si $(m, n) \in \mathrm{Sc}$, entonces $n = m^+$, luego $(m, n) \in \in_{\mathbb{N}}$. Además, si $(m, n) \in \in_{\mathbb{N}}$ y $(n, p) \in \in_{\mathbb{N}}$, entonces $m \in n$ y $n \in p$, luego, por ser p $\in$-transitivo, $m \in p$. Por lo tanto $< \subseteq \in_{\mathbb{N}}$.

Para demostrar que $\in_{\mathbb{N}} \subseteq <$, es suficiente que demostremos, por inducción, que el conjunto T definido como:

$$T = \{\, n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(\downarrow_{\mathrm{Sc}} n) = n \,\},$$

coincide con $\mathbb{N}$, ya que, por la prop. 13.5.8, $m < n$ si y sólo si $m \in \mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(\downarrow_{\mathrm{Sc}} n)$.

Se cumple que $0 \in T$, porque $\mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(\downarrow_{\mathrm{Sc}} 0) = 0$. Supongamos que $n \in T$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(\downarrow_{\mathrm{Sc}} n^+) &= \mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n) && \text{(porque } \downarrow_{\mathrm{Sc}} n^+ = \{n\}\text{)} \\
&= \{n\} \cup \textstyle\bigcup_{m \in \downarrow_{\mathrm{Sc}} n} \mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(m) && \text{(por la prop. 8.0.17)} \\
&= \{n\} \cup \mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(\downarrow_{\mathrm{Sc}} n) && \text{(porque } \mathrm{C}_{\mathrm{Sc}} \text{ es comp. aditivo)} \\
&= \{n\} \cup n && \text{(por la hipótesis de inducción)} \\
&= n^+ && \text{(por definición del conjunto sucesor).}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $n^+ \in T$. Luego $T = \mathbb{N}$. □

Proposición 13.5.21. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\downarrow_< n = n$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}
\downarrow_< n &= \{\, m \in \mathbb{N} \mid m < n \,\} && \text{(por definición)}\\
&= \{\, m \in \mathbb{N} \mid m \in \mathrm{Sc}(\downarrow_{\mathrm{Sc}} n) \,\} && \text{(por definición)}\\
&= \{\, m \in \mathbb{N} \mid m \in n \,\} && \text{(por la prop. 13.5.20)}\\
&= n && \text{(por ser } \mathbb{N} \in\text{-transitivo)}
\end{aligned}$$

□

Exponemos a continuación otro procedimiento para demostrar que la relación de pertenencia, restringida al conjunto de los números naturales, es una buena ordenación del citado conjunto.

En lo que sigue, convenimos que la relación binaria $<$ sobre el conjunto de los números naturales es $\in_{\mathbb{N}}$.

Proposición 13.5.22. *La relación $<$ es transitiva.*

Demostración. Demostramos anteriormente que todos los números naturales son $\in$-transitivos, luego si m, n y p lo son y $m < n$ y $n < p$, i.e., $m \in n$ y $n \in p$, entonces $m \in p$, i.e., $m < p$. □

Antes de demostrar que la relación $<$ es irreflexiva, establecemos el siguiente lema.

Lema 13.5.23. *Sean m, n dos números naturales, entonces son equivalentes:*

1. $m < n$.
2. $m^+ < n^+$.

Demostración. Supongamos que $m^+ < n^+$. Entonces, ya que $n^+ = n \cup \{n\}$, se cumple que $m^+ \in n$ o $m^+ = n$. Puesto que $m \in m^+$, si ocurre que $m^+ \in n$, entonces, por ser n $\in$-transitivo, $m \in n$, y si ocurre que $m^+ = n$, entonces, obviamente, $m \in n$, luego, en cualquier caso, $m < n$.

Para demostrar la recíproca, i.e., que, para cada $m, n \in \mathbb{N}$, si $m < n$, entonces $m^+ < n^+$, procedemos por inducción sobre n, i.e., demostramos, por inducción finita, que el conjunto

$$T = \{\, n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}\,(m < n \rightarrow m^+ < n^+) \,\}$$

coincide con el conjunto de los números naturales.

Se cumple que $0 \in T$, porque el antecedente del condicional

$$m < 0 \rightarrow m^+ < 0^+$$

es falso.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \in T$. Vamos a demostrar que entonces $n^+ \in T$, i.e., que $\forall m \in \mathbb{N}\,(m < n^+ \rightarrow m^+ < (n^+)^+)$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m < n^+$. Entonces, ya que $n^+ = n \cup \{n\}$, se cumple que $m \in n$ o $m = n$. Si ocurre que $m \in n$, entonces $m^+ \in n^+ \in (n^+)^+$, luego $m^+ < (n^+)^+$. Si ocurre que $m = n$, entonces $m^+ = n^+ \in (n^+)^+$, luego $m^+ < (n^+)^+$.

Por lo tanto $T = \mathbb{N}$. □

Corolario 13.5.24. *la relación $<$ es irreflexiva, i.e., para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \not< n$.*

Demostración. Sea $T = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \not< n \,\}$.

Se cumple que $0 \in T$, porque $\varnothing \notin \varnothing$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \in T$, i.e., tal que $n \not< n$. Entonces, en virtud del lema, $n^+ \not< n^+$, luego $n^+ \in T$. Por lo tanto $T = \mathbb{N}$. □

Corolario 13.5.25. *El par* $(\mathbb{N},<)$*, por ser la relación* $<$ *irreflexiva y transitiva, es un conjunto ordenado.*

Establecemos a continuación la ley de tricotomía para el conjunto ordenado $(\mathbb{N},<)$.

Proposición 13.5.26. *Para cualesquiera números naturales* $m,n \in \mathbb{N}$*, se cumple que* $m < n$ *o* $m = n$ *o* $n < m$*, pero ni* $m < n$ *y* $m = n$*, ni* $m < n$ *y* $n < m$*, y tampoco* $n < m$ *y* $m = n$*.*

Demostración. No se cumple que $m < n$ y $m = n$, porque si se cumpliera, $<$ no sería irreflexiva. No se cumple que $m < n$ y $n < m$, porque si se cumpliera, entonces, por la transitividad, tendríamos que $n < n$, luego $<$ no sería irreflexiva. No se cumple que $n < m$ y $m = n$, porque si se cumpliera, $<$ no sería irreflexiva.

Para demostrar que, para cualesquiera números naturales $m,n \in \mathbb{N}$, se cumple que $m < n$ o $m = n$ o $n < m$, procedemos por inducción sobre n, i.e., demostramos, por inducción finita, que el conjunto

$$T = \{\, n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}\,(m < n \vee m = n \vee n < m)\,\}$$

coincide con el conjunto de los números naturales.

Se cumple que $0 \in T$, i.e., que, para cada $m \in \mathbb{N}$, $m = 0$ o $0 < m$. Para ello procedemos por inducción sobre m, i.e., demostramos, por inducción finita, que el conjunto

$$U = \{\, m \in \mathbb{N} \mid m = 0 \vee 0 < m\,\}$$

coincide con el conjunto de los números naturales.

Se cumple que $0 \in U$, porque $0 = 0$.

Supongamos que $m \in U$, i.e., que $m = 0$ o $0 < m$. Si ocurre que $m = 0$, entonces $0 < m^+ = 0^+$, luego $m^+ \in \mathbb{N}$. Si ocurre que $0 < m$, entonces, ya que $m \in m^+$, $0 \in m^+$, luego $m^+ \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto $U = \mathbb{N}$. Con lo cual queda demostrado que $0 \in T$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \in T$. Si $m < n$, entonces, ya que $n \in n^+$, $m < n^+$. Si $m = n$, entonces $m^+ = n^+$, pero $m \in m^+$, luego $m \in n^+$. Por último, si ocurre que $n < m$, entonces $n^+ < m^+$, luego, ya que $m^+ = m \cup \{m\}$, $n^+ \in m$ o $n^+ = m$. De modo que, en cualquier caso, $n^+ \in T$. Por lo tanto $T = \mathbb{N}$. □

Proposición 13.5.27. *El conjunto ordenado* $(\mathbb{N},<)$ *está bien ordenado, i.e., cualquier parte no vacía de* $\mathbb{N}$*, tiene un primer elemento.*

Demostración. En lugar de demostrar que

$$\forall A \subseteq \mathbb{N}\,(A \neq \varnothing \to \exists \min(A)),$$

demostramos que

$$\forall A \subseteq \mathbb{N}\,(\neg(\exists \min(A)) \to A = \varnothing).$$

Sea pués $A \subseteq \mathbb{N}$ sin mínimo, i.e., tal que $\neg(\exists p \in A\, \forall q \in A\,(p \leq q))$, o, lo que es equivalente, tal que $\forall p \in A\, \exists q \in A\,(q < p)$. Vamos a demostrar que $A = \varnothing$, estableciendo, por inducción finita, que el conjunto

$$T = \{\, m \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}\,(n < m \to n \notin A\,\}$$

coincide con el conjunto de los números naturales.

Observemos que si ya estuviera demostrado que $T = \mathbb{N}$, $A = \varnothing$, porque si $A \neq \varnothing$, eligiendo un $p \in A$, tendríamos, por carecer A de mínimo, que existiría un $q \in A$ tal que $q < p$, luego $\neg(\forall m,n \in \mathbb{N}\,(n < m \to n \notin A))$, i.e., $\exists m,n \in \mathbb{N}\,(n < m\ \ \&\ \ n \in A)$, que entraría en contradicción con que $T = \mathbb{N}$.

Se cumple que $0 \in T$, porque en el condicional

$$n < 0 \to n \notin A,$$

el antecedente es falso.

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \in T$. Entonces, dado un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n < m^+$, se tiene que $n \in m$ o $n = m$. Si ocurre que $n \in m$, entonces, por la hipótesis de inducción, $n \notin A$, luego $m^+ \in T$. Si ocurre que $n = m$, entonces $m = n \notin A$, porque si $m \in A$, se cumpliría que, para cada $a \in A$, $m \leq a$, ya que, en caso contrario, i.e., si existiera un $a \in A$ tal que $a < m$, entonces $m \notin T$, que entraría en contradicción con que $m \in T$.

Por lo tanto $T = \mathbb{N}$. De donde concluimos que $A = \varnothing$. □

13.6. Principios de demostración por inducción derivados. Para abreviar, denotamos por "PDI" la frase "principio de demostración por inducción".

Proposición 13.6.1 (PDI de curso de valores)**.** *Sea X un subconjunto de $\mathbb{N}$. Si, para cada $n \in \mathbb{N}$, si cuando $n \subseteq X$, entonces $n \in X$, entonces $X = \mathbb{N}$.*

Demostración. □

Proposición 13.6.2 (PDI a partir de un número)**.** *Sea $k \in \mathbb{N}$ y $X \subseteq \mathbb{N}$. Si $k \in X$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, si cuando $k \leq n$ y $n \in X$, entonces $n^+ \in X$, entonces $\{\, n \in \mathbb{N} \mid k \leq n \,\} \subseteq X$.*

Demostración. □

Proposición 13.6.3 (PDI ascendente en un intervalo)**.** *Sean $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $a \leq b$ y $X \subseteq \mathbb{N}$. Si $a \in X$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, si cuando $a \leq n < b$ y $n \in X$, entonces $n^+ \in X$, entonces $[a, b] = \{\, n \in \mathbb{N} \mid a \leq n \wedge n \leq b \,\} \subseteq X$.*

Demostración. □

Proposición 13.6.4 (PDI descendente en un intervalo)**.** *Sean $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $a \leq b$ y $X \subseteq \mathbb{N}$. Si $b \in X$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, si cuando $a \leq n < b$ y $n^+ \in X$, entonces $n \in X$, entonces $[a, b] \subseteq X$.*

Demostración. □

13.7. Caracterización ordinal del conjunto de los números naturales. En la sección anterior caracterizamos al conjunto de los números naturales, dotado de la estructura algebraica, dada por el cero y el sucesor, mediante la propiedad de la definición por recursión. Ahora nos proponemos caracterizar al conjunto de los números naturales, dotado de la estructura ordinal, dada por el orden aritmético, mediante un par de propiedades ordinales adicionales, que tiene el orden sobre el conjunto de los números naturales. Para ello definimos y estudiamos una serie de conceptos, relativos a los conjuntos ordenados, útiles en sí, y algunos de ellos necesarios para establecer la caracterización ordinal antes mencionada.

Definición 13.7.1. Sea A un conjunto.

1. Un *orden* sobre A es una relación binaria $<$ en A tal que:
   a) $<$ es *irreflexiva*, i.e., $\forall a \in A\,(a \not< a)$.
   b) $<$ es *transitiva*, i.e., $\forall a, b, c \in A\,((a < b \wedge b < c) \rightarrow a < c)$.

   Denotamos al conjunto de los órdenes sobre A por $\mathrm{Ord}(A)$. Un *conjunto ordenado* es un par ordenado $(A, <)$, abreviado como $\mathbf{A}$, en el que $< \in \mathrm{Ord}(A)$.
2. Un *orden lineal* sobre A es una relación binaria $<$ en A tal que:
   a) $<$ es irreflexiva, i.e., $\forall a \in A\,(a \not< a)$.
   b) $<$ es transitiva, i.e., $\forall a, b, c \in A\,((a < b \wedge b < c) \rightarrow a < c)$.
   c) $<$ es *disyuntiva*, i.e., $\forall a, b \in A\,(a \neq b \rightarrow (a < b \vee b < a))$.

   Denotamos al conjunto de los órdenes lineales sobre A por $\mathrm{Lo}(A)$. Un *conjunto linealmente ordenado* es un par ordenado $(A, <)$, abreviado como $\mathbf{A}$, en el que $< \in \mathrm{Lo}(A)$.

Sea A un conjunto. Entonces que hay una correspondencia biunívoca entre el conjunto $\mathrm{Ord}(A)$ y el conjunto de las relaciones binarias $\leq$ en A tales que:

1. $\leq$ es reflexiva, i.e., $\Delta_A \subseteq \leq$.
2. $\leq$ es antisimétrica, i.e., $\forall a, b \in A\,((a \leq b \wedge b \leq a) \rightarrow a = b)$.
3. $\leq$ es transitiva, i.e., $\leq \circ \leq \subseteq \leq$.

Aunque el concepto de orden fué entendido, por parte de su introductor, Hausdorff, en el sentido irreflexivo, en virtud del resultado contenido en el ejercicio anterior, según el cual son indistinguibles las relaciones irreflexivas y transitivas de las refexivas, antisimétricas y transitivas en un mismo conjunto, haremos uso del concepto de orden que más convenga a la situación de que se trate.

Sea A un conjunto. Entonces que hay una correspondencia biunívoca entre el conjunto $\mathrm{Ord}(A)$ y el conjunto de las relaciones binarias $<$ en A tales que:

1. $<$ es asimétrica, i.e., $\forall a, b \in A\,(a < b \rightarrow b \not< a)$.
2. $<$ es transitiva, i.e., $< \circ < \subseteq <$.

El conjunto $\mathrm{Ord}(A)$, a su vez, se ordena por extensión, conviniendo que un orden $\leq'$ sobre A extiende a otro orden $\leq$ sobre A, precisamente cuando $\leq \subseteq \leq'$. Esto nos va a permitir caracterizar a los órdenes lineales sobre A como aquellos órdenes sobre A que sean maximales en el conjunto ordenado por extensión $\mathbf{Ord}(A)$.

Proposición 13.7.2. *Sea A un conjunto y $\leq \in \mathrm{Ord}(A)$. Una condición necesaria y suficiente para que $\leq$ sea un orden lineal sobre A es que $\leq$ sea maximal en $\mathbf{Ord}(A)$.*

Demostración. □

Definición 13.7.3. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos conjuntos ordenados.

1. Una *aplicación isótona* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ es un triplo ordenado $(\mathbf{A}, \varphi, \mathbf{B})$, abreviado como φ y denotado por $\varphi\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, en el que φ es una aplicación de A en B tal que
$$\forall x, y \in A\,(\, x \leq y \rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)\,).$$
2. Una *aplicación antítona* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ es un triplo ordenado $(\mathbf{A}, \varphi, \mathbf{B})$, abreviado como φ y denotado por $\varphi\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, en el que φ es una aplicación de A en B tal que
$$\forall x, y \in A\,(\, x \leq y \rightarrow \varphi(y) \leq \varphi(x)\,).$$

Proposición 13.7.4. *Sean $\varphi\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, $\psi\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ y $\xi\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ tres aplicaciones isótonas entre conjuntos ordenados. Entonces:*

1. *Siendo* $\mathrm{id}_{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}, \mathrm{id}_A, \mathbf{A})$*, se cumple que* $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ *es un endomorfismo de* $\mathbf{A}$.
2. *Siendo* $\psi \circ \varphi = (\mathbf{A}, \psi \circ \varphi, \mathbf{C})$*, se cumple que* $\psi \circ \varphi\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ *es una aplicación isótona de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{C}$.
3. (Asociatividad). *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi \circ \varphi"'] \arrow[drr, bend left=50, "(\xi \circ \psi) \circ \varphi"] \arrow[drr, bend right=60, "\xi \circ (\psi \circ \varphi)"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr, "\xi \circ \psi"] & \\
 & \mathbf{C} \arrow[r, "\xi"'] & \mathbf{D}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

4. (Neutros). *Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbf{A}}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathbf{A} \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbf{B} \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{B}}"] \\ & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

conmutan.

La composición de dos aplicaciones antítonas es una aplicación isótona, y que la composición de una isótona y una antítona es antítona.

Definición 13.7.5. Sea $\mathbf{A}$ un conjunto ordenado, $X \subseteq A$ y $a \in A$.

1. Decimos que a que es el *máximo* de $\mathbf{A}$ si, para cada $x \in A$, se cumple que $x \leq a$.
2. Decimos de a es el *mínimo* de $\mathbf{A}$ si, para cada $x \in A$, se cumple que $a \leq x$.
3. Decimos que a es un *minorante* o una *cota inferior* de X en $\mathbf{A}$, y lo denotamos por $a \leq X$, si, para cada $x \in X$, $a \leq x$. Denotamos por $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(X)$ el conjunto de las cotas inferiores de X en $\mathbf{A}$. Además, si $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(X) \neq \varnothing$, entonces decimos que el conjunto X está *acotado inferiormente* en $\mathbf{A}$. Convenimos que $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(\varnothing) = A$.
4. Decimos que a que es un *mayorante* o una *cota superior* de X en $\mathbf{A}$, y lo denotamos por $X \leq a$, si, para cada $x \in X$, $x \leq a$. Denotamos por $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X)$ el conjunto de las cotas superiores de X en $\mathbf{A}$. Además, si $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X) \neq \varnothing$, entonces decimos que el conjunto X está *acotado superiormente* en $\mathbf{A}$. Convenimos que $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(\varnothing) = A$.
5. Si X es tal que $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(X) \neq \varnothing$ y $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X) \neq \varnothing$, entonces decimos que X está *acotado* en $\mathbf{A}$.

Un conjunto linealmente ordenado coinciden los conceptos de mínimo y de minimal, así como los de máximo y de maximal

Sea $\mathbf{A}$ un conjunto ordenado y $X \subseteq A$ no vacía. Entonces

1. $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcap_{x \in X} \Downarrow_{\leq} x$.
2. $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcap_{x \in X} \Uparrow_{\leq} x$.

Definición 13.7.6. Sea $\mathbf{A}$ un conjunto linealmente ordenado y X una parte de A. Decimos que X es un *intervalo* de $\mathbf{A}$ si, para cada $a \in A$ y cada $x, y \in X$, si $x \leq a \leq y$, entonces $a \in A$.

Proposición 13.7.7. *Sea $\mathbf{A}$ un conjunto linealmente ordenado y X una parte de A. Entonces $\widehat{X} = \{\, a \in A \mid \exists x, y \in X\,(\, x \leq a \leq y\,)\,\}$ es un intervalo de $\mathbf{A}$ que contiene a X y es el mínimo intervalo de $\mathbf{A}$ con dicha propiedad. Por lo tanto X es un intervalo exactamente si $X = \widehat{X}$.*

Demostración. □

Introducimos a continuación el concepto de *conexión de Galois contravariante*, ya que, como demostraremos en lo que sigue, los operadores $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}$ y $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}$, constituyen un ejemplo de tan importante concepto, introducido por Galois, a principios del XIX, al estudiar la relación existente entre cuerpos y grupos de automorfismos.

Definición 13.7.8. Una *conexión de Galois contravariante* es un cuádruplo ordenado $(\mathbf{A}, \varphi, \psi, \mathbf{B})$ en el que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son conjuntos ordenados, φ una aplicación antítona de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ y ψ una aplicación antítona de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$ tales que:

1. $\forall a \in A\,(\, a \leq \psi(\varphi(a))\,)$.

2. $\forall b \in B\,(\, b \leq \varphi(\psi(b))\,)$.

Proposición 13.7.9. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto ordenado y* X *e* Y *dos subconjuntos de* A *tales que* $X \subseteq Y$*. Entonces:*

1. $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(X)$ *es una* $\leq$*-sección inicial* A*.*
2. $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X)$ *es una* $\leq$*-sección final de* A*.*
3. $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(Y) \subseteq \mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(X)$.
4. $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(Y) \subseteq \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X)$.
5. $X \subseteq \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(X))$.
6. $X \subseteq \mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X))$.

Demostración. □

Corolario 13.7.10. *Si* $\mathbf{A}$ *es un conjunto ordenado, entonces el cuádruplo ordenado* $(\mathbf{Sub}(A), \mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}, \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}, \mathbf{Sub}(A))$ *es una conexión de Galois contravariante.*

Proposición 13.7.11. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto ordenado. Entonces:*

1. *Para cada parte* X *de* A*,* $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(X)))$.
2. *Para cada parte* X *de* A*,* $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X)))$.
3. $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}} \circ \mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}$ *y* $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}} \circ \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}$ *son operadores clausura sobre* A*, i.e., ambos son extensivos, isótonos e idempotentes.*
4. *La restricción de* $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}$ *al conjunto de los puntos fijos del operador clausura* $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}} \circ \mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}$ *y al conjunto de los puntos fijos del operador clausura* $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}} \circ \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}$*, determina un antiisomorfismo de* $\mathrm{Im}(\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}} \circ \mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}})$ *en* $\mathrm{Im}(\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}} \circ \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}})$*, cuyo inverso es precisamente el antiisomorfismo de* $\mathrm{Im}(\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}} \circ \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}})$ *en* $\mathrm{Im}(\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}} \circ \mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}})$ *determinado por la restricción de* $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}$ *al conjunto de los puntos fijos del operador clausura* $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}} \circ \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}$ *y al conjunto de los puntos fijos del operador clausura* $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}} \circ \mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}$.
5. *Para cada subconjunto no vacío* $\mathcal{X}$ *de* $\mathrm{Sub}(A)$*, se cumple que*

$$\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(\textstyle\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X) = \bigcap_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(X) \ \text{ y } \ \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X) = \bigcap_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X).$$

Demostración. □

Definición 13.7.12. Sea $\mathbf{A}$ un conjunto ordenado, $X \subseteq A$ y $a \in A$.

1. Decimos que a es el *ínfimo* o el *extremo inferior* de X en $\mathbf{A}$, si cumple las siguientes condiciones:
   a) Para cada $x \in X$, $a \leq x$, i.e., $a \in \mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(X)$.
   b) Para cada $b \in \mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(X)$, $b \leq a$.

   Denotamos por $\mathrm{Inf}_{\mathbf{A}}(X)$, o $\inf_{\mathbf{A}} X$, o simplemente por $\inf X$, el ínfimo de X en $\mathbf{A}$, si tal ínfimo existe.
2. Decimos que a que es el *supremo* o el *extremo superior* de X en $\mathbf{A}$, si cumple las siguientes condiciones:
   a) Para cada $x \in X$, $x \leq a$, i.e., $a \in \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X)$.
   b) Para cada $b \in \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X)$, $a \leq b$.

   Denotamos por $\mathrm{Sup}_{\mathbf{A}}(X)$, o $\bigvee_{\mathbf{A}} X$, o simplemente por $\bigvee X$, el supremo de X en $\mathbf{A}$, si tal supremo existe.

Así pues, el ínfimo de X en $\mathbf{A}$, si existe, es la máxima de las cotas inferiores de X en $\mathbf{A}$. Además, tal ínfimo no pertenece necesariamente a X, pero si perteneciera, entonces sería el mínimo de X. Del mismo modo, el supremo de X en $\mathbf{A}$, caso de existir, es la mínima de las cotas superiores de X en $\mathbf{A}$, y no pertenece necesariamente a X, pero si perteneciera, entonces sería el máximo de X.

Proposición 13.7.13. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto ordenado y* $X \subseteq A$ *tal que existan* $\inf X$ *y* $\bigvee X$*. Entonces:*

1. *Si* $X = \varnothing$*, entonces* $\inf X$ *es el máximo de* $\mathbf{A}$ *y* $\bigvee X$ *el mínimo de* $\mathbf{A}$*.*

2. *Si* $X \neq \varnothing$, *entonces* $\inf X \leq \bigvee X$.

Demostración. □

Proposición 13.7.14. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto ordenado y* X *e* Y *dos subconjuntos de* A *tales que existan* $\inf X$, $\bigvee X$, $\inf Y$ *y* $\bigvee Y$. *Si* $X \subseteq Y$, *entonces* $\inf Y \leq \inf X$ *y* $\bigvee X \leq \bigvee Y$.

Demostración. □

Proposición 13.7.15. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto ordenado y* $(x_i)_{i\in i}$ *e* $(y_i)_{i\in I}$ *dos familias en* A *tales que, para cada* $i \in I$, $x_i \leq y_i$. *Entonces:*

1. *Si existen* $\bigvee_{i\in I} x_i$ *y* $\bigvee_{i\in I} y_i$, *entonces* $\bigvee_{i\in I} x_i \leq \bigvee_{i\in I} y_i$.
2. *Si existen* $\inf_{i\in I} x_i$ *e* $\inf_{i\in I} y_i$, *entonces* $\inf_{i\in I} x_i \leq \inf_{i\in I} y_i$.

Demostración. □

Proposición 13.7.16. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto ordenado,* $(x_i)_{i\in I}$ *una familia en* A *y* $(J_l)_{l\in L}$ *una familia de subconjuntos de* I *tal que* $I = \bigcup_{l\in L} J_l$. *Entonces:*

1. *Si para cada* $l \in L$, *existe* $\bigvee_{i\in J_l} x_i$, *entonces existe* $\bigvee_{i\in I} x_i$ *si y sólo si existe* $\bigvee_{l\in L}(\bigvee_{i\in J_l} x_i)$, *y entonces*
$$\textstyle\bigvee_{i\in I} x_i = \bigvee_{l\in L}(\bigvee_{i\in J_l} x_i).$$
2. *Si para cada* $l \in L$, *existe* $\inf_{i\in J_l} x_i$, *entonces existe* $\inf_{i\in I} x_i$ *si y sólo si existe* $\inf_{l\in L}(\inf_{i\in J_l} x_i)$, *y entonces*
$$\inf_{i\in I} x_i = \inf_{l\in L}(\inf_{i\in J_l} x_i).$$

Demostración. □

Corolario 13.7.17. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto ordenado y* $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ *una familia en* A. *Entonces:*

1. *Si para cada* $j \in J$, *existe* $\bigvee_{i\in I} x_{i,j}$, *entonces existe* $\bigvee_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j}$ *si y sólo si existe* $\bigvee_{j\in J}(\bigvee_{i\in I} x_{i,j})$, *y entonces*
$$\textstyle\bigvee_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \bigvee_{j\in J}(\bigvee_{i\in I} x_{i,j}).$$
2. *Si para cada* $j \in J$, *existe* $\inf_{i\in I} x_{i,j}$, *entonces existe* $\inf_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j}$ *si y sólo si existe* $\inf_{j\in J}(\inf_{i\in I} x_{i,j})$, *y entonces*
$$\inf_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \inf_{j\in J}(\inf_{i\in I} x_{i,j}).$$

Demostración. □

Proposición 13.7.18. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto ordenado y* X *e* Y *dos subconjuntos de* A *tales que* $X \subseteq Y$. *Entonces:*

1. *Si existen* $\bigvee_{\mathbf{A}} X$ *y* $\bigvee_{\mathbf{Y}} X$, *siendo* $\mathbf{Y} = (Y, \leq \cap(Y \times Y))$, *entonces* $\bigvee_{\mathbf{A}} X \leq \bigvee_{\mathbf{Y}} X$. *Además, si* $\bigvee_{\mathbf{A}} X$ *existe y pertenece a* Y, *entonces* $\bigvee_{\mathbf{Y}} X$ *existe y* $\bigvee_{\mathbf{A}} X = \bigvee_{\mathbf{Y}} X$.
2. *Si existen* $\inf_{\mathbf{A}} X$ *y* $\inf_{\mathbf{Y}} X$, *entonces* $\inf_{\mathbf{Y}} X \leq \inf_{\mathbf{A}} X$. *Además, si* $\inf_{\mathbf{A}} X$ *existe y pertenece a* Y, *entonces* $\inf_{\mathbf{Y}} X$ *existe y* $\inf_{\mathbf{A}} X = \inf_{\mathbf{Y}} X$.

Demostración. □

Proposición 13.7.19. *Si un conjunto no vacío de números naturales está acotado superiormente, entonces tiene un máximo.*

Demostración. □

Teorema 13.7.20. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto linealmente ordenado no vacío tal que:*

1. $\forall x \in A\, \exists y \in A\, (\, x < y\,)$.

2. $\forall X \subseteq A\,(\,X \neq \varnothing \to \exists m \in X\,(\forall x \in X\,(\,m \leq x\,)))$.
3. $\forall X \subseteq A\,(\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X) \neq \varnothing \to \exists n \in X\,(\forall x \in X\,(x \leq n)))$.

Entonces $\mathbf{A} \cong \mathbf{N}$.

Demostración. □

Definición 13.7.21. Un conjunto es *finito* si es isomorfo a un número natural. En caso contrario decimos que es *infinito*. Además, si A es un conjunto, $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(A)$ denota el conjunto de los subconjuntos finitos de A.

Lema 13.7.22. *Para cada número natural n se cumple que toda aplicación inyectiva de n en sí mismo es sobreyectiva.*

Demostración. La demostración es por inducción. Sea T el subconjunto de $\mathbb{N}$ definido como:

$$T = \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \forall f\colon n \longrightarrow n \left(\begin{array}{c} \text{si } f\colon n \rightarrowtail n, \\ \text{entonces } f\colon n \twoheadrightarrow n \end{array} \right) \right\}.$$

Se cumple que $0 \in T$, porque la única aplicación de 0 en sí mismo es la aplicación identidad, que es biyectiva.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $n \in T$. Queremos demostrar que entonces $n \cup \{n\} \in T$. □

Corolario 13.7.23 (Dirichlet)**.** *Ningún número natural es isomorfo a un subconjunto estricto de sí mismo.*

Demostración. Si un número natural n fuera isomorfo a un subconjunto estricto X de sí mismo, mediante una biyección $f\colon n \longrightarrow X$, entonces, componiendo f con la inclusión canónica $\mathrm{in}_{X,n}$ de X en n, obtendríamos una aplicación inyectiva $\mathrm{in}_{X,n} \circ f\colon n \rightarrowtail n$, luego tal aplicación debería ser sobreyectiva. Pero la imagen de la aplicación $\mathrm{in}_{X,n} \circ f$ es X que es una parte propia de n. Contradicción. Por lo tanto ningún número natural es isomorfo a un subconjunto estricto de sí mismo. □

Corolario 13.7.24. *Ningún conjunto finito es isomorfo a un subconjunto estricto de sí mismo.*

Corolario 13.7.25. *Para cada número natural n se cumple que toda aplicación sobreyectiva de n en sí mismo es inyectiva.*

Demostración. Sea $f\colon n \twoheadrightarrow n$. Entonces f tiene una inversa por la derecha, i.e., existe una aplicación $g\colon n \longrightarrow n$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_n$. Por lo tanto g es inyectiva, luego biyectiva, de donde $f \circ g \circ g^{-1} = g^{-1}$, i.e., $f = g^{-1}$, así que f es biyectiva, luego, en particular, inyectiva. □

Corolario 13.7.26. *Ningún número natural n es isomorfo a un cociente n/Φ, siendo Φ una relación de equivalencia sobre n tal que $\Phi \neq \Delta_n$.*

Demostración. Si un número natural n fuera isomorfo a un cociente n/Φ, para una relación de equivalencia Φ sobre n tal que $\Phi \neq \Delta_n$, mediante una biyección $f\colon n \longrightarrow n/\Phi$, entonces, componiendo la proyección canónica pr_Φ de n en n/Φ con f^{-1} , obtendríamos una aplicación sobreyectiva $f^{-1} \circ \mathrm{pr}_\Phi\colon n \twoheadrightarrow n$, luego tal aplicación debería ser inyectiva. Pero, por ser $\Phi \neq \Delta_n$, hay dos números naturales $i, j \in n$ tales que $i \neq j$ pero $(i, j) \in \Phi$, luego $[i]_\Phi = [j]_\Phi$, así que $f^{-1}([i]_\Phi) = f^{-1}([j]_\Phi)$. Contradicción. Por lo tanto ningún número natural es isomorfo a un cociente n/Φ, siendo Φ una relación de equivalencia sobre n tal que $\Phi \neq \Delta_n$. □

Corolario 13.7.27. *Ningún conjunto finito A es isomorfo a un cociente A/Φ, siendo Φ una relación de equivalencia sobre A tal que $\Phi \neq \Delta_A$.*

Proposición 13.7.28. *Para cada número natural n se cumple que no hay ninguna aplicación inyectiva de $n \cup \{n\}$ en n.*

Demostración. Supongamos que exista una aplicación inyectiva f de $n \cup \{n\}$ en n. Entonces, componiendo f con la inclusión canónica $\mathrm{in}_{n,n\cup\{n\}}$, obtenemos una aplicación inyectiva de $n \cup \{n\}$ en sí mismo. Por lo tanto $\mathrm{in}_{n,n\cup\{n\}} \circ f$ es sobreyectiva, pero la imagen de la aplicación $\mathrm{in}_{n,n\cup\{n\}} \circ f$ es $f[n] \subset n$, luego n no está en tal imagen. Contradicción. Por lo tanto, para cada número natural n se cumple que no hay ninguna aplicación inyectiva de $n \cup \{n\}$ en n. □

Corolario 13.7.29. *Para cada número natural n se cumple que no hay ninguna aplicación sobreyectiva de n en $n \cup \{n\}$.*

Demostración. Si existiera una aplicación sobreyectiva $f\colon n \twoheadrightarrow n \cup \{n\}$, entonces dicha aplicación tendría una inversa por la derecha, i.e., existiría una aplicación $g\colon n \cup \{n\} \rightarrowtail n$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_n$. Por lo tanto g sería una aplicación inyectiva de $n \cup \{n\}$ en n. Contradicción. Por lo tanto, para cada número natural n se cumple que no hay ninguna aplicación sobreyectiva de n en $n \cup \{n\}$. □

Corolario 13.7.30 (Dedekind)**.**

1. *Cualquier conjunto isomorfo a un subconjunto estricto de sí mismo es infinito.*
2. *El conjunto de los números naturales es infinito.*

Corolario 13.7.31. *Cualquier conjunto finito es isomorfo a un único número natural. Si A es un conjunto finito, al único número natural isomorfo a A lo denominamos el número cardinal de A y lo denotamos por* $\mathrm{card}(A)$.

Lema 13.7.32. *Si X es un subconjunto estricto de un número natural n, entonces X es isomorfo a un único número natural $m \in n$.*

Demostración. □

Proposición 13.7.33. *Cualquier subconjunto de un conjunto finito es finito.*

Proposición 13.7.34. *Si A es un conjunto finito y F una función, entonces $F[A]$ es finito. Además,* $\mathrm{card}(F[A]) \leq \mathrm{card}(A)$.

