FÍSICA Y QUÍMICA 1º BACHILLERATO

ENERGÍA, TRABAJO Y POTENCIA

1.- Introducción: concepto de energía.
2.- Trabajo mecánico.
3.- Energía cinética.
4.- Energía potencial.
- Energía potencial gravitatoria
- Energía potencial elástica
5.- Conservación de la energía mecánica.
6.- Potencia.

1.- Introducción: concepto de energía.

Recopilación de ideas y conceptos básicos sobre la energía en general:

① La definición más general de *Energía*: es la capacidad de los cuerpos o sistemas materiales para producir cambios en ellos mismos o en otros cuerpos o sistemas.

Una definición más concreta, conveniente para las necesidades de este tema: es la capacidad de los cuerpos o sistemas para producir trabajo.

② La energía se puede presentar de diversas formas, todas ellas son interconvertibles entre sí de manera que se cumple el principio de conservación de la energía:

La energía ni se crea, ni se destruye, solo se transforma

③ Siempre ha habido la misma energía en el universo desde su creación.

④ La palabra energía suele ir asociada con otra que puede indicar su origen o su naturaleza. En última instancia todas las formas de energía se pueden reducir a tres:

- *Energía cinética*: asociada al estado de movimiento del cuerpo o sistema.

- *Energía potencial*: asociada a la posición del cuerpo o sistema en un campo de fuerzas conservativo.

- *Energía interna*: asociada a la composición química del cuerpo y al estado físico del mismo.

⑤ Las formas de energía también se pueden clasificar atendiendo a la naturaleza de las fuerzas puestas en juego o a la forma en que se almacena:

- *Energía mecánica*: es la suma de las energías cinética y potencial debidas a las fuerzas gravitatoria o elástica (mecánicas).

- *Energía electromagnética*: debida a la fuerza eléctrica y magnética, es la energía asociada a la corriente eléctrica y al campo electromagnético.

- *Energía luminosa o radiante*: es la energía transportada por la radiación electromagnética (ondas de radio y TV, microondas, infrarrojos, luz visible, ultravioleta, rayos X y rayos gamma).

- *Energía térmica*: asociada al concepto de temperatura, es debida a la agitación interna de los átomos y moléculas de la materia.

El *calor* es la energía térmica que se transfiere entre los cuerpos o sistemas que se encuentran a diferente temperatura. No obstante, desde un punto de vista termodinámico, el calor es transferencia de energía.

- *Energía química*: interviene en los procesos químicos y está asociada al tipo de enlaces químicos que se rompen o se generan en dichos procesos.

- *Energía nuclear*: asociada a la cohesión interna del núcleo de los átomos.

⑥ Sea cual sea la forma de energía, se puede medir. La unidad de energía en el S.I. es el *Julio (J)*, en honor a James Prescott Joule (1818-1889).

Un julio es una cantidad de energía muy pequeña.

También debe ser conocida la *caloría (cal)* como unidad de energía (sistema técnico de unidades). Se define la caloría como la cantidad de energía calorífica necesaria para elevar la temperatura de un gramo de agua pura en 1 °C (desde 14,5 °C a 15,5 °C), a una presión normal de una atmósfera.

Una caloría (cal) equivale a 4,1868 julios (J).

2.- Trabajo mecánico.

① En general, cuando una fuerza produce un desplazamiento se dice que dicha fuerza ha realizado un trabajo.

② En mecánica clásica, se dice que una fuerza realiza trabajo (mecánico) cuando altera el estado de movimiento de un cuerpo.

③ *Definición de trabajo realizado por una fuerza constante sobre un punto material* (o sobre un cuerpo que podemos reducir a un punto material):

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

Es decir, el trabajo, W, es el producto escalar de la fuerza, $\vec{F}$, por el desplazamiento, $\Delta\vec{r}$.

Atendiendo a la definición del producto escalar de dos vectores,

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha$$

Donde α es el ángulo que forman el vector fuerza y el vector desplazamiento.

④ Consecuencias:

- El trabajo es una magnitud escalar.

- Si no hay desplazamiento, bien porque no hay movimiento o porque la posición inicial y final coinciden, el trabajo realizado por la fuerza es cero.

- El signo del trabajo depende del valor del ángulo α:

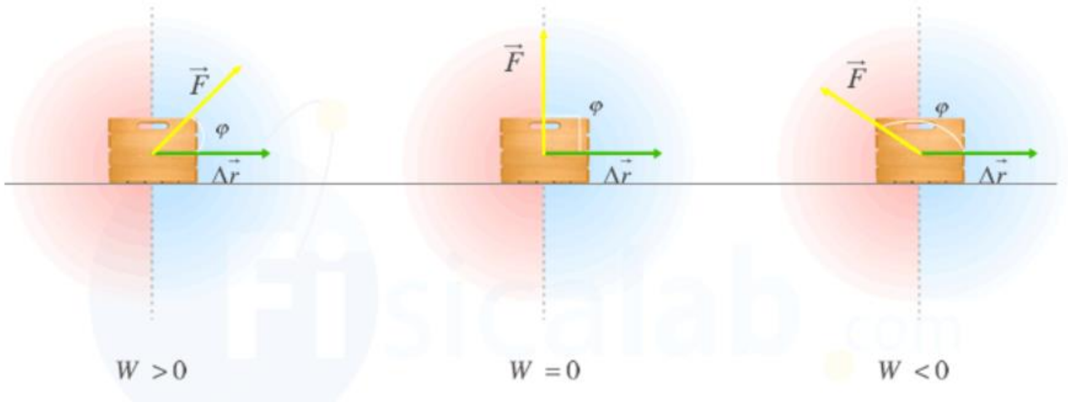
    - $0 \geq \alpha < 90°$ → Trabajo positivo. La fuerza favorece el movimiento.
    - $360° \leq \alpha > 270°$ → Trabajo positivo. La fuerza favorece el movimiento.

    En estos dos casos el trabajo es máximo (positivo) cuando $\alpha = 0°$.

    - $180° \leq \alpha > 90°$ → Trabajo negativo. La fuerza se opone al movimiento.
    - $270° < \alpha \geq 180°$ → Trabajo negativo. La fuerza se opone al movimiento.

    En estos dos casos el trabajo es máximo (negativo) cuando $\alpha = 180°$.

    - $\alpha = 90°$ → Trabajo nulo. La fuerza no realiza trabajo porque es perpendicular al desplazamiento.
    - $\alpha = 270°$ → Trabajo nulo. La fuerza no realiza trabajo porque es perpendicular al desplazamiento.



⑤ Unidad de trabajo.

La unidad de trabajo, como la unidad de energía, es, en el S.I. el Julio (J). Atendiendo a la definición dada para el trabajo y teniendo en cuenta que el coseno de un ángulo no tiene unidades,

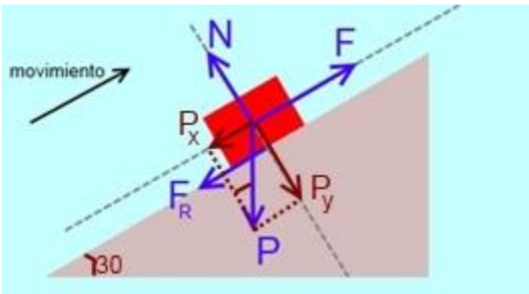
$$W = F \cdot \Delta r \cdot \cos \alpha$$

$$1\, Julio = 1\, Newton \cdot 1\, metro$$

$$1\, J = 1\, N \cdot m \xRightarrow{F=m\cdot a} 1\, J = 1\, kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$$

⑥ Estrategias a la hora de calcular el trabajo: trabajo total y trabajo de una fuerza.

Normalmente sobre un cuerpo no actúa una única fuerza sino varias. Por ejemplo, supongamos un cuerpo que asciende por un plano inclinado debido a la acción de una fuerza F. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo están representadas en la figura siguiente.



- Si deseamos conocer el trabajo que realiza una fuerza concreta es claro que nos debemos centrar solo en dicha fuerza, en el desplazamiento y en el ángulo que forman.

- Si deseamos conocer el trabajo total que recibe el cuerpo tenemos dos posibilidades:

a) Determinar primero la fuerza resultante total, $\sum \vec{F} = \vec{F}_T$. Entonces, el trabajo total será,

$$W_{total} = \vec{F}_T \cdot \Delta\vec{r}$$

b) Determinar el trabajo que realiza cada fuerza por separado, incluso en el caso de fuerzas que no se encuentren en los ejes del sistema de referencia intrínseco, determinar el trabajo que realiza cada una de sus componentes. El trabajo total será la suma cada uno de los trabajos que realiza cada fuerza. En el ejemplo,

$$W_{total} = W_F + W_{P_x} + W_{F_R} + W_{P_y} + W_N$$

Donde es evidente que

$$W_{P_y} = W_N = 0$$

Ya que son fuerzas perpendiculares al desplazamiento.

$$W_{total} = W_F + W_{P_x} + W_{F_R}$$

⑦ Cálculo del trabajo que realiza una fuerza variable. Representación gráfica del trabajo.

