VNIVERSITAT DE VALÈNCIA Facultat d'Economia
POSTGRAU
MÁSTER EN CIENCIAS ACTUARIALES Y FINANCIERAS

EAA-Tema 6, II

MODELOS DE PROBABILIDAD II

Función Gamma de Euler:

La función Gamma de Euler (o, simplemente, Gamma) de un valor real positivo, r, se define como:

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} e^{-s} s^{r-1} ds$$

Entre sus principales propiedades destacan:

si: $r \in \mathbb{N}^+ : \Gamma(r) = (r-1)!$

$\forall r \in \mathbb{R}^+ \quad \Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$

o equivalentemente

$$\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} e^{-s} s^{(r-1)} ds = 2\int_0^{\infty} e^{-s} s^{(2r-1)} ds = a^r \int_0^{\infty} e^{-as} s^{(r-1)} ds$

esta última es la *definición alternativa*

Función Beta de Euler:

La función Beta de Euler (o, simplemente, Beta) de un par de valores reales positivos m, n, se define como:

$$\beta(m,n) = \int_0^1 s^{m-1}(1-s)^{1-n} ds$$

Entre sus principales propiedades destacan:

$\beta(m,n) = \beta(n,m)$

$\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi$

$\beta(1,1) = 1$

$\beta(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

Distribución Gamma (variables aleatorias gamma)

A partir del integrando que aparece en la definición de la función gamma de Euler

$$\Gamma(r)=\int_0^{\infty} e^{-s} s^{r-1} ds$$

pueden diseñarse de manera absolutamente formal dos tipos distintos de distribuciones de probabilidad a las que podríamos denominar : distribución gamma de un parámetro (degenerada) y distribución gamma de dos parámetros (generalizada). Aún cuando la segunda tiene mayores aplicaciones prácticas, ambas tienen su relevancia en algunos campos de aplicación como la modelización de fenómenos de espera, la teoría de la fiabilidad, en la modelización de la "cuantía de un siniestro" en estadística actuarial.

También es destacable su aplicación como distribución conjugada para la estimación bayesiana de la varianza en poblaciones normales y tiene una gran importancia teórica por sus relaciones con otras distribuciones de variables continuas que pueden considerarse casos particulares (exponencial, Chi-dos) o trasformadas particulares (Maxwell ,Rayleigh ,Weibull , Normal)

Distribución Gamma de un parámetro

Dada una variable aleatoria x no negativa diremos que sigue una distribución Gamma de parámetro m (distribución gamma degenerada de un sólo parámetro, m) cuando su función de densidad obedezca a la expresión:

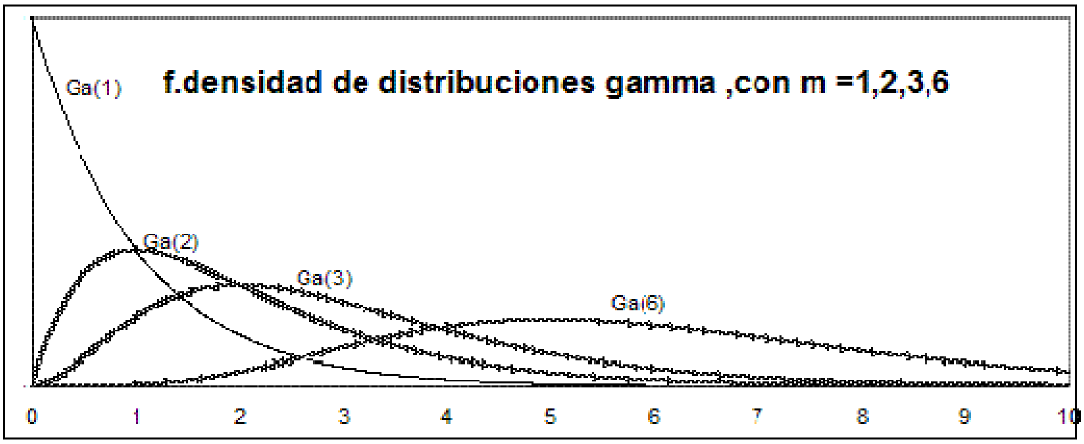
Para

$$x \in \mathbb{R}^+ : \quad f(x)=\frac{e^{-x} x^{m-1}}{\Gamma(m)}$$

siendo m un parámetro positivo $m \in \mathbb{R}^+$

Lo expresaremos como: $X \to \gamma(m)$ o bien $x \to Ga(m)$

Variable aleatoria Gamma de parámetro **m** será, lógicamente, el nombre que recibirá una variable aleatoria real positiva que obedezca a una distribución con esa función de densidad de probabilidad. La representación gráfica de diversas distribuciones gama según el valor del parámetro m , serán las siguientes:



Es fácil comprobar que f(x) es no negativa y que si se integra para toda el campo de variación el resultado es 1.

Media y varianza de la distribución:

La media será:

$$\mu = \int_0^\infty x f(x) dx = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty x e^{-x} x^{m-1} dx = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m)} = m$$

Y la varianza vendrá dada por:

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2 \quad \text{y} \quad \alpha_2 = E(x^2)$$

Siendo :

$$\alpha_2 = E(x^2) = \int_0^\infty x^2 f(x) dx = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty x^2 e^{-x} x^{m-1} dx =$$

$$\frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty e^{-x} x^{m+1} dx = \frac{\Gamma(m+2)}{\Gamma(m)} = m(m+1)$$

de forma que :

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2 = m(m+1) - m^2 = m^2 - m - m^2 = m$$

Función Generatriz de Momentos

La Función Generatriz de Momentos de una distribución gamma de un parámetro es fácilmente calculable a partir de su definición como:

$$\varphi(t) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{tx} f(x) dx = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty e^{tx} e^{-x} x^{m-1} dx = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty e^{-(1-t)x} x^{m-1} dx$$

como la función gamma también se puede re-escribir como

$$\Gamma(m) = a^m \int_0^\infty e^{-ax} x^{(m-1)} dx$$

tendremos que, haciendo a =1-t:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty e^{-(1-t)x} x^{m-1} dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m)} \frac{1}{(1-t)^m} \int_0^\infty (1-t)^m e^{-(1-t)x} x^{m-1} dx = \frac{1}{\Gamma(m)} \frac{\Gamma(m)}{(1-t)^m} = (1-t)^{-m}$$

A partir de aquí es fácil obtener los sucesivos momentos ordinarios de orden r, derivando sucesivamente y evaluando la r-sima derivada en el punto t=0

Aditividad de la distribución Gamma: Teorema de Adición.

La suma de varias variables aleatorias independientes que sigan sendas distribuciones gamma seguirá también una distribución gamma con parámetro la suma de los parámetros de aquellas. La prueba es sencilla a partir de la F.G.M .

Dadas dos variables aleatorias independientes Gamma tales que

$$x \to Ga(m_x) \quad y \to Ga(m_y)$$

sus F.G.M. serán respectivamente

$$\varphi_x(t) = (1-t)^{m_x} \qquad \varphi_y(t) = (1-t)^{m_y}$$

como x e y son independientes la F.G.M de su suma será :

$$\varphi_{x+y}(t) = \varphi_x(t).\varphi_y(t) = (1-t)^{m_x}.(1-t)^{m_y} = (1-t)^{m_x+m_y}$$