Demostración. □

Proposición 13.7.35. *Si A es un conjunto finito y cada miembro de A es finito, entonces $\bigcup A$ es finito. Además, si $\mathrm{card}(A) = n$ y $A = \{ X_i \mid i \in n \}$, entonces $\mathrm{card}(\bigcup A) \leq Sum_{i\in n}\mathrm{card}(X_i)$ y, si $X_i \cap X_j = \varnothing$ cuando $i \neq j$, entonces $\mathrm{card}(\bigcup A) = Sum_{i\in n}\mathrm{card}(X_i)$.*

Demostración. □

Proposición 13.7.36. *Si A es un conjunto finito, entonces $\mathrm{Sub}(A)$ es finito. Además, se cumple que*

$$\mathrm{card}(\mathrm{Sub}(A)) = 2^{\mathrm{card}(A)}.$$

Demostración. □

Proposición 13.7.37. *Si A es un conjunto infinito, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, hay una aplicación inyectiva de n en A y no hay ningún isomorfismo de n en A.*

Demostración. □

Proposición 13.7.38. *Si A y B son finitos, entonces $A \times B$ es finito. Además, se cumple que*

$$\mathrm{card}(A \times B) = \mathrm{card}(A) \cdot \mathrm{card}(B).$$

Demostración. □

Proposición 13.7.39. *Si los conjuntos A y B son finitos, entonces también los conjuntos* $\mathrm{Fnc}(A,B)$, $\mathrm{Pfnc}(A,B)$ *y* $\mathrm{Mfnc}(A,B)$ *son finitos.*

Demostración. □

Definición 13.7.40. Sea A un conjunto. Decimos de A que es *infinito numerable* si hay un isomorfismo entre A y $\mathbb{N}$. Si tal es el caso, lo denotamos por $\mathrm{card}(A) = \aleph_0$. Por otra parte, decimos de A que es *numerable* si A está dominado por $\mathbb{N}$. Si tal es el caso, lo denotamos por $\mathrm{card}(A) \leq \aleph_0$.

Proposición 13.7.41. *Cualquier subconjunto infinito de un conjunto infinito numerable es infinito numerable.*

Demostración. □

Corolario 13.7.42. *Una condición necesaria y suficiente para que un conjunto sea numerable es que sea finito o infinito numerable.*

Proposición 13.7.43. *Si A es un conjunto infinito numerable y F una función, entonces $F[A]$ es numerable.*

Demostración. □

Proposición 13.7.44. *El conjunto de los números naturales se puede representar como la unión de un conjunto infinito numerable de conjuntos infinito numerables*

Demostración. □

Usaremos esta últimna proposición en la teoría de la recursión cuando definamos la noción de aplicación de gran amplitud de Kouznetsov.

Proposición 13.7.45. *La unión de dos conjuntos infinito numerables es un conjunto infinito numerable. Por consiguiente, la unión de un conjunto finito de conjuntos infinito numerables es infinito numerable.*

Demostración. □

Teorema 13.7.46 (Cantor). *Hay un isomorfismo de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$.*

Demostración. □

En la teoría de la recursión demostraremos la existencia de aplicaciones recursivas primitivas biyectivas de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, para las que las dos aplicaciones asociadas a la inversa son recursivas primitivas.

Corolario 13.7.47. *Si A y B son dos conjuntos infinito numerables, entonces $A \times B$ es infinito numerable. Por consiguiente, para cada número natural no nulo n y cada familia $(\, A_i \mid i \in n\,)$, si para cada $i \in n$, A_i es infinito numerable, entonces $\prod_{i \in n} A_i$ es infinito numerable; en particular, si A es infinito numerable, A^n es infinito numerable.*

Proposición 13.7.48. *Sea $(\, A_n \mid n \in \mathbb{N}\,)$ una familia de conjuntos tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \neq \varnothing$ y A_n es numerable. Entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es numerable.*

Demostración. □

Corolario 13.7.49. *Si A es infinito numerable, entonces $A^{\star} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$ es infinito numerable. Por consiguiente, si A es infinito numerable, entonces* $\mathrm{Sub_{fin}}(A)$ *es infinito numerable.*

Proposición 13.7.50. *Sea A un conjunto numerable y R una relación de equivalencia sobre A. Entonces A/R, el conjunto cociente de A entre R, es numerable.*

Demostración. □

Teorema 13.7.51 (Cantor). *El conjunto de todos los subconjuntos de* $\mathbb{N}$ *es infinito y no es infinito numerable. Por consiguiente, los conjuntos se dividen en tres grupos: Los finitos, los infinito numerables y los innumerables. A los conjuntos de los dos últimos tipos los denominamos conjuntos transfinitos*

Proposición 13.7.52. *Sea* A *un conjunto y* R *una relación binaria en* A*. Entonces* $\mathrm{Pog}(R)$*, el preorden generado por* R*, coincide con* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n$*, siendo* $(\, R^n \mid n \in \mathbb{N}\,)$ *la familia de relaciones definida por recursión como:*

1. $R^0 = \Delta_A$.
2. $R^{n+1} = R \circ R^n$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Así pues, para cada $(x, y) \in A \times A$*,* $(x, y) \in \mathrm{Pog}(R)$ *si y sólo si* $x = y$ *o hay un* $n \in \mathbb{N} - 1$ *y una familia* $(\, a_j \mid j \in n + 1\,)$ *en* A *tal que* $a_0 = x$*,* $a_n = y$ *y para cada* $j \in n$*,* $(a_j, a_{j+1}) \in R$*.*

Por otra parte, $\mathrm{Eqg}(R)$*, la equivalencia generada por* R*, coincide con el conjunto de los pares* $(x, y) \in A \times A$ *tales que* $x = y$ *o hay un* $n \in \mathbb{N} - 1$ *y una familia* $(\, a_j \mid j \in n+1\,)$ *en* A *tal que* $a_0 = x$*,* $a_n = y$ *y para cada* $j \in n$*,* $(a_j, a_{j+1}) \in R \cup R^{-1}$*.*

14. Conjuntos bien ordenados.

14.1. Conjuntos bien ordenados y morfismos. En la sección dedicada al estudio de los números naturales demostramos, entre otras cosas, que tal conjunto está bien ordenado. Ahora, por ser fundamental para la teoría de conjuntos y teorías afines, nos vamos a ocupar del estudio de los conjuntos bien ordenados en general, así como de los morfismos entre los mismos. Una vez llevada a cabo tal tarea, demostraremos, siguiendo a Cantor, que el universo de discurso **WO**, formado por los conjuntos bien ordenados y los morfismos entre ellos, tiene un *esqueleto*, i.e., hay una clase de conjuntos bien ordenados **ON**, la clase de los ordinales, que tiene las siguientes propiedades:

- $\forall (\alpha, \in_\alpha), (\beta, \in_\beta) \in \mathbf{ON}\, ((\alpha, \in_\alpha) \cong (\beta, \in_\beta) \to (\alpha, \in_\alpha) = (\beta, \in_\beta))$.
- $\forall \mathbf{A} \in \mathbf{WO}\, \exists (\alpha, \in_\alpha) \in \mathbf{ON}\, (\, \mathbf{A} \cong (\alpha, \in_\alpha)\,)$.

Recordemos que ya demostramos que el conjunto de los números naturales es un esqueleto para el universo de discurso formado por los conjuntos finitos y las aplicaciones entre ellos. Además, en relación con la *ley del pensamiento* de Cantor, según la cual "siempre sea posible reducir cada conjunto bien definido a la forma de un conjunto bien ordenado", dijo Hilbert:

> Any system of real numbers is said to be ordered, if for every two numbers of the system it is determined which one is the earlier and which the later, and if at the same time this determination is of such a kind that, if a is before b and b is before c, then a always comes before c. The natural arrangement of numbers of a system is defined to be that in which the smaller precedes the larger. But there are, as is easily seen, infinitely many other ways in which the numbers of a system may be arranged.
>
> If we think of a definite arrangement of numbers and select from them a particular system of these numbers, a so-called partial system or assemblage, this partial system will also prove to be ordered. Now Cantor considers a particular kind of ordered assemblage which he designates as a well ordered assemblage and which is characterized in this way, that not only in the assemblage itself but also in every partial assemblage there exists a first number. The system of integers 1, 2, 3, ... in their natural order is evidently a well ordered assemblage. On the other hand the system of all real numbers, i.e., the continuum in its natural order, is evidently not well ordered. For, if we think of the points of a segment of

> a straight line, with its initial point excluded, as our partial assemblage, it will have no first element.
>
> The question now arises whether the totality of all [real] numbers may not be arranged in another manner so that every partial assemblage may have a first element, i.e., whether the continuum cannot be considered as a well ordered assemblage–a question which Cantor thinks must be answered in the affirmative. It appears to me most desirable to obtain a direct proof of this remarkable statement of Cantor's, perhaps by actually giving an arrangement of numbers such that in every partial system a first number can be pointed out.

Como veremos en el transcurso de esta sección, el anterior problema, uno de los problemas fundamentales de la matemática de principios del siglo XX, fue resuelto por Zermelo al demostrar éste en 1904, a partir de su axioma de elección, el *principio del buen orden*, según el cual sobre todo conjunto hay un buen orden. De modo que una *ley del pensamiento*, el principio del buen orden, quedó, en manos de Zermelo, reducida a un *teorema*, que resultó, en definitiva, ser equivalente al *principio lógico* de elección de Zermelo.

Definición 14.1.1. Sea A un conjunto. Un *buen orden* sobre A es un orden $<$ sobre A tal que cada subconjunto no vacío X de A tiene un primer elemento, i.e., hay un $a \in X$ para el que se cumple que, para cada $x \in X$, $a \leq x$. Denotamos por $\mathrm{WO}(A)$ el conjunto de todos los buenos órdenes sobre el conjunto A. Un conjunto *bien* ordenado es un par $\mathbf{A} = (A, <)$ en el que A es un conjunto y $<$ un buen orden sobre A.

Ahora caracterizamos a los conjuntos bien ordenados mediante las secciones finales.

Proposición 14.1.2. *Sea $(A, <)$ un conjunto linealmente ordenado. Entonces son equivalentes:*

1. *Toda sección final no vacía de $(A, <)$ tiene un mínimo.*
2. *Todo subconjunto no vacío de A tiene un mínimo.*

Demostración. Supongamos que toda sección final no vacía de $(A, <)$ tenga un mínimo. Sea P un subconjunto no vacío de A. Consideremos el subconjunto $Q = \bigcap_{p \in P} \downarrow_< p$ de A, formado por todos los minorantes estrictos de P en $(A, <)$. Entonces el conjunto $A - Q = \bigcup_{p \in P} \Uparrow_< p$ es una sección final de $(A, <)$ que contiene a P, luego $A - Q \neq \varnothing$. Por lo tanto $A - Q$ tiene un mínimo a_0. Se cumple que $a_0 \leq p$, sea cual sea $p \in P$. Además, $a_0 \in P$, ya que si, para cada $p \in P$, $a_0 \neq p$, entonces, para cada $p \in P$, por ser $<$ lineal, $a_0 > p$ o $a_0 < p$, pero no se cumple que $a_0 > p$, luego, para cada $p \in P$, $a_0 < p$, i.e., $a_0 \in Q = \bigcap_{p \in P} \downarrow_< p$, pero eso es imposible, ya que $a_0 \in A - Q$. □

Ejercicio 14.1.3. Demuéstrese que $A - Q = \bigcup_{p \in P} \Uparrow_< p$ es una sección final de $(A, <)$ que contiene a P.

Proposición 14.1.4. *Sea $(A, <)$ un conjunto bien ordenado y X un subconjunto de A. Entonces $(X, < \cap (X \times X))$, al que también denotamos por $(X, <_X)$ es un conjunto bien ordenado.*

Vamos a determinar a continuación las formas de las secciones iniciales y finales de los conjuntos bien ordenados. Recordemos que, en la tercera sección, dados un conjunto A y una relación binaria R sobre A, dijimos que un subconjunto X de A es una R-sección inicial de A, si junto a un $x \in X$ contiene al conjunto $\downarrow_R x = \{\, y \in A \mid (y, x) \in R \,\}$ de todos los R-predecesores de x, i.e., si $\forall x \in X\, (\downarrow_R x \subseteq X\,)$, o, lo que es equivalente, ya que $R^{-1}[X] = \bigcup_{x \in X} \downarrow_R x$, si $R^{-1}[X] \subseteq X$. Además, denotamos por $\mathrm{Sec}(A, R)$ el conjunto de todas las R-secciones iniciales de A.

Convenimos, de ahora en adelante, que cuando hablemos de una *sección inicial* $(A,<)$, entenderemos por ello, dependiendo del contexto, o un subconjunto X de A tal que X sea una sección inicial de $(A,<)$, o un conjunto bien ordenado $(X,\prec)$ tal que $X \subseteq A$, X sea una sección inicial de $(A,<)$ y $\prec = <_X$. De modo que la ampliación, inesencial, del significado del concepto de sección inicial, ha consistido en denominar también así a los conjuntos bien ordenados que se obtienen a partir de las secciones iniciales de un conjunto bien ordenado dado, cuando a tales secciones iniciales se las dota del buen orden que se obtiene por restricción del buen orden dado.

Proposición 14.1.5. *Sea $(A,<)$ un conjunto bien ordenado. Entonces el conjunto de las secciones finales de $(A,<)$ es $\{\Uparrow_< a \mid a \in A\}$. Mientras que el conjunto de las secciones iniciales es $\{\downarrow_< a \mid a \in A\} \cup \{A\}$.*

Demostración. Si X es una sección inicial de $\mathbf{A}$ distinta de A, entonces el conjunto $A - X$ tiene un primer elemento a. Se cumple que $X = \downarrow_< a$ porque, por una parte, si $x \in \downarrow_< a$, i.e., $x < a$, entonces $x \in X$, ya que si $x \notin X$, $x \in A - X$, luego $a \leq x$, contradicción, y, por otra, si $x \in X$, entonces $x \in \downarrow_< a$, ya que si $x \notin \downarrow_< a$, $a \leq x$, luego, por ser X una sección inicial de $\mathbf{A}$, $a \in X$, contradicción. □

Proposición 14.1.6. *Si $\mathbf{A}$ es un conjunto bien ordenado, entonces el par $\mathbf{Sec}_<(A) = (\mathrm{Sec}_<(A), \subset)$ es un conjunto bien ordenado.*

Demostración. □

Definición 14.1.7. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos conjuntos bien ordenados. Una *aplicación estrictamente isótona* o, simplemente, un *morfismo* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ es un triplo ordenado $(\mathbf{A}, f, \mathbf{B})$, abreviado como f y denotado por $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, en el que f es una aplicación de A en B tal que

$$\forall x, y \in A\,(\,x < y \rightarrow f(x) < f(y)\,).$$

Proposición 14.1.8. *Sean $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ cuatro conjuntos bien ordenados y $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, $g\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ y $h\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ tres morfismos. Entonces:*

1. *Siendo $\mathrm{id}_{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}, \mathrm{id}_A, \mathbf{A})$, se cumple que $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ es un endomorfismo de $\mathbf{A}$.*
2. *Siendo $g \circ f = (\mathbf{A}, g \circ f, \mathbf{C})$, se cumple que $g \circ f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ es un morfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{C}$.*
3. (Asociatividad). *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] \arrow[drr, bend left, "(h\circ g)\circ f"] \arrow[drr, bend right, "h\circ(g\circ f)"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\
& \mathbf{C} \arrow[r, "h"'] & \mathbf{D}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

4. (Neutros). *Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbf{A}}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{A} \arrow[d, "f"] \\ & \mathbf{B} \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{B}}"] \\ & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

conmutan.

Ejercicio 14.1.9. Sea A un conjunto. Demuéstrese que hay una familia no vacía de conjuntos bien ordenados $(A_i, <_i)_{i\in I}$ y una familia de aplicaciones $(\eta_i)_{i\in I}$ con $\eta_i\colon A \longrightarrow A_i$, para cada $i \in I$, tal que, para cada conjunto bien ordenado $\mathbf{B}$ y cada aplicación inyectiva $f\colon A \rightarrowtail B$, existe un único índice $i \in I$ y un único morfismo $f_i\colon (A_i, <_i) \longrightarrow \mathbf{B}$ tal que $f = f_i \circ \eta_i$.

Proposición 14.1.10. *Los epimorfismos entre conjuntos bien ordenados coinciden con los morfismos sobreyectivos entre los mismos.*

Demostración. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos conjuntos bien ordenados y $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un morfismo. Es evidente que si f es sobreyectivo, entonces es un epimorfismo. Si el morfismo f no fuera sobreyectivo, existiría al menos un $b \in B - \mathrm{Im}(f)$. Sea b_0 un elemento de B que no sea el valor mediante f de algún $a \in A$ y sean ξ_0, ξ_1 dos conjuntos tales que $\xi_0 \neq \xi_1$ y $B \cap \{\xi_0, \xi_1\} = \varnothing$ (tales conjuntos, en virtud del axioma de regularidad, existen y son, e. g., $(B, 0)$ y $(B, 1)$). Entonces el par $\mathbf{C} = (C, <)$, en el que $C = (B - \{b_0\}) \cup \{\xi_0, \xi_1\}$, i.e., C se obtiene de B eliminando un punto de B, pero a costa de *doblarlo*, y $<$ la unión de $<_{B-\{b_0\}}$, la restricción de la relación sobre B a $B - \{b_0\}$, $\{(\xi_0, \xi_1)\}$ y las relaciones $\{(b, \xi_0) \mid b \in B - \{b_0\} \text{ y } b < b_0\}$ y $\{(\xi_1, b) \mid b \in B - \{b_0\} \text{ y } b_0 < b\}$, es un conjunto bien ordenado y las aplicaciones $g, h\colon B \longrightarrow C$ definidas como:

$$g\begin{cases} B \longrightarrow C \\ b \longmapsto g(b) = \begin{cases} b, & \text{si } b \in B - \{b_0\}; \\ \xi_0, & \text{si } b = b_0, \end{cases} \end{cases}$$

y

$$h\begin{cases} B \longrightarrow C \\ b \longmapsto h(b) = \begin{cases} b, & \text{si } b \in B - \{b_0\}; \\ \xi_1, & \text{si } b = b_0, \end{cases} \end{cases}$$

respectivamente, son morfismos de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{C}$ tales que $g \neq h$ pero $g \circ f = h \circ f$. □

Lo mismo que en otras situaciones, una vez disponemos de los objetos matemáticos de interés así como de los morfismos entre tales objetos matemáticos y las composiciones de estos últimos, en este caso los conjuntos bien ordenados, las aplicaciones estrictamente isótonas entre ellos y las composiciones de ellas, definimos el concepto de isomorfismo entre tales entidades, que, para el caso que nos ocupa, nos permite definir, tal como hizo Cantor, una relación de equivalencia sobre la clase **WO** de los conjuntos bien ordenados, la de *similaridad*, y, por lo tanto, clasificar a los conjuntos bien ordenados en clases de similaridad, siendo, desde este punto de vista, dos conjuntos bien ordenados indistinguibles exactamente si tienen el mismo tipo de similaridad, i.e., si son isomorfos. Puesto que, salvo para la clase de equivalencia de un conjunto bien ordenado especial, que hará respecto de los conjuntos bien ordenados, el mismo papel que hace el conjunto vacío respecto de los conjuntos, las anteriores clases de similaridad son verdaderas clases, i.e., clases propias, no las podremos usar como objetos matemáticos legítimos en la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel-Skolem, que representen a los ordinales. Más adelante, una vez hayamos establecido el principio de la demostración por inducción transfinita, el de la definición por recursión transfinita, introducido el esquema axiomático de reemplazo y estudiado algunas de las propiedades de los conjuntos bien ordenados, definiremos a los ordinales, siguiendo a von Neumann, como ciertos representantes canónicos de las anteriores clases de similaridad y ello de modo que, junto con los morfismos entre ellos, constituyan un esqueleto de la clase $\mathbf{WO}$ y sus morfismos.

Definición 14.1.11. Decimos que un morfismo f de un conjunto bien ordenado $\mathbf{A}$ en otro $\mathbf{B}$, es un *isomorfismo* si existe un morfismo $g\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{A}}$ y $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbf{B}}$.

Proposición 14.1.12. *Si f es un isomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$, entonces hay un único morfismo g de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{A}}$ y $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbf{B}}$. Al único morfismo de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$ con tal propiedad lo denotamos por f^{-1} y lo denominamos el inverso de f.*

Podríamos creer que, así como un conjunto no subfinal, i.e., uno que no sea ni el conjunto vacío ni un conjunto final, tiene más de un automorfismo, un conjunto bien ordenado $\mathbf{A}$ cuyo conjunto subyacente no sea subfinal, debería tener también más de un *automorfismos*, i.e., más de un isomorfismo de $\mathbf{A}$ en sí mismo. Más adelante, cuando dispongamos del principio de la demostración por inducción transfinita, demostraremos que los conjuntos bien ordenados son constructos *rígidos*, i.e., objetos matemáticos que no tienen más automorfismos que el automorfismo identidad y, además, que de un conjunto bien ordenado en otro hay a lo sumo un isomorfismo.

Ejercicio 14.1.13. Demuéstrese que:

1. Un morfismo f de un conjunto bien ordenado $\mathbf{A}$ en otro $\mathbf{B}$ es un isomorfismo si y sólo si es una biyección.
2. Si f es un isomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ y g lo es de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{C}$, entonces $g \circ f$ lo es de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{C}$ y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
3. Si f es un isomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$, entonces f^{-1} lo es de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$ y $(f^{-1})^{-1} = f$.

Ejercicio 14.1.14. Demuéstrese que un conjunto bien ordenado $\mathbf{A}$ nunca es isomorfo al conjunto bien ordenado $\mathbf{Sec}(\mathbf{A})$, de sus secciones iniciales. Pero que siempre es isomorfo a una sección inicial estricta de $\mathbf{Sec}(\mathbf{A})$.

Proposición 14.1.15. *Si dos conjuntos bien ordenados $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son isomorfos, mediante el isomorfismo f, entonces los conjuntos bien ordenados $\mathbf{Sec}(\mathbf{A})$ y $\mathbf{Sec}(\mathbf{B})$ son isomorfos, mediante el isomorfismo $\mathbf{Sec}(f)$ que a una sección inicial estricta $\downarrow_< a$ de $\mathbf{A}$ le asigna la sección inicial estricta $\downarrow_< f(a)$ de $\mathbf{B}$ y a la sección inicial A la sección inicial B, y, para cada sección inicial estricta $\downarrow_< a$ de $\mathbf{A}$, se cumple que $(\downarrow_< a, <_{\downarrow_< a})$ y $(\downarrow_< f(a), <_{\downarrow_< f(a)})$ también son isomorfas. Además, el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "\eta_{\mathbf{A}}"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{Sec}(\mathbf{A}) \arrow[d, "\mathbf{Sec}(f)"] \\
\mathbf{B} \arrow[r, "\eta_{\mathbf{B}}"'] & \mathbf{Sec}(\mathbf{B})
\end{tikzcd}
$$

en el que $\eta_{\mathbf{A}}$ es el morfismo canónico que a un $a \in A$ le asigna la sección inicial $\downarrow_< a$ y $\eta_{\mathbf{B}}$ el morfismo canónico que a un $b \in B$ le asigna la sección inicial $\downarrow_< b$, es conmutativo.

Demostración. $\square$

Corolario 14.1.16. *Sean* **A** *y* **B** *dos conjuntos bien ordenados. Si* $(\downarrow_< a, <_{\downarrow_< a})$ *y* $(\downarrow_< b, <_{\downarrow_< b})$ *son dos secciones iniciales de* **A** *y* **B***, respectivamente, isomorfas, entonces* $\mathbf{Sec}(\downarrow_< a, <_{\downarrow_< a})$ *y* $\mathbf{Sec}(\downarrow_< b, <_{\downarrow_< a})$ *también son isomorfos.*

Corolario 14.1.17. *Sean* **A** *y* **B** *dos conjuntos bien ordenados. Si una sección inicial de* **A** *no es isomorfa a ninguna sección inicial de* **B***, entonces ninguna sección inicial de* **A** *posterior a la primera, será isomorfa a alguna sección inicial de* **B***.*

Proposición 14.1.18. *Si* f *es un morfismo del conjunto bien ordenado* **A** *en el conjunto bien ordenado* **B***, entonces* f *es inyectivo y, para cada* $x, y \in A$*, tenemos que* $x < y$ *si y sólo si* $f(x) < f(y)$*. Por consiguiente* f^{s}*, la sobreyectivizada de* f*, es un isomorfismo de* **A** *en* $\mathbf{Im}(f)$*.*

Demostración. Si $x \neq y$, entonces, o bien $x < y$ o bien $y < x$, y, en cualquiera de los dos casos, $f(x) \neq f(y)$. Por consiguiente f es inyectiva. Por otra parte, si $x, y \in A$ son tales que $f(x) < f(y)$, entonces $x < y$, ya que en caso contrario, i.e., si $x \geq y$, entonces, $f(x) \geq f(y)$, contradicción. □

Teorema 14.1.19. *Sea* **A** *un conjunto bien ordenado y* $X \subseteq A$*. Si* f *es un isomorfismo de* **A** *en* $(X, <_X)$*, entonces, para cada* $a \in A$*,* $a \leq f(a)$*, i.e.,* f *es extensiva.*

Demostración. Al ser f un isomorfismo de **A** en $(X, <_X)$, la composición de f y de la inclusión canónica de $(X, <_X)$ en **A** es una aplicación estrictamente isótona de **A** en sí mismo. Si no se cumpliera que, para cada $a \in A$, $a \leq f(a)$, entonces el subconjunto $\{\, a \in A \mid f(a) < a \,\}$ de A no sería vacío, por lo tanto, ya que **A** es un conjunto bien ordenado, tendría un mínimo a_0. Ahora bien, por ser $\mathrm{in}_X \circ f$ un endomorfismo de **A**, tendríamos que $f(f(a_0)) < f(a_0)$, con lo cual obtendríamos una contradicción, ya que a_0 no sería el mínimo de $\{\, a \in A \mid f(a) < a \,\}$. Luego, para cada $a \in A$, $a \leq f(a)$. □

A partir del teorema anterior vamos a obtener una serie de corolarios, debidos a Cantor, que profundizan en la naturaleza de los conjuntos bien ordenados. Pero antes establecemos el *principio de la demostración por inducción transfinita*, abreviado como PDIT, similar al de inducción finita, pero para conjuntos bien ordenados arbitrarios, del que haremos uso en alguna de las proposiciones que siguen.

Teorema 14.1.20 (PDIT)**.** *Sea* $\mathbf{A} = (A, <)$ *un conjunto bien ordenado y* X *un subconjunto de* A*. Entonces una condición suficiente para que* $X = A$ *es que, para cada* $a \in A$*,* $a \in X$ *si* $\downarrow_< a \subseteq X$*.*

Demostración. Supongamos que, para cada $a \in A$, $a \in X$ si $\downarrow_< a \subseteq X$. Si el subconjunto X de A fuera distinto de A, tendríamos que $A - X \neq \varnothing$, luego, por ser **A** un conjunto bien ordenado, el subconjunto $A - X$ de A tendría un primer elemento a. Por lo tanto $\downarrow_< a \subseteq X$, así que $a \in X$, lo cual es absurdo. De modo que podemos afirmar que $X = A$. □

Proposición 14.1.21. *Sea* **A** *un conjunto linealmente ordenado tal que* A *sea el único subconjunto* X *de* A *con la propiedad de que, para cada* $a \in A$*,* $a \in X$ *si* $\downarrow_< a \subseteq X$*. Entonces* **A** *es un conjunto bien ordenado.*

Demostración. Sea X un subconjunto no vacío de A. Vamos a demostrar que X tiene un mínimo. Para el conjunto $\bigcap_{x \in X} \downarrow_< x$ de las cotas inferiores estrictas de X en **A**, se cumple que $(\bigcap_{x \in X} \downarrow_< x) \cap X = \varnothing$, porque, en caso contrario, existiría un $x \in X$ tal que $x < x$, contradicción. Además, $\bigcap_{x \in X} \downarrow_< x$ no tiene la propiedad de que, para cada $a \in A$, $a \in \bigcap_{x \in X} \downarrow_< x$ si $\downarrow_< a \subseteq \bigcap_{x \in X} \downarrow_< x$, porque si la tuviera $\bigcap_{x \in X} \downarrow_< x = A$, luego $A \cap X = \varnothing$, contradicción. Por lo tanto, hay un $a \in A$ tal que $\downarrow_< a \subseteq \bigcap_{x \in X} \downarrow_< x$ pero $a \notin \bigcap_{x \in X} \downarrow_< x$, i.e., hay un $a \in A$ tal que, para cada

$y \in A$, si $y < a$, entonces, para cada $x \in X$, $y < x$ y $a \in X = A - \bigcap_{x \in X} \downarrow_< x$. No sólo existe un $a \in A$ con las propiedades mencionadas, sino que además es único y el mínimo de X. En efecto, si $b \in A$ fuera tal que $\downarrow_< b \subseteq \bigcap_{x \in X} \downarrow_< x$ y $b \notin \bigcap_{x \in X} \downarrow_< x$, b no podría ser elemento de $\downarrow_< a$, porque si lo fuera, entonces $b \in \bigcap_{x \in X} \downarrow_< x$ y $b \notin \bigcap_{x \in X} \downarrow_< x$, contradicción; y tampoco podría ser a elemento de $\downarrow_< b$, porque si lo fuera, entonces $a \in \bigcap_{x \in X} \downarrow_< x$ y $a \notin \bigcap_{x \in X} \downarrow_< x$, contradicción. Por lo tanto $b = a$. El elemento a es el mínimo de X, porque si no lo fuera, existiría un x_0 en X tal que $x_0 < a$, pero a tiene la propiedad de que, para cada $y \in A$, si $y < a$, entonces, para cada $x \in X$, $y < x$, luego $x_0 < x_0$, contradicción . □

Así pues, para un conjunto linealmente ordenado $\mathbf{A}$, son equivalentes:

- Todo subconjunto no vacío de A tiene un primer elemento.
- El conjunto A es el único subconjunto X de A con la propiedad de que, para cada $a \in A$, $a \in X$ si $\downarrow_< a \subseteq X$.

Corolario 14.1.22. *Todo endomorfismo de un conjunto bien ordenado es extensivo.*

Demostración. Sea f un endomorfismo de $\mathbf{A}$, $X_f = \{ x \in A \mid x \leq f(x) \}$ y $a \in A$ tal que $\downarrow_< a \subseteq X_f$. Queremos demostrar que entonces $a \in X_f$. Si a es el mínimo de $\mathbf{A}$, entonces, obviamente, $a \in X_f$. Si a no es el primer elemento de $\mathbf{A}$, sea $y \in \downarrow_< a$. Entonces, por ser f morfismo, $f(y) < f(a)$ y, por ser $\downarrow_< a \subseteq X_f$, $y \leq f(y)$, luego $y < f(a)$, para cada $y \in \downarrow_< a$, i.e., $f(a)$ está estrictamente precedido por todos los predecesores estrictos de a. Por consiguiente $f(a) \in A - \downarrow_< a$, ya que, si no, existiría un predecesor estricto de a, el propio $f(a)$, al que sucedería un predecesor estricto de a, el mismo $f(a)$. Luego, ya que a es el primer elemento de $A - \downarrow_< a$, $a \leq f(a)$, i.e., $a \in X_f$ Podemos por consiguiente afirmar que $X_f = A$. □

Corolario 14.1.23. *Un conjunto bien ordenado* $\mathbf{A} = (A, <)$ *no es isomorfo a ninguna de sus secciones iniciales estrictas.*

Demostración. Si existiera un $a \in A$ tal que $\mathbf{A}$ fuera isomorfo a $(\downarrow_< a, <_{\downarrow_< a})$, mediante un isomorfismo f, entonces $a < f(a)$, contradicción. □

Tal como indicó Cantor, aunque, en virtud del anterior corolario, ningún conjunto bien ordenado es isomorfo a una de sus secciones iniciales estrictas, sin embargo, si el conjunto bien ordenado $\mathbf{A}$ es tal que A es infinito, siempre hay otras partes estrictas de A, que con el buen orden inducido por el de $\mathbf{A}$, son isomorfas a $\mathbf{A}$.

Corolario 14.1.24. *Dos secciones iniciales distintas de un conjunto bien ordenado no son isomorfas*

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ un conjunto bien ordenado y $(\downarrow_< x, <_{\downarrow_< x})$, $(\downarrow_< y, <_{\downarrow_< y})$ dos secciones iniciales distintas de $\mathbf{A}$. Entonces, o bien $x < y$ o bien $y < x$. Si $x < y$, entonces $(\downarrow_< x, <_{\downarrow_< x})$ es una sección inicial estricta del conjunto bien ordenado $(\downarrow_< y, <_{\downarrow_< y})$, luego, en virtud de 14.1.23, dichas secciones iniciales no son isomorfas. Del mismo modo, si $y < x$, $(\downarrow_< y, <_{\downarrow_< y})$ es una sección inicial estricta del conjunto bien ordenado $(\downarrow_< x, <_{\downarrow_< x})$, luego, en virtud de 14.1.23, dichas secciones iniciales no son isomorfas. □

Corolario 14.1.25. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos conjuntos bien ordenados. Entonces cada sección inicial de* $\mathbf{A}$ *es isomorfa a lo sumo a una sección inicial de* $\mathbf{B}$.

Demostración. Si una sección inicial de $\mathbf{A}$ fuera isomorfa a dos secciones iniciales distintas de $\mathbf{B}$, estas dos últimas serían isomorfas, en contra del corolario anterior. □

Antes de considerar otros corolarios del teorema 14.1.19, establecemos otra caracterización de los conjuntos bien ordenados, a partir de la cual demostraremos otra propiedad de los conjuntos bien ordenados.

Proposición 14.1.26. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto linealmente ordenado. Una condición necesaria y suficiente para que* $\mathbf{A}$ *sea un conjunto bien ordenado es que no exista ninguna* ω*-sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* A *tal que, para cada* $n \in \mathbb{N}$*,* $x_n > x_{n+1}$*.*

Demostración. Si $\mathbf{A}$ es un conjunto bien ordenado, entonces no puede haber ninguna ω-sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n > x_{n+1}$. Porque si la hubiera, el conjunto $\{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ no tendría un mínimo, contradicción. Por otra parte, si el conjunto linealmente ordenado $\mathbf{A}$ no fuera bien ordenado, entonces A tendría una parte no vacía X sin primer elemento. Sea $x_0 \in X$, arbitrario pero fijo. Entonces, ya que X no tiene mínimo, para x_0, hay al menos un $y \in X$ tal que $y < x_0$. Sea $x_1 \in X$ tal que $x_1 < x_0$. Supongamos, para $n \geq 1$, elegidos $x_0, \ldots, x_{n-1}$ en X de modo que $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1}$. Entonces, por no tener X mínimo, hay un $y \in X$ tal que $y < x_{n-1}$. Sea $x_n \in X$ tal que $x_n < x_{n-1}$. De este modo hemos obtenido una ω-sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n > x_{n+1}$. Por lo tanto, si no hay sucesiones de ése tipo en A, tenemos que $\mathbf{A}$ es un conjunto bien ordenado. $\square$

Corolario 14.1.27. *Un conjunto bien ordenado* $\mathbf{A}$ *no es isomorfo a ninguna parte, bien ordenada por restricción, de ninguna sus secciones iniciales estrictas.*

Demostración. Supongamos que el conjunto bien ordenado $\mathbf{A}$ sea isomorfo a $(X, <_X$), siendo X una parte de una sección inicial estricta $\downarrow_< a_0$ de $\mathbf{A}$. Se cumple que $X \neq \downarrow_< a_0$, porque en caso contrario $\mathbf{A}$ sería isomorfo a una de sus secciones iniciales estrictas, que es una contradicción. Entonces, por la proposición 14.1.15, la sección inicial estricta $(\downarrow_< a_0, <_{\downarrow_< a_0})$ de $\mathbf{A}$ es isomorfa con una única una sección inicial estricta $(\downarrow_{<_X} a_1, <_{\downarrow_{<_X} a_1}$ de $(X, <_X)$. Puesto que $X \subseteq \downarrow_< a_0$, $a_1 \in \downarrow_< a_0$ y $\downarrow_{<_X} a_1 \subset \downarrow_< a_1$, esto último se cumple porque, en caso contrario, el conjunto bien ordenado $(\downarrow_< a_0, <_{\downarrow_< a_0})$ sería isomorfo a una de sus secciones iniciales, que es una contradicción. Está claro que procediendo de este modo obtenemos una ω-sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n > a_{n+1}$, que es una contradicción. $\square$

El corolario que sigue establece que los conjuntos bien ordenados son constructos rígidos, i.e., que no tienen mas automorfismos que la identidad.