Cuando una fuerza es variable a lo largo del recorrido, por ejemplo la fuerza elástica, el trabajo no se puede determinar con la expresión general vista hasta ahora.

Para determinar el trabajo de fuerzas variables se pueden seguir estos pasos:

1) Dividir el desplazamiento en pequeños tramos, cuantos más mejor.

2) En esos tramos se puede considerar que la fuerza ya no es variable, es decir, que prácticamente mantiene su valor.

3) Calcular el trabajo para cada uno de esos tramos.

4) El trabajo total es la suma de todos los trabajos calculados.

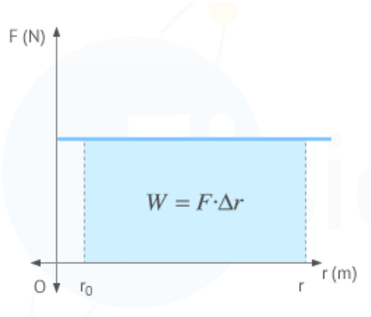
Este procedimiento es tanto más exacto cuanto mayor sea el número de tramos en los que se divida el desplazamiento. Si el desplazamiento en cada tramo es prácticamente nulo, infinitesimal, todos los pasos anteriores formarían parte de lo que en matemáticas se llama Integral:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Sin embargo, el cálculo integral se sale fuera de los contenidos establecidos en 1º de bachillerato y de las pretensiones de estos apuntes.

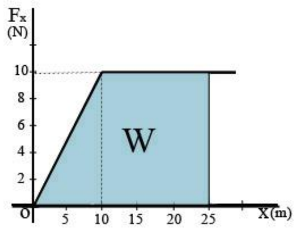
Pero el trabajo también se puede determinar de forma gráfica.

El trabajo de una fuerza (variable o no) es igual al área encerrada bajo la curva en una gráfica que representa la fuerza frente al desplazamiento entre dos posiciones cualesquiera.

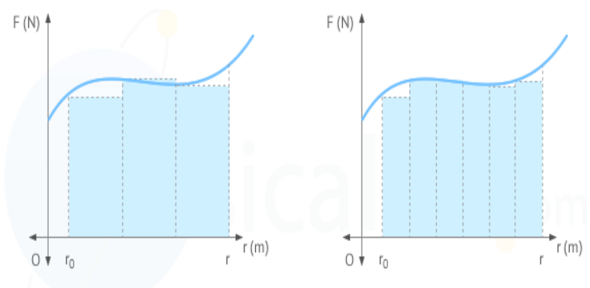


La figura adjunta muestra la gráfica fuerza-desplazamiento para el caso de una fuerza constante. Se puede ver que el área bajo la recta entre las posiciones r y r_0 coincide con el valor del trabajo.

Cuando la fuerza es variable la representación gráfica de la fuerza-desplazamiento puede resultar de una forma tal que también sea posible determinar el área correspondiente de una manera sencilla.



Finalmente, si la representación gráfica da como resultado una curva, se puede proceder dividiendo el desplazamiento en pequeños tramos iguales. Al sumar el área de todos los tramos se obtiene, aproximadamente, el trabajo. Cuantos más estrechos sean los tramos, mejor será la aproximación. Si los tramos son infinitamente pequeños la suma de las áreas coincide con el área bajo la curva.



En definitiva, realizar la integral

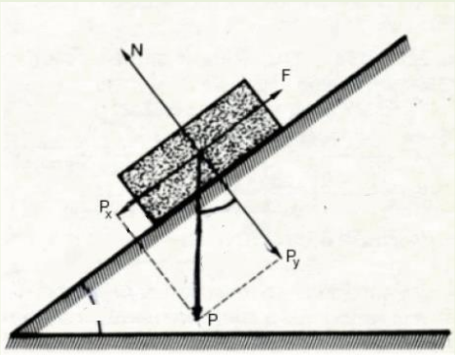
$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Entre dos puntos concretos es lo mismo que hallar el área de la forma descrita.

Problema 1.

¿Qué inclinación ha de tener un plano para que, al empujar, sin rozamiento, un cuerpo de 25 kg sobre él a lo largo de 4 m, se realice un trabajo de 200 J? ¿Cuál es el valor de la fuerza?

Solución:



- Representamos las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo que asciende por el plano.

CONSIDERACIONES IMPORTANTES

- Las fuerzas Normal y P_y son perpendiculares al desplazamiento, por tanto, no realizan trabajo.

- Las fuerzas F y P_x sí que realizan trabajo, pero cada una de estas fuerzas tiene un origen diferente y, por tanto, el trabajo que realizan se debe atribuir a orígenes diferentes.

- El trabajo que realiza la fuerza P_x es realizado por la gravedad, por el campo gravitatorio, por la fuerza gravitatoria.

- El trabajo que realiza la fuerza F es realizado por quien esté empujando el cuerpo hacia arriba, es decir, "nosotros".

- Es claro que la fuerza F mínima para que el cuerpo ascienda debe ser igual en módulo a P_x. Si esto ocurre el cuerpo asciende a velocidad constante.

- En definitiva: el trabajo que realiza la fuerza F es igual al trabajo que realiza P_x, pero ambos trabajos de signos opuestos. Se dice que el trabajo que realiza F es el necesario para vencer la fuerza gravitatoria.

El trabajo que realiza F es dato en el problema,

$$W_F = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F\,\Delta r\ \cos 0 = F\,\Delta r$$

Donde Δr también es dato de problema. Sustituyendo estos valores determinamos F

$$W_F = F\,\Delta r \quad \rightarrow \quad F = \frac{W_F}{\Delta r} = \frac{200}{4} = 50\ N$$

Ahora bien, el trabajo que realiza la gravedad, P_x, es el mismo solo que con signo cambiado (el desplazamiento tiene sentido contrario a P_x):

$$W_{P_x} = \vec{P}_x \cdot \Delta\vec{r} = P_x \cdot \Delta r \cdot \cos 180 = -mg\,\Delta r \text{ sen } \alpha$$

Como

$$W_{P_x} = -W_F = -200\,J$$

Entonces,

$$-200 = -mg\,\Delta r \text{ sen } \alpha$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{-200}{-\,mg\,\Delta r} = \frac{-200}{-\,25 \cdot 9{,}8 \cdot 4} = 0{,}2$$

$$\alpha = \text{arc sen } 0{,}2 = 11{,}8°$$

Problema 2.

Un cuerpo está unido a un muelle horizontal cuya constante elástica es de 5 N/cm. Si inicialmente el muelle está en la posición de equilibrio, ¿hasta dónde debemos tirar del cuerpo para que el trabajo de la fuerza aplicada sea de 0,625 J? ¿Qué trabajo realiza la fuerza elástica?

Considera que no hay rozamiento.

Solución:

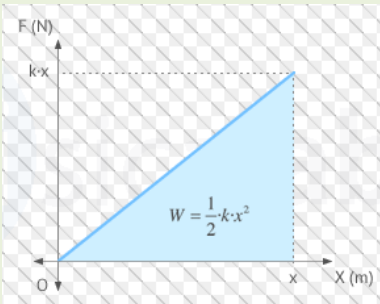
- Representamos las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo cuando estamos tirando con una fuerza $\vec{F}$.

- No se ha representado la fuerza peso y la fuerza normal ya que no realizan trabajo, son perpendiculares al desplazamiento.

- La fuerza que debemos ejercer para estirar el muelle, $\vec{F}$, es variable. Cuanto más se estira el muelle mayor es la fuerza que hay que ejercer.

- Es claro que en todo momento la fuerza que hay que ejercer es igual en módulo y dirección, pero en sentido contrario, a la fuerza elástica que ejerce el muelle. Por tanto, en módulo,

$$F = F_e = k\, x$$



Como vemos, es una fuerza variable. Si representamos gráficamente esta fuerza frente al desplazamiento el trabajo que realiza es igual al área del triángulo

$$W_F = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{x \cdot \, k\, x}{2} = \frac{1}{2}\, k\, x^2$$

Como a través del enunciado conocemos el trabajo, 0,625 J, y la constante del muelle, 5 N/cm = 500 N/m, entonces su estiramiento es,

$$x = \sqrt{\frac{2\, W_F}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}625}{500}} = 0{,}05\ m$$

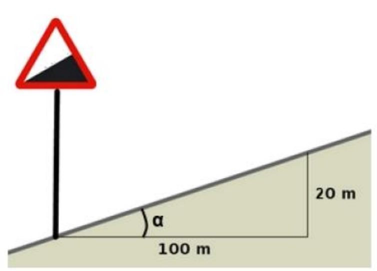
Es claro que el trabajo que realiza la fuerza elástica es el mismo pero de signo contrario al que realiza la fuerza $\vec{F}$, ya que esta fuerza y el desplazamiento forman un ángulo de 180º

$$W_{F_e} = -W_F = -0{,}625\, J$$

Problema 3.