que es la F.G.M de una distribución Gamma $m_x + m_y$

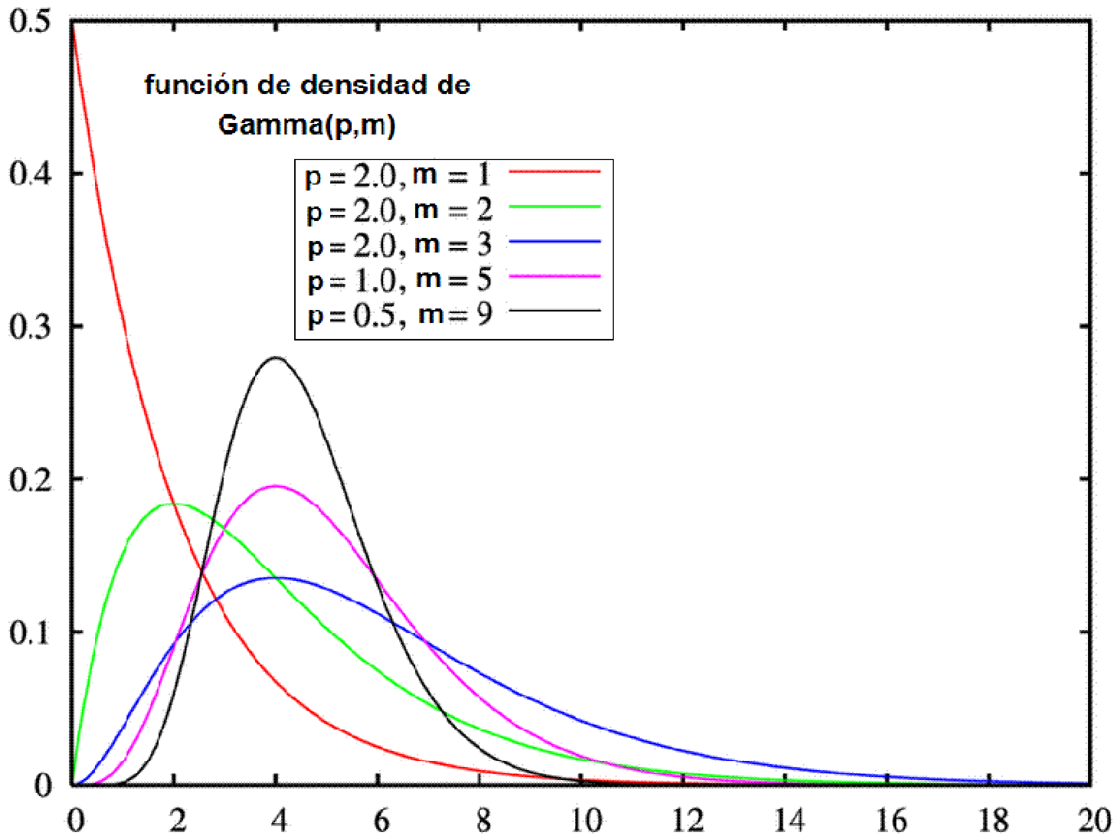
Distribución Gamma de dos parámetros

Llamaremos distribución gamma generalizada, distribución gamma de dos parámetros o simplemente, distribución gamma de parámetros **p** y **m** a la distribución que tiene una variable aleatoria continua real no negativa cuya función de densidad obedezca a la expresión:

$$f(x)=\frac{p^m e^{-px} x^{m-1}}{\Gamma(m)} \quad \text{para } x \in [0,\infty[\quad \text{y con} \quad p,m > 0$$

Obviamente f(x) así definida es no negativa, para todo valor de x, y su integral para el todo el campo de variación, es fácil comprobar, que resulta la unidad basándonos en las propiedades de la función Gamma (en su definición alternativa)

Representación gráfica



Función generatriz de momentos F.G.M.

Podemos obtener la Función Generatriz de Momentos de una distribución gamma de dos parámetros (p,m) fácilmente :

$$\varphi(t) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{tx} f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty p^m e^{tx} e^{-px} x^{m-1} dx = \frac{p^m}{\Gamma(m)} \int_0^\infty e^{-(p-t)x} x^{m-1} dx$$

basándonos en la definición alternativa de la función gamma:

$$\varphi(t) = \frac{p^m}{\Gamma(m)(p-t)^m} \int_0^\infty (p-t)^m e^{-(p-t)x} x^{m-1} dx = \frac{p^m}{\Gamma(m)} \frac{\Gamma(m)}{(p-t)^m} = \left(1 - \frac{t}{p}\right)^{-m}$$

Aditividad de la Ga(p,m)

La distribución Gamma de dos parámetros es reproductiva por adición respecto de su segundo parámetro pero no respecto del primero. Además para que se pueda verificar el teorema de adición para su segundo parámetro, **m**, es necesario que las variables implicadas posean el mismo parámetro **p**. Esto es

Dadas dos o más variables aleatorias independientes con sendas distribuciones Gamma de dos parámetros pero con idéntico parámetro **p** ,la suma de ellas será una variable aleatoria con una distribución Gamma de ese mismo parámetro **p** y cuyo segundo parámetro (**m**) será la suma de los segundos parámetros de las originales.