Corolario 14.1.28. *Si* $\mathbf{A} = (A, <)$ *un conjunto bien ordenado, entonces* $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}$ *es el único automorfismo de* $\mathbf{A}$*.*

Demostración. Sea f un automorfismo de $\mathbf{A}$ y $x \in A$. Entonces, ya que f y f^{-1} son endomorfismos, en virtud de 14.1.22, $x \leq f(x)$ y $x \leq f^{-1}(x)$. Por lo tanto $x \leq f(x)$ y $f(x) \leq f(f^{-1}(x)) = x$, luego $f(x) = x$. Por consiguiente $f = \mathrm{id}_{\mathbf{A}}$. $\square$

Ejercicio 14.1.29. Demuéstrese que el conjunto linealmente ordenado $(Z, <)$ de los números enteros tiene una infinidad de automorfismos.

El siguiente corolario afirma que de un conjunto bien ordenado en otro no puede haber mas de un isomorfismo.

Corolario 14.1.30. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos conjuntos bien ordenados. Si* f, g *son dos isomorfismos de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$*, entonces* $f = g$*.*

Demostración. Sea $x \in A$. Entonces, ya que $g^{-1} \circ f$ es un endomorfismo de $\mathbf{A}$, en virtud de 14.1.22, $x \leq g^{-1}(f(x))$, luego $g(x) \leq g(g^{-1}(f(x))) = f(x)$. Del mismo modo, ya que $f^{-1} \circ g$ es un endomorfismo de $\mathbf{A}$, en virtud de 14.1.22, $x \leq f^{-1}(g(x))$, luego $f(x) \leq f(f^{-1}(g(x))) = g(x)$. De donde $f(x) = g(x)$. Por consiguiente $f = g$. $\square$

Corolario 14.1.31. *Dos secciones iniciales distintas de un mismo conjunto bien ordenado no son isomorfas. Por lo tanto un conjunto bien ordenado no puede ser isomorfo a dos secciones iniciales distintas de un mismo conjunto bien ordenado.*

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ un conjunto bien ordenado y S, T dos secciones iniciales distintas de $\mathbf{A}$. Entonces, o bien $S = A$ y $T = \downarrow_< y$, para un $y \in A$, o bien $S = \downarrow_< x$, para un $x \in A$ y $T = A$, o bien $S = \downarrow_< x$, para un $x \in A$, $T = \downarrow_< y$, para un $y \in A$, y $x \neq y$. Tanto en el primero como en el segundo caso, las dos secciones iniciales no pueden ser isomorfas, porque un conjunto bien ordenado no es isomorfo a ninguna de sus secciones iniciales estrictas. En el último caso, por ser $x \neq y$, tenemos que $x < y$ o $y < x$, luego S es una sección inicial estricta de T o T es una sección inicial estricta de S, luego, por el mismo motivo que antes, S y no pueden ser isomorfos. □

A continuación establecemos un lema que nos permitirá demostrar el teorema de Cantor sobre la comparabilidad de los conjuntos bien ordenados.

Lema 14.1.32. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{A}'$ *dos conjuntos bien ordenados. Supongamos que las aplicaciones parciales* $f\colon A \rightharpoonup A'$ *y* $g\colon A \rightharpoonup A'$ *sean tales que:*

1. *Para cada* $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$*, si* $x < y$*, entonces* $f(x) < f(y)$*.*
2. *Para cada* $x, y \in \mathrm{Dom}(g)$*, si* $x < y$*, entonces* $g(x) < g(y)$*.*
3. $\mathrm{Dom}(f)$ *y* $\mathrm{Dom}(g)$ *son secciones iniciales de* $\mathbf{A}$ *y* $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$*.*
4. $\mathrm{Im}(f)$ *y* $\mathrm{Im}(g)$ *son secciones iniciales de* $\mathbf{A}'$*.*

Entonces, para cada $x \in \mathrm{Dom}(f)$*, se cumple que* $f(x) = g(x)$*.*

Demostración. Supongamos que exista un $x \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Sea x_0 el mínimo elemento de $\mathrm{Dom}(f)$ con dicha propiedad. Veamos que si $f(x_0) > g(x_0)$, entonces obtenemos una contradicción. En efecto, por una parte, al ser $f[\mathrm{Dom}(f)]$ una sección inicial de $\mathbf{A}'$, a ella pertenece $g(x_0)$ y, por otra, para cada $x \in \mathrm{Dom}(f)$, $f(x) \neq g(x_0)$, i.e., $g(x_0) \notin f[\mathrm{Dom}(f)]$, ya que, para $x \in \mathrm{Dom}(f)$, si $x < x_0$, entonces $f(x) = g(x) < g(x_0)$, luego $f(x) \neq g(x_0)$, mientras que si $x \geq x_0$, entonces $f(x) \leq f(x_0) > g(x_0)$, luego también $f(x) \neq g(x_0)$. Del mismo modo, suponer que $g(x_0) > f(x_0)$, también conduce a una contradicción. Por consiguiente, para cada $x \in \mathrm{Dom}(f)$, tenemos que $f(x) = g(x)$. □

Definición 14.1.33. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$ dos conjuntos bien ordenados. Decimos que $\mathbf{A}$ *precede ordinalmente* a $\mathbf{A}'$, y lo denotamos por $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{A}'$, si hay un morfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}'$ cuya imagen es una sección inicial de $\mathbf{A}'$, i.e., si $\mathbf{A}$ es isomorfo a una sección inicial de $\mathbf{A}'$. Además, decimos que $\mathbf{A}$ es *ordinalmente equivalente* a $\mathbf{A}'$, y lo denotamos por $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}'$ si hay un morfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}'$ cuya imagen es A'. En este último caso también decimos que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$ son *ordinalmente similares* o, simplemente, que son *similares*.

Proposición 14.1.34. *Sean* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{A}'$ *y* $\mathbf{A}''$ *tres conjuntos bien ordenados. Entonces tenemos que:*

1. $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{A}$.
2. *Si* $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{A}'$ *y* $\mathbf{A}' \preccurlyeq \mathbf{A}''$*, entonces* $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{A}''$*.*
3. *Una condición necesaria y suficiente para que* $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}'$ *es que* $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{A}'$ *y* $\mathbf{A}' \preccurlyeq \mathbf{A}$.
4. $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$.
5. *Si* $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}'$*, entonces* $\mathbf{A}' \equiv \mathbf{A}$*.*
6. *Si* $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}'$ *y* $\mathbf{A}' \equiv \mathbf{A}''$*, entonces* $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}''$*.*
7. *Si* X *es una sección inicial de* $\mathbf{A}$ *y* $(X, <_X) \equiv \mathbf{A}$*, entonces* $X = A$*.*

Por lo tanto la clase relacional $\preccurlyeq$ preordena a la clase de todos los conjuntos bien ordenados, mientras que la clase relacional $\equiv$ es una equivalencia sobre la misma clase.

Demostración. La última afirmación es consecuencia del lema anterior, ya que, si f es un isomorfismo de $\mathbf{A}$ en $(X, <_X)$, se cumple que $\mathrm{in}_{(X,<_X)} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{A}}$. Por lo tanto $X = A$.

Veamos por último, que $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{A}'$ y $\mathbf{A}' \preccurlyeq \mathbf{A}$ son suficientes para que $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}'$. De la hipótesis concluimos que hay un morfismo f de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}'$ cuya imagen es una sección inicial de $\mathbf{A}'$ y que hay un morfismo g de $\mathbf{A}'$ en $\mathbf{A}$ cuya imagen es una sección inicial de $\mathbf{A}$. Entonces $g \circ f$ es un endomorfismo de $\mathbf{A}$ cuya imagen es una sección inicial de $\mathbf{A}$, luego $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{A}}$, de donde $g[A'] = A$, porque $g[f[A]] = A$ y $f[A] \subseteq A'$. Por consiguiente $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}'$. □

Antes de demostrar que dos conjuntos bien ordenados son siempre ordinalmente comparables, verificamos ciertas incompatibilidades para los conjuntos bien ordenados y un lema sobre la unión de familias de conjuntos bien ordenados que cumplan ciertas condiciones.

Proposición 14.1.35. *Sea $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos conjuntos bien ordenados. Entonces las condiciones:*

(a) *$\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son isomorfos,*
(b) *$\mathbf{A}$ es isomorfo a una sección inicial estricta de $\mathbf{B}$,*
(c) *$\mathbf{B}$ es isomorfo a una sección inicial estricta de $\mathbf{A}$,*

son dos a dos incompatibles.

Demostración. Es evidente que la primera y la segunda, así como la primera y la tercera, son incompatibles. La segunda y la tercera también lo son, porque si $\mathbf{A}$ fuera isomorfo a una sección inicial estricta $(\downarrow_< y, <_{\downarrow_< y})$ de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}$ lo fuera a una sección inicial estricta $(\downarrow_< x, <_{\downarrow_< x})$ de $\mathbf{A}$, entonces existiría una sección inicial estricta $(\downarrow_< y', <_{\downarrow_< y'})$ de $(\downarrow_< y, <_{\downarrow_< y})$ isomorfa a la sección inicial estricta $(\downarrow_< x, <_{\downarrow_< x})$ de $\mathbf{A}$. Luego $\mathbf{B}$ sería isomorfo a su sección inicial estricta $(\downarrow_< y', <_{\downarrow_< y'})$, que contradiría a la proposición 14.1.23. □

Lema 14.1.36. *Sea I un conjunto y, para cada $i \in I$, $\mathbf{A}_i = (A_i, <_i)$ un conjunto bien ordenado. Si, para cada $i, j \in I$, $\mathbf{A}_i$ es una sección inicial de $\mathbf{A}_j$ o $\mathbf{A}_j$ lo es de $\mathbf{A}_i$, entonces $(\bigcup_{i\in I} A_i, \bigcup_{i\in I} <_i)$ es un conjunto bien ordenado.*

Demostración. □

Teorema 14.1.37 (de comparabilidad)**.** *Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$ dos conjuntos bien ordenados. Entonces $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{A}'$ o $\mathbf{A}' \preccurlyeq \mathbf{A}$, i.e., $\mathbf{A}$ es isomorfo a una sección inicial de $\mathbf{A}'$ o $\mathbf{A}'$ lo es a una de $\mathbf{A}$. Por consiguiente la clase relacional $\preccurlyeq$ preordena linealmente a la clase de todos los conjuntos bien ordenados.*

Demostración. Sea $\mathrm{F}_{\mathbf{A},\mathbf{A}'}$ el conjunto de todas las aplicaciones parciales $f\colon A \rightharpoonup A'$ tales que, para cada $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$, si $x < y$, entonces $f(x) < f(y)$, $\mathrm{Dom}(f)$ es una sección inicial de $\mathbf{A}$ e $\mathrm{Im}(f)$ una sección inicial de $\mathbf{A}'$. Entonces, dadas $f, g \in \mathrm{F}_{\mathbf{A},\mathbf{A}'}$, se cumple que $f \leq g$ o $g \leq f$, porque, o bien, $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$ y entonces, en virtud del lema 14.1.32, $f = g$, luego $f \leq g$ o $g \leq f$, o bien, $\mathrm{Dom}(f) \neq \mathrm{Dom}(g)$ y $\mathrm{Dom}(g) = A$ y entonces, en virtud del lema 14.1.32, $f \leq g$, o bien $\mathrm{Dom}(f) \neq \mathrm{Dom}(g)$ y $\mathrm{Dom}(f) = A$ y entonces, en virtud del lema 14.1.32, $g \leq f$, o bien $\mathrm{Dom}(f) \neq \mathrm{Dom}(g)$, $\mathrm{Dom}(f) \neq A$ y $\mathrm{Dom}(g) \neq A$, pero entonces $\mathrm{Dom}(f) = \downarrow_< x_f$ y $\mathrm{Dom}(g) = \downarrow_< x_g$, para algunos $x_f, x_g \in A$, luego $x_f < x_g$ o $x_g < x_f$, y por lo tanto, en virtud del lema 14.1.32, $f \leq g$ o $g \leq f$. Así que $h = \bigcup_{f\in \mathrm{F}_{\mathbf{A},\mathbf{A}'}} f$ es una aplicación parcial de A en A'. Además, ya que $\mathrm{Dom}(h) = \bigcup_{f\in \mathrm{F}_{\mathbf{A},\mathbf{A}'}} \mathrm{Dom}(f)$ e

$\mathrm{Im}(h) = \bigcup_{f \in \mathrm{F}_{\mathbf{A},\mathbf{A}'}} \mathrm{Im}(f)$, ambos son secciones iniciales de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$, respectivamente, y es evidente que, para cada $x, y \in \mathrm{Dom}(h)$, si $x < y$, entonces $h(x) < h(y)$. Por consiguiente $h \in \mathrm{F}_{\mathbf{A},\mathbf{A}'}$.

Si $\mathrm{Dom}(h) = A$, entonces hay un morfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}'$, el propio h, mientras que si $\mathrm{Im}(h) = A'$, entonces hay un morfismo de $\mathbf{A}'$ en $\mathbf{A}$, la composición de h^{-1} y de la inclusión de $\mathbf{Dom}(h)$ en $\mathbf{A}$. Por último, no puede ocurrir que $\mathrm{Dom}(h) \neq A$ y $\mathrm{Im}(h) \neq A'$, ya que si tal fuera el caso, entonces, siendo x_0 el primer elemento del subconjunto no vacío $A - \mathrm{Dom}(h)$ de A y x'_0 el primer elemento del subconjunto no vacío $A' - \mathrm{Im}(h)$ de A', para $t = h \cup \{ (x_0, x'_0) \}$, tendríamos que $t \in \mathrm{F}_{\mathbf{A},\mathbf{A}'}$, luego $t \leq h$, contradicción. □

Corolario 14.1.38. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos conjuntos bien ordenados. Entonces, o bien* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son isomorfos, o bien* $\mathbf{A}$ *es isomorfo a una única sección inicial de* $\mathbf{B}$*, o bien* $\mathbf{B}$ *es isomorfo a una única sección inicial de* $\mathbf{A}$*.*

Corolario 14.1.39. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto bien ordenado y* $X \subseteq A$*. Si* $(X, <_X)$ *no es isomorfo a ninguna sección inicial estricta de* $\mathbf{A}$*, entonces es isomorfo a* $\mathbf{A}$*.*

Demostración. Si el conjunto bien ordenado $(X, <_X)$ no fuera isomorfo a ninguna sección inicial ni tampoco a $\mathbf{A}$, entonces, en virtud del teorema de comparabilidad, existiría una sección inicial $(\downarrow_{<_X} x, <_{\downarrow_{<_X} x})$ de $(X, <_X)$ isomorfa a $\mathbf{A}$. Pero $\downarrow_{<_X} x$ es un subconjunto de $\downarrow_{<} x$. Luego $\mathbf{A}$ sería isomorfo a una parte, bien ordenada por el orden inducido, de una sección inicial de $\mathbf{A}$, lo cual contradice a la proposición 14.1.27 □

15. El teorema de Cantor-Bernstein para los conjuntos bien ordenados.

Recordemos que para dos conjuntos amorfos, i.e., dos conjuntos desestructurados, demostramos que una condición suficiente para que fueran isomorfos, era la de que uno dominara al otro y el otro al uno, en el sentido de que existieran aplicaciones inyectivas de uno en el otro y del otro en el uno. En esta sección demostramos que el teorema de Cantor-Bernstein también se cumple para los conjuntos que están dotados de una estructura de buena ordenación, y respecto de la comparación ordinal definida en la sección previa.

Proposición 15.0.40. *Sean* $(A, \leq)$ *y* $(B, \leq)$ *dos conjuntos bien ordenados para los que se cumpla que* $(A, \leq)$ *sea isomorfo a una sección inicial de* $(B, \leq)$ *(con el orden inducido) y* $(B, \leq)$ *sea isomorfo a una sección inicial de* $(A, \leq)$ *(con el orden inducido). Entonces* $\underline{A} \equiv \underline{B}$

Demostración. Sea $f\colon (A, \leq) \longrightarrow (B_0, \leq)$ un isomorfismo de $(A, \leq)$ en $(B_0, \leq)$, siendo B_0 una sección inicial de $(B, \leq)$, y $g\colon (B, \leq) \longrightarrow (A_0, \leq)$ un isomorfismo de $(B, \leq)$ en $(A_0, \leq)$, siendo A_0 una sección inicial de $(A, \leq)$.

Ahora consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\underline{A} \arrow[r, "f"] & \underline{B}_0 \arrow[r, "g|_{\underline{B}_0}^{g[\underline{B}_0]}"] \arrow[d, "\mathrm{in}_{\underline{B}_0,\underline{B}}"'] & g[\underline{B}_0] \arrow[d, "\mathrm{in}_{g[\underline{B}_0],\underline{A}_0}"] \\
 & \underline{B} \arrow[r, "g"'] & \underline{A}_0
\end{tikzcd}$$

Se cumple que $g[B_0]$ es una sección inicial de $(A, \leq)$ y que la composición de los isomorfismos f y $g|_{\underline{B}_0}^{g[\underline{B}_0]}$ es un isomorfismo de $\underline{A}$ en $g[\underline{B}_0]$. Por lo tanto $g[B_0] = A$, luego $g[B] = A$, así que $\underline{A}$ y $\underline{B}$ son isomorfos.

□

16. El teorema de comparabilidad para los conjuntos bien ordenados.

Demostramos en esta sección que dos conjuntos bien ordenados cualesquiera siempre son comparables.

Teorema 16.0.41. *Si $\underline{A}$ y $\underline{B}$ son dos conjuntos bien ordenados, entonces existe un isomorfismo de $\underline{A}$ en una sección inicial de $\underline{B}$ o existe un isomorfismo de $\underline{B}$ en una sección inicial de $\underline{A}$.*

Demostración. Sobre el conjunto $\bigcup_{\substack{X\in\mathrm{Sec}_<(A),\\ Y\in\mathrm{Sec}_<(B)}}\mathrm{Iso}(\underline{X},\underline{Y})$, de los isomorfismos entre secciones iniciales de $\underline{A}$ y de $\underline{B}$ consideremos la relación binaria $\leq$ que consta de los pares (f,f'), con $f\in\mathrm{Iso}(\underline{X},\underline{Y})$ y $f'\in\mathrm{Iso}(\underline{X}',\underline{Y}')$, para algunas secciones iniciales X, X' de $\underline{A}$ y algunas secciones iniciales Y, Y' de $\underline{B}$, tales que:

1. $X\subseteq X'$.
2. $Y\subseteq Y'$.
3. El diagrama

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{in}_{\underline{X},\underline{X}'}"'] & \underline{Y} \arrow[d, "\mathrm{in}_{\underline{Y},\underline{Y}'}"] \\
\underline{X}' \arrow[r, "f'"'] & \underline{Y}'
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Entonces $(\bigcup_{\substack{X\in\mathrm{Sec}_<(A),\\ Y\in\mathrm{Sec}_<(B)}}\mathrm{Iso}(\underline{X},\underline{Y}),\leq)$ es un conjunto ordenado. Se cumple que no es vacío porque $\mathrm{Iso}(\underline{\varnothing},\underline{\varnothing})\neq\varnothing$, siendo $\underline{\varnothing}$ el conjunto bien ordenado $(\varnothing,\varnothing)$. Además, toda cadena no vacía del conjunto ordenado $(\bigcup_{\substack{X\in\mathrm{Sec}_<(A),\\ Y\in\mathrm{Sec}_<(B)}}\mathrm{Iso}(\underline{X},\underline{Y}),\leq)$ tiene un supremo.

Sea Λ un conjunto no vacío y $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia en $\bigcup_{\substack{X\in\mathrm{Sec}_<(A),\\ Y\in\mathrm{Sec}_<(B)}}\mathrm{Iso}(\underline{X},\underline{Y})$ tal que

1. Para cada $\lambda\in\Lambda$, $f_\lambda\colon \underline{X}_\lambda\longrightarrow\underline{Y}_\lambda$.
2. Para cada $\lambda,\mu\in\Lambda$, $f_\lambda\leq f_\mu$ o $f_\mu\leq f_\lambda$.

Entonces el triplo

$$f=(\textstyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\underline{X}_\lambda, F, \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\underline{Y}_\lambda)$$

en el que F es

$$F=\{\,(x,y)\in(\textstyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda)\times(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda)\mid \exists\lambda\in\Lambda\,((x,y)\in F_\lambda)\,\}$$

o, lo que es equivalente, para cada $x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$, $f(x)=f_\lambda(x)$, siendo λ cualquier índice en Λ para el que $x\in X_\lambda$, es un isomorfismo y es el supremo de $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Porque, por una parte, la unión de una familia de secciones iniciales es una sección inicial, y, por otra parte, se cumple que F es una función porque si (x,y) y $(x,z)\in F$, entonces, por la definición de F, existirían $\lambda,\mu\in\Lambda$ tales que $(x,y)\in F_\lambda$ y $(x,z)\in F_\mu$, pero al ser $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una cadena, tendríamos que $f_\lambda\leq f_\mu$ o $f_\mu\leq f_\lambda$, luego $(x,y),(x,z)\in F_\mu$ o $(x,y),(x,z)\in F_\lambda$, por lo tanto $y=z$. Luego podemos afirmar que f es una aplicación. Dejamos como ejercicio la demostración de que f es biyectiva así como que, para cada $x,x'\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$, se cumple que $x\leq x'$ si y sólo si $f(x)\leq f(x')$. Es evidente que f es el supremo de la familia $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Puesto que se cumplen las hipótesis del lema de Zorn-Kuratowski, podemos afirmar que existe un maximal en el conjunto ordenado $(\bigcup_{\substack{X\in\mathrm{Sec}_<(A),\\ Y\in\mathrm{Sec}_<(B)}} \mathrm{Iso}(\underline{X},\underline{Y}),\leq)$. Sea $h\colon \underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$ un maximal. Para h tenemos que $X = A$ o $Y = B$, ya que si $X \neq A$ e $Y \neq B$, entonces, tomando el mínimo a_0 de $A - X$ y el mínimo b_0 de $B - Y$, tendríamos que para la aplicación h_{a_0,b_0} definida desde $X \cup \{a_0\}$ hasta $Y \cup \{b_0\}$ y con función subyacente H_{a_0,b_0} la definida como

$$H_{a_0,b_0} = H \cup \{\, (a_0, b_0)\,\}$$

se cumpliría que h_{a_0,b_0} es biyectiva que, para cada $x, x' \in X \cup \{a_0\}$, se cumple que $x \leq x'$ si y sólo si $h_{a_0,b_0}(x) \leq h_{a_0,b_0}(x')$, y que $h < h_{a_0,b_0}$, luego h no sería maximal, contradicción. Por lo tanto $X = A$ o $Y = B$. Si ocurre lo primero, entonces $\mathrm{in}_{\underline{Y},\underline{B}} \circ h$ es un isomorfismo de $\underline{A}$ en una sección inicial de $\underline{B}$, mientras que si ocurre lo segundo, $\mathrm{in}_{\underline{X},\underline{A}} \circ h^{-1}$ es un isomorfismo de $\underline{B}$ en una sección inicial de $\underline{A}$. □

17. El lema de Zorn-Kuratowski, la buena ordenación y el axioma de elección.

En esta sección demostramos que del lema de Zorn-Kuratowski se deduce que sobre todo conjunto hay una buena ordenación, que de suponer esto último deducimos que sobre todo conjunto existe una función de elección, y, en último lugar, que de suponer que sobre todo conjunto existe una función de elección, se deduce el lema de Zorn-Kuratowski.

Proposición 17.0.42 (Principio de la buena ordenación de Cantor)**.** *Cualquier conjunto tiene, al menos, una buena ordenación.*

Demostración. Si $A = \varnothing$, entonces $\varnothing \in \mathrm{WO}(A)$. Supongamos que $A \neq \varnothing$ y sea $\mathcal{W}(A)$ el conjunto formado por todos los conjuntos bien ordenados $\underline{X} = (X, <)$ tales que $X \subseteq A$. El conjunto $\mathcal{W}(A)$ no es vacío porque $\underline{\varnothing} = (\varnothing, \varnothing) \in \mathcal{W}(A)$. Sobre el conjunto $\mathcal{W}(A)$ consideramos la relación binaria $\leq$ definida como:

$$(X,<) \leq (X',<') \text{ si y sólo si } \begin{pmatrix} X \subseteq X', <= <' \cap (X \times X) \text{ y} \\ X \text{ es una sección inicial de } (X',<'). \end{pmatrix}$$

La relación así definida es un orden sobre $\mathcal{W}(A)$.

A continuación demostramos que cada cadena no vacía en $\underline{\mathcal{W}}(A) = (\mathcal{W}(A), \leq)$ está acotada superiormente. Sea $(\underline{X}_i)_{i\in I}$ una cadena no vacía en $\underline{\mathcal{W}}(A)$. Entonces $(X,<) = (\bigcup_{i\in I} X_i, \bigcup_{i\in I} <_i)$ es un conjunto linealmente ordenado.

Sea Y un subconjunto no vacío de X. Entonces, para un $i \in I$, tenemos que $Y \cap X_i \neq \varnothing$. Ahora bien, puesto que $\underline{X}_i$ es un conjunto bien ordenado y $Y \cap X_i$ es una parte no vacía de X_i, sea $x_{Y,i}$ el primer elemento de $Y \cap X_i$, respecto del buen orden $<_i$ sobre X_i. Entonces $x_{Y,i}$ es el primer elemento de $Y \cap X_i$, respecto de orden $<$ sobre X y por lo tanto es el primer elemento de Y respecto del orden $<$ sobre X, esto último se cumple porque no puede existir un $y \in Y$ tal que $y < x_{Y,i}$, ya que si tal fuera el caso, entonces $y \in X_j$, para algún $j \in I$. Si $(X_i,<) \leq (X_j,<)$, entonces de $y < x_{Y,i} \in X_i$, obtenemos que $y \in X_i$, y si $(X_j,<) \leq (X_i,<)$, también $y \in X_i$, luego $x_{Y,i}$ no es el primer elemento de $Y \cap X_i$, que entra en contradicción con lo anterior. Por lo tanto $x_{Y,i}$ es el primer elemento de Y respecto del orden $<$ sobre X.

Con esto queda demostrado que $(X,<)$ es un conjunto bien ordenado. Es evidente que $(X,<) \in \mathcal{W}(A)$ y que es una cota superior de $(\underline{X}_i)_{i\in I}$ en $\underline{\mathcal{W}}(A)$, que además es mínima, i.e., $(X,<)$ es el supremo de de $(\underline{X}_i)_{i\in I}$ en $\underline{\mathcal{W}}(A)$. Por lo tanto, en virtud del lema de Zorn-Kuratowski, en el conjunto ordenado $\underline{\mathcal{W}}(A)$ existe un maximal $\underline{B} = (B,<)$.

Se cumple que $B = A$, porque si $A - B \neq \varnothing$, entonces, eligiendo un $a \in A - B$, para el conjunto $B_a = B \cup \{a\}$ y la relación $<_a = < \cup \{ (b, a) \mid b \in B \}$, obtendríamos un conjunto bien ordenado $\underline{B}_a = (B_a, <_a)$, tal que $\underline{B} < \underline{B}_a$, lo cual contradice el caracter maximal de $\underline{B}$. Por consiguiente $A = B$ y $\mathrm{WO}(A) \neq \varnothing$. □

Puesto que sobre todo conjunto existe una buena ordenación, como caso particular, sobre el conjunto de los números reales hay al menos una, que no coincide precisamente con el orden lineal usual sobre tal conjunto (por ejemplo, el subconjunto $]0, 1[$ no tiene primer elemento).

Pero no malgastes tu tiempo intentando definir explicítamente una buena ordenación sobre $\mathbb{R}$, porque nadie ha podido, ni podrá jamás, construir un buen orden sobre tal conjunto. La razón de ello estriba en que Feferman demostró que incluso si se asume, además de los axiomas de Zermelo-Frenkel-Skolem y el axioma de elección, la hipótesis generalizada del contínuo, no se podrá llegar a establecer ninguna definición explícita de un buen orden del conjunto de los números reales, i.e., demostró que es consistente con los axiomas de Zermelo-Frenkel-Skolem, junto con el axioma de elección y la hipótesis generalizada del contínuo, que no hay ningún buen orden que sea definible sobre el contínuo.

Lo anterior pone de manifiesto la diferencia radical que hay entre dos modos de concebir la existencia de los objetos matemáticos, por una parte la Hilbertiana, que sostiene que un objeto matemático, que cumpla alguna condición, existe si, de la admisión de su existencia, no obtenemos una contradicción (existir puramente formal), y, por otra, la Brouweriana, según la cual, un objeto matemático, dotado de cierta propiedad, existe si, cuanto menos, tenemos la posibilidad de la construcción, en principio, de tal objeto matemático, con la propiedad en cuestión (existir algorítmico).

Proposición 17.0.43. *Si para cada conjunto A se cumple que* $\mathrm{WO}(A)$*, el conjunto de las buenas ordenaciones sobre A, no es vacío, entonces, para cada conjunto A,* $\mathrm{ChFnc}(A)$*, el conjunto de las funciones de elección para A, i.e., el conjunto de las funciones $F\colon \mathrm{Sub}(A) - \{\varnothing\} \longrightarrow A$ tales que, para cada $X \in \mathrm{Sub}(A) - \{\varnothing\}$, $F(X) \in X$, no es vacío.*

Demostración. Sea A un conjunto y $\leq$ una buena ordenación sobre A. Entonces la función $F\colon \mathrm{Sub}(A) - \{\varnothing\} \longrightarrow A$, que a un $X \in \mathrm{Sub}(A) - \{\varnothing\}$ le asigna $F(X) = \min(X)$, es una función de elección para A. □

Ante de proceder a la demostración de que del axioma de elección se deduce el lema de Zorn-Kuratowski, y siguiendo la exposición de R. Douady y A. Douady en su libro: *Algèbre et théories galoisiennes*, vol. I, definimos el concepto de cadena relativa a una función de elección para el conjunto subyacente de un conjunto ordenado, y demostramos una serie de propiedades de las mismas, a partir de las cuales estableceremos lo enunciado.

Definición 17.0.44. Sea $\underline{A}$ un conjunto ordenado, F una función de elección para A y X una parte de A. Decimos que X es una F-cadena si, para cada sección inicial C de $(X, \leq)$, distinta de X, se cumple que el conjunto $X - C$ tiene un primer elemento y que tal elemento es precisamente $F(\mathrm{Ub}^*_{\underline{A}}(C))$, siendo $\mathrm{Ub}^*_{\underline{A}}(C)$ el conjunto de las cotas superiores de C en $\underline{A}$ que no pertenecen a C, así que

$$\mathrm{Ub}^*_{\underline{A}}(C) = \mathrm{Ub}_{\underline{A}}(C) - C.$$

Observemos que si $\underline{A}$ es un conjunto ordenado no vacío y que F sea una función de elección para A, entonces el subconjunto $\{ F(A) \}$ de A es una F-cadena.

Sea F una función de elección para el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Entonces el conjunto $X = \{ a_n \mid n \in \mathrm{N} \}$, imagen de la única aplicación $(a_n)_{n \in \mathrm{N}}$ de N en $\mathbb{R}$

para la que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{N} \arrow[dd, "(a_n)_{n\in\mathrm{N}}"] & \mathrm{N} \arrow[l, "\mathrm{sc}"'] \arrow[dd, "(a_n)_{n\in\mathrm{N}}"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_0"] \arrow[dr, "\kappa_{a_0}"'] & & \\
& \mathbb{R} & \mathbb{R} \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

en el que κ_0 es la aplicación que al único miembro de 1 le asigna 0, κ_{a_0} la aplicación que al único miembro de 1 le asigna $a_0 = F(\mathbb{R})$, y f la endoaplicación de $\mathbb{R}$ que a un número real r le asigna

$$f(r) = F\left(]r, \rightarrow[\right) \; (\in]r, \rightarrow[),$$

de modo que:

1. $a_0 = F(\mathbb{R})$ y
2. $\forall n \in \mathrm{N}\; (a_{n+1} = F\left(]a_n, \rightarrow[\right))$,

es una F-cadena.

Proposición 17.0.45. *Sea $\underline{A}$ un conjunto ordenado y F una función de elección para A. Entonces toda F-cadena de $\underline{A}$ está bien ordenada.*

Demostración. Sea X una F-cadena. Entonces considerando sobre X la restricción del orden sobre A, se cumple que $\underline{X} = (X, \leq)$ es un conjunto ordenado. Demostramos a continuación que toda parte no vacía de X tiene un primer elemento. Sea Y un subconjunto no vacío de X. Sea C el conjunto de las cotas inferiores de Y en $\underline{X}$ que no pertenecen a Y, de manera que

$$C = \mathrm{Lb}_{\underline{X}}(Y) - Y = \mathrm{Lb}_{\underline{X}}(Y) \cap \complement_X Y.$$

Es evidente que C es una sección inicial de $\underline{X}$. Ahora demostramos que C es distinto de X. Pero se cumple que

$$X - C = Y \cup (X - \mathrm{Lb}_{\underline{X}}(Y)),$$

por lo tanto $Y \subseteq X - C$, y como $Y \neq \varnothing$, $X - C \neq \varnothing$, luego $C \neq X$. Entonces, por ser X una F-cadena y C una sección inicial de $\underline{X}$ y distinta de X, el conjunto $X - C$ tiene un mínimo x_0, que, además, coincide con $F(\mathrm{Ub}^*_{\underline{A}}(C))$. Puesto que $Y \subseteq X - C$ y $x_0 = \min(X - C)$, x_0 es una cota inferior de Y en $\underline{X}$. Además, se cumple que $x_0 \in Y$, ya que si $x_0 \notin Y$, entonces x_0 sería una cota inferior estricta de Y en $\underline{X}$, i.e., $x_0 \in C$, pero $x_0 \in X - C$, de donde la contradicción, por lo tanto $x_0 \in Y$ y x_0 es el mínimo de Y en $\underline{X}$. □

Proposición 17.0.46. *Sea $\underline{A}$ un conjunto ordenado, F una función de elección para A y X, X' dos F-cadenas de $\underline{A}$. Entonces, o bien X es una sección inicial de $\underline{X}'$, o bien X' es una sección inicial de $\underline{X}$.*

Demostración. Sea C la reunión de todas las secciones iniciales comunes a los conjuntos bien ordenados $\underline{X}$ y $\underline{X}'$. Supongamos que $C \neq X$ y que $C \neq X'$. Entonces, por ser X y X' F-cadenas de $\underline{A}$, se cumple que

$$\min(X - C) = \min(X' - C) = F(\mathrm{Ub}^*_{\underline{A}}(C)).$$

Pero entonces $C \cup \{\, F(\mathrm{Ub}^*_{\underline{A}}(C)) \,\}$ es una sección inicial común a $\underline{X}$ y $\underline{X}'$ que contiene estrictamente a C, que entra en contradicción con que C sea la máxima sección inicial común a $\underline{X}$ y $\underline{X}'$. Por lo tanto $C = X$ o $C = X'$. □

Proposición 17.0.47. *Sea $\underline{A}$ un conjunto ordenado y F una función de elección para A. Entonces se cumple que*

1. *La unión, X_F, de todas las F-cadenas de $\underline{A}$ es una F-cadena.*
2. *La máxima F-cadena, X_F, de $\underline{A}$ no tiene ninguna cota superior estricta en $\underline{A}$.*

Demostración. Sea C una sección inicial de $\underline{X}_F$ distinta de X_F. Vamos a demostrar que $X_F - C$ tiene un mínimo y que tal mínimo coincide con $F(\mathrm{Ub}^*_{\underline{A}}(C))$. Para ello establecemos que si $x \in X_F - C$ y X es una F-cadena de $\underline{A}$ tal que $x \in X$, entonces C es una sección inicial de $\underline{X}$ distinta de X, porque en tal caso se cumple que existe el mínimo de $X - C$ y coincide con $F(\mathrm{Ub}^*_{\underline{A}}(C))$, de donde podemos concluir que tal mínimo es también el mínimo de $X_F - C$.