Por un plano inclinado del 20% se traslada un cuerpo de 150 kg con velocidad constante. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento es de 0,3, calcular el trabajo que debemos realizar y el trabajo que realiza cada fuerza aplicada sobre el cuerpo si alcanza una altura de 10 m.

Solución:



Antes de empezar, tres cálculos previos:

1) Un plano inclinado del 20% es aquel que para subir 20 m en vertical necesita avanzar 100 m en horizontal. Con estos datos es posible conocer el ángulo de inclinación del plano.

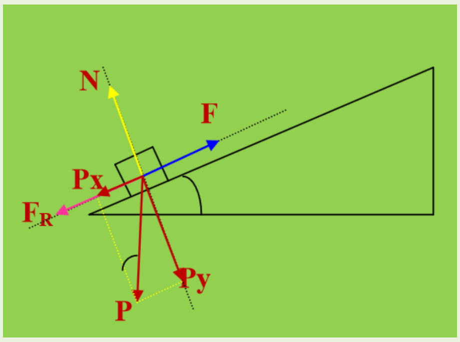
$$\tan\alpha = \frac{20}{100} = 0{,}2$$

$$\alpha = \arctan 0{,}2 = 11{,}3°$$

2) Si el cuerpo alcanza una altura de 10 m, la distancia recorrida sobre el plano, el módulo del desplazamiento, será,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{10}{\Delta r} \quad \rightarrow \quad \Delta r = \frac{10}{\operatorname{sen} 11{,}3} = 51{,}63\ m$$

3) No conocemos el valor de la fuerza F. Representamos todas las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo que asciende por el plano.



Como el cuerpo asciende a velocidad constante, en el eje x del sistema de referencia intrínseco se cumple el primer principio de la dinámica,

$$\sum \vec{F} = 0 \xrightarrow{en\ módulo} F - P_x - F_R = 0$$

$$F - mg\operatorname{sen}\alpha - \mu N = 0 \quad \rightarrow \quad F = mg\operatorname{sen}\alpha + \mu N$$

Por otra parte, en el eje y del sistema de referencia intrínseco no hay movimiento,

$$\sum \vec{F} = 0 \xrightarrow{en\ módulo} N - P_y = 0 \quad \rightarrow \quad N = mg\cos\alpha$$

Por tanto,

$$F = mg\operatorname{sen}\alpha + \mu\, mg\cos\alpha$$

$$F = 150 \cdot 9{,}8 \cdot \operatorname{sen} 11{,}3 + 0{,}3 \cdot 150 \cdot 9{,}8 \cdot \cos 11{,}3 = 720{,}49\ N$$

- Trabajo que realiza la fuerza F.

$$W_F = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F\,\Delta r \cos 0$$

$$W_F = 720{,}49 \cdot 51{,}03 \cdot 1 = 36767\ J$$

Este es el trabajo que debemos realizar "nosotros" para que el cuerpo ascienda a velocidad constante y suba una altura de 10 m.

- Trabajo que realiza la fuerza de rozamiento.

$$W_{F_R} = \vec{F}_R \cdot \Delta\vec{r} = F_R\,\Delta r \cos 180$$

$$W_{F_R} = -\mu\, N\,\Delta r = -\mu\, mg\cos\alpha\ \Delta r$$

$$W_{F_R} = -0,3 \cdot 150 \cdot 9,8 \cdot \cos 11,3 \cdot 51,03 = -22068\, J$$

- Trabajo que realiza la componente x del peso, P_x.

$$W_{P_x} = \vec{P}_x \cdot \Delta\vec{r} = P_x\, \Delta r \cos 180$$

$$W_{P_x} = -mg \text{ sen } \alpha\, \Delta r$$

$$W_{P_x} = -150 \cdot 9,8 \cdot \text{sen } 11,3 \cdot 51,03 = -14699\, J$$

Es evidente que si el cuerpo sube a velocidad constante,

$$W_{F_R} + W_{P_x} = -W_F$$

Es decir, el trabajo que debemos realizar es el equivalente para vencer la gravedad y la fuerza de rozamiento.

- Trabajo que realiza la fuerza normal y la componente y de peso, P_y.

Estas fuerzas no realizan trabajo ya que son perpendiculares al desplazamiento.

En definitiva, en esta situación de equilibrio dinámico (cuerpo que se mueve a velocidad constante), el trabajo total que realizan todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es cero.

3.- Energía cinética

Se denomina energía cinética a la que poseen los cuerpos en movimiento. Depende de la masa y de la velocidad y se define como:

$$Ec = \frac{1}{2} m v^2$$

donde *m* es la masa del cuerpo y *v* es la velocidad del mismo.

Deducción de la expresión. Relación entre trabajo neto y energía cinética.

Para que un cuerpo rígido varíe su velocidad hay que ejercer una fuerza neta sobre él, debe existir una fuerza resultante distinta de cero. El trabajo realizado por esta fuerza, supuesta constante, viene dado por la expresión,

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

donde $\vec{F}$ representa la fuerza resultante. Esta fuerza está provocando un cambio en la velocidad del cuerpo y tiene la misma dirección que el desplazamiento del mismo. Si suponemos que va en el mismo sentido,

$$W = F \cdot \Delta r \cdot \cos 0$$

Si aplicamos el segundo principio de la dinámica,

$$W = m \cdot a \cdot \Delta r$$

Ahora bien, el resultado de esta fuerza neta constante es que el cuerpo tiene un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, el cuerpo incrementa su velocidad durante el desplazamiento realizado,

$$\Delta r = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \frac{(v - v_o)}{t} t^2 = \frac{(v - v_o) \cdot t}{2}$$

Por tanto, el trabajo realizado es

$$W = m \cdot a \cdot \Delta r = m \cdot \frac{(v - v_o)}{t} \cdot \frac{(v - v_o) \cdot t}{2}$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v - v_o)^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_o^2$$

El término $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ queda definido como energía cinética del cuerpo. Por tanto,

$$W = Ec - Ec_o = \Delta Ec$$

Este resultado se suele denominar "teorema de la energía cinética" o "teorema de las fuerzas vivas". Es importante hacer notar que este ***trabajo neto*** así calculado solo depende de las velocidades inicial y final consideradas y no de los estados intermedios.

El trabajo realizado por la ***<u>fuerza resultante</u>*** *aplicada a una partícula o un cuerpo rígido es igual al cambio que experimenta la energía cinética de dicha partícula o cuerpo.*

<u>Unidades</u>

Si las unidades de la masa y la velocidad vienen expresadas en el S.I. entonces la energía cinética resulta en julios.

$$Ec = \frac{1}{2} m v^2 \;\rightarrow\; 1\,J = 1\,kg \cdot 1\,\frac{m^2}{s^2} \;\rightarrow\; J = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$$

Vamos a comprobar esto a partir de la definición de trabajo,

$$W = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha \;\rightarrow\; 1\,J = 1\,N \cdot 1\,m$$

Por otra parte,

$$F = m \cdot a \;\rightarrow\; 1\,N = 1\,kg \cdot 1\,\frac{m}{s^2}$$

Entonces,

$$1\,J = 1\,kg \cdot 1\,\frac{m}{s^2} \cdot 1\,m = 1\,kg \cdot 1\,\frac{m^2}{s^2} \;\rightarrow\; J = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$$

Problema 4.

Un carrito de 1 kg de masa se lanza en línea recta con una velocidad inicial de 2 m/s. Si el carrito empieza a disminuir su velocidad de manera que se detiene completamente después de recorrer 5 m, calcula el trabajo realizado por la fuerza aplicada y el valor de dicha fuerza. ¿De qué fuerza se trata?

Solución:

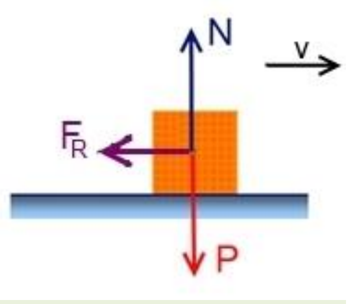
m = 1 kg

v_o = 2 m/s

v = 0

Δx = 5 m

Aclaración importante:



A partir del concepto de trabajo sabemos que sobre un cuerpo que se mueve libremente sobre una superficie se están ejerciendo tres fuerzas. Tanto la fuerza normal como el peso no realizan trabajo ya que son perpendiculares al desplazamiento. La única fuerza que realiza trabajo es la fuerza de rozamiento, que resulta ser la fuerza neta sobre el cuerpo. Como la fuerza de rozamiento tiene sentido contrario al desplazamiento, el trabajo que realiza es negativo.