$$x \to Ga(p, m_x) \quad y \to Ga(p, m_y)$$

sus funciones generatrices de momentos FGM serán:

$$\varphi_x(t) = (1 - \frac{t}{p})^{m_x} \qquad \varphi_y(t) = (1 - \frac{t}{p})^{m_y}$$

como x e y son independientes la FGM de su suma será:

$$\varphi_{x+y}(t) = \varphi_x(t).\varphi_y(t) = (1 - \frac{t}{p})^{m_x}.(1 - \frac{t}{p})^{m_y} = (1 - \frac{t}{p})^{m_x + m_y}$$

que es la FGM de una distribución Gamma de parámetros : p ý (m_x+ m_y)

Media y varianza de la distribución Ga(p,m)

Media y varianza, y también otros momentos de orden superior se pueden obtener fácilmente a partir de la F.G.M.

$$\varphi(t) = \left(1 - \frac{t}{p}\right)^{-m}$$

Para obtener la media que es el momento ordinario de primer orden, bastará obtener la primera derivada en el punto t=0:

$$\varphi'(t) = -m\left(1 - \frac{t}{p}\right)^{-m-1} .(-\frac{1}{p}) = \frac{m}{p}\left(1 - \frac{t}{p}\right)^{-m-1}$$

siendo fácil ver que la media toma el valor del cociente de ambos parámetros m/p:

$$\mu = \alpha_1 = E(x) = \varphi'(t=0) = \frac{m}{p}\left(1 - \frac{0}{p}\right)^{-m-1} = \frac{m}{p}$$

La varianza la obtendremos como

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2 \text{ y } \alpha_2 = E(x^2) \text{ con } \alpha_2 = \varphi''(t=0)$$

$$\varphi''(t) = \frac{m}{p}.(-m-1)\left(1 - \frac{t}{p}\right)^{-m-2} .(-\frac{1}{p}) = \frac{m(m+1)}{p^2}\left(1 - \frac{t}{p}\right)^{-m-2}$$

de modo que resulta al final que :

$$\alpha_2 = \frac{m(m+1)}{p^2} \quad \Rightarrow \sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2 = \frac{m(m+1)}{p^2} - \frac{m^2}{p^2} = \frac{m}{p^2}$$

La distribución Ga(1/2,1/2) y su relación con la Normal

La función de densidad para una Gamma con p=1/2 y m=1/2 será:

$$f(x|Ga(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} x^{\frac{1}{2}-1}}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{x}}$$

Por otro lado si consideramos una variable Z tal que Z siga una N(0,1) tendremos que :

$$f(z)=\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

si plantemos en cambio de variable de Z a X con X=Z^2 tendremos que el jacobiano de la tranformación será:

$$J(z|x)=\left|\frac{dz}{dx}\right|=\left|\frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{dx}\right|=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

pero como el campo de variación de z es el doble que el de x ya que el primero es toda la recta real y el segundo la semirrecta positiva tenderemos que :

$$f(x)=2f(x(z))J(z|x)=2.\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{x}}$$

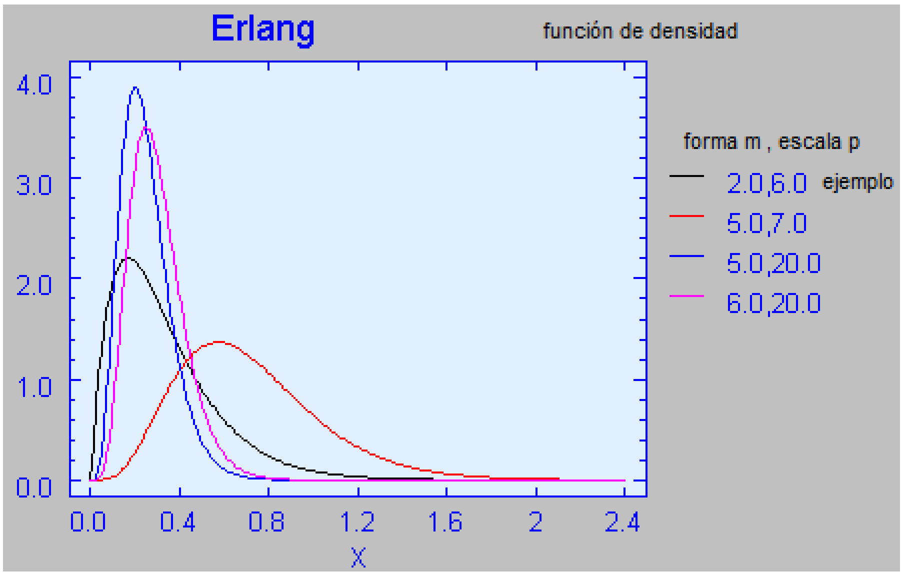
que es la función de densidad de una Ga(1/2,1/2) por lo que podemos concluir que el cuadrado de una variable normal tipificada sigue una distribución Ga(1/2,1/2).