Ahora bien, puesto que $x \in X - C$, se cumple que C es distinto de X. Sólo falta demostrar que C es una sección inicial de $\underline{X}$, pero, por ser C es una sección inicial de $\underline{X}_F$, para ello es suficiente que demostremos que $C \subseteq X$. Sea $y \in C$, entonces, por ser C parte de X_F, existe una F-cadena Y tal que $y \in Y$. Ahora bien, por la proposición anterior, Y es una sección inicial de $\underline{X}$, en cuyo caso $y \in X$, o X es una sección inicial de $\underline{Y}$, y entonces $x, y \in Y$, luego, por ser $\underline{Y}$ un conjunto bien ordenado, está linealmente ordenado, así que $x < y$, o $x = y$ o $y < x$. Pero $x \notin C$ e $y \in C$, luego no puede ocurrir ni que $x = y$ ni que $x < y$, así que $y < x$. Por lo tanto $y \in X$.

Supongamos que X_F tenga una cota superior estricta. Entonces añadiendo $F(\mathrm{Ub}^*_{\underline{A}}(X_F))$ a X_F, obtenemos una F-cadena de $\underline{A}$ que contiene estrictamente a X_F, lo cual entra en contradicción con que X_F sea la máxima F-cadena de $\underline{A}$ □

Proposición 17.0.48. *Si para cada conjunto A,* $\mathrm{ChFnc}(A) \neq \varnothing$*, entonces se cumple el lema de Zorn-Kuratowski.*

Demostración. Sea $\underline{A}$ un conjunto ordenado no vacío tal que cualquier cadena no vacía de $\underline{A}$ tenga una cota superior en $\underline{A}$. Sea F una función de elección para A. El conjunto X_F, i.e., la reunión de todas las F-cadenas de $\underline{A}$ tiene las siguientes propiedades:

1. X_F no es una parte no vacía de A, porque $\{ F(A) \}$ es una F-cadena y está incluida en X_F.
2. X_F es una cadena en $\underline{A}$, porque toda F-cadena está bien ordenada y por lo tanto está linealmente ordenada.

Por lo tanto X_F tiene una cota superior a en $\underline{A}$. Si a no fuera maximal, existiría un $b \in A$ tal que $a < b$, luego b sería una cota superior estricta de la F-cadena X_F, que entraría en contradicción con la segunda parte de la proposición anterior. Por lo tanto a es un maximal de $\underline{A}$. □

Resumimos en un diagrama las diferentes formulaciones del axioma de elección, pero antes recordamos que

1. El **Axioma de elección de Baer** afirma que:
$$\forall R\,(\,\mathrm{Rel}(R) \to \exists F\,(\,\mathrm{Fnc}(F) \wedge F \subseteq R \wedge \mathrm{Dom}(F) = \mathrm{Dom}(R)\,))$$
2. El **Axioma de elección de Zermelo** afirma que:
$$\forall \mathcal{X}\,((\,\varnothing \notin \mathcal{X} \wedge \mathrm{Disj}(\mathcal{X})\,) \to \exists F\colon \mathcal{X} \longrightarrow \bigcup \mathcal{X}\,(\forall X \in \mathcal{X}(F(X) \in X\,))).$$
3. El **Axioma de elección de Russell-Zermelo** afirma que:
$$\forall \mathcal{X}\,((\,\varnothing \notin \mathcal{X} \wedge \mathrm{Disj}(\mathcal{X})\,) \to \exists T \subseteq \bigcup \mathcal{X}\,(\forall X \in \mathcal{X}\,\exists! x\,(\,x \in T \cap X\,))).$$
4. El **Principio general de elección de Zermelo** afirma que:
$$\forall \mathcal{X}\,(\,\varnothing \notin \mathcal{X} \to \exists F\colon \mathcal{X} \to \bigcup \mathcal{X}\,(\forall X \in \mathcal{X}\,(\,F(X) \in X\,))).$$
5. El **Axioma de elección multiplicativo** afirma que:
$$\forall I\,\forall (X_i)_{i \in I}\,((\forall i \in I\,(X_i \neq \varnothing)) \to \textstyle\prod_{i \in I} X_i \neq \varnothing).$$

6. El **Axioma de elección** afirma que:

$$\forall A\, \exists F\colon \mathrm{Sub}(A) - \{\varnothing\} \longrightarrow A\, (\forall X \in \mathrm{Sub}(A) - \{\varnothing\}\, (F(X) \in X)).$$

7. El **Lema de Tukey-Teichmüller** afirma que:

   Todo conjunto no vacío $\mathcal{F}$de carácter finito tiene un $\subseteq$-maximal.

8. El **Principio maximal de Hausdorff** afirma que:

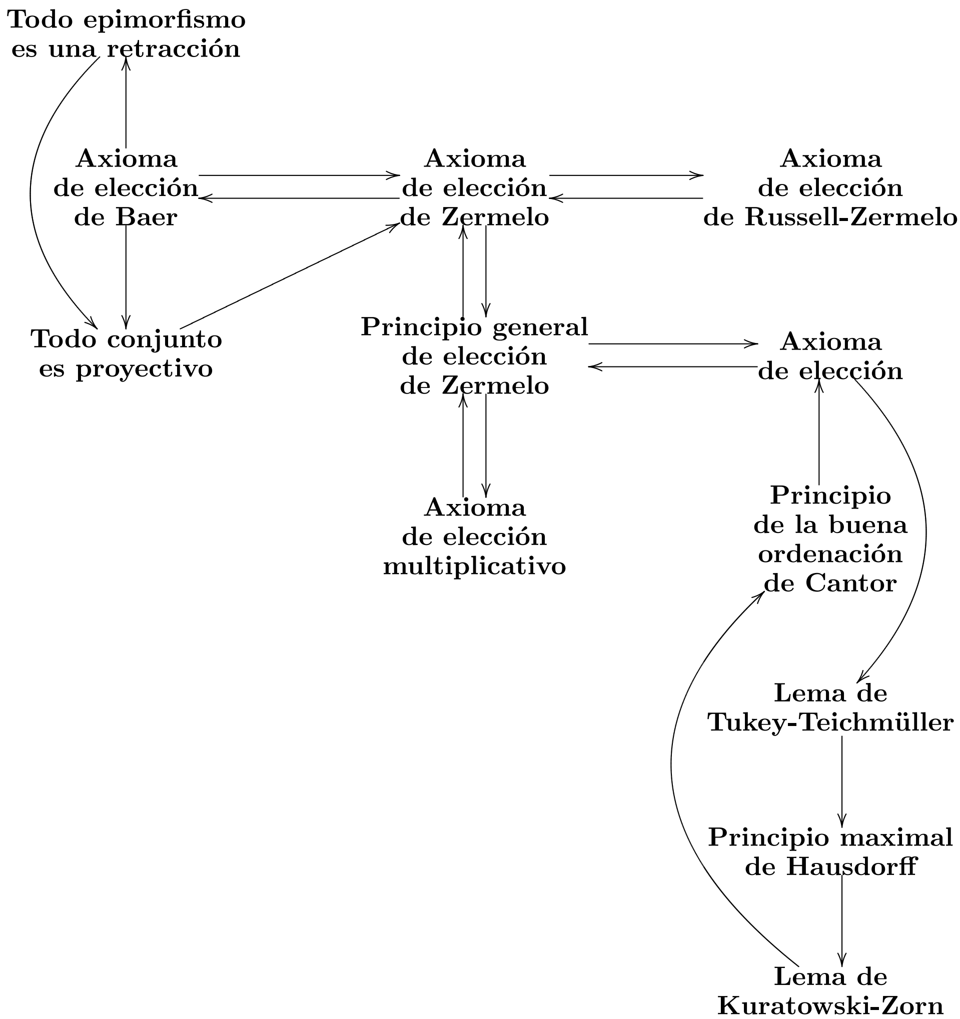
   Todo conjunto ordenado no vacío tiene una cadena $\subseteq$-maximal.

9. El **Lema de Kuratowski-Zorn** afirma que:

   Si $\mathbf{A} = (A, \leq)$ es un conjunto ordenado no vacío y toda cadena no vacía de $\mathbf{A}$ tiene un supremo en $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A}$ tiene al menos un maximal.

10. El **Principio de la buena ordenación de Cantor** afirma que:

$$\forall A\, (\mathrm{WO}(A) \neq \varnothing).$$



Veamos que del lema de Tukey-Teichmüller se deduce el principio maximal de Hausdorff. Sea $\mathbf{A}$ un conjunto ordenado no vacío. Entonces el conjunto $\mathrm{Chain}(\mathbf{A})$, de todas las cadenas de $\mathbf{A}$, no es vacío y es de carácter finito. Esto último es cierto debido a que, para cada conjunto C, se cumple que $C \in \mathrm{Chain}(\mathbf{A})$ si y sólo si, para cada subconjunto finito K de C, tenemos que $K \in \mathrm{Chain}(\mathbf{A})$. Por lo tanto, en virtud del lema de Tukey-Teichmüller, existe, en Chain($\mathbf{A}$) un $\subseteq$-maximal, i.e., una cadena $\subseteq$-maximal.

Ahora demostramos que del principio maximal de Hausdorff se deduce el lema de Kuratowski-Zorn. Sea $\mathbf{A} = (A, \leq)$ un conjunto ordenado no vacío y tal que toda cadena no vacía de $\mathbf{A}$ tenga un supremo en $\mathbf{A}$. Entonces, en virtud del principio maximal de Hausdorff, existe una cadena $\subseteq$-maximal no vacía de $\mathbf{A}$. Sea M una de tales cadenas. Se cumple que $a = \sup_{\mathbf{A}}(M)$, el supremo de M en $\mathbf{A}$, es un maximal de $\mathbf{A}$. Porque si tal no fuera el caso, entonces tendríamos que existiría un $x \in A$ tal que $x > a$, luego $M \cup \{x\}$, que es una cadena en $\mathbf{A}$, contendría estrictamente a M. Pero eso contradice el que M sea $\subseteq$-maximal. Por consiguiente a es un maximal de $\mathbf{A}$.

Demostramos a continuación que del lema de Kuratowski-Zorn se deduce el principio de la buena ordenación de Cantor. Sea A un conjunto y

$$\mathcal{B} = \bigcup_{B \subseteq A}(\{B\} \times \mathrm{WO}(B)),$$

de modo que el conjunto $\mathcal{B}$ está formado por todos los pares ordenados (B, G) en los que $B \subseteq A$ y $G \in \mathrm{WO}(B)$. Ahora definimos la relación binaria $\preceq$ en el conjunto $\mathcal{B}$ como:

$$(B, G) \preceq (B', G') \text{ si y sólo si } B \subseteq B', G \subseteq G' \text{ y }, \forall b \in B, \forall b' \in B' - B, (b, b') \in G'.$$

Se cumple que $(\mathcal{B}, \preceq)$ es un conjunto ordenado no vacío en el que toda cadena no vacía tiene un supremo. En efecto, es evidente que no es vacío porque el par ordenado $(\varnothing, \varnothing) \in \mathcal{B}$. También es evidente que la relación binaria $\preceq$ es reflexiva y antisimétrica. Demostremos que $\preceq$ es transitiva. Sean (B, G), (B', G'), y $(B'', G'') \in \mathcal{B}$ tales que $(B, G) \preceq (B', G')$ y $(B', G') \preceq (B'', G'')$, queremos demostrar que $(B, G) \preceq (B'', G'')$. Ahora bien, de $B \subseteq B'$ y $B' \subseteq B''$ obtenemos que $B \subseteq B''$, y de $G \subseteq G'$ y $G' \subseteq G''$ que $G \subseteq G''$. Nos falta demostrar que, para cada $b \in B$ y cada $b'' \in B'' - B$, se cumple que $(b, b'') \in G''$. Pero $B' - B \subseteq B'' - B$, luego para $b'' \in B'' - B$ puede ocurrir que $b'' \in B' - B$ o que $b'' \notin B' - B$. Si $b'' \in B' - B$, entonces, ya que $b \in B$ y $(B, G) \preceq (B', G')$, $(b, b'') \in G'$, pero $G' \subseteq G''$, luego $(b, b'') \in G''$. Si $b'' \notin B' - B$, entonces, puesto que $b \in B$ y $B \subseteq B'$, tenemos que $b \in B'$ y ($b'' \notin B'$ o $b'' \in B$), i.e., que ($b \in B'$ y $b'' \notin B'$) o ($b \in B'$ y $b'' \in B$). Si lo primero, entonces $(b, b'') \in G'$, pero $G' \subseteq G''$, luego $(b, b'') \in G''$. Mientras que lo segundo es imposible, ya que $b'' \notin B$.

Sea I un conjunto no vacío y $(B_i, G_i)_{i \in I}$ una cadena en $(\mathcal{B}, \preceq)$. Entonces

$$(B, G) = (\bigcup_{i \in I} B_i, \bigcup_{i \in I} G_i)$$

es el supremo en $(\mathcal{B}, \preceq)$ de la cadena no vacía $(B_i, G_i)_{i \in I}$. Es evidente que (B, G) es un conjunto ordenado. Falta demostrar que toda parte no vacía de B tiene un mínimo en (B, G). Sea D una parte no vacía de B. Entonces hay un $i_0 \in I$ tal que $D \cap B_{i_0} \neq \varnothing$. Puesto que $D \cap B_{i_0} \subseteq B_{i_0}$ y (B_{i_0}, G_{i_0}) es un conjunto bien ordenado, hay un mínimo b de $D \cap B_{i_0}$ en (B_{i_0}, G_{i_0}). Veamos que b es, de hecho, el mínimo de D en B, G, i.e., que, para cada $x \in D$, $(b, x) \in G$. Sea $x \in D$. Entonces, o bien $x \in B_{i_0}$, o bien $x \notin B_{i_0}$. Si lo primero, entonces $(b, x) \in G_{i_0}$, luego $(b, x) \in G$. Si lo segundo, entonces $x \in B_j$, para un $j \in I - \{i_0\}$. Se cumple que $B_j \nsubseteq B_{i_0}$, luego no puede ocurrir que $(B_j, G_j) \preceq (B_{i_0}, G_{i_0})$, así que $(B_{i_0}, G_{i_0}) \preceq (B_j, G_j)$, por lo tanto $(b, x) \in G_j$, ya que $b \in B_{i_0}$ y $x \in B_j - B_{i_0}$, pero $G_j \subseteq G$, de modo que $(b, x) \in G$.

Es evidente que (B, G) es el supremo en $(\mathcal{B}, \preceq)$ de la cadena no vacía $(B_i, G_i)_{i \in I}$. Entonces, en virtud del lema de Kuratowski-Zorn, existe un maximal en $(\mathcal{B}, \preceq)$. Sea (B, G) un tal maximal. Se cumple que $B = A$, ya que si $B \neq A$, entonces tomando un $a_0 \in A - B$, tendríamos que $(B \cup \{a_0\}, G \cup \{(b, a_0) \mid b \in B\})$ sería un conjunto bien ordenado perteneciente a $\mathcal{B}$ y que contendría estrictamente a (B, G). Pero eso es imposible, porque (B, G) es maximal. De donde hemos de concluir que $B = A$ y, por lo tanto, que A es tal que $\mathrm{WO}(A) \neq \varnothing$.

Del principio de la buena ordenación se deduce el axioma de elección. Sea A un conjunto. Entonces la función F de $\mathrm{Sub}(A) - \{\varnothing\}$ en A que a un subconjunto no vacío X de A le asigna

$$F(X) = \text{mín}_{(A,\leq)}(X),$$

siendo $\leq \in \mathrm{WO}(A)$, arbitraria, pero fija, es una función de elección para A.

Ahora demostramos el teorema del buen orden de Zermelo, en virtud del cual sobre cualquier conjunto hay un buen orden. Respecto de la demostración del teorema dice Zermelo:

> The present proof rests upon the assumption that coverings [funciones de elección] γ actually do exists, hence upon the principle that even for an infinite totality of sets there are always mappings that associate with every set one of its elements, or, expressed formally, that the product of an infinite totality of sets, each containing at least one element, itself differs from zero. This *logical principle* cannot, to be sure, be reduced to a still simpler one, but it is applied without hesitation everywhere in mathematical deduction

Teorema 17.0.49. *Para cada conjunto A se cumple que* $\mathrm{WO}(A) \neq \varnothing$.

Demostración. Si $A = \varnothing$, entonces $\varnothing \in \mathrm{WO}(A)$. Supongamos que $A \neq \varnothing$ y sea F una función de elección para A, i.e., una aplicación de $\mathrm{Sub}(A) - \{\varnothing\}$ en A tal que, para cada subconjunto no vacío X de A, $F(X) \in X$. Diremos, siguiendo a Zermelo, que un conjunto bien ordenado $(X, <)$ es un F-conjunto si X es una parte no vacía de A y, para cada $x \in X$, se cumple que $x = F(A- \downarrow_< x)$, i.e., x es el elemento distinguido de $A- \downarrow_< x$ por la función de elección F. Observemos que el conjunto $\mathcal{X}_F$ de todos los F-conjuntos existe porque existe el conjunto $\mathrm{Sub}(A) \times \mathrm{Sub}(\mathrm{Sub}(A))$ y la condición de ser un F-conjunto es una condición, en el lenguaje de Zermelo, bien definida. El conjunto $\mathcal{X}_F$ no es vacío, porque, para $a_0 = F(A)$, se cumple que $(\{a_0\}, \varnothing) \in \mathcal{X}_F$.

Demostramos ahora que si $(X, <)$ y $(X', <')$ son dos F-conjuntos, entonces uno de ellos es una sección inicial del otro. En efecto, en virtud del teorema de comparabilidad, $(X, <)$ es isomorfo a una sección inicial de $(X', <')$ o $(X', <')$ lo es a una sección inicial de $(X, <)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $(X, <)$ sea isomorfo a una sección inicial de $(X', <')$ y que f sea un morfismo de $(X, <)$ en $(X', <')$ cuya imagen sea una sección inicial de $(X', <')$. Se cumple que, para cada $x \in X$, $f(x) = x$. Desde luego, el primer elemento de $(X, <)$ es un punto fijo de f, debido a que el primer elemento de cualquier F-conjunto es $F(A)$ y a que f es un morfismo. Si fuera x_0 el primer elemento de $(X, <)$ para el que $x_0 \neq f(x_0)$, entonces, por inducir f un isomorfismo entre $(X, <)$ y una sección inicial de $(X', <')$, tenemos que $\downarrow_< f(x_0) = f[\downarrow_< x_0] \cap \downarrow_< f(x_0)$ y $\downarrow_< x_0 = \downarrow_< f(x_0)$, luego $A- \downarrow_< x_0 = A- \downarrow_< f(x_0)$, por lo tanto $x_0 = F(A- \downarrow_< x_0) = F(A- \downarrow_< f(x_0) = f(x_0)$, contradicción. Por consiguiente para cada $x \in X$, $f(x) = x$ y, por lo tanto, $(X, <)$ es una sección inicial de $(X', <')$.

Por último, sea $\mathcal{L}_F$ el conjunto de todos los subconjuntos X de A para los que existe un $< \in \mathrm{WO}(X)$ tal que $(X, <) \in \mathcal{X}_F$ y $\mathrm{L}_F = \bigcup_{X \in \mathcal{X}_F} X$, el conjunto de los F-elementos, i.e., de los elementos de algún F-conjunto. Entonces hay un buen orden $<$ sobre L_F tal que $(\mathrm{L}_F, <)$ es un F-conjunto y $\mathrm{L}_F = A$. Sea $\mathcal{W}_F$ el conjunto de todas las relaciones binarias sobre A para las que exista un subconjunto X de A tal que $(X, <_X)$ sea un F-conjunto y $<= \bigcup_{< \in \mathcal{W}_F} <_X$. Es evidente que $<$ es un orden lineal. Veamos que todo subconjunto no vacío de L_F tiene un primer elemento. Sea M una parte no vacía del conjunto de los F-elementos y $x \in M$ arbitrario pero fijo. Entonces $x \in X$, para un F-conjunto $(X, <)$, luego $\{\, y \in \mathrm{L}_F \mid y <\leq x \,\} \subseteq X$, y entonces $N = M \cap \{ y \in \mathrm{L}_F \mid y <\leq x \} \subseteq X$. Puesto que N es una parte no vacía del conjunto bien ordenado $(X, <)$ tiene un primer elemento en $(X, <)$, que será también el primer elemento de M en $(\mathrm{L}_F, <)$.

Si $A - \mathrm{L}_F \neq \varnothing$, entonces, siendo $a_0 = F(A - \mathrm{L}_F)$, $(\mathrm{L}_F \cup \{a_0\}, <_{a_0})$, siendo $, <_{a_0} \cup \{ (x, a_0) \mid x \in \mathrm{L}_F$, es un F-conjunto. Por lo tanto a_0 es un F-elemento, contradicción. De modo que $A = \mathrm{L}_F$. □

Damos otra demostración del teorema del buen orden, basándonos en el lema de Zorn, que recordemos afirma que si un conjunto ordenado no vacío es tal que todas sus cadenas no vacías tienen una cota superior, entonces tal conjunto ordenado tiene un maximal.

Demostración. Si $A = \varnothing$, entonces $\varnothing \in \mathrm{WO}(A)$. Supongamos que $A \neq \varnothing$ y sea $\mathcal{W}(A)$ el conjunto formado por todos los conjuntos bien ordenados $\mathbf{X} = (X, <)$ tales que $X \subseteq A$. El conjunto $\mathcal{W}(A)$ no es vacío porque $(\varnothing, \varnothing) \in \mathcal{W}(A)$. Sobre el conjunto $\mathcal{W}(A)$ consideramos la relación binaria $\leq$ definida como:

$$(X, <) \leq (X', <') \text{ si y sólo si } \left(\begin{array}{c} X \subseteq X', <= <'_X \text{ y} \\ X \text{ es una sección inicial de } (X', <'). \end{array} \right)$$

La relación así definida es un orden sobre $\mathcal{W}(A)$. Veamos que cualquier cadena no vacía en $\boldsymbol{\mathcal{W}}(A) = (\mathcal{W}(A), \leq)$ está acotada superiormente. Sea $(\mathbf{X}_i)_{i \in I}$ una cadena no vacía en $\boldsymbol{\mathcal{W}}(A)$. Entonces $(X, <) = (\bigcup_{i \in I} X_i, \bigcup_{i \in I} <_i)$ es un conjunto linealmente ordenado. Sea Y un subconjunto no vacío de X. Entonces, para un $i \in I$, tenemos que $Y \cap X_i \neq \varnothing$. Ahora bien, puesto que $\mathbf{X}_i$ es un conjunto bien ordenado y $Y \cap X_i$ es una parte no vacía de X_i, sea $x_{Y,i}$ el primer elemento de $Y \cap X_i$, respecto del buen orden $<_i$ sobre X_i. Entonces $x_{Y,i}$ es el primer elemento de $Y \cap X_i$, respecto de orden $<$ sobre X y por lo tanto es el primer elemento de Y respecto del orden $<$ sobre X, porque no puede existir un $y \in Y$ tal que $y < x_{Y,i}$, ya que si tal fuera el caso, entonces $y \in X_i$, luego $y <_i x_{Y,i}$, pero eso es imposible. Con esto queda demostrado que $(X, <)$ es un conjunto bien ordenado. Es evidente que $(X, <) \in \mathcal{W}(A)$ y que es una cota superior de $(\mathbf{X}_i)_{i \in I}$ en $\boldsymbol{\mathcal{W}}(A)$, que además es mínima, i.e., $(X, <)$ es el supremo de de $(\mathbf{X}_i)_{i \in I}$ en $\boldsymbol{\mathcal{W}}(A)$. Por lo tanto, en virtud del lema de Zorn, en el conjunto ordenado $\boldsymbol{\mathcal{W}}(A)$ existe un maximal $\mathbf{B} = (B, <)$. Se cumple que $B = A$, porque si $A - B \neq \varnothing$, entonces, eligiendo un $a \in A - B$, para el conjunto $B_a = B \cup \{a\}$ y la relación $<_a = < \cup \{ (b, a) \mid b \in B \}$, obtendríamos un conjunto bien ordenado $\mathbf{B}_a = (B_a, <_a)$, tal que $\mathbf{B} < \mathbf{B}_a$, lo cual contradice el caracter maximal de $\mathbf{B}$. Por consiguiente $A = B$ y $\mathrm{WO}(A) \neq \varnothing$. □

El teorema del buen orden de Zermelo permite, en particular, afirmar que sobre el conjunto de los números reales hay un buen orden, pero nadie ha podido, ni podrá jamás, construir un buen orden sobre tal conjunto. La razón de ello estriba en que Feferman demostró que incluso si se asume, además de los axiomas de Zermelo-Frenkel-Skolem y el axioma de elección, la hipótesis generalizada del contínuo, no se podrá llegar a establecer ninguna definición explícita de un buen orden del conjunto de los números reales, i.e., demostró que es consistente con los axiomas de Zermelo-Frenkel-Skolem, junto con el axioma de elección y la hipótesis generalizada del contínuo, que no hay ningún buen orden que sea definible sobre el contínuo. Esto pone de manifiesto la diferencia radical que hay entre dos modos de concebir la existencia de los objetos matemáticos, por una parte la Hilbertiana, que sostiene que el existir un objeto, sujeto a cumplir una condición, equivale a que ello no conduzca a la obtención de una contradicción, y la Brouweriana, que afirma que tal existir significa, cuanto menos, la posibilidad de la construcción, en principio, de un objeto con la propiedad en cuestión. Cada uno de los dos extremos, como no podía ser menos, tiene su correspondiente entorno, siendo ambos entornos disjuntos, constituido por los diferentes puntos de vista sobre el existir que necesariamente se acumulan alrededor de cada uno de los dos polos, y difiriendo, en la mayor parte de las ocasiones, tan poco de los mismos que parece un tanto artificioso sostener que haya una veradera diferencia.

Recordemos que, en virtud del teorema de Cantor-Bernstein, una condición suficiente para que dos conjuntos sean isomorfos, i.e., cardinalmente indistinguibles, es que cada uno de ellos domine al otro. Pero quedó pendiente el problema de si dos conjuntos arbitrarios son o no cardinalmente comparables, i.e., si uno domina al otro o el otro al uno. El anterior teorema de Zermelo soluciona el problema afirmativamente, de manera que la relación de dominación entre conjuntos es un preorden lineal.

Corolario 17.0.50. *Dos conjuntos cualesquiera son cardinalmente comparables, i.e., si A y A' son dos conjuntos, entonces A domina a A' o A' domina a A.*

Demostración. Sea $<$ un buen orden sobre A y $<'$ un buen orden sobre A'. Entonces $(A,<) \preccurlyeq (A',<')$ o $(A',<') \preccurlyeq (A,<)$. Por lo tanto $A \leq A'$ o $A' \leq A$. □

Presentamos otra demostración del corolario anterior, haciendo uso del método de la Zornificación, i.e., del método consistente en definir, para el problema de que se trate, un conjunto ordenado no vacío constituido por todas las entidades intermedias adecuadas para el problema en cuestión y demostrar que tal conjunto ordenado no vacío es tal que, para cada cadena no vacía de tales entidades intermedias, siempre existe otra entidad intermedia que es una mejor aproximación a la solución del problema que cada una de las que forman la cadena.

Demostración. Sea $\mathrm{Iso_p}(A,A')$ el conjunto de todos los isomorfismos parciales de A en A' y sobre tal conjunto sea $\leq$ la relación binaria definida como:

$$f \leq g \text{ si y sólo si } \begin{pmatrix} \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g),\ \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Im}(g) \text{ y} \\ \forall x \in \mathrm{Dom}(f),\ f(x) = g(x). \end{pmatrix}$$

Se cumple que $\mathbf{Iso}_{\mathrm{p}}(A,A') = (\mathrm{Iso_p}(A,A'),\leq)$ es un conjunto ordenado no vacío. Además, si $\mathcal{F}$ es una cadena no vacía en $\mathbf{Iso}_{\mathrm{p}}(A,A')$, entonces $\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f$ es el supremo de tal cadena. Por lo tanto, en virtud del lema de Zorn, hay un maximal $\overline{f}$ en $\mathbf{Iso}_{\mathrm{p}}(A,A')$. Para el maximal $\overline{f}$ se cumple que $\mathrm{Dom}(\overline{f}) = A$ o que $\mathrm{Im}(\overline{f}) = B$. Porque si no se cumpliera ninguna de las dos cosas, entonces tomando un $a \in A - \mathrm{Dom}(\overline{f})$ y un $a' \in A' - \mathrm{Im}(\overline{f})$, tendríamos que $\overline{f} \cup \{\,(a,a')\,\}$ sería estrictamente posterior a $\overline{f}$, lo cual es imposible. □

Pero, no sólo del principio de elección de Zermelo se deduce el principio del buen orden, sino que de éste último se deduce el primero.

Teorema 17.0.51. *Para cada conjunto A hay una función $F\colon \mathrm{Sub}(A) - \{\varnothing\} \longrightarrow A$ tal que, para cada $X \in \mathrm{Sub}(A)$, $F(X) \in X$.*

Demostración. Sea $<$ un buen orden sobre A. Entonces la función $F_<$ de $\mathrm{Sub}(A) - \{\varnothing\}$ en A que a cada subconjunto no vacío X de A le asigna $F_<(X) = \min(X)$, es una función de elección para A. □

Por lo tanto podemos afirmar que el principio de elección de Zermelo y el principio del buen orden de Cantor son equivalentes.

Ejercicio 17.0.52. Demuéstrese que del lema de Zorn se deduce que todo epimorfismo es una retracción, i.e., el axioma de elección.

Sea $f\colon A \longrightarrow B$ un epimorfismo, i.e., una aplicación sobreyectiva. Queremos demostrar que existe una aplicación $g\colon B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Para ello consideramos, en primer lugar, el conjunto

$$\mathcal{R}_f = \{(Y,h) \in \bigcup_{Y\subseteq B}(\{Y\} \times \mathrm{Hom}(Y,A)) \mid f \circ h = \mathrm{in}_{Y,B}\}.$$

Observemos que $\mathcal{R}_f$ no es vacío, ya que, por ejemplo, $(\varnothing, \alpha_A) \in \mathcal{R}_f$. A continuación ordenamos el conjunto $\mathcal{R}_f$ estipulando que, para cada par $(Y,h),(Y',h') \in \mathcal{R}_f$, $(Y,h) \leq (Y',h')$ si, y sólo si, $Y \subseteq Y'$ y $h = h' \circ \mathrm{in}_{Y,Y'}$. De este modo hemos obtenido un conjunto ordenado no vacío $(\mathcal{R}_f, \leq)$. En tercer lugar, demostramos que toda cadena no vacía $(Y_i, h_i)_{i\in I}$ en el conjunto ordenado obtenido tiene un supremo. Entonces, en virtud del lema de Zorn, el conjunto ordenado $(\mathcal{R}_f, \leq)$ tiene un maximal (Y,h). Por último, demostramos que el conjunto Y del maximal es precisamente B. Si no lo fuera, entonces sea $b_0 \in B - Y$

Demostramos a continuación que, a diferencia de lo que ocurre en el caso de los conjuntos con los conjuntos finales, que tienen la propiedad de que hasta ellos, desde cualquier conjunto hay una única aplicación, no hay ningún conjunto bien ordenado que sea final, i.e., tal que desde cualquier conjunto bien ordenado, exista un único morfismo hasta él.

Proposición 17.0.53. *Sea cual sea el conjunto bien ordenado* $\mathbf{A}$*, hay otro conjunto bien ordenado* $\mathbf{A}^+$ *para el que se cumple que no hay ningún morfismo de* $\mathbf{A}^+$ *en* $\mathbf{A}$.

17.1. Producto lexicográfico de conjuntos bien ordenados. Antes de introducir el concepto, debido a Hausdorff, de producto lexicográfico de una familia finita de conjuntos bien ordenados, consideramos un modo, aparentemente natural, de ordenar el producto de una familia finita de conjuntos bien ordenados, pero que de hecho, salvo en casos degenerados, no conduce a la obtención de una buena ordenación sobre el producto cartesiano de los conjuntos subyacentes de los conjuntos bien ordenados dados. Es por ello por lo que definiremos el producto lexicográfico de una familia finita de conjuntos bien ordenados, que sí conduce a la obtención de un conjunto bien ordenado, aunque tal conjunto bien ordenado, no sea el producto categorial de la familia dada, que, en general, para los conjuntos bien ordenados no existe.

Sea $(\mathbf{A}_i)_{i\in n}$ una familia de conjuntos bien ordenados y $<$ la relación binaria sobre $\prod_{i\in n} A_i$ definida, para $x, y \in \prod_{i\in n} A_i$, como:

$$x < y \quad \text{si y sólo si} \quad \forall i \in n\,(\,x_i < y_i\,).$$

Entonces se cumple que la relación $<$ es un orden, i.e., que es irreflexiva y transitiva, sobre $\prod_{i\in n} A_i$, pero si $n \geq 2$ y, para cada $i \in n$, el conjunto A_i tiene al menos dos elementos, entonces $<$ no es un buen orden, porque ni siquiera es un orden lineal.

Este hecho es el que conduce a estudiar, para una familia finita de conjuntos bien ordenados, la posible existencia de otros órdenes sobre el producto cartesiano de los conjuntos subyacentes de la familia en cuestión, que sí sean buenos órdenes y de algún modo estén relacionados con los buenos órdenes dados. Para ello empezamos considerando el producto lexicográfico de una familia de conjuntos linealmente ordenados, relativa a un conjunto de índices bien ordenado.

Definición 17.1.1. Sea $\mathbf{I}$ un conjunto bien ordenado y $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos linealmente ordenados. Entonces el *producto lexicográfico* de $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$, denotado por $\prod^{\mathrm{lex}}_{i\in I} \mathbf{A}_i$, es el par $(\prod_{i\in I} A_i, <_{\mathrm{lex}})$, en el que $<_{\mathrm{lex}}$ es la relación binaria sobre $\prod_{i\in I} A_i$ definida, para $x, y \in \prod_{i\in I} A_i$, como:

$$x <_{\mathrm{lex}} y \quad \text{si y sólo si} \quad \begin{pmatrix} \mathrm{Dif}(x,y) \neq \varnothing \ \text{ y si } \ i = \min(\mathrm{Dif}(x,y)), \\ \text{entonces } x_i < y_i, \end{pmatrix}$$

siendo $\mathrm{Dif}(x,y) = \{\, i \in I \mid x_i \neq y_i \,\}$ el *diferenciador* de x e y.