A partir de los datos del problema es posible determinar el valor de la fuerza de rozamiento aplicando el segundo principio de la dinámica previo cálculo de la aceleración del cuerpo a partir de los datos de velocidad inicial, final y desplazamiento.

Este problema muestra ahora otro camino de resolución a partir del teorema de la energía cinética.

$$W = \Delta Ec$$

Si el cuerpo se para completamente la energía cinética final es cero

$$Si\ v = 0 \ \rightarrow\ Ec = 0$$

Entonces

$$W = Ec - Ec_o = -\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_o^2$$

$$W = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 = -2\,J$$

Ahora podemos calcular el valor de la fuerza neta que se ejerce sobre el cuerpo (fuerza de rozamiento) a partir de la definición de trabajo,

$$W = F_R \cdot \Delta x \cdot \cos 180$$

$$-2 = -F_R \cdot 5 \quad \rightarrow \quad F_R = 0{,}4\,N$$

4.- Energía potencial

① La energía potencial (Ep) es la energía asociada a la posición que ocupa un cuerpo en un campo de fuerzas conservativo (fuerza conservativa).

② *Fuerzas conservativas*.

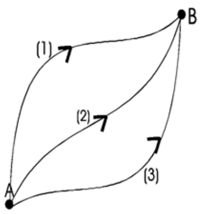
- Una fuerza es conservativa cuando el trabajo que realiza para mover un cuerpo entre dos posiciones no depende del camino seguido, solamente depende de la posición inicial y la posición final. El trabajo que realiza la fuerza es independiente del camino seguido por el cuerpo.

- Una fuerza es conservativa cuando el trabajo que realiza la fuerza para mover un cuerpo en un camino cerrado (un movimiento en el que el punto inicial y el punto final coinciden) es cero.

- Las fuerzas conservativas son fuerzas centrales, es decir, son fuerzas que están dirigidas a lo largo de una recta radial a un centro fijo y cuya magnitud sólo depende de la coordenada radial.

    - Son fuerzas conservativas la fuerza gravitatoria, la fuerza elástica y la fuerza electrostática.

    - No son fuerzas conservativas la fuerza magnética o la fuerza de rozamiento. En las fuerzas no conservativas el trabajo realizado por las mismas sí depende del camino seguido.



La fuerza que interviene para mover un cuerpo desde A hasta B por los caminos 1, 2 ó 3 es conservativa si:

$$(W_a^b)_1 = (W_a^b)_2 = (W_a^b)_3$$

Además, por ejemplo,

$$(W_a^b)_1 + (W_b^a)_2 = 0$$

$$(W_a^b)_2 + (W_b^a)_2 = 0, \quad etc.$$

③ Cuando se calcula el trabajo que realiza una fuerza conservativa entre dos posiciones diferentes aparece una expresión con unos términos que se definirán como energía potencial asociada a dicha fuerza conservativa.

Solo las fuerzas conservativas dan origen a la energía potencial

Es decir, existe una energía potencial gravitatoria, energía potencial elástica o energía potencial electrostática porque las tres fuerzas correspondientes son conservativas.

④ Cuando se calcula el trabajo que realiza una fuerza conservativa entre dos posiciones diferentes (desde A hasta B) se cumple el llamado Teorema de la Energía Potencial:

$$W_A^B = -\Delta Ep = -(Ep_B - Ep_A)$$

⑤ Signo del trabajo que realiza una fuerza conservativa:

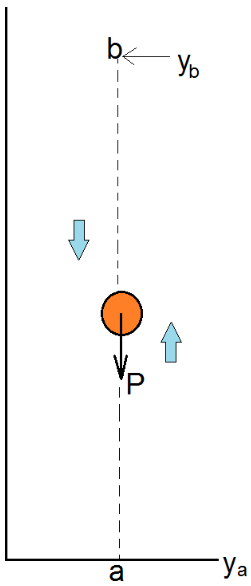
- Si $W_A^B = -\Delta Ep < 0$, entonces la fuerza conservativa se opone al movimiento planteado. Si tal movimiento se desea realizar es necesario realizar un trabajo externo que como mínimo debe ser igual a W_A^B en valor, pero de signo contrario.

- Si $W_A^B = -\Delta Ep < 0$, entonces no se opone al movimiento planteado. No es necesario realizar un trabajo externo para que el movimiento tenga lugar.

Veremos a continuación cómo se cumplen estas ideas planteadas en situaciones en las que intervienen dos fuerzas conservativas: la fuerza gravitatoria y/o la fuerza elástica.

Energía potencial gravitatoria

Supongamos que se lanza un objeto hacia arriba. El objeto alcanza una altura máxima y luego cae. Vamos a calcular el trabajo total realizado por la fuerza gravitatoria, que está actuando sobre el cuerpo continuamente. En estas consideraciones se está despreciando cualquier resistencia del aire al movimiento.



En la figura adjunta, a es el punto de partida, situado a una altura y_a respecto de la superficie, b es el punto más alto que alcanza el objeto, situado a una altura y_b. Vamos a determinar el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria (peso) mientras el cuerpo sube y cuando el cuerpo baja.

- Cuerpo subiendo:

$$W_a^b = \vec{P} \cdot \Delta\vec{r} = P \cdot \Delta \mathrm{r} \cdot \cos 180 = -mg(y_b - y_a)$$

- Cuerpo bajando:

$$W_b^a = \vec{P} \cdot \Delta\vec{r} = P \cdot \Delta \mathrm{r} \cdot \cos 0 = mg(y_b - y_a)$$

Hacer notar que en los dos casos Δr es $(y_b - y_a)$ ya que es el módulo del desplazamiento (siempre positivo).

- El trabajo total será:

$$W_T = W_a^b + W_b^a = 0$$

Como vemos, el trabajo realizado a través de una línea cerrada (trayectoria cerrada que empieza y termina en el mismo punto) es cero, la fuerza gravitatoria es conservativa.

La **energía potencial gravitatoria** se define como,

$$Ep = mgy \quad \text{o también} \quad Ep = mgh$$

Siendo y o h la altura considerada desde el punto que se ha elegido como origen de alturas.

Esta expresión es en realidad una aproximación. Se puede utilizar siempre que el valor de g se mantenga constante, circunstancia que ocurre para pequeñas variaciones de altura, de unos pocos kilómetros a lo sumo.

Según la definición de energía potencial gravitatoria, el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria del ejemplo cuando el cuerpo sube es,

$$W_a^b = -\mathrm{mg}(\mathrm{y_b} - \mathrm{y_a}) = -(mgy_b - mgy_a) = -(Ep_b - Ep_a) = -\Delta Ep$$

Que es el teorema de la energía potencial. También se puede ver que, mientras el cuerpo sube,

$$W_a^b < 0$$

Es decir, la fuerza gravitatoria se opone al movimiento y la energía potencial del cuerpo está aumentando.

Si planteamos ahora el teorema para el cuerpo que cae,

$$W_b^a = -\Delta Ep = -(Ep_a - Ep_b) = mgy_b - mgy_a$$

Donde $y_b > y_a$, por tanto,

$$W_b^a > 0$$

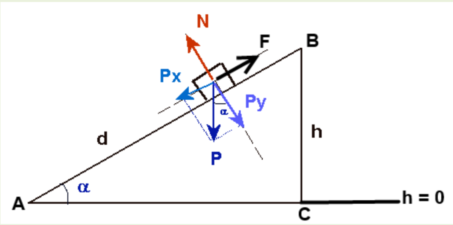
Es decir, la fuerza gravitatoria realiza trabajo a costa de una pérdida de energía potencial.

Problema 5.