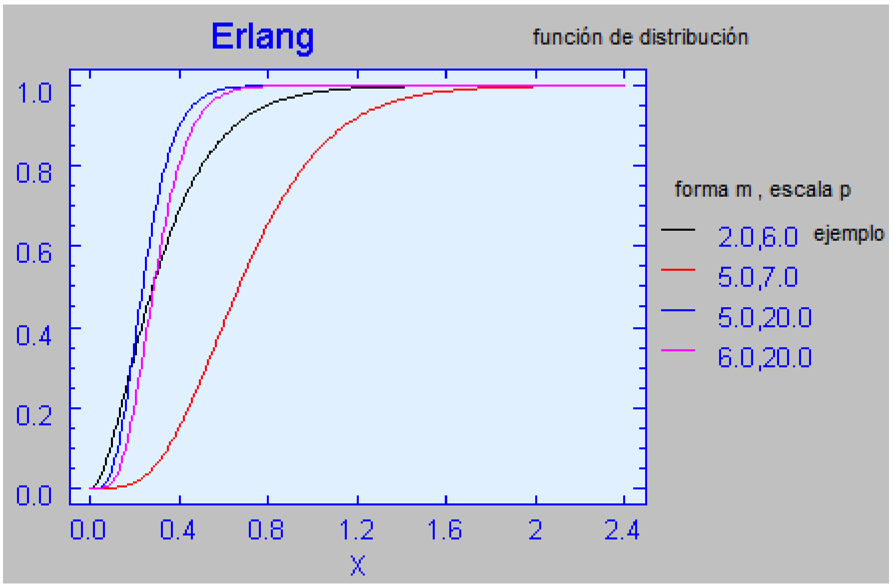
Esta relación es de gran importancia en si misma y considerada en conjunción con la aditividad de la distribución Gamma para el parámetro m posibilita establecer también una relación entre la distribución Gamma y la distribución Chi-2:

Una distribución Chi-2 es un caso particular de distribución Gamma: una Chi-2 de n grados de libertad es una Gamma(1/2,n/2)

Distribución de Erlang.

Dada una Gamma de dos parámetros Ga(p, m) donde m es un número entero y $p = m{\cdot}\mu$ siendo $\mu \equiv \lambda$ de una distribución de Poisson . Si esto ocurre a dicha distribución Gamma se la conoce como distribución de Erlang. Su utilidad radica en el calculo de probabilidades del tiempo transcurrido hasta que aparecen m sucesos que siguen una distribución de Poisson de parámetro λ. Las funciones de densidad y distribución para diversos valores de los parámetros serán gráficamente





Ejemplo:

Si el número de llamadas telefónicas que se registran en una central es de 3 por minuto, asociándose esto a una Poisson de $\lambda \rightarrow 3$. Calcular la probabilidad de que trascurra menos de un minuto hasta que se produzca la segunda llamada La variable aleatoria X= tiempo entre una llamada y la m-ésima siguiente sigue una distribución de Erlang

Ga(mμ, m) donde m=2 (segunda llamada) y μ=3 (λ=3)