Proposición 17.1.2. *Sea* $\mathbf{I}$ *un conjunto bien ordenado y* $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ *una familia de conjuntos linealmente ordenados. Entonces* $\prod_{i\in I}^{\mathrm{lex}} \mathbf{A}_i$ *es un conjunto linealmente ordenado.*

Demostración. □

El origen del término "lexicográfico", en el contexto anterior, proviene del caso en que siendo $A = \{\, a, b, \dots y, z \,\}$ el conjunto formado por las letras del alfabeto y estando éste bien ordenado por el orden alfabético, para un número natural no nulo n, las palabras de longitud n, con letras en tal alfabeto, se bien ordenan, en el, hipotético, "diccionario"de las palabras de longitud n, como:

$$(\alpha_i)_{i\in n} < (\beta_i)_{i\in n} \quad \text{si y sólo si} \quad \begin{pmatrix} \alpha_0 < \beta_0, \quad \text{o} \\ \alpha_0 = \beta_0 \quad \text{y} \quad \alpha_1 < \beta_1, \quad \text{o} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \quad \text{o} \\ \forall i \in n-1, \quad \alpha_i = \beta_i \quad \text{y} \quad \alpha_{n-1} < \beta_{n-1}. \end{pmatrix}$$

Proposición 17.1.3. *Sea* $(\mathbf{A}_i)_{i\in n}$ *una familia finita de conjuntos bien ordenados. Entonces* $\prod_{i\in n}^{\mathrm{lex}} \mathbf{A}_i$ *es un conjunto bien ordenado.*

Demostración. Para $n = 0$ o 1, la proposición es evidente. Sea $n = 2$ y D una parte no vacía de $A_0 \times A_1$. Entonces el par ordenado (x_0, x_1), en el que x_0 es el mínimo de la parte no vacía $\{\, a \in A_0 \mid \exists b \in A_1\, (\,(a,b) \in D\,)\,\}$ de A_0, y x_1 el mínimo de la parte no vacía $\{\, b \in A_1 \mid (x_0, b) \in D \,\}$ de A_1, es tal que $(x_0, x_1) \leq (a, b)$, para cada $(a, b) \in A_0 \times A_1$.

Supongamos la proposición para $n \geq 2$ y sea D una parte no vacía del producto cartesiano $\prod_{i\in n+1} A_i$. Entonces la n-tupla $(x_0, \dots, x_{n-1}, x_n)$, en la que $(x_0, \dots, x_{n-1})$ es el mínimo de la parte no vacía

$$\{\, a \in \textstyle\prod_{i\in n} A_i \mid \exists b \in A_n\, (\,(a,b) \in D\,)\,\}$$

de $\prod_{i\in n} A_i$, y x_n el mínimo de la parte no vacía

$$\{\, b \in A_n \mid ((x_0, \dots, x_{n-1}), b) \in D \,\}$$

de A_n, es tal que, para cada $a \in \prod_{i\in n+1} A_i$, $(x_0, \dots, x_n) \leq (a_0, \dots, a_{n-1})$. □

Para la familia infinita de conjuntos bien ordenados ordenados $(\mathbf{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $\mathbf{A}_n = \mathbf{N}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\prod_{n\in\mathbb{N}}^{\mathrm{lex}} \mathbf{A}_n$ no es un conjunto bien ordenado, porque en el conjunto $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{A}_n$ hay una ω-sucesión estrictamente decreciente:

$$(1,0,0,0,\dots) > (0,1,0,0,\dots) > (0,0,1,0,\dots) > \dots.$$

Junto al producto lexicográfico de una familia finita de conjuntos bien ordenados, en el que el buen orden es el de las *primeras diferencias*, tenemos el producto antilexicográfico de las mismas, en el que el buen orden es el de las últimas diferencias.

Definición 17.1.4. Sea $(\mathbf{A}_i)_{i\in n}$ una familia finita de conjuntos bien ordenados. Entonces el *producto antilexicográfico* de $(\mathbf{A}_i)_{i\in n}$, denotado por $\prod_{i\in n}^{\mathrm{alex}} \mathbf{A}_i$, es el par $(\prod_{i\in n} A_i, <_{\mathrm{alex}})$, en el que $<_{\mathrm{alex}}$ es la relación binaria sobre $\prod_{i\in n} A_i$ definida, para $x, y \in \prod_{i\in n} A_i$, como:

$$x <_{\mathrm{alex}} y \quad \text{si y sólo si} \quad \begin{pmatrix} x_{n-1} < y_{n-1}, \quad \text{o} \\ x_{n-1} = y_{n-1} \quad \text{y} \quad x_{n-2} < y_{n-2}, \quad \text{o} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \quad \text{o} \\ \forall i \in n-1, \quad x_{i+1} = y_{i+1} \quad \text{y} \quad x_0 < y_0. \end{pmatrix}$$

17.2. Igualadores de morfismos.

Proposición 17.2.1. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos conjuntos bien ordenados y* $f, g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *dos morfismos. Entonces existe un par ordenado* $(\mathbf{Eq}(f,g), \mathrm{eq}(f,g))$*, el* igualador *de* f *y* g*, en el que* $\mathbf{Eq}(f,g)$ *es un conjunto bien ordenado y* $\mathrm{eq}(f,g)$ *un morfismo de* $\mathbf{Eq}(f,g)$ *en* $\mathbf{A}$*, que tiene las siguientes propiedades:*

1. $f \circ \mathrm{eq}(f,g) = g \circ \mathrm{eq}(f,g)$.
2. (Propiedad universal del igualador) *Para cualquier conjunto bien ordenado* $\mathbf{X}$ *y cada morfismo* $h\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$*, si* $f \circ h = g \circ h$*, entonces hay un único morfismo* $t\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Eq}(f,g)$ *tal que* $\mathrm{eq}(f,g) \circ t = h$.

La situación descrita por las condiciones anteriores la expresamos diagramáticamente como:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{X} \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
\mathbf{Eq}(f,g) \arrow[r, "\mathrm{eq}(f,g)"'] & \mathbf{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathbf{B}.
\end{tikzcd}
$$

Demostración. Sea $\mathbf{Eq}(f,g) = (\mathrm{Eq}(f,g), < \restriction \mathrm{Eq}(f,g))$, en el que $\mathrm{Eq}(f,g)$ es el igualador de las aplicaciones f y g, i.e., el subconjunto de A definido como:

$$\mathrm{Eq}(f,g) = \{\, a \in A \mid f(a) = g(a) \,\},$$

y $< \restriction \mathrm{Eq}(f,g)$ la restricción del buen orden sobre A a la parte $\mathrm{Eq}(f,g)$. Además, sea $\mathrm{eq}(f,g)$ la inclusión canónica de $\mathrm{Eq}(f,g)$ en A. Entonces es evidente que $f \circ \mathrm{eq}(f,g) = g \circ \mathrm{eq}(f,g)$.

Por otra parte, si $\mathbf{X}$ es un conjunto bien ordenado y $h\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$ un morfismo tal que $f \circ h = g \circ h$, entonces $\mathrm{Im}(h) \subseteq \mathrm{Eq}(f,g)$, luego, por la propiedad universal del subconjunto, hay una única aplicación $t\colon X \longrightarrow \mathrm{Eq}(f,g)$, definida como:

$$t \begin{cases} X \longrightarrow \mathrm{Eq}(f,g) \\ x \longmapsto h(x), \end{cases}$$

tal que $\mathrm{eq}(f,g) \circ t = h$. Además, t es un morfismo de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{Eq}(f,g)$ y el único con la propiedad de que $\mathrm{eq}(f,g) \circ t = h$.

□

En la proposición anterior hemos demostrado, para un par de morfismos, ambas con el mismo dominio y codominio, la existencia de al menos un par ordenado, formado por un conjunto bien ordenado y un morfismo desde el conjunto bien ordenado hasta el dominio de los morfismos dados, sujeto a cumplir un par de condiciones; pero no hemos afirmado que tal par sea absolutamente único. Demostramos a continuación que el par ordenado de la proposición anterior, es único, sólo, salvo isomorfismo.

Proposición 17.2.2. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos conjuntos bien ordenados y* $f, g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *dos morfismos.. Si un par ordenado* $(\mathbf{E}, e)$*, en el que* $\mathbf{E}$ *es un conjunto bien ordenado y* $e\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{A}$*, tiene las propiedades:*

1. $f \circ e = g \circ e$.
2. *Para cualquier conjunto bien ordenado* X *y cada morfismo* $h\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$*, si* $f \circ h = g \circ h$*, entonces hay un único morfismo* $u\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{E}$ *tal que* $e \circ u = h$.

Entonces hay un único isomorfismo $t\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{Eq}(f,g)$ *tal que el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{E} \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "e"] & \\
\mathbf{Eq}(f,g) \arrow[r, "\mathrm{eq}(f,g)"'] & \mathbf{A}
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Demostración. □

Ejercicio 17.2.3. Defínase el concepto de igualador para familias arbitrarias no vacías de morfismos entre dos conjuntos bien ordenados cualesquiera, al que denominamos el *multiigualador* de la familia en cuestión, y demuéstrese de tal multiigualador es único, salvo isomorfismo.

Proposición 17.2.4. *Si el diagrama de conjuntos bien ordenados y morfismos entre ellos:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "u"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "v"] \\
\mathbf{A}' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & \mathbf{B}'
\end{tikzcd}
$$

conmuta serialmente, i.e., si $v \circ f = f' \circ u$ *y* $v \circ g = g' \circ u$*, entonces hay un único morfismo* $\mathrm{Eq}(u,v)\colon \mathbf{Eq}(f,g) \longrightarrow \mathbf{Eq}(f',g')$ *tal que el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Eq}(f,g) \arrow[r, "\mathrm{eq}(f,g)"] \arrow[d, "\mathrm{Eq}(u,v)"'] & \mathbf{A} \arrow[d, "u"] \\
\mathbf{Eq}(f',g') \arrow[r, "\mathrm{eq}(f',g')"'] & \mathbf{A}'
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Demostración. □

17.3. Productos fibrados de morfismos. Nos proponemos demostrar a continuación que existe el producto fibrado de dos morfismos de conjuntos bien ordenados con el mismo codominio.

Proposición 17.3.1. *Sean* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ *y* $g\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ *dos morfismos de conjuntos bien ordenados con el mismo codominio. Entonces existe un par ordenado* $(\mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}, (\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1))$*, el* producto fibrado de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ sobre $\mathbf{C}$ relativo a f y g*, en el que* $\mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ *es un conjunto bien ordenado,* p_0 *un morfismo de* $\mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ *en* $\mathbf{A}$ *y* p_1 *un morfismo de* $\mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ *en* $\mathbf{B}$*, que tiene las siguientes propiedades:*

1. *El diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B} \arrow[r, "\mathrm{p}_1"] \arrow[d, "\mathrm{p}_0"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, "f"'] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

2. (Propiedad universal del producto fibrado) *Para cada conjunto bien ordenado* $\mathbf{X}$ *y cualesquiera morfismos* $u\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$ *y* $v\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{B}$ *si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, "f"'] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único morfismo $t\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ *tal que los dos triángulos del diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\ & \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B} \arrow[r, "\mathrm{p}_1"] \arrow[d, "\mathrm{p}_0"] & \mathbf{B} \\ & \mathbf{A} & \end{tikzcd}$$

conmutan.

La situación descrita por las condiciones anteriores la expresamos diagramáticamente como:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\ & \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B} \arrow[r, "\mathrm{p}_1"] \arrow[d, "\mathrm{p}_0"] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \\ & \mathbf{A} \arrow[r, "f"'] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $\mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B} = (A \times_C B, <)$, en el que $A \times_C B$ es el producto fibrado de los conjuntos A y B sobre el conjunto C, relativo a las aplicaciones f y g, i.e., el subconjunto de $A \times B$ definido como:

$$A \times_C B = \{\, (a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b) \,\},$$

y $<$ la relación binaria sobre $A \times_C B$ definida como:

$$(a, b) < (a', b') \quad \text{si y sólo si} \quad a < a' \text{ y } \ b < b'.$$

Entonces se cumple que $\mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ es un conjunto bien ordenado. La irreflexividad y la transitividad son evidentes. Por otra parte, si (a, b) y $(a', b') \in A \times_C B$, entonces $f(a) = g(b)$ y $f(a') = g(b')$ y de este hecho, junto a que, en particular, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son conjuntos linealmente ordenados, deducimos que $(a, b) < (a', b')$ o $(a', b') < (a, b)$ o $(a, b) = (a', b')$. Por último, si D es una parte no vacía de $A \times_C B$, entonces el par (x_0, y_0), en el que x_0 es el mínimo de la parte no vacía $\{\, a \in A \mid \exists b \in B\, (\, (a, b) \in D\,) \,\}$ de A, e y_0 el mínimo de la parte no vacía $\{\, b \in B \mid (x_0, b) \in D \,\}$ de B, es tal que, para cada $(a, b) \in A \times_C B$, $(x_0, y_0) \leq (a, b)$. También tenemos que $\mathrm{p}_0 = \mathrm{pr}_{\mathbf{A}} \restriction \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$

y $\mathrm{p}_1 = \mathrm{pr}_{\mathbf{B}} \upharpoonright \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ son morfismos de $\mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$ y en $\mathbf{B}$, respectivamente, en virtud de sus propias definiciones. Es evidente que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B} \arrow[r, "\mathrm{p}_1"] \arrow[d, "\mathrm{p}_0"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, "f"'] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Por último, si $\mathbf{X}$ es un conjunto bien ordenado y $u\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$, $v\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{B}$ dos morfismos tales que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, "f"'] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces, por la propiedad universal del producto, hay una única aplicación $\langle u, v\rangle : X \longrightarrow \prod B$ tal que $\mathrm{pr}_{\mathbf{A}} \circ \langle u, v\rangle = u$ y $\mathrm{pr}_{\mathbf{B}} \circ \langle u, v\rangle = v$ y, por cumplirse que $f \circ u = g \circ v$, tenemos que $\mathrm{Im}(\langle u, v\rangle) \subseteq A \times_C B$, luego, por la propiedad universal del subconjunto, hay una única aplicación t de X en $A \times_C B$ tal que $\mathrm{in}_{A\times_C B} \circ t = \langle u, v\rangle$. Además, t es un morfismo y se cumple que los dos triángulos del diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\ & \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B} \arrow[r, "\mathrm{p}_1"] \arrow[d, "\mathrm{p}_0"'] & \mathbf{B} \\ & \mathbf{A} & \end{tikzcd}$$

conmutan. Dejamos, como ejercicio, la demostración de que t es el único morfismo de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ con las propiedades indicadas. □

Cuando digamos de un diagrama de la forma:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, "f"'] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

que es un *cuadrado cartesiano*, ello significará que el conjunto bien ordenado $\mathbf{X}$ es un producto fibrado de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ sobre $\mathbf{C}$ relativo a f y g, y que u y v son los morfismos estructurales.

En la proposición anterior hemos demostrado, para un par de morfismos, ambos con el mismo codominio, la existencia de al menos un par ordenado, formado por un conjunto bien ordenado y dos morfismos desde el conjunto bien ordenado hasta los dominios de los morfismos dados, sujeto a cumplir un par de condiciones; pero no hemos afirmado que tal par sea absolutamente único. Demostramos a continuación que el par ordenado de la proposición anterior, es único, sólo, salvo (un único) isomorfismo.

Proposición 17.3.2. *Sean* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ *y* $g\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ *dos morfismos con el mismo codominio. Si un par ordenado* $(\mathbf{E}, (p, q))$*, en el que* $\mathbf{E}$ *es un conjunto bien ordenado,* $p\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{A}$ *y* $q\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{B}$ *tiene las propiedades:*

1. *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, "f"'] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

   conmuta.

2. *Para cualesquiera morfismos* $u\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$ *y* $v\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{B}$*, desde un conjunto bien ordenado* $\mathbf{X}$*, si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, "f"'] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

   conmuta, entonces hay un único morfismo $t\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{E}$ *tal que los dos triángulos del diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\ & \mathbf{E} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & \mathbf{B} \\ & \mathbf{A} & \end{tikzcd}$$

   conmutan.

Entonces hay un único isomorfismo $t\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ *tal que los dos triángulos del diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E} \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, bend left, "q"] \arrow[ddr, bend right, "p"'] & & \\ & \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B} \arrow[r, "\mathrm{p}_1"] \arrow[d, "\mathrm{p}_0"] & \mathbf{B} \\ & \mathbf{A} & \end{tikzcd}$$

conmutan.

Demostración. $\square$

17.4. Coproductos de conjuntos bien ordenados. Nos proponemos demostrar que, a diferencia de lo que ocurre con los conceptos de conjunto bien ordenado final y producto de una familia arbitraria de conjuntos bien ordenados, que son vacuos, i.e., bajo los cuales no cae ningún conjunto bien ordenado, sí que existe un conjunto bien ordenado inicial, i.e., tal que desde él hasta cualquier otro conjunto bien ordenado hay un único morfismo, que además es absolutamente único, y también el coproducto de una familia de conjuntos bien ordenados cuyo conjunto de índices esté, a su vez, bien ordenado.

Proposición 17.4.1. *El par $(\varnothing, \varnothing)$ es un conjunto bien ordenado inicial.*

Vemos pues que el conjunto bien ordenado $(\varnothing, \varnothing)$ tiene, respecto de los conjuntos bien ordenados, las mismas propiedades que tiene el conjunto vacío, respecto de los conjuntos. Sin embargo, como vimos antes, para los conjuntos bien ordenados no existe, a diferencia de lo que ocurre para los conjuntos, uno que sea final.

Proposición 17.4.2. *Sea* $\mathbf{I}$ *un conjunto de índices bien ordenado y* $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ *una familia de conjuntos bien ordenados. Entonces hay un par ordenado* $\big(\coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i, (\mathrm{in}_i)_{i\in I}\big)$*, en el que* $\coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i$*, el* coproducto *de* $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$*, es un conjunto bien ordenado y, para cada* $i \in I$*,* in_i*, la* inclusión canónica i-ésima *del coproducto, es un morfismo de* $\mathbf{A}_i$ *en* $\coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i$*, que tiene la siguiente* propiedad universal*:*

Para cada par ordenado $(\mathbf{X}, (f_i)_{i\in I})$*, en el que* $\mathbf{X}$ *es un conjunto bien ordenado y, para cada* $i \in I$*,* $f_i \colon \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{X}$*, hay un único morfismo*

$$[f_i]_{i\in I} : \coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{X}$$

tal que, para cada $i \in I$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_i \arrow[r, "\mathrm{in}_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & \coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i \arrow[d, "{[f_i]_{i\in I}}"] \\ & \mathbf{X} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Sea $\coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i = (\coprod_{i\in I} A_i, <)$, en el que $\coprod_{i\in I} A_i$ es el coproducto de la familia de conjuntos $(A_i)_{i\in I}$, i.e., el conjunto definido como:

$$\textstyle\coprod_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} A_i \times \{i\},$$

y $<$ la relación binaria sobre $\coprod_{i\in I} A_i$ definida, para cada $(x, i), (y, j) \in \coprod_{i\in I} A_i$, como:

$$(x, i) < (y, j) \quad \text{si y sólo si} \quad (\, i = j \quad \text{y} \quad x <_i y\,) \quad \text{o} \quad i < j,$$

siendo $<_i$ el buen orden sobre A_i.

Entonces se cumple que $\coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ es un conjunto bien ordenado y que, para cada $i \in I$, in_i, la aplicación de A_i en $\coprod_{i\in I} A_i$ definida como:

$$\mathrm{in}_i \begin{cases} A_i & \longrightarrow \coprod_{i\in I} A_i \\ x & \longmapsto (x, i), \end{cases}$$

es un morfismo de $\mathbf{A}_i$ en $\coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i$.

Por último, dado un par ordenado $(\mathbf{X}, (f_i)_{i\in I})$, en el que $\mathbf{X}$ es un conjunto bien ordenado y, para cada $i \in I$, $f_i \colon \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{X}$, sea $[f_i]_{i\in I}$ la aplicación de $\coprod_{i\in I} A_i$ en X definida como:

$$[f_i]_{i\in I} \begin{cases} \coprod_{i\in I} A_i & \longrightarrow X \\ (x, i) & \longmapsto f_i(x). \end{cases}$$

Es evidente que, para cada $i \in I$, $[f_i]_{i\in I}$ es un morfismo de $\coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ en $\mathbf{X}$ y que $[f_i]_{i\in I} \circ \mathrm{in}_i = f_i$. Con ello queda demostrada la existencia de al menos un morfismo de $\coprod_{i\in I}\mathbf{A}_i$ en $\mathbf{X}$ con la propiedad indicada. Dejamos, como ejercicio, la demostración de la unicidad. $\square$

Proposición 17.4.3. *Sea* $\mathbf{I}$ *un conjunto bien ordenado y* $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ *una familia de conjuntos bien ordenados. Entonces*

1. *Para cualesquiera* $i,j\in I$*, si* $i\neq j$*, entonces el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r, "\alpha_{\mathbf{A}_j}"] \arrow[d, "\alpha_{\mathbf{A}_i}"'] & \mathbf{A}_j \arrow[d, "\mathrm{in}_j"] \\ \mathbf{A}_i \arrow[r, "\mathrm{in}_i"'] & \coprod_{i\in I}\mathbf{A}_i \end{tikzcd}$$

es cartesiano.

2. *Para cada morfismo* $f\colon \mathbf{X}\longrightarrow \coprod_{i\in I}\mathbf{A}_i$*, se cumple que el par* $(\mathbf{X},(q_i)_{i\in I})$*, siendo, para cada* $i\in I$*,* q_i *el morfismo de* $\mathbf{A}_i\times_{\coprod_{i\in I}\mathbf{A}_i}\mathbf{X}$ *en* $\mathbf{X}$ *que junto al morfismo* p_i *de* $\mathbf{A}_i\times_{\coprod_{i\in I}\mathbf{A}_i}\mathbf{X}$ *en* X_i*, dan lugar al producto fibrado*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_i\times_{\coprod_{i\in I}\mathbf{A}_i}\mathbf{X} \arrow[r, "q_i"] \arrow[d, "p_i"'] & \mathbf{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathbf{A}_i \arrow[r, "\mathrm{in}_{\mathbf{A}_i}"'] & \coprod_{i\in I}\mathbf{A}_i \end{tikzcd}$$

es un coproducto de la familia $(\mathbf{A}_i\times_{\coprod_{i\in I}\mathbf{A}_i}\mathbf{X})_{i\in I}$

Demostración. $\square$

Ejercicio 17.4.4. Demuéstrese que no existe el coproducto de todos los conjuntos bien ordenados.

En la Proposición 17.4.2 hemos demostrado, para una familia de conjuntos bien ordenados, la existencia de al menos un par ordenado, formado por un conjunto bien ordenado y una familia de morfismos desde cada uno de los conjuntos bien ordenados de la familia dada hasta el conjunto bien ordenado, sujeto a cumplir una cierta propiedad universal; pero, no hemos afirmado que tal par sea absolutamente único. De hecho, el conjunto $\bigcup_{i\in I}\{i\}\times A_i$ junto con el buen orden obvio y las inclusiones evidentes, tiene, respecto de los conjuntos bien ordenados y los morfismos, la misma propiedad universal que $\bigcup_{i\in I}A_i\times\{i\}$ junto con el buen orden anterior y sus inclusiones.

Demostraremos en lo que sigue, entre otras cosas, que el par ordenado de la proposición anterior, es único salvo isomorfismo.

Proposición 17.4.5. *Sea* $\mathbf{I}$ *un conjunto bien ordenado y* $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ *una familia de conjuntos bien ordenados. Entonces tenemos que:*

1. *Para cualesquiera morfismos $f, g\colon \coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{X}$, con $\mathbf{X}$ bien ordenado, si, para cada $i \in I$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_i \arrow[r, "\mathrm{in}_i"] \arrow[rr, bend left, "f \circ \mathrm{in}_i"] \arrow[rr, bend right, "g \circ \mathrm{in}_i"'] & \coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathbf{X}
\end{tikzcd}$$

   conmuta, entonces $f = g$, i.e., la familia de morfismos $(\mathrm{in}_i)_{i\in I}$ es colectivamente epimórfica.

2. *Para cada par ordenado $(\mathbf{X}, (f_i)_{i\in I})$, en el que $\mathbf{X}$ sea un conjunto bien ordenado y, para cada $i \in I$, $f_i\colon \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{X}$, y para cada morfismo $t\colon A \longrightarrow \coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i$, si, para cada $i \in I$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_i \arrow[rr, "\mathrm{in}_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & & \coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i \\
& \mathbf{X} \arrow[ur, "t"'] &
\end{tikzcd}$$

   conmuta, entonces t es un isomorfismo, i.e., la familia de morfismos $(\mathrm{in}_i \mid i \in I)$ es extremal.

Demostración. □

Corolario 17.4.6. *Sea $\mathbf{I}$ un conjunto bien ordenado y $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos bien ordenados. Si un par ordenado $(\mathbf{C}, (q_i)_{i\in I})$, en el que $\mathbf{C}$ es un conjunto bien ordenado y, para cada $i \in I$, $q_i\colon \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{C}$, tiene la propiedad de que para cada par ordenado $(\mathbf{X}, (f_i)_{i\in I})$, en el que $\mathbf{X}$ es un conjunto bien ordenado y, para cada $i \in I$, $f_i\colon \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{X}$, hay un único morfismo $h\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{X}$ tal que, para cada $i \in I$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_i \arrow[r, "q_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & \mathbf{C} \arrow[d, "h"] \\
& \mathbf{X}
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único isomorfismo t de $\coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ en $\mathbf{C}$ tal que, para cada $i \in I$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_i \arrow[r, "\mathrm{in}_i"] \arrow[dr, "q_i"'] & \coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i \arrow[d, "t"] \\
& \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposición 17.4.7. *Sean $\mathbf{I}$, $\mathbf{\Lambda}$ y $(\mathbf{J}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ conjuntos bien ordenados con $\mathbf{I} = \coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{J}_\lambda$ y $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos linealmente ordenados. Entonces se cumple que $\prod^{\mathrm{lex}}_{\lambda\in\Lambda} \prod^{\mathrm{lex}}_{i\in J_\lambda} \mathbf{A}_i \cong \prod^{\mathrm{lex}}_{i\in I} \mathbf{A}_i$.*

Demostración. □

Proposición 17.4.8. *Sea* $\mathbf{I}$ *un conjunto bien ordenado y* $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ *una familia de conjuntos bien ordenados. Entonces:*

1. *Si* $I=\varnothing$*, entonces* $\coprod_{i\in I}\mathbf{A}_i=(\varnothing,\varnothing)$*, i.e., el coproducto de la familia vacía de conjuntos bien ordenados es el conjunto bien ordenado inicial.*
2. *Si* $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ *es tal que, para cada* $i,j\in I$*,* $\mathbf{A}_i=\mathbf{A}_j$*, y denotamos por* $\mathbf{A}$ *el valor común, entonces*
$$\textstyle\coprod_{i\in I}\mathbf{A}_i=\mathbf{A}\times^{\mathrm{alex}}\mathbf{I},$$
y al único morfismo de $\mathbf{A}\times^{\mathrm{alex}}\mathbf{I}$ *en* $\mathbf{A}$*, determinado por* $(\mathrm{id}_{\mathbf{A}})_{i\in I}$*, lo denominamos el morfismo* codiagonal *de* $\mathbf{A}\times^{\mathrm{alex}}\mathbf{I}$ *en* $\mathbf{A}$ *y lo denotamos por* $\mathrm{cdg}_{\mathbf{I},\mathbf{A}}$*; además, si* $A\neq\varnothing$*, entonces* $\mathrm{cdg}_{\mathbf{I},\mathbf{A}}$ *es un morfismo sobreyectivo. Así pues, para cada* $i\in I$*, el diagrama:*
$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "\mathrm{in}_i"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathbf{A}}"'] & \mathbf{A}\times^{\mathrm{alex}}\mathbf{I} \arrow[d, "\mathrm{cdg}_{\mathbf{I},\mathbf{A}}"] \\
 & \mathbf{A}
\end{tikzcd}$$
conmuta.
3. *Si* I *es un conjunto final y su único miembro es* i*, entonces*
$$\textstyle\coprod_{i\in I}\mathbf{A}_i\cong\mathbf{A}_i.$$
4. *Si para cada* $i\in I$*,* A_i *es vacío, entonces* $\coprod_{i\in I}\mathbf{A}_i$ *es vacío.*
5. *Si* $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ *es una familia de conjuntos bien ordenados dos a dos disjuntos, entonces*
$$\textstyle\coprod_{i\in I}\mathbf{A}_i\cong\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i.$$

Demostración. □

Para establecer la proposición que sigue, convenimos en denotar por $(\mathbf{A}_j)_{j\in J}$ la restricción de $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ a J, si $J\subseteq I$, que no es más que la composición de in_J y de $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$. Además, usaremos in_j para denotar la proyección canónica j-ésima, del coproducto de cualquier familia de conjuntos para la cual se cumpla que j sea miembro del conjunto de índices de la misma.

Proposición 17.4.9. *Sea* $\mathbf{I}$ *un conjunto bien ordenado,* $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ *una familia de conjuntos bien ordenados y* $J,K,L\subseteq I$ *tales que* $K\subseteq J$ *y* $L\subseteq K$*. Entonces:*

1. $\mathrm{in}_{J,J}=\mathrm{id}_{\coprod_{j\in J}\mathbf{A}_j}$*, siendo* $\mathrm{in}_{J,J}$ *el único endomorfismo* $[\mathrm{in}_j]_{j\in J}$ *del conjunto bien ordenado* $\coprod_{j\in J}\mathbf{A}_j$ *tal que, para cada* $j\in J$*, el diagrama:*
$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_j \arrow[r, "\mathrm{in}_j"] \arrow[dr, "\mathrm{in}_j"'] & \coprod_{j\in J}\mathbf{A}_j \arrow[d, "\mathrm{in}_{J,J}"] \\
 & \coprod_{j\in J}\mathbf{A}_j
\end{tikzcd}$$
conmuta.

2. $\mathrm{in}_{L,J} = \mathrm{in}_{K,J} \circ \mathrm{in}_{L,K}$, *i.e., el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{l\in L} \mathbf{A}_l \arrow[r, "\mathrm{in}_{L,K}"] \arrow[dr, "\mathrm{in}_{L,J}"'] & \coprod_{k\in K} \mathbf{A}_k \arrow[d, "\mathrm{in}_{K,J}"] \\
& \coprod_{j\in J} \mathbf{A}_j
\end{tikzcd}$$

conmuta; siendo, para $J, K \subseteq I$, *con* $K \subseteq J$, $\mathrm{in}_{K,J}$ *el único morfismo del conjunto bien ordenado* $\coprod_{k\in K} \mathbf{A}_k$ *en el conjunto bien ordenado* $\coprod_{j\in J} \mathbf{A}_j$ *tal que, para cada* $k \in K$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_k \arrow[r, "\mathrm{in}_k"] \arrow[dr, "\mathrm{in}_k"'] & \coprod_{k\in K} \mathbf{A}_k \arrow[d, "\mathrm{in}_{K,J}"] \\
& \coprod_{j\in J} \mathbf{A}_j
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposición 17.4.10. *Sean* $\mathbf{I}$ *un conjunto bien ordenado,* $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ *y* $(\mathbf{B}_i)_{i\in I}$ *dos familias de conjuntos bien ordenados y* $(f_i)_{i\in I}$ *una familia de morfismos en la que, para cada* $i \in I$, $f_i\colon \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{B}_i$. *Entonces hay un único morfismo, denotado por* $\coprod_{i\in I} f_i$ *y denominado el* coproducto *de* $(f_i)_{i\in I}$, *del conjunto bien ordenado* $\coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ *en el conjunto bien ordenado* $\coprod_{i\in I} \mathbf{B}_i$ *tal que, para cada* $i \in I$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_i \arrow[r, "\mathrm{in}_i"] \arrow[d, "f_i"'] & \coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i \arrow[d, "\coprod_{i\in I} f_i"] \\
\mathbf{B}_i \arrow[r, "\mathrm{in}_i"'] & \coprod_{i\in I} \mathbf{B}_i
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposición 17.4.11. *Sean* $\mathbf{I}$ *un conjunto bien ordenado,* $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$, $(\mathbf{B}_i)_{i\in I}$ *y* $(\mathbf{C}_i)_{i\in I}$ *tres familias de conjuntos bien ordenados y* $(f_i)_{i\in I}$ *y* $(g_i)_{i\in I}$ *dos familias de morfismos tales que, para cada* $i \in I$, $f_i\colon \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{B}_i$ *y* $g_i\colon \mathbf{B}_i \longrightarrow \mathbf{C}_i$. *Entonces:*

1. $\coprod_{i\in I} \mathrm{id}_{\mathbf{A}_i} = \mathrm{id}_{\coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i}$.
2. $\coprod_{i\in I} g_i \circ \coprod_{i\in I} f_i = \coprod_{i\in I} g_i \circ f_i$.

Demostración. □

Proposición 17.4.12. *Sean* $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$ *tres conjuntos bien ordenados,* $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$, $(\mathbf{B}_j)_{j\in J}$ *y* $(\mathbf{C}_k)_{k\in K}$ *tres familias de conjuntos bien ordenados y* $(f_j)_{j\in J}$ *y* $(g_k)_{k\in K}$ *dos familias de morfismos tales que* $f_j\colon \mathbf{B}_j \longrightarrow \coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ *y* $g_k\colon \mathbf{C}_k \longrightarrow \coprod_{j\in J} \mathbf{B}_j$, *para cada* $j \in J$ *y cada* $k \in K$, *respectivamente. Entonces el único morfismo* $[[f_j]_{j\in J} \circ g_k]_{k\in K}$ *del conjunto bien ordenado* $\coprod_{k\in K} \mathbf{C}_k$ *en el conjunto bien ordenado* $\coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ *tal que,* *para cada $k \in K$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}_k \arrow[r, "\mathrm{in}_k"] \arrow[dr, "{[f_j]_{j\in J} \circ g_k}"'] & \coprod_{k\in K} \mathbf{C}_k \arrow[d, "{[[f_j]_{j\in J} \circ g_k]_{k\in K}}"] \\
& \coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i
\end{tikzcd}$$

conmuta, coincide con la composición del único morfismo $[g_k]_{k\in K}$ del conjunto bien ordenado $\coprod_{k\in K} \mathbf{C}_k$ en el conjunto bien ordenado $\coprod_{j\in J} \mathbf{B}_j$ y del único morfismo $[f_j]_{j\in J}$ del conjunto bien ordenado $\coprod_{j\in J} \mathbf{B}_j$ en el conjunto bien ordenado $\coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ tales que, resp., para cada $k \in K$ y cada $j \in J$, los dos triángulos del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}_k \arrow[r, "\mathrm{in}_k"] \arrow[dr, "g_k"'] & \coprod_{k\in K} \mathbf{C}_k \arrow[d, "{[g_k]_{k\in K}}"] \\
\mathbf{B}_j \arrow[r, "\mathrm{in}_j"] \arrow[dr, "f_j"'] & \coprod_{j\in J} \mathbf{B}_j \arrow[d, "{[f_j]_{j\in J}}"] \\
& \coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i
\end{tikzcd}$$

conmutan. Así pues, se cumple que:

$$[f_j]_{j\in J} \circ [g_k]_{k\in K} = [[f_j]_{j\in J} \circ g_k]_{k\in K}$$

Demostración. □

Proposición 17.4.13 (Asociatividad del coproducto)**.** *Sea $\mathbf{I}$ un conjunto bien ordenado, $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos bien ordenados, $\mathbf{L}$ un conjunto bien ordenado y $(J_l)_{l\in L}$ una familia de subconjuntos de I tal que $\bigcup_{l\in L} J_l = I$ y, para cada $l, m \in L$, si $l \neq m$, entonces $J_l \cap J_m = \varnothing$. Entonces*

$$\textstyle\coprod_{i\in I}\mathbf{A}_i \cong \coprod_{l\in L}\coprod_{i\in J_l}\mathbf{A}_i.$$

Demostración. □

Proposición 17.4.14. *Sea $\mathbf{I}$ un conjunto bien ordenado y $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos bien ordenados, con $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}$, para cada $i \in I$. Entonces $\coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i \cong \mathbf{A} \times^{\mathrm{alex}} \mathbf{I}$.*

Demostración. □

17.5. Sistemas inductivos de conjuntos linealmente ordenados. A continuación consideramos el concepto de sistema inductivo dirigido superiormente de conjuntos linealmente ordenados y bien ordenados.

Definición 17.5.1. Un *sistema inductivo dirigido superiormente de conjuntos linealmente ordenados*, abreviado como *sistema inductivo d.s. de conjuntos linealmente ordenados* es un par ordenado $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ en el que $\mathbf{S}$ es un conjunto preordenado dirigido superiormente y $\boldsymbol{\mathcal{A}} = ((\mathbf{A}_s \mid s \in S), (a_{s,s'} \mid (s, s') \in \preceq))$ tal que:

1. Para cada $s \in S$, $\mathbf{A}_s$ es un conjunto linealmente ordenado.
2. Para cada $(s, s') \in \preceq$, $a_{s,s'} \colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{A}_{s'}$ es un morfismo, i.e., una aplicación estrictamente isótona.
3. Para cada $s \in S$, $a_{s,s} = \mathrm{id}_{\mathbf{A}_s}$.