Calcula el trabajo que realiza la gravedad cuando levantamos 2 m un cuerpo de 5 kg en los casos: a) Verticalmente; b) Por una rampa inclinada 60º

Solución:

Planteamiento de la situación en el siguiente esquema:



Donde

α = 60º

h = 2 m

d = h/sen α = 2/sen 60 = 2,31 m

Como la fuerza gravitatoria es conservativa, el trabajo que realiza no depende del camino seguido, sólo depende del punto inicial y del punto final. Se aplica el teorema de la energía potencial,

$$W_A^B = W_C^B = -\Delta Ep = -(Ep_B - Ep_A)$$

Para el origen de alturas establecido en la figura, $Ep_A = 0$. Así,

$$W_A^B = W_C^B = -\Delta Ep = -(Ep_B) = -m\,g\,h = -5 \cdot 9{,}8 \cdot 2 = -98\,J$$

El trabajo es negativo ya que la fuerza peso, más concretamente su componente x, se opone a la elevación del peso. Si queremos que el cuerpo ascienda debemos realizar una fuerza externa (F en la figura) tal que como mínimo realice un trabajo igual al que realiza la fuerza gravitatoria pero de signo contrario,

$$W_F = 98\,J \ \ (Fuerza\ externa)$$

Ampliación: se puede comprobar el resultado calculando el trabajo ***que realiza el peso*** por cada uno de los caminos planteados.

a) Verticalmente, desde C hasta B: el peso se dirige hacia abajo y el desplazamiento hacia arriba:

$$W_C^B = \vec{P} \cdot \Delta\vec{r} = mg \cdot \Delta r \cdot \cos 180 = -m\,g\,h = -5 \cdot 9{,}8 \cdot 2 = -98\,J$$

b) Por el plano inclinado, desde A hasta B: la componente y del peso, P_y, no realiza trabajo ya que es perpendicular al desplazamiento. El trabajo que realiza el peso se debe a la componente P_x

$$W_A^B = \vec{P_x} \cdot \Delta\vec{r} = P_x \cdot d \cdot \cos 180 = -\,mg\ \mathrm{sen}\ \alpha \cdot \frac{h}{\mathrm{sen}\ \alpha} = -m\,g\,h = -98\,J$$

Como vemos, el trabajo que realiza la fuerza peso no depende del camino seguido, sólo depende del punto de partida y el punto de llegada.

Energía potencial elástica.

Al igual que en el caso de la energía potencial gravitatoria, para encontrar su expresión vamos a determinar el trabajo que la fuerza elástica realiza cuando un muelle horizontal se estira una distancia determinada, *x*, respecto de su posición de equilibrio.

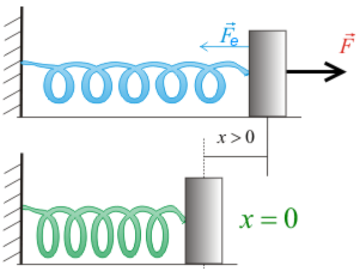
Durante este desplazamiento la fuerza elástica es variable; el trabajo que realiza se puede determinar gráficamente. Este cálculo ya se ha realizado en estos apuntes, en el problema nº 2, página 7.

A partir de dicho problema podemos establecer que la expresión de la **energía potencial elástica** es,

$$Ep = \frac{1}{2}\, K\, x^2$$

Donde K es la constante de elasticidad del muelle (en $N{\cdot}m^{-1}$).

Como la fuerza elástica es conservativa, el teorema de la energía potencial se cumple. Analicemos como ejemplo el trabajo que realiza la fuerza elástica cuando un muelle se estira una distancia x desde la posición de equilibrio.



$$W_A^B = -\Delta Ep = -(Ep_B - Ep_A)$$

En este caso la posición A es la posición de equilibrio, x = 0 y la energía potencial en dicha posición es nula:

$$Ep_A = 0$$

Entonces,

$$W_A^B = -(Ep_B) = -\frac{1}{2}\, K\, x^2$$

$$W_A^B < 0$$

El trabajo de la fuerza elástica es negativo, es decir, se opone a este desplazamiento. Es necesario realizar un trabajo externo, de la fuerza F (esquema) que como mínimo debe ser igual y de signo contrario al que realiza la fuerza elástica,

$$W_F = -W_A^B \ \ (Fuerza\ externa)$$

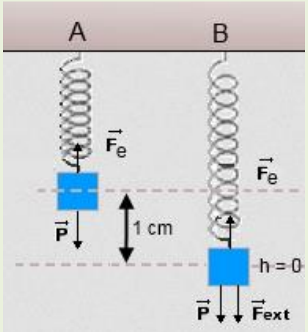
Problema 6.

De un muelle de constante elástica K = 8 N/cm se cuelga una bola metálica de 250 g. Una vez alcanzado el equilibrio, calcula el trabajo que debemos efectuar para bajar 1 cm más la bola.

Solución:

Ponemos primero las cantidades dadas en unidades del S.I.

$K = 8\ N \cdot cm^{-1} = 800\ N \cdot m^{-1}$
$m = 250\ g = 0{,}25\ kg$
$y = 1\ cm = 0{,}01\ m$



La situación aparece representada en la figura adjunta. En el primer caso (A) se produce un equilibrio estático en el que la fuerza elástica y la fuerza peso están igualadas en módulo. Para alargar el muelle 1 cm más, es necesaria otra fuerza externa, F_{ext}. En el segundo caso (B) también hay un equilibrio estático en el que la fuerza peso y la fuerza externa igualan (su suma) en módulo a la fuerza elástica.

En la figura también se ha establecido el origen de alturas.

Hay que tener en cuenta que en la situación A, el muelle ya está desplazado de su posición de equilibrio una distancia, *y,* que se debe determinar. Tal como se ha dicho, en módulo,

$$F_e = P \quad \rightarrow \quad K\,y = mg \quad \rightarrow \quad y = \frac{mg}{K} = \frac{0{,}25 \cdot 9{,}8}{800} = 0{,}0031\ m$$

Tanto la fuerza elástica como la fuerza peso son conservativas, para ellas se cumple que,

$$W_A^B = -\Delta Ep = -(Ep_B - Ep_A)$$

Donde,

$$Ep_B = Ep_{B(gravitatoria)} + Ep_{B(elástica)}$$

Para el origen de alturas establecido, $Ep_{B(gravitatoria)} = 0$. Entonces,

$$Ep_B = Ep_{B(elástica)} = \frac{1}{2} K\,y'^2$$

Donde y' = y + 0,01 = 0,0031 + 0,01 = 0,0131 m

$$Ep_B = \frac{1}{2} K\,y'^2 = \frac{1}{2} \cdot 800 \cdot 0{,}0131^2 = 0{,}0686\ J$$

Por otra parte

$$Ep_A = Ep_{A(gravitatoria)} + Ep_{A(elástica)}$$

Para el origen de alturas establecido,

$$Ep_{A(gravitatoria)} = mg\,h = 0{,}25 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}01 = 0{,}0245\ J$$

$$Ep_{A(elástica)} = \frac{1}{2}\,K\,y^2 = \frac{1}{2} \cdot 800 \cdot 0{,}0031^2 = 0{,}0038\ J$$

$$Ep_A = 0{,}0245 + 0{,}0038 = 0{,}0283\ J$$

Por tanto,

$$W_A^B = -(Ep_B - Ep_A) = -(0{,}0686 - 0{,}0283) = -\,0{,}0403\ J$$

Vemos que el trabajo que realizan las fuerzas conservativas es negativo, por tanto, es necesario que la fuerza externa sea tal que realice al menos un trabajo igual pero de signo contrario para poder estirar el muelle 1 cm,

$$W_{F_{ext}} = 0{,}0403\ J$$

5.- Conservación de la energía mecánica

Se llama energía mecánica de un sistema a la suma de la energía cinética y la energía potencial

$$Em = Ec + Ep$$

El principio de conservación de la energía mecánica dice:

Si sobre un sistema sólo actúan fuerzas conservativas, la energía mecánica del sistema se mantiene constante

Deducción:

Tenemos dos teoremas que se pueden aplicar cuando un cuerpo se mueve desde un punto a otro gracias a la acción de una fuerza conservativa:

- Teorema de la energía cinética, $W_1^2 = \Delta Ec$

- Teorema de la energía potencial, $W_1^2 = -\Delta Ep$

Si ambas expresiones representan el mismo trabajo,

$$\Delta Ec = -\Delta Ep$$

$$\Delta Ec + \Delta Ep = 0$$

$$Ec_2 - Ec_1 + Ep_2 - Ep_1 = 0$$

$$Ec_2 + Ep_2 - (Ec_1 + Ep_1) = 0$$

$$Em_2 - Em_1 = 0$$

$$\Delta Em = 0$$

Este principio sólo se puede utilizar si en el sistema no intervienen fuerzas no conservativas. Sin embargo las fuerzas no conservativas, a menudo llamadas fuerzas disipativas (disipan energía en forma de calor) son de lo más habitual (fuerza de rozamiento). Cuando en un sistema se tengan en cuenta estas fuerzas disipativas, el principio de conservación de la energía mecánica debe ser modificado.