4. Para cada $s, s', s'' \in S$, si $(s, s') \in \preceq$ y $(s', s'') \in \preceq$, entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[r, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "a_{s,s''}"'] & \mathbf{A}_{s'} \arrow[d, "a_{s',s''}"] \\ & \mathbf{A}_{s''}, \end{tikzcd}$$

   conmuta.

A los morfismos $a_{s,s'} \colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{A}_{s'}$ los denominamos los *morfismos de transición* del sistema inductivo d.s. de conjuntos linealmente ordenados $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$. En el caso de que los $\mathbf{A}_s$ sean conjuntos bien ordenados, hablaremos, como es natural, de un *sistema inductivo dirigido superiormente de conjuntos bien ordenados*.

Damos a continuación algunos ejemplos de sistemas inductivos d.s. de conjuntos linealmente, o bien, ordenados. De ellos el primero es fundamental, porque, posteriormente, demostraremos que cualquier conjunto linealmente, o bien, ordenado, es el límite inductivo de tal tipo de sistemas inductivos

Ejemplo 17.5.2. Sea $\mathbf{A}$ un conjunto linealmente, o bien, ordenado. Entonces se cumple que el par

$$(\mathbf{Sub}_f(A), ((\mathbf{n}_X)_{X \subseteq_{\mathrm{fin}} A}, (a_{X,Y})_{X \subseteq Y})),$$

en el que, para cada subconjunto finito X de A, $\mathbf{n}_X = (\mathrm{card}(X), <)$ y, para cada $X \subseteq Y \subseteq_{\mathrm{fin}} A$, $a_{X,Y}$ es el morfismo de $\mathbf{n}_X$ en $\mathbf{n}_Y$ que a un $i \in n_X$ le asigna $a_{X,Y}(i) = j$ si y sólo si el i-ésimo elemento de $\mathbf{X} = (X, <_X)$, en el orden creciente, es el j-ésimo elemento de $\mathbf{Y} = (Y, <_Y)$, en el orden creciente, es un sistema inductivo d.s. de conjuntos linealmente, o bien, ordenados.

Se pueden definir de manera más formal los morfismos de transición, eligiendo, por cada $X \subseteq_{\mathrm{fin}} A$, un isomorfismo φ_X de $\mathbf{n}_X$ en $\mathbf{X}$ y definiendo entonces $a_{X,Y}$ como $\varphi_Y^{-1} \circ \mathrm{in}_{\mathbf{X},\mathbf{Y}} \circ \varphi_X$.

Ejemplo 17.5.3. Sean I un conjunto y $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos linealmente, o bien, ordenados indexada por I. Entonces se cumple que

$$(\mathbf{Sub}_f(I), ((\mathbf{A}_J)_{J \in \mathrm{Sub}_f(I)}, (\mathrm{in}_{K,J})_{K \subseteq J})),$$

siendo, para cada $J \in \mathrm{Sub}_f(I)$, $\mathbf{A}_J = \coprod_{i \in J} \mathbf{A}_i$, es un sistema inductivo d.s. de conjuntos linealmente, o bien, ordenados.

Ejemplo 17.5.4. Sean S un conjunto, $\mathbf{A}$ un conjunto linealmente, o bien, ordenado y $(X_s)_{s \in S}$ una familia de subconjuntos de $\mathbf{A}$ tal que, para cualesquiera $s, s' \in S$ exista un $s'' \in S$ de modo que $X_s \cup X_{s'} \subseteq X_{s''}$. Entonces, considerando sobre S el preorden $\preceq$ definido como $s \preceq s'$ si y sólo si $X_s \subseteq X_{s'}$, tenemos que $(\mathbf{S}, ((\mathbf{X}_s)_{s \in S}, (\mathrm{in}_{\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_{s'}})_{s \preceq s'}))$ es un sistema inductivo d.s. de conjuntos linealmente, o bien, ordenados.

17.6. Límites inductivos de los sistemas inductivos. Una vez disponemos del concepto de sistema inductivo d.s. de conjuntos linealmente ordenados, vamos a asignarles a tales sistemas inductivos d.s. ciertos conjuntos linealmente ordenados en los que estarán encajados todos los conjuntos linealmente ordenados del sistema inductivo d.s. y eso de manera optimal. Además, estableceremos una condición necesaria y suficiente para que exista el límite inductivo de un sistema inductivo d.s. de conjuntos bien ordenados.

Proposición 17.6.1. *Sea* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *un sistema inductivo d.s. de conjuntos linealmente ordenados. Entonces hay un par ordenado* $(\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}), (a_s)_{s \in S})$*, el* límite inductivo *de* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$*, en el que* $\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *es un conjunto linealmente ordenado y, para* *cada* $s \in S$, a_s, *la* inclusión canónica *s-ésima, es un morfismo de* $\mathbf{A}_s$ *en* $\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$, *tal que:*

1. *Para cada* $(s, s') \in \preceq$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "a_s"'] & & \mathbf{A}_{s'} \arrow[dl, "a_{s'}"] \\ & \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) & \end{tikzcd}$$

   conmuta.

2. *Para cada par ordenado* $(\mathbf{L}, (l_s \mid s \in S))$ *en el que, para cada* $s \in S$, $l_s \colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{L}$, *si, para cada* $(s, s') \in \preceq$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "l_s"'] & & \mathbf{A}_{s'} \arrow[dl, "l_{s'}"] \\ & \mathbf{L} & \end{tikzcd}$$

   conmuta, entonces hay un único morfismo $u \colon \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow \mathbf{L}$ *tal que, para cada* $s \in S$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[d, "u"] \\ & \mathbf{L} \end{tikzcd}$$

   conmuta.

La situación descrita por las condiciones anteriores la expresamos diagramáticamente como:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "a_s"] \arrow[ddr, bend right, "l_s"'] & & \mathbf{A}_{s'} \arrow[dl, "a_{s'}"'] \arrow[ddl, bend left, "l_{s'}"] \\ & \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[d, "u"] & \\ & \mathbf{L} & \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ el par $(\varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A}), <)$, en el que $\varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ es el conjunto subyacente del límite inductivo del sistema inductivo d.s. de conjuntos $(\mathbf{S}, \mathcal{A})$, i.e., el conjunto cociente $\coprod_{s \in S} A_s / \mathrm{R}_{(\mathbf{S}, \mathcal{A})}$, del coproducto de la familia de conjuntos $(A_s)_{s \in S}$, entre $\mathrm{R}_{(\mathbf{S}, \mathcal{A})}$, que es la relación de equivalencia sobre $\coprod_{s \in S} A_s$ definida, para $(x, s), (x', s') \coprod_{s \in S} A_s$, como $(x, s) \equiv (x', s')\ (\text{mód } \mathrm{R}_{(\mathbf{S}, \mathcal{A})})$ si y sólo si hay un $s'' \in S$ tal que $s, s' \leq s''$ y $a_{s,s''}(x) = a_{s',s''}(x')$), y $<$ la relación binaria sobre $\varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ definida, para cualesquiera $[(x, s)], [(x', s')] \in \varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A})$, como:

$$[(x, s)] < [(x', s')] \quad \text{si y sólo si} \quad a_{s,s''}(x) <_{s''} a_{s',s''}(x'),$$

siendo s'' cualquier elemento de S posterior a s y a s' y $<_{s''}$ el orden lineal sobre $A_{s''}$. Entonces, siendo, para cada $s \in S$, a_s la aplicación obtenida componiendo las aplicaciones in_s y $\mathrm{pr}_{\mathrm{R}_{(\mathbf{S},\mathcal{A})}}$, se cumple que el par ordenado $(\varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}),(a_s)_{s\in S})$ cumple las condiciones de la proposición. Además, para cada $(s,s')\in\preceq$, tenemos que $a_{s'}\circ a_{s,s'}=a_s$. En efecto, si $x\in A_s$, entonces $(x,s)\equiv(a_{s,s'}(x),s')\pmod{\mathrm{R}_{(\mathbf{S},\mathcal{A})}}$, luego $a_{s'}(a_{s,s'}(x))=a_s(x)$, por consiguiente $a_{s'}\circ a_{s,s'}=a_s$, i.e., el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "a_s"'] & & \mathbf{A}_{s'} \arrow[dl, "a_{s'}"] \\
& \varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}) &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Por último, si un par ordenado $(\mathbf{L},(l_s)_{s\in S})$, arbitrario, pero fijo, en el que, para cada $s\in S$, $l_s\colon\mathbf{A}_s\longrightarrow\mathbf{L}$, es tal que, para cada $(s,s')\in\preceq$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "l_s"'] & & \mathbf{A}_{s'} \arrow[dl, "l_{s'}"] \\
& \mathbf{L} &
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces, en virtud de la propiedad universal del coproducto, hay un único morfismo $[l_s]^{\flat}_{s\in S}:\coprod(\mathbf{A}_s)_{s\in S}\longrightarrow\mathbf{L}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_s \arrow[r, "\mathrm{in}_{\mathbf{A}_s}"] \arrow[dr, "l_s"'] & \coprod(\mathbf{A}_s\mid s\in S) \arrow[d, "{[l_s]^{\flat}_{s\in S}}"] \\
& \mathbf{L}
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, para cada $(s,s')\in\leq$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
[l_s]^{\flat}_{s\in S}\circ f\circ\mathrm{in}_{s,s'} &= [l_s]^{\flat}_{s\in S}\circ\mathrm{in}_s\\
&= l_s\\
&= l_{s'}\circ a_{s,s'}\\
&= [l_s]^{\flat}_{s\in S}\circ\mathrm{in}_{s'}\circ a_{s,s'}\\
&= [l_s]^{\flat}_{s\in S}\circ g\circ\mathrm{in}_{s,s'}.
\end{aligned}$$

Luego $[l_s]^{\flat}_{s\in S}\circ f=[l_s]^{\flat}_{s\in S}\circ g$, por lo tanto, en virtud de la propiedad universal del coigualador, podemos afirmar que existe un único morfismo $u\colon\varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})\longrightarrow\mathbf{L}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\coprod(\mathbf{A}_s\mid s\in S) \arrow[r, "\mathrm{ceq}(f,g)"] \arrow[dr, "{[l_s]^{\flat}_{s\in S}}"'] & \varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[d, "u"] \\
& \mathbf{L}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Ahora bien, puesto que, para cada $s \in S$, el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_s \arrow[r, "\mathrm{in}_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \coprod(\mathbf{A}_s \mid s \in S) \arrow[d, "{[l_s]^\flat_{s\in S}}"] \\
& \mathbf{L}
\end{tikzcd}
$$

conmuta, también, para cada $s \in S$, el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_s \arrow[r, "\mathrm{in}_s"] \arrow[dr, "l_s"'] \arrow[rr, bend left, "a_s"] & \coprod(\mathbf{A}_s \mid s \in S) \arrow[r, "\mathrm{ceq}(f,g)"] \arrow[d, "{[l_s]^\flat_{s\in S}}"] & \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[dl, bend left, "u"] \\
& \mathbf{L} &
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Por consiguiente hay al menos un morfismo u de $\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ en $\mathbf{L}$ tal que, para cada $s \in S$, el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[d, "u"] \\
& \mathbf{L}
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Dejamos, como ejercicio, la demostración de que hay a lo sumo un morfismo u de $\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ en $\mathbf{L}$ tal que, para cada $s \in S$, $u \circ a_s = l_s$.

$\square$

Podemos resumir el proceso seguido en la demostración de la proposición anterior en los siguientes términos:

- En primer lugar, nos olvidamos de la estructura relacional del sistema inductivo d.s. de conjuntos linealmente ordenados dado $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$, y consideramos el sistema inductivo d.s. de conjuntos
$$(\mathbf{S}, ((A_s)_{s\in S}, (a_{s,s'})_{(s,s')\in\leq})).$$
- A continuación, consideramos el límite inductivo del sistema inductivo d.s. de conjuntos $(\mathbf{S}, ((A_s)_{s\in S}, (a_{s,s'})_{(s,s')\in\leq}))$.
- Por último, dotamos al conjunto $(\mathbf{S}, ((A_s)_{s\in S}, (a_{s,s'})_{(s,s')\in\leq}))$ del orden lineal adecuado, y comprobamos que el resultado cumple las condiciones de la proposición.

En la proposición anterior hemos demostrado, para un sistema inductivo d.s. de conjuntos linealmente ordenados, la existencia de al menos un par ordenado, formado por un conjunto linealmente ordenado y una familia de morfismos desde cada uno de los conjuntos linealmente ordenados de la familia de conjuntos linealmente ordenados subyacente a la segunda coordenada del sistema inductivo d.s., hasta el conjunto linealmente ordenado, sujeto a cumplir, por una parte, una condición de compatibilidad respecto de los morfismos subyacentes a la segunda coordenada del sistema inductivo d.s., y, por otra, una cierta propiedad universal; pero, no hemos afirmado que tal par sea absolutamente único.

Demostraremos en lo que sigue, entre otras cosas, que el par ordenado de la proposición anterior, es único salvo isomorfismo.

Proposición 17.6.2. *Sea* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *un sistema inductivo d.s. de conjuntos linealmente ordenados. Entonces:*

1. *Para cada par de morfismos* $f, g\colon \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow \mathbf{Y}$*, si, para cada* $s \in S$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[r, "a_s"] \arrow[rr, bend left, "f \circ a_s"] \arrow[rr, bend right, "g \circ a_s"'] & \mathbf{A}_s \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathbf{Y} \end{tikzcd}$$

   conmuta, entonces $f = g$*, i.e., la familia* $(a_s)_{s \in S}$ *es* colectivamente epimórfica.

2. *Para cada par ordenado* $(\mathbf{L}, (l_s)_{s \in S})$*, en el que* $\mathbf{L}$ *sea un conjunto linealmente ordenado y, para cada* $s \in S$*,* $l_s\colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{L}$ *un morfismo, si para cada* $(s, s') \in \preceq$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "l_s"'] & & \mathbf{A}_{s'} \arrow[dl, "l_{s'}"] \\ & \mathbf{L} & \end{tikzcd}$$

   conmuta, y para cada morfismo $t\colon \mathbf{L} \longrightarrow \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$*, si, para cada* $s \in S$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[rr, "a_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & & \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \\ & \mathbf{L} \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd}$$

   conmuta, entonces t *es un isomorfismo, i.e., la familia* $(a_s)_{s \in S}$ *es* extremal.

Demostración. □

Corolario 17.6.3. *Sea* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *un sistema inductivo d.s. de conjuntos linealmente ordenados Si un par ordenado* $(\mathbf{Q}, (q_s)_{s \in S})$*, en el que* $\mathbf{Q}$ *es un conjunto linealmente ordenado y, para cada* $s \in S$*,* $q_s\colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{Q}$ *un morfismo, cumple que:*

1. *Para cada* $(s, s') \in \preceq$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "q_s"'] & & \mathbf{A}_{s'} \arrow[dl, "q_{s'}"] \\ & \mathbf{Q} & \end{tikzcd}$$

   conmuta.

2. *Para cada par ordenado* $(\mathbf{L},(l_s)_{s\in S})$, *en el que* $\mathbf{L}$ *es un conjunto linealmente ordenado y, para cada* $s \in S$, $l_s\colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{L}$ *un morfismo, si, para cada* $(s,s') \in \preceq$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "l_s"'] & & \mathbf{A}_{s'} \arrow[dl, "l_{s'}"] \\ & \mathbf{L} & \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único morfismo $u\colon \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{L}$ *tal que, para cada* $s \in S$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[r, "q_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \mathbf{Q} \arrow[d, "u"] \\ & \mathbf{L} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Entonces hay un único isomorfismo t *de* $\varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$ *en* $\mathbf{Q}$ *tal que, para cada* $s \in S$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[dr, "q_s"'] & \varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[d, "u"] \\ & \mathbf{Q} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Establecemos a continuación una condición necesaria y suficiente para que un sistema inductivo d.s. de conjuntos bien ordenados, tenga un límite inductivo que sea bien ordenado. Pero antes demostramos que el dominio de cualquier morfismo desde un conjunto linealmente ordenado hasta un conjunto bien ordenado, es él mismo un conjunto bien ordenado.

Lema 17.6.4. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto linealmente ordenado,* $\mathbf{B}$ *un conjunto bien ordenado y* f *un morfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$. *Entonces* $\mathbf{A}$ *es un conjunto bien ordenado.*

Demostración. □

Proposición 17.6.5. *Sea* $(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$ *un sistema inductivo d.s. de conjuntos bien ordenados y* $\mathbf{A}$ *el límite inductivo de dicho sistema cuando se le considera como un sistema inductivo d.s. de conjuntos linealmente ordenados. Entonces una condición necesaria y suficiente para que exista el límite inductivo del sistema inductivo d.s. de conjuntos bien ordenados* $(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$, *i.e., para que* $\varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$ *sea un conjunto bien ordenado, es que* $\mathbf{A}$ *sea un conjunto bien ordenado.*

Demostración. □

Proposición 17.6.6. *Sea* $(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$ *un sistema inductivo d.s. de conjuntos linealmente ordenados y* $(\mathbf{L},(l_s)_{s\in S})$ *tal que, para cada* $s \in S$, $l_s\colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{L}$ *sea un morfismo y, para cada* $(s,s') \in \preceq$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "l_s"'] & & \mathbf{A}_{s'} \arrow[dl, "l_{s'}"] \\ & \mathbf{L} & \end{tikzcd}$$

conmute. Entonces para el único morfismo $u\colon \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow \mathbf{L}$ *tal que, para cada* $s \in S$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[d, "u"] \\ & \mathbf{L} \end{tikzcd}$$

conmuta, tenemos que una condición necesaria y suficiente para que u *sea sobreyectivo es que* $L = \bigcup_{s\in S} \mathrm{Im}(l_s)$*.*

Demostración. Puesto que un morfismo es sobreyectivo si y sólo si su imagen coincide con su codominio, u será sobreyectivo precisamente si $u[\varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A})] = L$. Ahora bien, $\varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A}) = \bigcup_{s\in S} \mathrm{Im}(a_s)$, luego u será sobreyectivo precisamente si $u[\bigcup_{s\in S} \mathrm{Im}(a_s)] = L$, i.e., si y sólo si $\bigcup_{s\in S} \mathrm{Im}(u \circ a_s) = L$, pero, para cada $s \in S$, $u \circ a_s = l_s$, luego u será sobreyectivo cuando y sólo cuando $\bigcup_{s\in S} \mathrm{Im}(l_s) = L$. □

Proposición 17.6.7. *Sea* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *un sistema inductivo d.s. de conjuntos linealmente ordenados. Una condición suficiente para que* $a_s\colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *sea sobreyectivo, sea cual sea* $s \in S$*, es que, para cada* $(s, s') \in\preceq$*, se cumpla que* $a_{s,s'}\colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{A}_{s'}$ *sea sobreyectivo.*

Demostración. □

Corolario 17.6.8. *Sea* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *un sistema inductivo d.s. de conjuntos linealmente ordenados. Una condición suficiente para que* $a_s\colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *sea un isomorfismo, sea cual sea* $s \in S$*, es que, para cada* $(s, s') \in\preceq$*,* $a_{s,s'}\colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{A}_{s'}$ *lo sea.*

Demostración. □

Como una aplicación del concepto de límite inductivo de un sistema inductivo d.s. de conjuntos linealmente ordenados, consideramos a continuación el concepto de ultraproducto de una familia de conjuntos linealmente ordenados relativo a un ultrafiltro, sobre el conjunto de índices de la familia en cuestión.

Proposición 17.6.9. *Sea* I *un conjunto,* $\mathcal{F}$ *un ultrafiltro sobre* I*,* $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ *una familia de conjuntos linealmente ordenados y* $\leq$ *la relación sobre* $\mathcal{F}$ *definida como*

$$\leq = \{\, (J, K) \in \mathcal{F}^2 \mid K \subseteq J \,\}.$$

Entonces $\left(\left(\prod_{j\in J} \mathbf{A}_j\right)_{J\in\mathcal{F}}, (\mathrm{p}_{J,K})_{(J,K)\in\leq}\right)$*, o* $((\mathbf{A}_J)_{J\in\mathcal{F}}, (\mathrm{p}_{J,K})_{(J,K)\in\leq})$*, en el que, para cada* $J \in \mathcal{F}$*,* $\mathbf{A}_J = (A_J, <_J)$ *es el conjunto ordenado cuyo conjunto subyacente es* $\prod_{j\in J} A_j$ *y en el que, para cada* $x, y \in \prod_{j\in J} A_j$*,* $x <_J y$ *si y sólo si, para cada* $i \in J$*,* $x_i <_i y_i$*, es un sistema inductivo d.s. de conjuntos* ordenados. *Al límite inductivo de tal sistema inductivo d.s. de conjuntos ordenados convenimos en denotarlo por* $(\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\mathcal{F}, (\mathrm{p}_{\mathcal{F},J})_{J\in\mathcal{F}})$*, y a* $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\mathcal{F}$ *en denominarlo el* ultraproducto *de* $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ *relativo al ultrafiltro* $\mathcal{F}$ *sobre* I*, siendo, para cada* $J \in \mathcal{F}$*,* $\mathrm{p}_{\mathcal{F},J}$ *la aplicación isótona canónica de* $\mathbf{A}_J$ *en* $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\mathcal{F}$*. Entonces se cumple que el conjunto ordenado* $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\mathcal{F}$ *está linealmente ordenado.*

Además, $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\mathcal{F}$ *es isomorfo al conjunto linealmente ordenado*

$$\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}} = (\prod_{i\in I}A_i/\equiv_{\mathcal{F}}, <),$$

en el que la relación estructural $<$ *es la definida como:*

$$<= \{\,(x,y)\in \left(\prod_{i\in I}A_i\right)^2 \mid \{\, i\in I \mid (\, x_i <_i y_i\,)\,\} \in \mathcal{F}\,\},$$

y siendo $\equiv_{\mathcal{F}}$ *la equivalencia sobre* $\prod_{i\in I}A_i$ *definida como:*

$$\equiv_{\mathcal{F}} = \{\,(x,y)\in \left(\prod_{i\in I}A_i\right)^2 \mid \mathrm{Eq}(x,y)\in\mathcal{F}\,\}.$$

En particular, si, para cada $i\in I$, $\mathbf{A}_i=\mathbf{A}$, *entonces al límite inductivo del sistema inductivo* $((\mathbf{A}^J)_{J\in\mathcal{F}}, (\mathrm{p}_{J,K})_{(J,K)\in\leq})$, *lo denominamos la* ultrapotencia *de* $(\mathbf{A})_{i\in I}$ *relativa al ultrafiltro* $\mathcal{F}$ *sobre* I *y al conjunto ordenado subyacente lo denotamos por* $\mathbf{A}^I/\mathcal{F}$.

Proposición 17.6.10. *Sea* I *un conjunto y* $\mathcal{F}$ *un ultrafiltro sobre* I. *Entonces*

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{LO}^I & \xrightarrow{\mathrm{Upr}_{I,\mathcal{F}}} & \mathbf{LO} \\
(\mathbf{A}_i)_{i\in I} & & \prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\mathcal{F} \\
{\scriptstyle (f_i)_{i\in I}}\big\downarrow & \longmapsto & \big\downarrow{\scriptstyle \prod_{i\in I} f_i/\mathcal{F}} \\
(\mathbf{B}_i)_{i\in I} & & \prod_{i\in I}\mathbf{B}_i/\mathcal{F},
\end{array}$$

es un functor, el functor de formación de ultraproductos de conjuntos linealmente ordenados, para el par $(I,\mathcal{F})$.

Del mismo modo se define el functor de formación de ultrapotencias de conjuntos linealmente ordenados, para el par $(I,\mathcal{F})$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{LO} & \xrightarrow{\mathrm{Upw}_{I,\mathcal{F}}} & \mathbf{LO} \\
\mathbf{A} & & \mathbf{A}^I/\mathcal{F} \\
{\scriptstyle f}\big\downarrow & \longmapsto & \big\downarrow{\scriptstyle f^I/\mathcal{F}} \\
\mathbf{B} & & \mathbf{B}^I/\mathcal{F}.
\end{array}$$

Además, hay una transformación natural $\delta^{I,\mathcal{F}}$ *del functor identidad de* $\mathbf{LO}$ *en el functor de formación de ultrapotencias* $\mathrm{Upw}_{I,\mathcal{F}}$

Demostración. □

Lema 17.6.11. *Sea* I *un conjunto,* $K\subseteq J\subseteq I$ *y* $\mathcal{F}$ *un ultrafiltro sobre* I. *Si* $J\in\mathcal{F}$, *entonces*

$$\mathcal{F}\!\restriction\! J = \{\, J\cap F \mid F\in\mathcal{F}\,\},$$

es un ultrafiltro sobre J. *Además,* $\mathcal{F}\!\restriction\! J\subseteq\mathcal{F}$ *y si* $K\in\mathcal{F}$, *entonces* $K\in\mathcal{F}\!\restriction\! J$ *y*

$$(\mathcal{F}\!\restriction\! J)\!\restriction\! K = \mathcal{F}\!\restriction\! K.$$

Demostración. □

Proposición 17.6.12. *Sea* I *un conjunto,* $K\subseteq J\subseteq I$, $\mathcal{F}$ *un ultrafiltro sobre* I *y supongamos que* $K,J\in\mathcal{F}$. *Si* $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ *es una familia de conjuntos linealmente ordenados, entonces hay tres morfismos, unívocamente determinados,* u_J *de* $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\mathcal{F}$

en $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\mathcal{F}{\restriction}J$*,* u_K *de* $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\mathcal{F}$ *en* $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\mathcal{F}{\restriction}K$ *y* $u_{J,K}$ *de* $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\mathcal{F}{\restriction}J$ *en* $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\mathcal{F}{\restriction}K$ *tales que el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{I,J}"'] \arrow[dd, bend right=60, "\mathrm{pr}_{I,K}"'] & \prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\mathcal{F} \arrow[d, "u_J"] \arrow[dd, bend left=60, "u_K"] \\
\prod_{j\in J}\mathbf{A}_j \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathcal{F}\restriction J}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{J,K}"'] & \prod_{j\in J}\mathbf{A}_j/\mathcal{F}{\restriction}J \arrow[d, "u_{J,K}"] \\
\prod_{k\in K}\mathbf{A}_k \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathcal{F}\restriction K}"] & \prod_{k\in K}\mathbf{A}_k/\mathcal{F}{\restriction}K
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Además, los tres morfismos son isomorfismos.

17.7. Morfismos inductivos entre sistemas inductivos.

Definición 17.7.1. Si $(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$ y $(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}})$ son dos sistemas inductivos d.s. de conjuntos linealmente ordenados, un *morfismo inductivo* de $(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$ en $(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}})$ es un triplo ordenado $((\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}),\Phi,(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}}))$, abreviado como Φ y denotado por

$$\Phi\colon (\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}}),$$

en el que $\Phi = (\varphi, f)$, con $\varphi\colon \mathbf{S}\longrightarrow\mathbf{T}$ y $f = (f_s)_{s\in S}$, siendo, para cada $s\in S$, $f_s\colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{B}_{\varphi(s)}$, tal que, para cada $(s,s')\in\preceq$, el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_s \arrow[r, "f_s"] \arrow[d, "a_{s,s'}"'] & \mathbf{B}_{\varphi(s)} \arrow[d, "b_{\varphi(s),\varphi(s')}"] \\
\mathbf{A}_{s'} \arrow[r, "f_{s'}"'] & \mathbf{B}_{\varphi(s')}
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Además, $(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{B}}_\varphi)$ es el sistema inductivo d.s. de conjuntos linealmente ordenados para el que la coordenada s-ésima de la primera componente de $\boldsymbol{\mathcal{B}}_\varphi$ es $\mathbf{B}_{\varphi(s)}$, para cada $s\in S$, y la coordenada (s,s')-ésima de la segunda componente de $\boldsymbol{\mathcal{B}}_\varphi$ es $b_{\varphi(s),\varphi(s')}$, para cada $(s,s')\in\preceq$.

Proposición 17.7.2.

1. *Si* $(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$ *es un sistema inductivo d.s. de conjuntos linealmente ordenados, entonces*
$$\mathrm{id}_{(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})} = (\mathrm{id}_{\mathbf{S}},\mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}),$$
siendo $\mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = (\mathrm{id}_{\mathbf{A}_s}\mid s\in S)$*, es un endomorfismo inductivo de* $(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$*, el morfismo inductivo* identidad *de* $(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$.
2. *Si* $(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$*,* $(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}})$ *y* $(\mathbf{U},\boldsymbol{\mathcal{C}})$ *son tres sistemas inductivos d.s. de conjuntos linealmente ordenados,* $\Phi = (\varphi, f)$ *un morfismo inductivo del primero en el segundo y* $\Psi = (\psi, g)$ *uno del segundo en el tercero, entonces*
$$\Psi\circ\Phi = (\psi\circ\varphi, g_\varphi\circ f),$$
siendo g_φ *la familia indexada por* S*, cuya coordenada* s*-ésima es:*
$$g_{\varphi(s)} : B_{\varphi(s)} \longrightarrow C_{\psi(\varphi(s))},$$
y, por lo tanto, siendo $g_\varphi\circ f$ *la familia de homomorfismos, indexada por* S*, cuya coordenada* s*-ésima es:*
$$\mathbf{A}_s \xrightarrow{\ f_s\ } \mathbf{B}_{\varphi(s)} \xrightarrow{\ g_{\varphi(s)}\ } \mathbf{C}_{\psi(\varphi(s))},$$

es un morfismo inductivo de $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *en* $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\mathcal{C}})$*, el morfismo inductivo* composición *de ambos.*

Demostración. Puesto que la primera parte es sencilla de demostrar, nos limitamos a demostrar la segunda.

Por ser $\Phi = (\varphi, f)$ y $\Psi = (\psi, g)$ morfismos inductivos, los diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_s \arrow[r, "f_s"] \arrow[d, "a_{s,s'}"'] & \mathbf{B}_{\varphi(s)} \arrow[d, "b_{\varphi(s),\varphi(s')}"] \\
\mathbf{A}_{s'} \arrow[r, "f_{s'}"'] & \mathbf{B}_{\varphi(s')}
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{B}_t \arrow[r, "g_t"] \arrow[d, "b_{t,t'}"'] & \mathbf{C}_{\psi(t)} \arrow[d, "c_{\psi(t),\psi(t')}"] \\
\mathbf{B}_{t'} \arrow[r, "g_{t'}"'] & \mathbf{C}_{\psi(t')}
\end{tikzcd}
$$

conmutan. Por consiguiente el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_s \arrow[r, "g_{\varphi(s)} \circ f_s"] \arrow[d, "a_{s,s'}"'] & \mathbf{C}_{\psi(\varphi(s))} \arrow[d, "c_{\psi(\varphi(s)),\psi(\varphi(s'))}"] \\
\mathbf{A}_{s'} \arrow[r, "g_{\varphi(s')} \circ f_{s'}"'] & \mathbf{C}_{\psi(\varphi(s'))}
\end{tikzcd}
$$

también conmuta. □

Proposición 17.7.3. *Sea* Φ *un morfismo inductivo de* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *en* $(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$*,* Ψ *uno de* $(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ *en* $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\mathcal{C}})$ *y* Ξ *uno de* $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\mathcal{C}})$ *en* $(\mathbf{V}, \boldsymbol{\mathcal{D}})$*. Entonces:*

1. (Asociatividad)*. El diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Psi \circ \Phi"'] \arrow[drr, bend left=60, "(\Xi \circ \Psi) \circ \Phi"] \arrow[drr, bend right=60, "\Xi \circ (\Psi \circ \Phi)"'] & (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}}) \arrow[d, "\Psi"'] \arrow[dr, "\Xi \circ \Psi"] & \\
& (\mathbf{U}, \boldsymbol{\mathcal{C}}) \arrow[r, "\Xi"'] & (\mathbf{V}, \boldsymbol{\mathcal{D}})
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

2. (Neutros)*. Los diagramas:*

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[r, "\mathrm{id}_{(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})}"] \arrow[dr, "\Phi"'] & (\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[d, "\Phi"] \\
& (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Phi"'] & (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}}) \arrow[d, "\mathrm{id}_{(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})}"] \\
& (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})
\end{tikzcd}
$$

conmutan.

Demostración. □

17.8. Límites inductivos de los morfismos inductivos.

Proposición 17.8.1. *Si* $\Phi\colon (\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}})$ *es un morfismo inductivo, entonces hay un único morfismo*

$$\varinjlim \Phi\colon \varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow \varinjlim(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}}),$$

denominado el límite inductivo *de* Φ *tal que, para cada* $s \in S$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[d, "f_s"'] & \varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[d, "\varinjlim \Phi"] \\
\mathbf{B}_{\varphi(s)} \arrow[r, "b_{\varphi(s)}"'] & \varinjlim(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}})
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[d, "f_s"'] & \varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[d, "\coprod f"] \arrow[dd, bend left=60, "\varinjlim \Phi"] \\
\mathbf{B}_{\varphi(s)} \arrow[r, "b_{\varphi(s)}"'] \arrow[dr, "b_{\varphi(s)}"'] & \varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{B}}_\varphi) \arrow[d, "\mathrm{i}_\varphi"] \\
& \varinjlim(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}})
\end{tikzcd}$$

conmuta, siendo i_φ *el único morfismo de* $\varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{B}}_\varphi)$ *en* $\varinjlim(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}})$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\coprod(\mathbf{B}_{\varphi(s)} \mid s \in S) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{C}(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{B}}_\varphi)}"] \arrow[d, "\mathrm{in}_\varphi"'] & \varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{B}}_\varphi) \arrow[d, "\mathrm{i}_\varphi"] \\
\coprod(B_t \mid t \in T) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{C}(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}})}"'] & \varinjlim(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}})
\end{tikzcd}$$

conmuta, y, denotándola por el mismo símbolo, $\coprod f$ *el único morfismo de* $\varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$ *en* $\varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{B}}_\varphi)$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\coprod(\mathbf{A}_s \mid s \in S) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{C}(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})}"] \arrow[d, "\coprod f"'] & \varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[d, "\coprod f"] \\
\coprod(\mathbf{B}_{\varphi(s)} \mid s \in S) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{C}(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{B}}_\varphi)}"'] & \varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{B}}_\varphi)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Así que

$$\varinjlim \Phi = \mathrm{i}_\varphi \circ \coprod f.$$

Demostración. □

Proposición 17.8.2. *Sean* $\Phi\colon (\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}})$ *y* $\Psi\colon (\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}}) \longrightarrow (\mathbf{U},\boldsymbol{\mathcal{C}})$ *dos morfismos inductivos. Entonces:*

1. $\varinjlim \mathrm{id}_{(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})} = \mathrm{id}_{\varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})}$.
2. $\varinjlim(\Psi \circ \Phi) = \varinjlim \Psi \circ \varinjlim \Phi$.