Como el trabajo que se realiza sobre un cuerpo es igual a la suma de los trabajos que realizan cada una de las fuerzas que actúan sobre él, podemos poner,

$$W_T = W_c + W_{nc}$$

Donde W_c es el trabajo que realiza todas las fuerzas conservativas (gravitatoria, elástica, etc.) y W_{nc} es trabajo que realizan las fuerzas no conservativas (fundamentalmente la fuerza de rozamiento). Los teoremas de la energía cinética y energía potencial se aplican de la siguiente forma:

$$W_c = -\Delta Ep$$

$$W_T = \Delta Ec$$

Por tanto,

$$\Delta Ec = -\Delta Ep + W_{nc}$$

$$\Delta Ec + \Delta Ep = W_{nc}$$

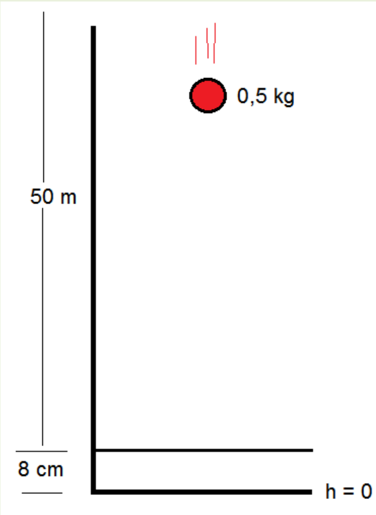
$$\Delta Em = W_{nc}$$

El trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es igual a la variación de la energía mecánica. Es decir, la energía mecánica no se mantiene constante.

Problema 7.

Desde una altura de 50 m se deja caer un cuerpo de 500 g. Si al llegar al suelo penetra en este una distancia de 8 cm, calcula la resistencia media que ha ofrecido el suelo. ¿En qué se ha empleado la energía mecánica que poseía el cuerpo? Se desprecia la resistencia del aire.

Solución:



Inicialmente

El cuerpo tiene energía potencial gravitatoria. No tiene energía cinética pues su velocidad inicial es cero, tal como menciona el enunciado).

$$Em_i = Ep_i = mgh$$

Final

El cuerpo ha transformado su energía potencial inicial en energía calorífica principalmente, es decir, la energía mecánica se ha invertido en vencer la fuerza de rozamiento durante 8 cm.

$$Em_f = 0$$

Por tanto, la variación de energía potencial

$$\Delta Em = Em_f - Em_i = -mgh = -0{,}5 \cdot 9{,}8 \cdot 50{,}08 = -245{,}5\,J$$

Al existir una fuerza no conservativa, la fuerza de resistencia del suelo,

$$\Delta Em = W_{nc}$$

Donde W_{nc} es el trabajo que realiza la fuerza de resistencia,

$$W_{nc} = \vec{F}_R \Delta\vec{r} = F_R\,\Delta r \cos 180 = -F_R\,\Delta r = -\,0{,}08\,F_R$$

$$\Delta Em = W_{nc} \quad \rightarrow \quad -245{,}5 = -\,0{,}08\,F_R$$

$$F_R = 3067\,N$$

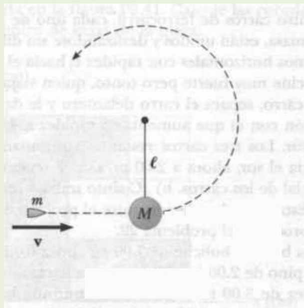
Problema 8. Choque elástico

Una masa colgante en reposo de 1 kg recibe el impacto horizontal de un proyectil de 80 g que se mueve a 50 m/s. Si el choque es elástico, ¿qué pasará después del impacto?

*Un **choque elástico** es una colisión entre dos o más cuerpos en la que éstos no sufren deformaciones permanentes durante el impacto. En una colisión elástica se conservan tanto el momento lineal como la energía cinética del sistema, y no hay intercambio de masa entre los cuerpos, que se separan después del choque.*

Solución:

La figura adjunta muestra la situación inicial, antes del impacto.



En un choque elástico se cumplen dos principios, el principio de conservación del momento lineal y el principio de conservación de la energía mecánica.

Empezaremos por la conservación del momento lineal en el sistema proyectil-masa colgante.

$$\Delta \vec{p} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{p}_o = \vec{p}$$

Vemos que:

- El movimiento es en horizontal
- La masa M está inicialmente en reposo
- El choque es elástico, los dos cuerpos permanecen separados después del choque.

Por tanto,

$$\vec{p}_{o\,(proyectil)} = \vec{p}_{proyectil} + \vec{p}_{masa\ colgante}$$

$$m\,\vec{v}_{o\,(p)} = m\,\vec{v}_{(p)} + M\,\vec{v}_{(M)} \quad \rightarrow \quad 0{,}08 \cdot 50\,\hat{\imath} = 0{,}08\,v_{(p)}\hat{\imath} + 1 \cdot v_{(M)}\,\hat{\imath}$$

$$4 = 0{,}08\,v_{(p)} + v_{(M)}$$

Donde $v_{(p)}$ es el módulo de la velocidad del proyectil y $v_{(M)}$ es el módulo de la velocidad de la masa colgante, ambas inmediatamente después del impacto. Tenemos dos incógnitas en esta ecuación.

El principio de conservación de la energía mecánica se reduce a la conservación de la energía cinética mientras estamos considerando el problema en horizontal, antes del impacto e inmediatamente después del mismo.

$$\Delta Ec = 0$$

$$Ec_{o\,(p)} + Ec_{o\,(M)} = Ec_{(p)} + Ec_{(M)}$$

$$\frac{1}{2}\,m\,v_{o\,(p)}^2 = \frac{1}{2}\,m\,v_{(p)}^2 + \frac{1}{2}\,M\,v_{(M)}^2 \quad \rightarrow \quad 0{,}08 \cdot 50^2 = 0{,}08\,v_{(p)}^2 + 1 \cdot v_{(M)}^2$$

$$200 = 0{,}08\,v_{(p)}^2 + v_{(M)}^2$$

Si resolvemos el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas obtenemos las siguientes soluciones:

$$v_{(p)} = -42{,}7\ m/s$$
$$v_{(M)} = 7{,}4\ m/s$$

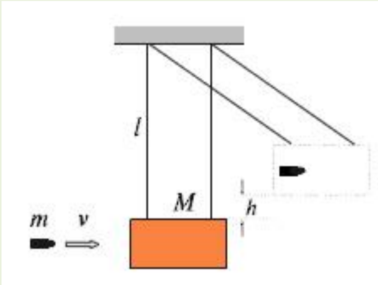
Es decir, el proyectil rebota en sentido contrario y la masa colgante sale despedida en sentido positivo a una velocidad de 7,4 m/s. Como la masa está colgada de una cuerda, se elevará una cierta altura que se puede calcular aplicando de nuevo el principio de conservación de la energía mecánica, tal como se hace en el problema siguiente sobre el péndulo balístico.

Problema 9. Choque inelástico. Péndulo balístico

Se dispara una bala de 0,01 kg de masa contra un péndulo balístico de 2 kg de masa, la bala se incrusta en el péndulo y éste se eleva 12 cm medidos verticalmente, ¿cuál era la velocidad inicial de la bala?

Un ***choque inelástico*** *es un tipo de choque en el que la energía cinética no se conserva. Como consecuencia, los cuerpos que colisionan pueden sufrir deformaciones y aumento de su temperatura. En el caso ideal de un choque perfectamente inelástico entre objetos macroscópicos, estos permanecen unidos entre sí tras la colisión.*

La principal característica de este tipo de choque es que existe una disipación de energía, ya que tanto el trabajo realizado durante la deformación de los cuerpos como el aumento de su energía interna se obtiene a costa de la energía cinética de los mismos antes del choque. En cualquier caso, aunque no se conserve la energía cinética, sí se conserva el momento lineal total del sistema.



Solución:

Un péndulo balístico es un dispositivo que permite determinar la velocidad de un proyectil.

Este péndulo está constituido por un bloque grande de madera, de masa M, suspendido mediante dos hilos verticales, como se ilustra en la figura. El proyectil, de masa m, cuya velocidad v se quiere determinar, se dispara horizontalmente de modo que choque y quede incrustado en el bloque de madera. Si el tiempo que emplea el proyectil en quedar detenido en el interior del bloque de madera es pequeño en comparación con el período de oscilación del péndulo (bastará con que los hilos de suspensión sean suficientemente largos), los hilos de suspensión permanecerán casi verticales durante la colisión. Si el centro de masa del bloque asciende a una altura h después de la colisión. Entonces, conocidos las masas del proyectil y del bloque y el ascenso de este después del choque, la velocidad del proyectil puede ser calculada.

En nuestro caso,

M = 2 kg
m = 0,01 kg
h = 0,12 m

El choque es inelástico, tal como comprobaremos al final del problema. El principio de conservación de la cantidad de movimiento se cumple entre el instante inicial y el instante en el que la bala ha quedado incrustada en la madera, pero el bloque aún no ha empezado a ascender. Entre estos dos instantes, con movimiento horizontal, el principio establece que,

$$\Delta\vec{p} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{p}_o = \vec{p}$$

Inicialmente el bloque está quieto y finalmente el bloque y la bala son un solo cuerpo.

$$mv_o\,\hat{\imath} = (m+M)v\,\hat{\imath}$$

De donde,

$$v_o = \frac{(m+M)\,v}{m} = \left(1+\frac{M}{m}\right)\,v$$

Consideramos ahora el movimiento del péndulo desde su posición vertical hasta su máxima desviación. En este movimiento sí se cumple el principio de conservación de la energía mecánica. El origen de alturas el centro de masas del cuerpo m+M cuando está totalmente vertical, siendo su velocidad en este instante v. En el instante final el cuerpo se ha parado cuando su centro de masas se ha elevado una altura h. Entonces,

$$\Delta E_m = 0 \quad \rightarrow \quad \cancel{Ec} + Ep = Ec_o + \cancel{Ep_o}$$

$$(m+M)g\,h = \frac{1}{2}(m+M)v^2$$

$$v = \sqrt{2\,g\,h}$$

Por tanto, la expresión de la velocidad de la bala obtenida de la aplicación del principio de conservación del momento lineal,

$$v_o = \left(1 + \frac{M}{m}\right)\, v = \left(1 + \frac{M}{m}\right)\, \sqrt{2\,g\,h}$$

Sustituyendo valores,

$$v_o = \left(1 + \frac{2}{0{,}01}\right)\sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}12} = 308{,}26\, m/s$$

Se puede calcular la energía disipada en la deformación de la madera y en el aumento de su energía interna (temperatura) cuando se incrusta la bala (choque inelástico). Será la diferencia entre la energía del sistema al inicio (energía cinética de la bala) y la energía del sistema al final (energía potencial del conjunto).

$$Energía\ disipada = Ec_{bala} - Ep_{bloque-bala}$$

En nuestro caso,

$$Energía\ disipada = \frac{1}{2}\, m\, v_o^2 - (m + M) g\, h$$

$$Energía\ disipada = \frac{1}{2} \cdot 0{,}01 \cdot 308{,}26^2 - (0{,}01 + 2) \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}12 = \ 472{,}76\, J$$

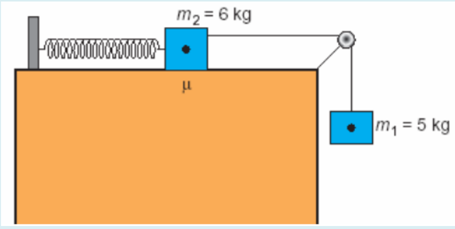
Energía que representa el

$$\frac{472{,}76}{475{,}12} \cdot 100 = 99{,}5\ \%$$

De la energía cinética inicial de la bala.

Problema 10.

En el dispositivo de la figura, el muelle tiene una constante elástica K = 1000 N/m y el coeficiente de rozamiento de la masa m_2 con la superficie de la mesa vale 0,1. Si, inicialmente, el muelle se encuentra en reposo, calcula la ecuación que proporciona el alargamiento máximo.



Solución:

Inicio

El sistema parte del reposo (v_o = 0) y, según el enunciado, el muelle no está estirado (x = 0). Con estos datos podemos establecer que inicialmente la energía mecánica del sistema es la energía potencial correspondiente a la altura (h_o) a la que se encuentre la masa m_1, es decir,

$$Em_o = Ep_o = m_1 g h_o$$

Final

La energía potencial de la masa m_1 es la que hace moverse al sistema, que empieza a acelerar y el muelle a estirarse hasta que el sistema se detiene (v = 0) con un estiramiento máximo del muelle (x). En estas condiciones la energía mecánica del sistema corresponde a la energía potencial de m_1 debido a la nueva altura a la que se encuentre (h) y energía potencial elástica del muelle, es decir,

$$Em = Ep_{gravitatoria} + Ep_{elástica}$$

$$Em = m_1gh + \frac{1}{2}Kx^2$$

Por tanto,

$$\Delta Em = Em - Em_o = m_1gh + \frac{1}{2}Kx^2 - m_1gh_o$$

$$\Delta Em = m_1g(h - h_o) + \frac{1}{2}Kx^2 = -m_1gx + \frac{1}{2}Kx^2$$

Ya que la variación en altura de m_1 es igual al alargamiento que se produce en el muelle, pero su valor es negativo porque $h < h_o$.

Entre el instante inicial y el final interviene una fuerza no conservativa (fuerza de rozamiento), por tanto,

$$\Delta Em = W_{nc}$$

Donde W_{nc} es el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento, es decir,

$$W_{nc} = F_R x \cos 180 = -\mu N x = -\mu m_2 g x$$

Donde la distancia que recorre m_2 en horizontal es igual al alargamiento que se produce en el muelle.

Igualando la variación de energía mecánica con el trabajo no conservativo:

$$-m_1gx + \frac{1}{2}Kx^2 = -\mu m_2 g x$$

$$-49 \cdot x + \frac{1}{2}\,1000\,x^2 = -5{,}88 \cdot x$$

$$-43{,}12 \cdot x + 500\,x^2 = 0 \qquad x\,(500x - 43{,}12) = 0$$

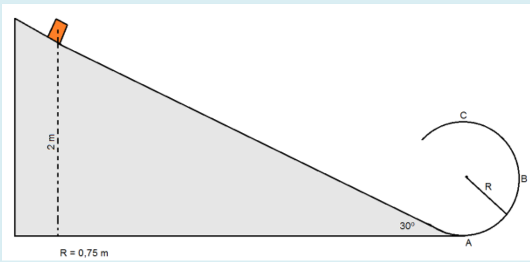
Soluciones:

$$x = 0\ (situación\ inicial)$$

$$x = 0{,}086\,m\ \ (situación\ final)$$

Problema 11.

En lo alto de un plano de 2 m de altura y 30º de inclinación se coloca una masa de 0,5 kg. Al final del plano se encuentra un aro circular como indica la figura. En todo el recorrido no existe rozamiento. Calcula:



a) La velocidad de la masa en los puntos A, B y C.

b) ¿Desde qué altura sobre el plano se debe dejar caer la masa para que al llegar a C no ejerza ninguna fuerza sobre el aro?

Solución:

Dado que no existe rozamiento, la caída del objeto por el plano se debe exclusivamente a una fuerza conservativa, la gravedad. En estas condiciones de cumple el principio de conservación de la energía mecánica,

$$\Delta Em = 0$$

La aplicación de este principio al punto A,

$$Em_A - Em_o = 0 \quad \rightarrow \quad Ep_A + Ec_A - Ep_o - Ec_o = 0$$

La energía cinética inicial (Ec_o) es en todos los casos cero pues el cuerpo parte del reposo. La energía potencial en A (Ep_A) es cero si consideramos que la base del plano inclinado es el origen de alturas. Por tanto,

$$Ec_A - Ep_o = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_A^2 - mgh_o = 0 \quad \rightarrow \quad v_A^2 = \sqrt{2gh_o} = 6{,}26\, m/s$$

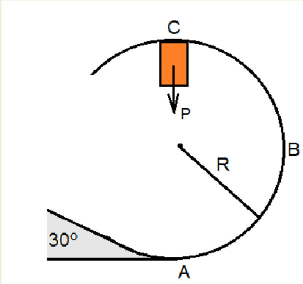
En A toda la energía potencial inicial se ha convertido en energía cinética.

La aplicación del principio de conservación de la energía mecánica a B, teniendo en cuenta lo ya mencionado quedará,

$$Em_B - Em_o = 0 \quad \rightarrow \quad Ep_B + Ec_B - Ep_o = 0$$

En B parte de la energía cinética que el cuerpo tenía en A se ha vuelto a convertir en energía potencial,

$$mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2 - mgh_o = 0 \quad \rightarrow \quad v_B^2 = \sqrt{2g(h_o - R)} = 4{,}95\, m/s$$



El procedimiento en C es idéntico al caso anterior pero h_C = 2R, por tanto,

$$v_C^2 = \sqrt{2g(h_o - 2R)} = 3{,}13\, m/s$$

b) "Rizar el rizo"

La velocidad mínima en C para no caer es tal que el cuerpo no "toca" el aro, es decir, no hay una fuerza normal del aro sobre el cuerpo. En estas condiciones, siendo un movimiento circular, la fuerza peso ejerce de fuerza central, es decir,

$$F_c = P \quad \rightarrow \quad ma_c = mg$$

$$\frac{v^2}{R} = g \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{gR} = 2{,}7\, m/s \quad (= v_C)$$

Para que llegue al punto C con esa velocidad, haciendo las mismas consideraciones que en el apartado anterior, la altura a la que se debe dejar caer es,

$$Em_C - Em_o = 0 \quad \rightarrow \quad Ep_C + Ec_B - Ep_o = 0$$

$$mgh_C + \frac{1}{2}mv_C^2 - mgh_o = 0 \quad \rightarrow \quad h_o = 2R + \frac{v_C^2}{2g} = 1{,}87\, m$$

6.- Potencia

El concepto de trabajo no tiene en cuenta el tiempo que se tarda en realizar. Esto implica que, por ejemplo, si queremos subir una caja desde la planta baja hasta la tercera planta, realizamos el mismo trabajo si lo hacemos en tres minutos o en tres años.