Además, si $\Phi = (\varphi, f)$ *y* $\Psi = (\psi, g)$*, entonces el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[rr, "\varinjlim \Phi"] \arrow[rrrr, bend left, "\varinjlim \Psi \circ \Phi"] \arrow[dr, "\coprod f"] \arrow[ddrr, bend right, "\coprod (g_\varphi \circ f)"'] & & \varinjlim(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}}) \arrow[rr, "\varinjlim \Psi"] \arrow[dr, "\coprod g"] & & \varinjlim(\mathbf{U},\boldsymbol{\mathcal{C}}) \\
& \varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{B}}_\varphi) \arrow[ur, "\mathrm{i}_\varphi"] \arrow[rr, "\varinjlim(\varphi, g_\varphi)"] \arrow[dr, "\coprod g_\varphi"] & & \varinjlim(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{C}}_\psi) \arrow[ur, "\mathrm{i}_\psi"] & \\
& & \varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\psi\circ\varphi}) \arrow[ur, "\mathrm{i}_\varphi"] \arrow[uurr, bend right, "\mathrm{i}_{\psi\circ\varphi}"'] & &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposición 17.8.3. *Sea* $\Phi\colon (\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}})$ *un morfismo inductivo. Si hay un subconjunto* S' *de* S *que es cofinal en* $\mathbf{S}$*,* $\varphi[S']$ *es cofinal en* $\mathbf{T}$ *y, para cada* $s' \in S'$*,* $f_{s'}\colon \mathbf{A}_{s'} \longrightarrow \mathbf{B}_{\varphi(s')}$ *es un isomorfismo, entonces* $\varinjlim \Phi$ *es un isomorfismo.*

Demostración. □

Antes de enunciar un corolario de la proposición anterior, convenimos que si $(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$ es un sistema inductivo d.s. de conjuntos linealmente ordenados y S' un subconjunto de S tal que, siendo $\mathbf{S}'$ el par ordenado $(S', \preceq \cap (S' \times S'))$, $\mathbf{S}'$ es, a su vez, un conjunto preordenado dirigido superiormente, entonces $(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}){\restriction}S'$, la *restricción de* $(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$ *a* $\mathbf{S}'$, denota el sistema inductivo d.s. de conjuntos linealmente ordenados cuya primera coordenada es $(S', \preceq \cap (S' \times S'))$ y cuya segunda coordenada tiene como primera componente la restricción de $(\mathbf{A}_s \mid s \in S)$ a S' y como segunda componente la restricción de $(a_{s,s'} \mid (s,s') \in \preceq)$ a $\preceq \cap (S' \times S')$.

Corolario 17.8.4. *Si* $(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$ *es un sistema inductivo d.s. de conjuntos linealmente ordenados y* S' *es un subconjunto cofinal de* $\mathbf{S}$*, con* $\mathbf{S}$ *dirigido superiormente, entonces para el morfismo inductivo canónico* $\Phi = (\mathrm{in}_{\mathbf{S}'}, (\mathrm{id}_{\mathbf{A}_{s'}} \mid s' \in S'))$ *de* $(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}){\restriction}S'$ *en* $(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$ *se cumple que* $\varinjlim \Phi$ *es un isomorfismo.*

Demostración. □

18. Ordinales y cardinales.

18.1. El principio de la definición por recursión transfinita. En un conjunto bien ordenado $(A, <)$, si no es vacío, cabe distinguir, en principio, tres tipos de elementos: El mínimo, los elementos sucesores y los elementos límites.

Definición 18.1.1. Sea $(A, <)$ un conjunto bien ordenado y $a \in A$. Decimos que a es un elemento *límite* de $(A, <)$ si $\downarrow_{<} a$, el conjunto de los predecesores estrictos de a, no tiene un máximo, i.e., si, para cada $b \in A$, si $b < a$, entonces hay un $c \in A$ tal que $b < c < a$ (de modo que entre a y b hay una infinidad de elementos de A). Denotamos por $\mathrm{Lim}(A, <)$ el conjunto de los elementos límites de $(A, <)$. A todos los elementos de A que no sean ni el primer elemento de $(A, <)$ ni elementos límites, los denominamos elementos *sucesores* de $(A, <)$, y a la totalidad de ellos la denotamos por $\mathrm{Suc}(A, <)$.

Con los axiomas hasta ahora enunciados, no podemos afirmar que los conjuntos que se obtengan como resultado de la aplicación de un cierto procedimiento (de carácter funcional) a los elementos de un conjunto dado, puedan reunirse en un todo para formar un nuevo conjunto. Así, por ejemplo, partiendo del conjunto de los números naturales, dado por el axioma del conjunto infinito y no mediante ninguna construcción, podemos considerar el procedimiento consistente en asignar a cada número natural n el conjunto de las partes de $\mathbb{N}$ iterado n veces, i.e.,

$$\mathrm{Sub}^0(\mathbb{N}) = \mathbb{N}.$$
$$\mathrm{Sub}^{n+1}(\mathbb{N}) = \mathrm{Sub}(\mathrm{Sub}^n(\mathbb{N})).$$

Pero no podemos afirmar, con los axiomas hasta ahora disponibles, que exista el conjunto

$$\{\, \mathrm{Sub}^n(\mathbb{N}) \mid n \in \mathbb{N}\,\}.$$

Al respecto dice Skolem lo siguiente:

> It is easy to show that Zermelo's axiom system is not sufficient to provide a complete foundation for the usual theory of sets. I intend to show, for instance, that if M is an arbitrary set, it cannot be proved that M, $\mathrm{Sub}(M)$, $\mathrm{Sub}^2(M)$, $\ldots$, and so forth ad infinitum form a "set". To prove this I introduce the notion "level"of a set. Such sets as $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\ldots$ I call sets of the first level; they are characterized by the fact there exists nonnegative integer n such that $\bigcup^n M = \varnothing$. The set $\mathbb{N}$ already constitutes an example of a set that is not of the first level, since, for every n, $\bigcup^n \mathbb{N} = \mathbb{N}$. By a set M of the second level I mean one that is not itself of the first level but for which there exists a nonnegative integer n such that all elements of $\bigcup^n M$ are sets of the first level. Thus $\mathbb{N}$ is a set of the second level. In a similar way sets of the third, fourth, and higher levels can be defined. We need not discuss whether with every set a level number is associated.
>
> Now let a domain B in which the axioms hold be given. Then the sets in B that are of the first or second level form a partial domain B', and it is easy to see that the axioms must hold in B' too. The set $\mathbb{N}$ belongs to B'; if the infinite sequence $\mathbb{N}$, $\mathrm{Sub}(\mathbb{N})$, $\mathrm{Sub}^2(\mathbb{N})$, $\ldots$ formed a set M in B', however, it would clearly not be of the second level but of the third, and such a set just does not occur in B'. For it is evident that, for every n, $\bigcup^n M$ will contain the set $\mathbb{N}$ as an element. Thus the sets $\mathbb{N}$, $\mathrm{Sub}(\mathbb{N})$, $\mathrm{Sub}^2(\mathbb{N})$, $\ldots$ do not form the elements of a set in B'; even though Zermelo's axioms hold in B'; that is to say, the existence of such a set is not provable.

Ahora el esquema axiomático de reemplazo, en la versión de Skolem, según el cual la imagen directa de un conjunto bajo una condición funcional es un conjunto, nos permitirá, no sólo asegurar la existencia de conjuntos como el anterior, sino también establecer un principio de la definición por recursión transfinita, que generalizará al principio de la definición por recursión finita y, en definitiva, definir los números ordinales.

Ejercicio 18.1.2. Demuéstrese, haciendo uso del esquema axiomático de reemplazo, que para cada un conjunto A, existen los conjuntos

1. $\{\, \{x\} \mid x \in A\,\}$ y
2. $\{\, \mathrm{Sub}(x) \mid x \in A\,\}$.

El *principio de la definición por recursión transfinita*, abreviado como PDRT, nos indica la manera de construir recursivamente una función que esté definida sobre un conjunto bien ordenado, partiendo de una clase funcional

Teorema 18.1.3 (PDRT)**.** *Sea $\varphi(x, y, t_{[n]})$ una fórmula cuyas variables libres sean x, y, $t_0,\ldots, t_{n-1}$, $\mathbf{A} = (A, <)$ un conjunto bien ordenado y $t_0,\ldots, t_{n-1}$ conjuntos. Si, para cada x hay un único y tal que $\varphi(x, y, t_{[n]})$, entonces hay una única función F tal que:*

1. $\mathrm{Dom}(F) = A$.
2. *Para cada $a \in A$, $\varphi(F\!\restriction \downarrow_< a, F(a), t_{[n]})$.*

Demostración. Sea $a \in A$. Decimos que una función f está $\varphi(x, y, t_{[n]})$-construida hasta a si cumple las siguientes condiciones:

1. $\mathrm{Dom}(f) =\Downarrow_< a$.
2. Para cada $x \in \mathrm{Dom}(f)$, $\varphi(f\!\restriction \downarrow_< x, f(x), t_{[n]})$.

Demostramos en primer lugar que, dados $a, b \in A$, si $a \leq b$, f está $\varphi(x, y, t_{[n]})$-construida hasta a y g lo está hasta b, entonces, para cada $x \leq a$, $f(x) = g(x)$. Si no ocurriera lo dicho, existiría un primer $x \leq a$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Entonces $f\!\restriction \downarrow_< x = g\!\restriction \downarrow_< x$. Además, $\varphi(f\!\restriction \downarrow_< x, f(x), t_{[n]})$ y $\varphi(g\!\restriction \downarrow_< x, f(x), t_{[n]})$, luego, por la hipótesis sobre $\varphi(x, y, t_{[n]})$, $f(x) = g(x)$, lo cual es una contradicción. por consiguiente se cumple que, para cada $x \leq a$, $f(x) = g(x)$.

Tomando $a = b$, podemos afirmar que, para cada $a \in A$, hay a lo sumo una función f que está $\varphi(x, y, t_{[n]})$-construida hasta a.

A continuación, aplicando el esquema axiomático de reemplazo, obtenemos el conjunto $\mathcal{F}$ de todas las funciones f que están, para algún $a \in A$, $\varphi(x, y, t_{[n]})$-construidas hasta a:

$$\mathcal{F} = \{\, f \mid \exists a \in A\, (f \text{es una función } \varphi(x, y, t_{[n]}) - \text{construida hasta } a\,\}.$$

Sea $F = \bigcup \mathcal{F}$. Nos proponemos demostrar que F tiene las siguientes propiedades:

1. F es una función.
2. Para cada $x \in \mathrm{Dom}(F)$, $\varphi(F\!\restriction \downarrow_< x, F(x), t_{[n]})$.
3. $\mathrm{Dom}(F) = A$.
4. F es la única función que cumple las condiciones del teorema.

Demostramos en primer lugar, por inducción transfinita, que si G y H son dos funciones que cumplen las condiciones del teorema, entonces $G = H$. En efecto, sea $\mathrm{Eq}(G, H)$ el igualador de G y H, i.e., el conjunto $\mathrm{Eq}(G, H) = \{\, a \in A \mid G(a) = H(a)\,\}$ y, dado un $a \in A$, supongamos que $\downarrow_< a \subseteq \mathrm{Eq}(G, H)$. Entonces $G\!\restriction \downarrow_< a = H\!\restriction \downarrow_< a$. Además, $\varphi(G\!\restriction \downarrow_< a, G(a), t_{[n]})$ y $\varphi(H\!\restriction \downarrow_< a, H(a), t_{[n]})$, luego $G(a) = H(a)$. Así que $a \in \mathrm{Eq}(G, H)$. Por lo tanto $G = H$.

Ahora demostramos que $F = \bigcup \mathcal{F}$ es una función.

En efecto, si $(x, y), (x, z) \in F$, entonces, por una parte, hay un $a \in A$ y una función f $\varphi(x, y, t_{[n]})$-construida hasta a tal que $f(x) = y$ y, por otra, hay un $b \in A$ y una función g $\varphi(x, y, t_{[n]})$-construida hasta b tal que $g(x) = z$. Pero, por ser $\mathbf{A}$ un conjunto bien ordenado, $a \leq b$ o $b \leq a$, luego $y = z$.

Demostramos a continuación que, para cada $x \in \mathrm{Dom}(F)$, $\varphi(F\!\restriction \downarrow_< x, F(x), t_{[n]})$. En efecto, si $x \in \mathrm{Dom}(F)$, entonces hay una función $f \in \mathcal{F}$ tal que $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Luego $\varphi(f\!\restriction \downarrow_< x, f(x), t_{[n]})$. por lo tanto $f\!\restriction \downarrow_< x = F\!\restriction \downarrow_< x$, luego $f(x) = F(x)$. Demostramos, por último, que $\mathrm{Dom}(F) = A$. Si $\mathrm{Dom}(F) \subset A$, entonces hay un primer $a \in A - \mathrm{Dom}(F)$ Por lo tanto $\downarrow_< a \subseteq \mathrm{Dom}(F)$; de hecho $\downarrow_< a = \mathrm{Dom}(F)$. Sea y el único conjunto tal que $\varphi(F, y, t_{[n]})$ y sea $f = F \cup \{\, (a, y)\,\}$. Se cumple que f es una función que está $\varphi(x, y, t_{[n]})$-construida hasta a, luego $a \in \mathrm{Dom}(F)$. □

Ejercicio 18.1.4. Demuéstrese que existe el conjunto $\{\, \mathrm{Sub}^n(\mathbb{N}) \mid n \in \mathbb{N}\,\}$.

Como caso particular obtenemos el *principio de la definición por recursión de curso de valores transfinita*, abreviado como PDRCVT

Corolario 18.1.5 (PDRCVT)**.** *Sea* $\mathbf{A} = (A, <)$ *un conjunto bien ordenado, B un conjunto y G una función de* $\bigcup_{a \in A} B^{\downarrow_< a}$ *en B. Entonces hay una única función F de A en B tal que, para cada $a \in A$, $F(a) = G(F\restriction \downarrow_< a)$.*

Demostración. □

Teorema 18.1.6 (del isomorfismo de Mostowski)**.** *Si* $\mathbf{A} = (A, <)$ *es un conjunto bien ordenado, entonces hay un único par (f, B) tal que $\in_B$ es una buena ordenación sobre B, B es un conjunto $\in$-transitivo y f un isomorfismo de $(A, <)$ en $(B, \in_B)$. Al único conjunto B con las propiedades anteriores lo denominamos la* $\in$-imagen *del conjunto bien ordenado $(A, <)$*

Demostración. □

Proposición 18.1.7. *Sean* $\mathbf{A} = (A, <)$ *y* $\mathbf{A}' = (A', <)$ *dos conjunto bien ordenados. Una condición necesaria y suficiente para que* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{A}'$ *sean isomorfos es que tengan la misma $\in$-imagen.*

Demostración. □

18.2. Ordinales.

> ..., mientras que los números infinitos, si en absoluto han de ser concebibles de algún modo, tienen que constituir, *por su oposición a los números finitos*, una clase de números totalmente nueva, cuya índole depende enteramente de la naturaleza de las cosas y es objeto de investigación, no de nuestro arbitrio o de nuestros prejuicios.
>
> *G. Cantor.*

Para motivar la introducción de los números ordinales, recurrimos, parcialmente, a la exposición que hace Baire en [**?**].

Definimos, en primer lugar, una relación de orden sobre el conjunto de las sucesiones de números naturales. Si $S = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $T = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son dos sucesiones de números naturales, decimos que S es *más creciente* que T, y lo denotamos por $S > T$, si existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq m$, $a_n > b_n$. En general, dos sucesiones de números naturales distintas no son comparables. Sin embargo, dada una infinidad numerable de sucesiones de números naturales, siempre es posible construir otra que es más creciente que cada una de las sucesiones dadas.

Sea $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de sucesiones de números naturales, a la que convenimos en representar por la matriz:

$$
\begin{array}{rllllll}
S_0: & a_{0,0}, & a_{0,1}, & a_{0,2}, & \dots, & a_{0,p}, \dots, \\
S_1: & a_{1,0}, & a_{1,1}, & a_{1,2}, & \dots, & a_{1,p}, \dots, \\
\dots: & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \dots, \\
S_n: & a_{n,0}, & a_{n,1}, & a_{n,2}, & \dots, & a_{n,p}, \dots, \\
\dots: & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \dots,
\end{array}
$$

Entonces la sucesión $T = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cuyo n-ésimo término b_n es $\max\{\, a_{i,n} \mid i \in n + 1 \,\} + 1$ es más creciente que cada una de las S_n. Pero hemos de tener en cuenta que este no es el único procedimiento para obtener una sucesión que sea más creciente que cada una de las sucesiones de una familia numerable de sucesiones de números naturales dada. De hecho, en lo que sigue, usaremos otro procedimiento.

A partir de la familia de sucesiones de números naturales:

$$
\begin{array}{rllllll}
S_0: & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, \dots, \\
S_1: & 1, & 1, & 1, & \dots, & 1, \dots, \\
\dots: & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \dots, \\
S_n: & n, & n, & n, & \dots, & n, \dots, \\
\dots: & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \dots,
\end{array}
$$

obtenemos, por *diagonalización* la sucesión $(0, 1, 2, 3, \ldots)$, más creciente que cada una de las dadas y, dice Baire, al respecto:

> Pour rappeler que cette nouvelle suite est plus croissante qu'une quelconque des suites S_n, nous la désignerons par S_ω, considérant en un certain sens ω comme un indice supérieur à tous les entiers positifs.[2]

Para formar una sucesión más creciente que S_ω, es suficiente añadir una unidad a cada término de S_ω. A la sucesión así obtenida la denotamos por $S_{\omega+1}$ y es $(1, 2, 3, 4, \ldots)$. Sea, para $n \geq 0$, $S_{\omega+n}$ la sucesión $(0 + n, 1 + n, 2 + n, 3 + n, \ldots)$. Entonces tenemos la familia $(S_{\omega+n})_{n\in\mathbb{N}}$, representada por la matriz:

$$\begin{array}{rccccc}
S_\omega: & 0, & 1, & 2, & 3, & \ldots, \\
S_{\omega+1}: & 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, \\
S_{\omega+2}: & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots, \\
\ldots: & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
S_{\omega+n}: & n, & 1+n, & 2+n, & 3+n, & \ldots, \\
\ldots: & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots,
\end{array}$$

Las sucesiones $S_{\omega+n}$ son tales que $S_\omega < S_{\omega+1} < \ldots$. Entonces, aplicando a esta familia la diagonalización, obtenemos una sucesión de números naturales más creciente que cada una de las $S_{\omega+n}$. Tal sucesión es $(0, 2, 4, 6, \ldots)$, a la que denotamos por $S_{\omega\cdot 2}$. Si aplicamos una vez más el procedimiento seguido antes, obtenemos, en primer lugar la sucesión $(1, 3, 5, 7, \ldots)$, a la que denotamos por $S_{\omega\cdot 2+1}$, que es más creciente que $S_{\omega\cdot 2}$. Sea, para $n \geq 0$, $S_{\omega\cdot 2+n}$ la sucesión $(n, 2 + n, 4 + n, 6 + n, \ldots)$. Entonces tenemos la familia $(S_{\omega\cdot 2+n})_{n\in\mathbb{N}}$, representada por la matriz:

$$\begin{array}{rccccc}
S_{\omega\cdot 2}: & 0, & 2, & 4, & 6, & \ldots, \\
S_{\omega\cdot 2+1}: & 1, & 3, & 5, & 7, & \ldots, \\
S_{\omega\cdot 2+2}: & 2, & 4, & 6, & 8, & \ldots, \\
\ldots: & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
S_{\omega\cdot 2+n}: & n, & 2+n, & 4+n, & 6+n, & \ldots, \\
\ldots: & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots,
\end{array}$$

Las sucesiones $S_{\omega\cdot 2+n}$ son tales que $S_{\omega\cdot 2} < S_{\omega\cdot 2+1} < \ldots$. Entonces, aplicando a esta familia, una vez más, la diagonalización, obtenemos una sucesión de números naturales más creciente que cada una de las $S_{\omega\cdot 2+n}$. Tal sucesión es $(0, 3, 6, 9, \ldots)$, a la que denotamos por $S_{\omega\cdot 3}$.

En general, sea, para $m \geq 0$, $S_{\omega\cdot m} = (0 \cdot m, 1 \cdot m, 2 \cdot m, 3 \cdot m, \ldots)$ y $S_{\omega\cdot m+n} = (0\cdot m+n, 1\cdot m+n, 2\cdot m+n, 3\cdot m+n, \ldots)$. Ahora, a partir de la familia $(S_{\omega\cdot m})_{m\in\mathbb{N}}$, representada por la matriz:

$$\begin{array}{rccccc}
S_0: & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, \\
S_\omega: & 0, & 1, & 2, & 3, & \ldots, \\
S_{\omega\cdot 2}: & 0, & 2, & 4, & 6, & \ldots, \\
S_{\omega\cdot 3}: & 0, & 3, & 6, & 9, & \ldots, \\
\ldots: & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
S_{\omega\cdot m}: & 0, & 1\cdot m, & 2\cdot m, & 3\cdot m & \ldots, \\
\ldots: & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots,
\end{array}$$

obtenemos, diagonalizando, la sucesión $(0, 1, 4, 9, \ldots)$ más creciente que cada una de las dadas, a la que denotamos por S_{ω^2}. Dice, Baire, ahora:

> Pour l'introduction d'un élément nouveau, nous nous sommes placés dans deux sortes de cas. Dans un premier cas, étant donné un ensemble d'éléments dans lequel l'un d'eux a un rang supérieur à tous les autres, nous en ajoutons un nouveau qui a un rang supérieu à ce dernier. Dans le

[2]Siguiendo la práctica hoy standard, empezamos la numeración desde el cero. De modo que ω aparece como un índice superior a todos los números naturales.

> second cas, étant donné un ensemble d'éléments dans lequel aucun d'eux n'a un rang supérieur à tous les autres, nous en ajoutons un, ayant cette propriété.

De este manera resume Baire los tres principios que según Cantor gobiernan la generación de los números ordinales. El primero de los principios es el de la *adición de una unidad* a un número ya formado. Es así como, admitido el 0 se obtienen: 1, 2, 3, $\ldots$, y, admitido ω, se obtienen: $\omega+1$, $\omega+2$, $\ldots$, y, admitido $\omega\cdot 2$, se obtienen: $\omega\cdot 2+1$, $\omega\cdot 2+2$, $\ldots$, etc. El segundo de los principios generadores es el que suministra números ordinales del tipo de ω y $\omega\cdot 2$, y tal principio es el que, dada una sucesión arbitraria de números ordinales, ninguno de los cuales sea mayor que todos los demás, permite crear un nuevo número ordinal, que se concibe como el límite de la sucesión en cuestión. A los números generados haciendo uso del primer principio se les llama ordinales *sucesores* y a los generados mediante el segundo principio *límites*. El tercer principìo es un principio limitativo, porque exige que todo ordinal transfinito formado mediante los dos primeros principios tenga un conjunto de predecesores que sea equipotente a ω, el primer ordinal transfinito

Definición 18.2.1. Sea $\mathbf{A}=(A,<)$ un conjunto bien ordenado. El *número ordinal de* $\mathbf{A}$ es su $\in$-imagen. Un conjunto α es un *número ordinal* si es el número ordinal de algún conjunto bien ordenado, si tal es el caso lo denotamos por $\mathrm{On}(\alpha)$. Un *ordinal* es un par $(\alpha,\in_\alpha)$ en el que α es un número ordinal.

Proposición 18.2.2. *Sea α un conjunto. Entonces son equivalentes:*

1. *α es un número ordinal.*
2. *α es $\in$-transitivo y $\in_\alpha$ es una buena ordenación sobre α.*

Demostración. □

Proposición 18.2.3. *Sean α, β y γ tres números ordinales. Entonces:*

1. *Para cada $\delta\in\alpha$, δ es un número ordinal.*
2. *Si $\alpha\in\beta$ y $\beta\in\gamma$, entonces $\alpha\in\gamma$.*
3. *$\alpha\notin\alpha$.*
4. *O bien $\alpha\in\beta$, o bien $\alpha=\beta$, o bien $\beta\in\alpha$.*
5. *Cualquier conjunto no vacío de ordinales tiene un mínimo.*

Demostración. □

La proposición anterior demuestra que la clase de todos los ordinales es una clase $\in$-transitiva y que está bien ordenada por $\in$.

Corolario 18.2.4.

1. *Cualquier conjunto $\in$-transitivo formado por números ordinales es un número ordinal.*
2. *$\varnothing$ es un número ordinal.*
3. *Si α es un número ordinal, α^+ es un número ordinal y es el mínimo número ordinal posterior a α. Lo denotamos por $\alpha+1$ y lo denominamos el número ordinal* sucesor *del número ordinal α.*
4. *Si A es un conjunto de números ordinales, entonces $\bigcup A$ es un número ordinal. Además, hay un mínimo número ordinal α tal que, para cada $\beta\in A$, $\beta\in\alpha$. Al mínimo número ordinal con tal propiedad lo denotamos por $\mathrm{Sup}(A)$ y lo denominamos el* supremo *del conjunto de números ordinales A.*
5. *Si α y β son números ordinales, entonces $\alpha\in\beta$ si y sólo si $\alpha\subset\beta$.*
6. *Si α es un número ordinal, entonces $\alpha=\{\,\beta\in\alpha\mid \mathrm{On}(\beta)\,\}$.*
7. *Si A es un conjunto no vacío de números ordinales, entonces $\bigcap A$ es un número ordinal, $\bigcap A\in A$ y, para cada $\alpha\in A$, $\bigcap A\subseteq\alpha$.*

8. *Para cada número ordinal α, se cumple que no hay ningún número ordinal β tal que $\alpha \in \beta \in \alpha + 1$.*
9. *Sean α y β dos números ordinales, entonces $\alpha+1 = \beta+1$ si y sólo si $\alpha = \beta$.*

Demostración. □

Teorema 18.2.5 (Burali-Forti). [3] *No hay ningún conjunto al que pertenezcan todos los números ordinales.*

Demostración. □

Correspondiendo a los diferentes tipos de elementos que hay en un conjunto bien ordenado, tenemos el número ordinal *cero*, los números ordinales *sucesores* y los *límites*.

Definición 18.2.6. Sea α un número ordinal. Decimos de α que es un número ordinal *sucesor* si $\alpha = \beta + 1$, para algún número ordinal β y que α es un número ordinal *límite* si $\alpha \neq 0$ y si α no es un número ordinal sucesor.

Proposición 18.2.7.

1. *Una condición necesaria y suficiente para que un número ordinal α sea un número ordinal sucesor es que $\bigcup \alpha \in \alpha$.*
2. *Una condición necesaria y suficiente para que un número ordinal α sea un número ordinal límite es que $\alpha \neq 0$ y que $\bigcup \alpha = \alpha$.*
3. *Una condición necesaria y suficiente para que un número ordinal α sea un número ordinal límite es que $\alpha \neq 0$ y que para cada número ordinal β, si $\beta \in \alpha$, entonces hay un número ordinal γ tal que $\beta \in \gamma \in \alpha$.*

Demostración. □

Teorema 18.2.8 (Hartogs). *Para cada conjunto A hay un número ordinal α para el que no hay ninguna aplicación inyectiva de α en A.*

Demostración. □

Teorema 18.2.9 (Zermelo). *Sea A un conjunto. Entonces son equivalentes:*

1. $\mathrm{Word}(A) \neq \varnothing$.
2. *Hay una función de elección para A.*

Demostración. □

Teorema 18.2.10. *Cualquier conjunto es isomorfo a algún número ordinal.*

Demostración. □

El *principio de la definición por recursión transfinita para los ordinales*, abreviado como PDRTON, nos indica la manera de construir recursivamente una función que esté definida sobre un número ordinal, partiendo de una clase funcional.

Teorema 18.2.11 (PDRTON). *Sea $\varphi(x, y, t_{[n]})$ una fórmula cuyas variables libres sean x, y, $t_0,\ldots, t_{n-1}$, α un número ordinal y a, $t_0,\ldots, t_{n-1}$ conjuntos. Si, para cada x hay un único y tal que $\varphi(x, y, t_{[n]})$, entonces hay una única función F tal que:*

1. $\mathrm{Dom}(F) = \alpha + 1$.
2. $F(0) = a$.
3. *Para cada $a \in \alpha + 1$, $\varphi(F{\restriction}\beta, F(\beta), t_{[n]})$.*

Demostración. □

[3] Burali-Forti fue un sólo matemático italiano, no dos distintos

Establecemos a continuación otro principio de definición por recursión transfinita para los ordinales.

Teorema 18.2.12. *Sea α un ordinal, A un conjunto y h una aplicación del conjunto de las palabras en A de longitud estrictamente menor que α, i.e., del conjunto $\bigcup_{\beta\in\alpha} A^{\beta}$, en el conjunto A. Entonces hay una única aplicación f de α en A, i.e., una única palabra en A de longitud α, tal que, para cada $\beta \in \alpha$, $f(\beta) = h(f\restriction\beta)$, o, lo que es equivalente, para el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A^{\alpha} \arrow[r, "(\cdot\restriction\beta)_{\beta\in\alpha}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{A^{\alpha}}"'] & \left(\bigcup_{\beta\in\alpha} A^{\beta}\right)^{\alpha} \arrow[d, "h^{\alpha}"] \\ & A^{\alpha} \end{tikzcd}$$

se cumple que las aplicaciones $\mathrm{id}_{A^{\alpha}}$ y $h^{\alpha} \circ (\cdot\restriction\beta)_{\beta\in\alpha}$ tienen una única aplicación que las iguale, o, también, la aplicación $h^{\alpha} \circ (\cdot\restriction\beta)_{\beta\in\alpha}$ tiene un único punto fijo.

18.3. Aritmética ordinal. Si α y β son dos ordinales, entonces definimos la suma de α y β, $\alpha+\beta$, como el único ordinal γ tal que $(\alpha, \in_{\alpha}) \coprod (\beta, \in_{\beta})$ es isomorfo a $(\gamma, \in_{\gamma})$. Además, definimos el producto de α y β, $\alpha\cdot\beta$, como el único ordinal γ tal que $(\alpha, \in_{\alpha}) \prod^{\mathrm{alex}} (\beta, \in_{\beta})$ es isomorfo a $(\gamma, \in_{\gamma})$.

Proposición 18.3.1. *Para cualesquiera números naturales α, β y γ, se cunple que:*

$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$	*Asociatividad de la suma.*
$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$	*Asociatividad del producto.*
$\alpha\cdot(\beta+\gamma) = (\alpha\cdot\beta)+(\alpha\cdot\gamma)$	*Distributividad por la izquierda.*
$\alpha+0=\alpha$	*Neutro aditivo por la derecha.*
$0+\alpha=\alpha$	*Neutro aditivo por la izquierda.*
$\alpha\cdot 1=\alpha$	*Neutro multiplicativo por la derecha.*
$1\cdot\alpha=\alpha$	*Neutro multiplicativo por la izquierda.*
$\alpha\cdot 0=0$	*Aniquilador por la derecha.*
$0\cdot\alpha=0$	*Aniquilador por la izquierda.*

Es fundamental recordar que ni la suma ni el producto de ordinales son operaciones conmutativas y que la multiplicación no es distributiva por la derecha respecto de la suma.

18.4. Cardinales.

Definición 18.4.1. Sea A un conjunto. El *número cardinal* de A, al que denotamos por $\mathrm{card}(A)$, es el mínimo número ordinal isomorfo al conjunto A.

Proposición 18.4.2.

1. *Sean A y B dos conjuntos. Entonces* $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$ *si y sólo si A y B son isomorfos.*
2. *Si A es un conjunto finito, entonces* $\mathrm{card}(A)$ *es el único número natural isomorfo a A.*

Demostración. □

Definición 18.4.3. Un número ordinal α es un número ordinal *inicial* si no es isomorfo a ningún número ordinal $\beta \in \alpha$.

Proposición 18.4.4.

1. *Si α es un número ordinal inicial, entonces* $\alpha = \operatorname{card}(\alpha)$.
2. *Cualquier número cardinal es un número ordinal inicial.*

Por consiguiente, un conjunto es un número cardinal si y sólo si es un número ordinal inicial

18.5. Aritmética cardinal.

Definición 18.5.1. Sea $(\mathfrak{m}_i)_{i\in I}$ una familia de cardinales. La suma de la familia $(\mathfrak{m}_i)_{i\in I}$, denotada por $\sum_{i\in I}\mathfrak{m}_i$, es $\operatorname{card}(\coprod_{i\in I}\mathfrak{m}_i)$

Proposición 18.5.2. *Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos dos a dos disjuntos. Entonces* $\operatorname{card}(\bigcup_{i\in I}A_i) = \sum_{i\in I}\operatorname{card}(A_i)$.

Proposición 18.5.3. *Sean $(A_i)_{i\in I}$ y $(B_i)_{i\in I}$ dos familias de conjuntos. Si, para cada $i\in I$, A_i y B_i son isomorfos, entonces $\coprod_{i\in I}A_i$ y $\coprod_{i\in I}B_i$ son isomorfos.*

Corolario 18.5.4. *Si la familia de conjuntos $(A_i)_{i\in I}$ es tal que, para cada $i\in I$,* $\operatorname{card}(A_i) = \mathfrak{m}_i$, *entonces* $\sum_{i\in I}\mathfrak{m}_i = \operatorname{card}(\coprod_{i\in I}A_i)$

Proposición 18.5.5. *Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Entonces se cumple que* $\operatorname{card}(\bigcup_{i\in I}A_i) \leq \sum_{i\in I}\operatorname{card}(A_i)$.

Corolario 18.5.6. *Sea $(\mathfrak{m}_i)_{i\in I}$ una familia de cardinales. Entonces* $\bigcup_{i\in I}\mathfrak{m}_i \leq \sum_{i\in I}\mathfrak{m}_i$.

Proposición 18.5.7. *Sean $(\mathfrak{m}_i)_{i\in I}$ y $(\mathfrak{n}_i)_{i\in I}$ dos familia de cardinales y $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito, entonces se cumple que:*

1. $\sum_{i\in I}0 = 0$.
2. $\sum_{i\in\varnothing}\mathfrak{m}_i = 0$
3. $\sum_{i\in I}\mathfrak{m}_i = \sum_{i\in\operatorname{supp}((\mathfrak{m}_i)_{i\in I})}\mathfrak{m}_i$, *siendo*
$$\operatorname{supp}((\mathfrak{m}_i)_{i\in I}) = \{\, i\in I \mid \mathfrak{m}_i \neq 0\,\}.$$
4. *Si $J\subseteq I$, entonces* $\sum_{i\in J}\mathfrak{m}_i \leq \sum_{i\in I}\mathfrak{m}_i$.
5. *Si, para cada $i\in I$, $\mathfrak{m}_i\leq\mathfrak{n}_i$, entonces* $\sum_{i\in I}\mathfrak{m}_i \leq \sum_{i\in I}\mathfrak{n}_i$.
6. $\sum_{i\in I}1 = \operatorname{card}(I)$.
7. *Para cada $n\in\mathbb{N}$, $\mathfrak{m}+n=\mathfrak{m}$.*

Proposición 18.5.8 (Conmutatividad). *Sea $(\mathfrak{m}_i)_{i\in I}$ una familia de cardinales y f una permutación de I. Entonces*
$$\textstyle\sum_{i\in I}\mathfrak{m}_i = \sum_{i\in I}\mathfrak{m}_{f(i)}.$$

Proposición 18.5.9 (Asociatividad). *Sea $(J_l)_{l\in L}$ una familia de conjuntos y $(\mathfrak{m}_i)_{i\in I}$ una familia de cardinales. Si $I=\bigcup_{l\in L}J_l$. Entonces*
$$\textstyle\sum_{i\in I}\mathfrak{m}_i = \sum_{l\in L}(\sum_{i\in J_l}\mathfrak{m}_i).$$

Definición 18.5.10. Sea $(\mathfrak{m}_i)_{i\in I}$ una familia de cardinales. El producto de la familia $(\mathfrak{m}_i)_{i\in I}$, denotada por $\prod_{i\in I}\mathfrak{m}_i$, es $\operatorname{card}(\prod_{i\in I}\mathfrak{m}_i)$

Proposición 18.5.11. *Sean $(A_i)_{i\in I}$ y $(B_i)_{i\in I}$ dos familias de conjuntos. Si, para cada $i\in I$, A_i y B_i son isomorfos, entonces se cumple que* $\operatorname{card}(\prod_{i\in I}A_i) = \operatorname{card}(\prod_{i\in I}B_i)$.

Proposición 18.5.12. *Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Entonces tenemos que* $\operatorname{card}(\prod_{i\in I}A_i) = \prod_{i\in I}\operatorname{card}(A_i)$.