Así, el concepto de potencia surge cuando se quiere expresar la rapidez con que se realiza un trabajo.

$$Potencia = \frac{trabajo\ realizado}{tiempo\ empleado}$$

$$P = \frac{W}{t}$$

Unidades

- La unidad de potencia en el S. I. es el vatio (W), que se define como la potencia necesaria para realizar un trabajo de un julio en un segundo,

$$P = \frac{W}{t} \quad \rightarrow \quad 1\ vatio = \frac{1\ julio}{1\ segundo} \quad \rightarrow \quad 1\ W = {}^{1\ J}/_{1\ s}$$

- Otras unidades muy utilizadas en diversos ámbitos, tanto para trabajo y energía, como para la potencia son:

- *Kilovatio-hora (kWh),* es una unidad de *TRABAJO (Energía)*. Se define como el trabajo realizado con una potencia de 1 kW durante 1 hora. Por tanto,

$$P = \frac{W}{t} \quad \rightarrow \quad W = P \cdot t \quad \rightarrow \quad Trabajo = Potencia \cdot tiempo$$

$$1\ kWh = \ 1\ kW \cdot 1\ hora$$

si ponemos unidades en el S.I.

$$1\ kWh = 1\ \cancel{kW} \cdot \frac{1000\ W}{1\ \cancel{kW}} \cdot 1\ \cancel{h} \cdot \frac{3600\ s}{1\ \cancel{h}} = 3{,}6 \cdot 10^6\ J$$

- *Caballo de vapor (CV),* es una unidad de *POTENCIA*. Históricamente (James Watt, 1736-1819) un caballo de vapor es la ponencia de una máquina de vapor que en una mina realiza el mismo trabajo que un caballo. Hoy día la equivalencia en vatios se ha ponderado como,

$$1\ CV = 736\ W$$

- Caballo de potencia (HP), es una unidad de POTENCIA.

$$1\ HP = 746\ W$$

Otras consideraciones:

① *Potencia motriz* a velocidad constante. En las situaciones en que un móvil se mueve en línea recta a velocidad constante gracias a la acción de una fuerza motriz (que iguala a las fuerzas que se oponen al movimiento), podemos encontrar una relación entre la potencia y la velocidad,

$$P_{motriz} = \frac{W_m}{t} = \frac{F_m \cdot \Delta r}{t} = F_m \cdot v$$

Donde W_m es el trabajo que realiza la fuerza motriz, F_m.

Esta expresión se puede utilizar por ejemplo, en las siguientes situaciones:

- Un automóvil se mueve en horizontal en línea recta a una velocidad constante. En este caso la fuerza motriz, que ejerce el motor, es igual en módulo a la fuerza de rozamiento.
- Un automóvil asciende por un plano inclinado a velocidad constante. En este caso la fuerza motriz, que ejerce el motor es igual en módulo a la suma de la fuerza de rozamiento y la componente tangencial del peso, P_x.

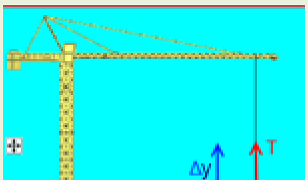
② *Rendimiento de una máquina.* La potencia teórica de un motor no suele coincidir con la potencia real que desarrolla en su trabajo. Por este motivo se establece el concepto de *rendimiento de una máquina* como

$$rendimiento = \frac{potencia\ real}{potencia\ teórica} \cdot 100$$

Problema 12.

El motor de una grúa debe elevar un bloque, cuya masa es de 250 kg, hasta una altura de 25 m. Calcula el trabajo que realiza y la potencia que desarrolla si es capaz de efectuar dicho trabajo en 15 s. Si su potencia teórica, especificada en una etiqueta en el motor, es de 6500 W ¿cuál es su rendimiento?

Solución:



Datos:
m = 250 kg
Δy = 25 m
t = 15 s
$P_{teórica}$ = 6500 W

El trabajo que realiza la grúa es el necesario para elevar una masa de 250 kg, es decir, la fuerza (tensión en el cable) que ejerce la grúa debe superar el peso del bloque. Si suponemos que lo eleva a velocidad constante, en modulo,

$$T = Peso = mg = 250 \cdot 9{,}8 = 2450\ N$$

Por tanto,

$$W = T \cdot \Delta y \cdot \cos 0 = 2450 \cdot 25 = 61250\ J$$

La potencia real desarrollada será,

$$P = \frac{W}{t} = \frac{61250}{15} = 4083\ W$$

El rendimiento de la grúa es,

$$R = \frac{4083}{6500} \cdot 100 = 62{,}8\ \%$$

Problema 13.

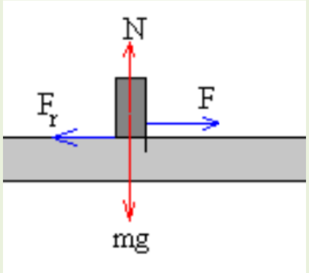
Un automóvil, que con sus ocupantes tiene una masa de 1,6 toneladas, se mueve horizontalmente a 90 km/h. Si de pronto comienza a subir una rampa del 4 %, manteniendo la misma velocidad, ¿qué potencia motriz extra, en CV, debe desarrollar el motor? Dato: el coeficiente de rozamiento = 0,15.

Solución:

Datos:

m = 1,6 toneladas = 1600 kg   v = 90 km/h = 25 m/s

Rampa del 4 %   μ = 0,15



Determinaremos primero la fuerza motriz y la potencia motriz mientras el coche se mueve horizontalmente. El esquema de fuerzas es el que aparece en la figura adjunta. Si el coche se mueve a velocidad constante se cumple el primer principio de la dinámica tanto en el eje normal como en el eje tangencial del sistema de referencia intrínseco,

$$Eje\ y \qquad \sum \vec{F} = 0 \xrightarrow{en\ módulo} N - P = 0 \quad \rightarrow \quad N = mg$$

$$Eje\ x \qquad \sum \vec{F} = 0 \xrightarrow{en\ módulo} F - F_R = 0 \quad \rightarrow \quad F = F_R = \mu\, N = \mu\, mg$$

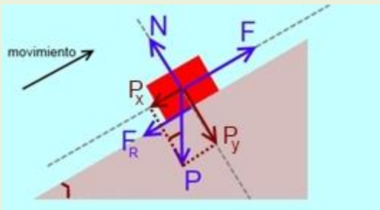
$$F = 0{,}15 \cdot 1600 \cdot 9{,}8 = 2352\ N$$

Para esta fuerza motriz, la potencia motriz desarrollada por el auto en horizontal es,

$$P_m = F \cdot v = 2352 \cdot 25 = 58800\ W\ (=\ 79{,}9\ CV)$$

Determinaremos ahora la fuerza motriz y la potencia motriz mientras el coche asciende por la rampa del 4% con la misma velocidad. En primer lugar debemos conocer el ángulo del plano: una pendiente del 4% es aquella que por cada 100 m recorridos horizontalmente, asciende 4 m verticalmente. Por tanto,

$$\tan\alpha = \frac{4}{100} = 0{,}04 \quad \rightarrow \quad \alpha = arc\tan 0{,}04 = 2{,}29°$$



Como vemos en la figura adjunta, cuando el coche asciende a velocidad constante la fuerza motriz, F, debe igualar a P_x y a la F_R. Al igual que en horizontal, se aplica el primer principio a los dos ejes del sistema de referencia intrínseco,

$$Eje\ y \qquad \sum \vec{F} = 0 \xrightarrow{en\ módulo} N - P_y = 0 \quad \rightarrow \quad N = mg\cos\alpha$$

$$Eje\ x \qquad \sum \vec{F} = 0 \xrightarrow{en\ módulo} F - F_R - P_x = 0 \quad \rightarrow \quad F = F_R + P_x$$

$$F = \mu\, N + P_x = \mu\, mg\cos\alpha + mg\ \text{sen}\ \alpha = mg(\mu\cos\alpha + \text{sen}\ \alpha)$$

$$F = 1600 \cdot 9{,}8 \cdot (0{,}15 \cdot \cos 2{,}29 + \text{sen}\ 2{,}29) = 2977\ N$$

Para esta fuerza motriz, la potencia motriz desarrollada por el auto en horizontal es,

$$P_m = F \cdot v = 2977 \cdot 25 = 74425\ W\ (=\ 101{,}1\ CV)$$

Es decir, la potencia motriz extra para subir la rampa es 101,1 – 79,9 = 21,2 CV

Estos apuntes se finalizaron el 18 de febrero de 2016

Realizados por: Felipe Moreno Romero

fresenius1@gmail.com

http://www.escritoscientificos.es