Proposición 18.5.13. *Para cada cardinal infinito $\mathfrak{m}$, se cumple que* $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m}=\mathfrak{m}$

Proposición 18.5.14. *Sean $(\mathfrak{m}_i)_{i\in I}$ y $(\mathfrak{n}_i)_{i\in I}$ dos familia de cardinales, entonces se cumple que:*

1. *Si para un* $i \in I$ $\mathfrak{m}_i = 0$, *entonces* $\prod_{i\in I} \mathfrak{m}_i = 0$.
2. $\prod_{i\in\varnothing} \mathfrak{m}_i = 1$
3. $\prod_{i\in I} \mathfrak{m}_i = \prod_{i\in \mathrm{supp}_1((\mathfrak{m}_i)_{i\in I})} \mathfrak{m}_i$, *siendo*
$$\mathrm{supp}_1((\mathfrak{m}_i)_{i\in I}) = \{\, i \in I \mid \mathfrak{m}_i \neq 1 \,\}.$$
4. $\sum_{i\in I} \mathfrak{m} = \mathrm{card}(I) \cdot \mathfrak{m}$.
5. $\prod_{i\in J} 1 = 1$.
6. *Si, para cada* $i \in I$, $\mathfrak{m}_i \leq \mathfrak{n}_i$, *entonces* $\prod_{i\in I} \mathfrak{m}_i \leq \prod_{i\in I} \mathfrak{n}_i$.
7. $\sum_{i\in I} 1 = \mathrm{card}(I)$.
8. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{m} + n = \mathfrak{m}$.

Proposición 18.5.15 (Conmutatividad). *Sea* $(\mathfrak{m}_i)_{i\in I}$ *una familia de cardinales y* f *una permutación de* I. *Entonces*
$$\prod\nolimits_{i\in I}\mathfrak{m}_i = \prod\nolimits_{i\in I}\mathfrak{m}_{f(i)}.$$

Proposición 18.5.16 (Asociatividad). *Sea* $(J_l)_{l\in L}$ *una familia de conjuntos y* $(\mathfrak{m}_i)_{i\in I}$ *una familia de cardinales. Si* $I = \bigcup_{l\in L} J_l$. *Entonces*
$$\prod\nolimits_{i\in I}\mathfrak{m}_i = \prod\nolimits_{l\in L}(\prod\nolimits_{i\in J_l}\mathfrak{m}_i).$$

Proposición 18.5.17 (Distributividad del producto respecto de la suma). *Sea* $((\mathfrak{m}_{l,i})_{i\in J_l})_{l\in L}$ *una familia de familias de cardinales,* $L \neq \varnothing$ *y, para cada* $l \in L$, $J_l \neq \varnothing$. *Entonces*
$$\prod\nolimits_{l\in L}\sum\nolimits_{i\in J_l}\mathfrak{m}_{l,i} = \sum\nolimits_{f\in \prod_{l\in L} J_l}\prod\nolimits_{l\in L}\mathfrak{m}_{l,f(l)}.$$

Proposición 18.5.18. *Sea* $(\mathfrak{m}_i)_{i\in I}$ *una familia de cardinales y* $\mathfrak{m}$ *un cardinal. Entonces* $\mathfrak{m} \cdot \sum_{i\in I} \mathfrak{m}_i = \sum_{i\in I}(\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}_i)$

Proposición 18.5.19. *Sean* $(\mathfrak{m}_i)_{i\in I}$ *y* $(\mathfrak{n}_i)_{i\in I}$ *dos familias de cardinales. Si, para cada* $i \in I$, $\mathfrak{m}_i < \mathfrak{n}_i$, *entonces* $\sum_{i\in I} \mathfrak{m}_i < \prod_{i\in I} \mathfrak{n}_i$.

Definición 18.5.20. Si $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{n}$ son cardinales, entonces $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} = \mathrm{card}(\mathrm{Fnc}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}))$

Proposición 18.5.21. *Sea* $\mathfrak{m}$ *un cardinal y* $(\mathfrak{n}_i)_{i\in I}$ *una familia de cardinales, entonces se cumple que:*
1. $\mathfrak{m}^0 = 1$.
2. $\mathfrak{m}^1 = \mathfrak{m}$.
3. *Si* $\mathfrak{m} \neq 0$, *entonces* $0^{\mathfrak{m}} = 0$.
4. $1^{\mathfrak{m}} = 1$.
5. $\prod_{i\in I} \mathfrak{m} = \mathfrak{m}^{\mathrm{card}(I)}$.
6. $\mathfrak{m}^{\sum_{i\in I} \mathfrak{n}_i} = \prod_{i\in I} \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}_i}$.
7. $(\prod_{i\in I} \mathfrak{n}_i)^{\mathfrak{m}} = \prod_{i\in I} \mathfrak{n}_i^{\mathfrak{m}}$.

Proposición 18.5.22. *Si* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ *y* $\mathfrak{p}$ *son cardinales, entonces* $(\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{p}}$.

Proposición 18.5.23. *Para cada conjunto* A *se cumple que* $\mathrm{card}(\mathrm{Sub}(A)) = 2^{\mathrm{card}(A)}$.

Proposición 18.5.24. *Para cada cardinal* $\mathfrak{m}$ *se cumple que* $\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}}$.

Proposición 18.5.25. *Si* $2 \leq \mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$ *y* $\aleph_0 \leq \mathfrak{n}$, *entonces* $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} = 2^{\mathfrak{n}}$.

Antes de definir la noción de cofinalidad de un ordinal recordamos que una parte cofinal de un conjunto preordenado $(A, \preccurlyeq)$ es un subconjunto X de A tal que para cada $a \in A$ hay un $x \in X$ tal que $a \preccurlyeq x$. El conjunto A siempre es una parte cofinal de $(A, \preccurlyeq)$ y si $(A, \leq)$ es un conjunto ordenado que tiene un máximo, entonces la parte de A reducida a ese máximo es una parte cofinal de $(A, \leq)$.

Definición 18.5.26. Sea α un ordinal. La cofinalidad de α, denotada por $\mathrm{cf}(\alpha, \in)$, es el mínimo del conjunto de los cardinales de las partes cofinales de α.

La cofinalidad de 0 es 0 y la cofinalidad de $\alpha + 1$ es 1. Así que la cofinalidad es interesante cuando el ordinal es un ordinal límite, i.e., cuando no es ni cero ni un ordinal sucesor.

Proposición 18.5.27. *Si α es un ordinal, entonces $\mathrm{cf}(\alpha, \in)$ es posterior a $\mathrm{cf}(\alpha)$, siendo $\mathrm{cf}(\alpha)$ el mínimo ordinal β para el que existe una aplicación $f\colon \beta \longrightarrow \alpha$ tal que $\mathrm{Im}(f)$ es cofinal en α.*

Demostración. Por definición $\mathrm{cf}(\alpha, \in)$ es el mínimo del conjunto de los cardinales de las partes cofinales de α. Sea X una parte cofinal de α tal que $\mathrm{card}(X) = \mathrm{cf}(\alpha, \in)$. Entonces hay una biyección f de $\mathrm{card}(X)$ en X y, por lo tanto, una aplicación de $\mathrm{card}(X)$ en α cuya imagen es cofinal en α. De donde $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{cf}(\alpha, \in)$. □

Proposición 18.5.28. *Si α es un ordinal, entonces $\mathrm{cf}(\alpha)$, el mínimo ordinal β para el que existe una aplicación $f\colon \beta \longrightarrow \alpha$ tal que $\mathrm{Im}(f)$ es cofinal en α, es un cardinal.*

Demostración. Hay que demostrar que $\mathrm{cf}(\alpha)$ no es isomorfo a ningún ordinal γ tal que $\gamma < \mathrm{cf}(\alpha)$. Si $\mathrm{cf}(\alpha)$ fuera isomorfo a un ordinal $\gamma < \mathrm{cf}(\alpha)$, entonces $\mathrm{cf}(\alpha)$ no sería el mínimo para el que existe una aplicación $f\colon \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha$ tal que $\mathrm{Im}(f)$ es cofinal en α, contradicción. □

Proposición 18.5.29. *Si α es un ordinal límite, entonces hay una aplicación f estrictamente creciente, contínua y con imagen cofinal de $\mathrm{cf}(\alpha)$ en α.*

Proposición 18.5.30. *Si α es un ordinal, entonces $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$. Además, $\mathrm{cf}(\alpha, \in) \leq \mathrm{cf}(\alpha)$. Por lo tanto $\mathrm{cf}(\alpha, \in) = \mathrm{cf}(\alpha)$.*

Siempre se cumple que $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \alpha$.

Definición 18.5.31. Sea α un ordinal límite. Decimos que α es un ordinal regular si $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$ y que es singular si $\mathrm{cf}(\alpha) < \alpha$.

Proposición 18.5.32. *Cualquier ordinal regular es un cardinal.*

Proposición 18.5.33. *Un cardinal $\mathfrak{m}$ es regular si y sólo si es aditivamente inaccesible, i.e., exactamente si, para cada conjunto I tal que $\mathrm{card}(I) < \mathfrak{m}$ y cada familia $(\mathfrak{n}_i)_{i \in I}$ tal que, para cada $i \in I$, $\mathfrak{n}_i < \mathfrak{m}$, se cumple que $\sum_{i \in I} \mathfrak{n}_i < \mathfrak{m}$.*

Proposición 18.5.34. *Si $\mathfrak{m}$ es un cardinal infinito, entonces $\mathfrak{m}^+$ es regular.*

Proposición 18.5.35. *Si $\mathfrak{m}$ es un cardinal infinito y $\mathrm{cf}(\mathfrak{m}) \leq \mathfrak{n}$, entonces $\mathfrak{m} < \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$.*

Corolario 18.5.36. *Si $\mathfrak{m}$ es un cardinal infinito, entonces $\mathfrak{m} < \mathrm{cf}(2^{\mathfrak{m}})$.*

Proposición 18.5.37. *Si $\mathfrak{m}$ es un cardinal infinito, no hay ningún cardinal $\mathfrak{n}$ tal que $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}^+$ y $\mathrm{cf}(\mathfrak{m}) \leq \mathfrak{n}$, entonces $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} = (\bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{m}} \mathfrak{p}^{\mathfrak{n}})^{\mathrm{cf}(\mathfrak{m})}$.*

Proposición 18.5.38 (Hausdorff)**.** *Si $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{n}$ son un cardinales infinitos, entonces $(\mathfrak{m}^+)^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} \cdot \mathfrak{m}^+$.*

Proposición 18.5.39. *Sean $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{n}$ cardinales tales que $2 \leq \mathfrak{m}$ y $\aleph_0 \leq \mathfrak{n}$. Entonces:*

1. *Si $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$, entonces $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} = 2^{\mathfrak{n}}$.*
2. *Si $\mathfrak{m}$ es infinito y hay un $\mathfrak{p} < \mathfrak{m}$ tal que $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{p}^{\mathfrak{n}}$, entonces $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{p}^{\mathfrak{n}}$*
3. *Si $\mathfrak{m}$ es infinito y para cada $\mathfrak{p} < \mathfrak{m}$, $\mathfrak{p}^{\mathfrak{n}} < \mathfrak{m}$, entonces $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ y*
   a) *si $\mathfrak{n} < \mathrm{cf}(\mathfrak{m})$, entonces $\mathfrak{m}^{\mathrm{cf}(\mathfrak{m})} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$;*
   b) *si $\mathrm{cf}(\mathfrak{m}) \leq \mathfrak{n}$, entonces $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$*

18.6. Universos. El concepto de universo de Grothendieck-Tarski-Sonner, que vamos a introducir a continuación, está íntimamente relacionado con el de cardinal fuertemente inaccesible. De hecho, la existencia de universos de Grothendieck equivale a la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles, como tendremos oportunidad de comprobar.

Definición 18.6.1. Sea $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ un conjunto. Decimos de $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ que es un *universo de Grothendieck* si cumple las siguientes condiciones:

1. $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ es $\in$-transitivo.
2. Para cada conjunto x, si $x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces $\mathrm{Sub}(x) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.
3. Para cada conjunto x, si $x \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}}$ y x no es isomorfo a $\boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces $x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.
4. $\mathbb{N} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.

Proposición 18.6.2. *Sea $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ un universo de Grothendieck. Entonces:*

1. *Para cada conjunto x, si $x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces* $\mathrm{card}(x) < \mathrm{card}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$.
2. $\aleph_0 < \mathrm{card}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$.
3. *Para cada x, y, si $x \subseteq y$ e $y \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces $x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.*
4. *Para cada x, y, si $x, y \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces $\{x, y\}$, (x, y) y $x \times y \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.*
5. *Para cada función F, si* $\mathrm{Dom}(F) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ *e* $\mathrm{Im}(F) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}}$*, entonces se cumple que* $\mathrm{Im}(F) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ *y $F \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.*
6. *Para cada conjunto x, si $x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces $\bigcup x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.*
7. *Para cada función F, si* $\mathrm{Dom}(F) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ *e* $\mathrm{Im}(F) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}}$*, entonces se cumple que* $\bigcup \mathrm{Im}(F) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ *y* $\prod \mathrm{Im}(F) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.

Demostración. 1. Si $x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces $\mathrm{Sub}(x) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, luego $\mathrm{Sub}(x) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}}$. Por lo tanto $\mathrm{card}(x) < \mathrm{card}(\mathrm{Sub}(x)) \leq \mathrm{card}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$. De donde $\mathrm{card}(x) < \mathrm{card}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$.

2. Puesto que $\mathbb{N} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces, en virtud de 1, $\aleph_0 < \mathrm{card}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$.

3. Si $x \subseteq y$ e $y \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces $x \in \mathrm{Sub}(y) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, luego $x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.

4. Si $x, y \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces $\{x, y\} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}}$. Ahora bien, puesto que $\aleph_0 < \mathrm{card}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$, el conjunto $\{x, y\}$ no es isomorfo a $\boldsymbol{\mathcal{U}}$, luego $\{x, y\} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$. Por otra parte, puesto que $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, se cumple que $(x, y) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, ya que $\{x\} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ y $\{x, y\} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$. Por último, si $x, y \in U$, entonces, para cada $a \in x$ y cada $b \in y$, $a, b \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, luego $(a, b) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$. por lo tanto $x \times y \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}}$. Ahora bien, puesto que $\aleph_0 < \mathrm{card}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$, $\mathrm{card}(x) < \mathrm{card}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$ y $\mathrm{card}(y) < \mathrm{card}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$, $\mathrm{card}(x \times y) < \mathrm{card}(U)$. Por lo tanto $x \times y \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.

5. Si F es una función tal que $\mathrm{Dom}(F) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ e $\mathrm{Im}(F) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces $\mathrm{Im}(F) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}}$ y $\mathrm{card}(\mathrm{Im}(F)) \leq \mathrm{card}(x) < \mathrm{card}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$, luego $\mathrm{Im}(F) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$. Por último, ya que $F \subseteq \mathrm{Dom}(F) \times \mathrm{Im}(F) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, también tenemos que $F \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.

6. Si $x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ e $y \in \bigcup x$, entonces $y \in z \in x$, para un $z \in x$, luego $y \in z \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, por lo tanto $y \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$. De modo que $\bigcup x \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}}$. Además, $\mathrm{card}(\bigcup x) \leq \sum_{z \in x} z < \mathrm{card}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$, porque $\mathrm{card}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$ es un cardinal regular. Luego $\bigcup x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$. □

Proposición 18.6.3. *Una condición necesaria y suficiente para que un conjunto $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ sea un universo de Grothendieck es que $\boldsymbol{\mathcal{U}} = V_\zeta$, para un cardinal fuertemente inaccesible ζ.*

Demostración. □

Ejercicio 18.6.4. Sea U un conjunto. Demuéstrese que U es un universo de Grothendieck si y sólo si cumple las siguientes condiciones:

1. U es $\in$-transitivo.
2. Para cada conjunto x, si $x \in U$, entonces $\mathrm{Sub}(x) \in U$.
3. Para cada conjunto x, si $x \in U$ y $F\colon x \longrightarrow U$, entonces $\bigcup \mathrm{Im}(F) \in U$.
4. $\mathbb{N} \in U$.

Proposición 18.6.5. *Sea $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ un universo de Grothendieck. Si $x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ e $y \subseteq x$, entonces $y \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.*

Demostración. □

Proposición 18.6.6. *Sea $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ un universo de Grothendieck. Si $x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces todo conjunto cociente de x pertenece a $\boldsymbol{\mathcal{U}}$.*

Demostración. □

Proposición 18.6.7. *Sea $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ un universo de Grothendieck. Si $I \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ y $(\, X_i \mid i \in I\,)$ es una familia de conjuntos tal que, para cada $i \in I$, $X_i \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces $\coprod_i X_i \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.*

Demostración. □

Proposición 18.6.8. *Sea $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ un universo de Grothendieck. Si $X, Y \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces toda relación, función, aplicación no determinista y aplicación de X en Y, pertenece a $\boldsymbol{\mathcal{U}}$.*

Demostración. □

Proposición 18.6.9. *Sea U un universo de Grothendieck. Si $X, Y \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces todo conjunto de relaciones, funciones, aplicaciones no deterministas y aplicaciones de X en Y, pertenece a U.*

Demostración. □

Proposición 18.6.10. *Si $X \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}}$ es tal que su cardinal es a lo sumo el de un elemento de $\boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces $X \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.*

Demostración. Sea $I \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ tal que $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(I)$. Entonces hay una sobreyección $(x_j \mid j \in J)$ desde un subconjunto J de I hasta X. Por lo tanto $X = \bigcup_{j\in J}\{x_j\}$, así que $X \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$. □

Ejercicio 18.6.11. Sea U un universo de Grothendieck. Demuéstrese que toda parte finita de U es elemento de U.

Proposición 18.6.12. *Si $(\boldsymbol{\mathcal{U}}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ es una familia no vacía de universos de Grothendieck, entonces $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \boldsymbol{\mathcal{U}}_\lambda$ es un universo de Grothendieck.*

Demostración. □

Axioma del universo. *Existe un universo de Grothendieck.*

Axioma de Grothendieck-Tarski-Sonner. *Para cada conjunto x existe un universo de Grothendieck $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ tal que $x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.*

Proposición 18.6.13. *Sea $(\, X_i \mid i \in I\,)$ una familia de conjuntos. Entonces hay un universo de Grothendieck $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ tal que, para cada $i \in I$, $X_i \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.*

Demostración. Es suficiente considerar $\bigcup_{i\in I} X_i$, porque entonces $\bigcup_{i\in I} X_i \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ y ya que $X_i \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i$, $X_i \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, para cada $i \in I$. □

Definición 18.6.14. Sean X e Y dos conjuntos y $n \geq 0$. Decimos de Y que es una *componente de orden n de X* si hay una sucesión finita $(\, X_j \mid j \in n+1\,)$ tal que $X_0 = X$, $X_n = Y$, y, para cada $j \in n$, $X_{j+1} \in X_j$. Convenimos que X es la única componente de orden 0 de X. Además, un conjunto Y es una *componente de X* si hay un $n \geq 0$ tal que Y que es una componente de orden n de X.

Ejercicio 18.6.15. Demuéstrese que todo conjunto es una componente de sí mismo y que si Y es una componente de X y Z lo es de Y, entonces Z lo es de X.

Ejercicio 18.6.16. Demuéstrese que las componentes de cualquier conjunto constituyen un conjunto.

Definición 18.6.17. Sea $\mathfrak{m}$ un cardinal. Decimos de un conjunto X que es de *tipo* $\mathfrak{m}$ (resp., de *tipo estricto* $\mathfrak{m}$, de *tipo finito*) si todas las componentes de X tienen cardinales menores o iguales que $\mathfrak{m}$ (resp., estrictamente menores que $\mathfrak{m}$, finitos)

Proposición 18.6.18. *Si X es un conjunto de tipo $\mathfrak{m}$ (resp., de tipo estricto $\mathfrak{m}$, de tipo finito), entonces toda componente de X y toda parte de X son de tipo $\mathfrak{m}$ (resp., de tipo estricto $\mathfrak{m}$, de tipo finito); del mismo modo* $\mathrm{Sub}(X)$ *es de tipo* $2^{\mathfrak{m}}$ *(resp., de tipo estricto $2^{\mathfrak{m}}$, de tipo finito). Además, si X es de tipo $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$, entonces X es de tipo $\mathfrak{n}$.*

Demostración. □

18.7. Modelos transitivos standard.

> Estas "contradicciones"[las "antinomias ultrafinitas de la teoría de conjuntos"] aparentes no se derivan mas que de una confusión entre la teoría de conjuntos, definida de manera no categórica por sus axiomas, y los modelos particulares que la representan: lo que en un modelo aparece como un "no-conjunto o superconjunto ultrafinito", en el inmediatamente posterior es un "conjunto"perfectamente válido, con un número cardinal y un tipo de orden, y de este modo constituye la primera piedra para la construcción del nuevo dominio. A la sucesión ilimitada de los números ordinales de Cantor le corresponde una doble sucesión igualmente ilimitada de modelos esencialmente diferentes de la teoría de conjuntos, en cada uno de los cuales está expresada toda la teoría clásica. Las dos tendencias polarmente contrapuestas del espíritu que piensa, la idea del progreso creador y la de la conclusión abarcadora, que también subyacen a las "antinomias"kantianas, están representadas y reconciliadas simbólicamente en la sucesión transfinita de los números, basada en el concepto de buena ordenación, la cual en su ilimitada continuación, no posee ninguna verdadera conclusión, sino sólo puntos de estacionamiento relativos, a saber, precisamente esos "números-límite"que separan los tipos de modelos superiores de los inferiores. Y así las "antinomias"de la teoría de conjuntos, correctamente entendidas, conducen a la ciencia matemática no a un empobrecimiento y mutilación, sino a un enriquecimiento y una ampliación más allá de cualquier horizonte.
>
> *E. Zermelo.*

En el artículo "Über Grenzzahlen und Mengenbereichte", Zermelo presenta un nuevo modo de concebir la teoría de conjuntos. Formula, en primer lugar, un sistema de axiomas, inspirado en el suyo de 1908, pero que difiere de él significativamente. El sistema no es categórico y Zermelo, que ve en ello una virtud, procede a demostrar teoremas acerca de sus posibles modelos. Cada modelo M está caracterizado por dos parámetros: el cardinal de su "base"de *átomos* y la *característica*, i.e., el primer ordinal posterior a todos los ordinales pertenecientes a M. Zermelo demuestra que dos modelos M y M' son isomorfos si tienen bases isomorfas y la misma característica,k y que si la característica de M es mayor que la de M', entonces M contiene un submodelo isomorfo al M'. Por lo tanto las características inducen una buena ordenación sobre las clases de equivalencia de modelos con bases isomorfas. Por otra parte, si dos modelos tienen la misma característica, uno de ellos será isomorfo a una parte del otro, aunque sus bases no sean isomorfas. La investigación de los modelos de la teoría de conjuntos, la lleva a cabo Zermelo desde la teoría de conjuntos de Cantor, i.e., haciendo uso de todas las nociones y construcciones de la teoría clásica de conjuntos, salvo las que conducen a las antinomias ultrafinitas. Si existe un modelo M_α, siendo α su característica, el estudio de los modelos de característica inferior a α se puede realizar en M_α, pero, de todos modos, debido a que el ordinal α no pertenece al modelo M_α, necesariamente hay que trascender al propio M_α para poder incluso describir tal estudio.

El sistema axiomático propuesto por Zermelo en 1930 coincide con el de 1908 salvo en que, por una parte, incluye el axioma de reemplazo de Fraenkel y el axioma de fundamentación, con el que se evitan, dice, los conjuntos "circulares"y "abismales" y, por otra, excluye el axioma de elección, porque, según dice, "tiene un carácter diferente de los otros y no sirve para la delimitación de los dominios"y ahora lo considera presupuesto en toda su investigación como "un principio lógico general", y también los axiomas existenciales incondicionados, i.e., el axioma del conjunto vacío y el del conjunto infinito, este último porque, según afirma "no pertenece a la teoría "general"de conjuntos". De modo que llama "sistema **ZF** completado "o, para abreviar, "sistema $\mathbf{ZF}'$ "a la totalidad de los siguientes axiomas:

- *Axioma de extensionalidad*: cada conjunto está determinado por sus elementos, en la medida en la que contiene elementos.
- *Axioma de separación*: de cada conjunto m, con una función proposicional $\varphi(x)$ se aísla un subconjunto $m_{\varphi(x)}$ que contiene todos los *elementos* de m para los que $\varphi(x)$ es verdadera.
- *Axioma del par no ordenado*: si a y b son dos conjuntos cualesquiera, entonces existe un conjunto que los contiene como elementos.
- *Axioma del conjunto potencia*: a cada conjunto m le corresponde un conjunto $\mathrm{Sub}(m)$ que contiene como elementos a todos los subconjuntos de m, incluidos el conjunto vacío y el propio m. En lugar del *conjunto vacío* aquí se adoptará un *átomo* u_0, elegido arbitrariamente.
- *Axioma de la unión*: a cada conjunto m le corresponde un conjunto $\bigcup m$, que contiene a los elementos de sus elementos.
- *Axioma de reemplazo*: si se substituyen de manera unívoca los elementos x de un conjunto m con elementos arbitrarios x' del dominio, este último contiene también un conjunto m', que tiene como elementos a todos los x'.
- *Axioma de fundamentación*: cada cadena (descendente) de elementos, en la que cada miembro es un elemento del precedente, acaba en un índice finito con un átomo.

Zermelo designa, con una excepción, a cada uno de estos axiomas por la inicial del respectivo nombre alemán. Denomina **ZF** al sistema BAPUVE de los seis primeros axiomas, y $\mathbf{ZF}'$ al sistema completo BAPUVEF. Una vez establecido el sistema axiomático, Zermelo define el concepto de *dominio normal* como un dominio de *conjuntos* y *átomos*, que respecto de la relación de pertenencia, satisface al sistema $\mathbf{ZF}'$. Además, dice que "basándose en los conceptos y principios fundamentales de la teoría de conjuntos"tratará como si fuesen "conjuntos tanto a los "dominios"de este tipo, como a sus "elementos", "subdominios", y también a sus "uniones"e "intersecciones", porque, de hecho, no se diferencian de los conjuntos en ningún punto verdaderamente esencial. Sin embargo, los llamaremos siempre "dominios"y no "conjuntos", para distinguirlos de los "conjuntos"que son elementos del dominio considerado". A continuación, Zermelo define el concepto de *sucesión fundamental* como un conjunto bien ordenado en el que cada elemento, salvo el primero, que debe ser un átomo, es idéntico al conjunto de todos lo que le preceden.

Para las sucesiones fundamentales, entre otros, se tienen los siguientes teoremas:

Proposición 18.7.1. *Cada elemento de una sucesión fundamental es elemento de todos los que le suceden y contiene como elementos a todos los que le preceden.*

Proposición 18.7.2. *Cada elemento y cada sección inicial de una sucesión fundamental es a su vez una sucesión fundamental.*

Proposición 18.7.3. *De cada sucesión fundamental se obtiene una nueva adjuntando a sus elementos como último elemento el conjunto mismo:* $G^+ = G \cup \{G\}$.

Proposición 18.7.4. *De cada conjunto $\mathcal{T}$ de sucesiones elementales con el mismo elemento inicial u se obtiene mediante la unión una nueva sucesión fundamental $\bigcup_{T\in\mathcal{T}} T$, que contiene a todos los elementos de $\mathcal{T}$ como secciones y (salvo a ella misma) como elementos*

Proposición 18.7.5. *De dos sucesiones fundamentales distintas, con el mismo elemento inicial, una siempre es siempre una sección inicial y un elemento de la otra y tiene siempre un tipo de orden menor.*

Proposición 18.7.6. *Si en un dominio normal u es un átomo y R un conjunto bien ordenado de tipo ρ, entonces al dominio pertenece también una sucesión fundamental G_ρ, con u como primer elemento, similar a R.*

Demostración. Supuesto que el teorema se cumpla para todos los ordinales $\rho < \alpha$, también se cumple para α. En efecto, o $\alpha = \beta + 1$ y G_β tiene tipo β y, por lo tanto G_β^+ tiene tipo $\beta + 1 = \alpha$. O bien α es un ordinal límite y entonces la unión $\bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta$ de todos los G_β, es una sucesión fundamental de tipo α, porque ninguna de sus secciones iniciales propias es una $G_\beta < G_\alpha$.

Se aplica el esquema axiomático de reemplazo. □

Proposición 18.7.7. *La totalidad de las sucesiones fundamentales G_α con primer elemento común u contenidas en un dominio normal P constituye un subdominio bien definido G_u de P, y los números ordinales α correspondientes forman una sección inicial bien definida Z_π de la sucesión de los ordinales, de tipo de orden π, y el dominio P no contiene (como elemento) ningún "conjunto" W, que tenga como elementos a todas estas sucesiones fundamentales (i.e., que coincida con G_u), ni tampoco un conjunto bien ordenado de tipo π; al contrario, π es el primer ordinal posterior a todos los ordinales de P. En caso contrario se reproduciría la bien conocida "antinomia de Burali-Forti". El ordinal π así definido se llama la* característica *del dominio del dominio normal.*

Proposición 18.7.8. *La característica π de un dominio normal P tiene las siguientes propiedades:*

1. *π es un cardinal regular.*
2. *Hay una clase funcional f de la clase* On *en sí misma, tal que:*
   - *a) Para cualesquiera ordinales α y β, si $\alpha < \beta$ entonces $f(\alpha) < f(\beta)$.*
   - *b) Si α es un ordinal límite, $f(lim_{\xi<\alpha}\xi) = \lim_{\xi<\alpha} f(\xi)$.*
   - *c) $f(\pi) = \pi$.*

Demostración. Si π no fuera un cardinal, entonces sería isomorfo a un ordinal γ estrictamente menor. Entonces, por ser π es el primer ordinal posterior a todos los ordinales de P, necesariamente γ está en el dominio normal P. Entonces $\mathrm{Sub}(\gamma)$ también está en P y tiene una buena ordenación isomorfa a un ordinal β de P Además, $\mathrm{card}(\pi) = \mathrm{card}(\gamma) < \mathrm{card}(\mathrm{Sub}(\gamma)) = \mathrm{card}(\beta)$, luego π no es posterior a todos los ordinales de P, contradicción. Si π no fuera regular, existiría un conjunto I y una familia de cardinales $(\alpha_i)_{i\in I}$ tales que $\mathrm{card}(I) < \pi$, para cada $i \in I$, $\alpha_i < \pi$, pero $\sum_{i\in I} \alpha_i = \pi$. Por lo tanto $\mathrm{card}(I)$ y todos los α_i están en P, luego también $\sum_{i\in I} \alpha_i$, i.e., π está en P, contradicción.

No sólo π es un cardinal regular, sino que $\pi = \aleph_\alpha$, para algún ordinal límite α. En efecto, si fuera $\pi = \aleph_{\beta+1}$, para algún ordinal β, entonces $\aleph_\beta$ estaría en P y también, por lo tanto, $\mathrm{card}(\mathrm{Sub}(\aleph_\beta))$, pero $\mathrm{card}(\mathrm{Sub}(\aleph_\beta)) \geq \aleph_{\beta+1} = \pi$, luego π no sería la característica del dominio P, contradicción.

Sea f la clase funcional de la clase On en sí misma, definida como:

$$f(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha = 0; \\ 2^{\operatorname{card}(f(\beta))}, & \text{si } \alpha = \beta + 1; \\ \operatorname{lím}_{\beta \in \alpha} f(\beta), & \text{si } \alpha \text{ es un ordinal límite.} \end{cases}$$

Sea $\alpha < \pi$. Supongamos que, para cada $\beta < \alpha$, $f(\beta) < \pi$. Entonces, para cada $\beta < \alpha$, $\operatorname{Sub}(f(\beta))$ está en P, luego $f(\beta + 1) = 2^{\operatorname{card}(f(\beta))} < \pi$. Por lo tanto, si α es un ordinal sucesor, $f(\alpha) < \pi$. Si α es un ordinal límite, entonces, por estar α en P, el conjunto $\{ f(\beta) \mid \beta \in \alpha \}$, obtenido mediante el esquema axiomático de reemplazo, también está en P y por lo tanto, en virtud del axioma de la unión, también $\bigcup_{\beta \in \alpha} f(\beta)$ está en P. Pero $\bigcup_{\beta \in \alpha} f(\beta) = \operatorname{lím}_{\beta \in \alpha} f(\beta) = f(\alpha)$, por consiguiente $f(\alpha) < \pi$, ya que está en P.

Antes demostramos que π no puede ser un ordinal sucesor, luego es límite y por ende $f(\pi) = \operatorname{lím}_{\beta \in \pi} f(\beta)$. Si ocurriera que $\pi < f(\pi)$, entonces $\pi < f(\alpha)$, para algún $\alpha < \pi$, lo cual es absurdo. Por lo tanto $\pi = f(\pi)$. □

Continua Zermelo su estudio de los modelos normales, señalando que un dominio normal puede contener subdominios que, respecto de la relación de pertenencia definida entre sus miembros, ya satisfagan los axiomas y, por lo tanto, son ellos mismos dominios normales. A propósito de estos se cumple el siguiente

Lema 18.7.9. *Un subdominio M de un dominio normal P es a su vez un dominio normal si cumple que:*

1. *Si el conjunto x está en M e $y \in x$, entonces y también está en M.*
2. *M contiene cada conjunto del dominio P, cuyos elementos estén en M.*

Las dos condiciones son equivalentes a que, para cada conjunto x del dominio normal P, x está en M exactamente si todos los elementos de x están en M. Además, la base de P está contenida en M, entonces ambos coinciden.

Demostración. □

Teorema 18.7.10. *Para cada dominio normal P de característica π y base Q hay una familia $(Q_\alpha)_{\alpha \in \pi}$ tal que:*

1. *Para cada $\alpha \in \pi$, Q_α no es vacío.*
2. *Para cada $\alpha, \beta \in \pi$, si $\alpha \neq \beta$, entonces Q_α y Q_β son disjuntos.*
3. *Para cada elemento x del dominio normal P y cada $\alpha < \pi$, x está en Q_α precisamente si, para cada $\xi < \alpha$, x no está en Q_ξ y, para cada $y \in x$, existe un $\xi < \alpha$ tal que y está en Q_ξ*

Demostración. Sea $(P_\alpha)_{0 < \alpha < \pi}$ la familia definida como:

$$P_\alpha = \begin{cases} Q, & \text{si } \alpha = 1, \\ \bigcup_{0 < \beta < \alpha} P_\beta, & \text{si } \alpha \text{ es un ordinal límite,} \\ \{ x \in P \mid \forall y \in x \, (y \in P_\beta) \}, & \text{si } \alpha = \beta + 1. \end{cases}$$

A partir de los subdominios P_α, con $0 < \alpha < \pi$, definimos los estratos Q_α, como:

$$Q_\alpha = \begin{cases} Q, & \text{si } \alpha = 0, \\ P_{\alpha+1} - P_\alpha, & \text{si } 0 < \alpha < \pi. \end{cases}$$

Tenemos que Q_0 no es vacío, porque el átomo u está en $P_1 = Q = Q_0$. Supongamos que, para cada $\beta < \alpha$, la sucesión fundamental G_β esté en el estrato Q_β. Entonces todos los elementos de la sucesión fundamental G_α, que son, a su vez, sucesiones fundamentales del tipo G_β, pertenecen a estratos anteriores Q_β y por lo tanto a P_α. Ahora bien, G_α pertenece a $P_{\alpha+1}$ pero no a P_α, porque, en caso contrario, perteneceria a un estrato Q_β que ya contiene a G_β, que es un elemento de G_α, en contradicción con la construcción.

Para aplicar el lema precedente al subdominio $P_\pi = \bigcup_{0<\alpha<\pi} P_\alpha$ de P □

Referencias

[1] P. Halmos, *Naive set theory*, D. Van Nostrand, 1960 (Hay traducción al castellano).
[2] K. Hrbacek and T. Jech, *Introduction to set theory*, Marcel Dekker, 1984.

Universidad de Valencia, Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia, Apt. 22.109 E-46071 Valencia, Spain
E-mail address: Juan.B.Climent@uv.es