Luego una Erlang Ga(6, 2)

$$P(x \leq 1) = P(Ga(6,2) \leq 1) \int_0^1 \frac{6^2 \cdot x^{2-1} \cdot e^{-6x}}{\Gamma(2)} =$$

tendremos

$$P(x \leq 1) = P(Ga(6,2) \leq 1) \int_0^1 \frac{6^2 \cdot x^{2-1} \cdot e^{-6x}}{\Gamma(2)} = w$$

$$\Gamma(2) = (r-1)! = 1! = 1$$

luego : $w = 36 \int_0^1 x e^{-6x} dx$ haciendo un cambio de variable tendremos

$$6x = t \rightarrow luego \ dx = 1/6dt$$

$$36 \int_0^6 \frac{t}{6} \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{6} dt = \int_0^6 t \cdot e^{-t} dt$$

resolviendo por partes:

$$u = t \ \rightarrow du = dt$$

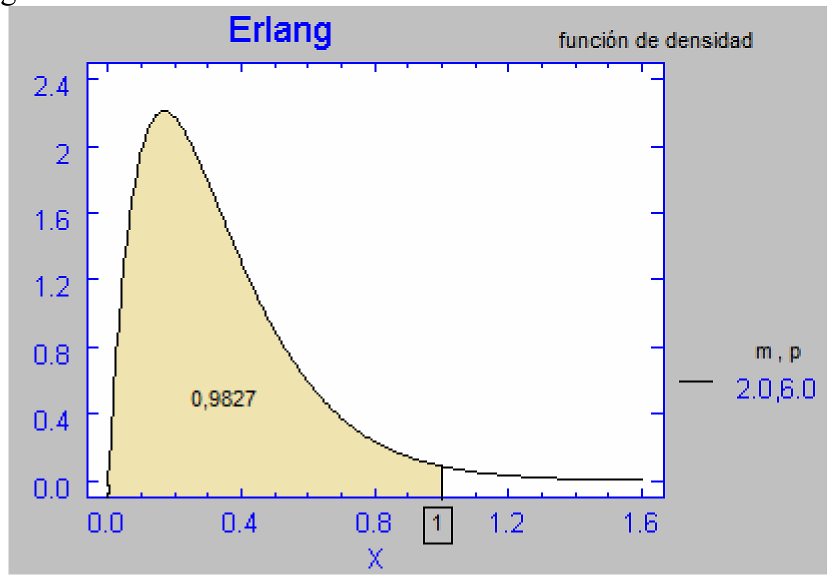
$$dv = e^{-t} dt \rightarrow v = -e^{-t}$$

$$\int_0^6 t \cdot e^{-t} dt = \int_0^6 u dv = \left[\left[-te^{-t} \right]_0^6 - \int_0^6 -e^{-t} dt \right] =$$

$$= \left[\left[-te^{-t} \right]_0^6 - \left[e^{-t} \right]_0^6 \right] =$$

$$\left[-e^{-t} (t+1) \right]_0^6 = 0{,}9827$$

gráficamente:



Distribución exponencial

Si tenemos una Ga(p,m) su función de densidad es ,como ya sabemos :

$$f(x) = \frac{p^m \cdot e^{-px} \cdot x^{m-1}}{\Gamma(m)}$$

haciendo m=1 tendremos $f(x) = \frac{p^m \cdot e^{-px} \cdot x^{m-1}}{\Gamma(m)} = \frac{p \cdot e^{-px} \cdot x^{1-1}}{1} = pe^{-px}$

que es la función de densidad de la distribución exponencial de parámetro p

así una Ga(p,1) = exp(p)

Distribución de Weibull

Si tomamos una distribución exponencial de parámetro q ,

$x \rightarrow \exp(q)$ por tanto una $Ga(q,1)$ ó $\gamma(q,1)$

si establecemos un cambio de variable de manera que :

$$Y = x^{1/r} \rightarrow x = Y^r \quad para\ r > o$$

tendremos que la función de distribución (de probabilidad) de la nueva variable será :

$$H(y)=P(Y\le y)=P(x^{1/r}\le y)=P(x\le y^r)=F(y^r)$$

por tanto la función de densidad será:

$$h(y)=H'(y)=\frac{d(1-e^{-qy^r})}{dy}=rqy^{r-1}e^{-qy^r}$$

dado que $F(y^r)=1-e^{-qy^r}$ ya que x era una exponencial

Así si x sigue una distribución de Weibull de parámetros r , q

Su función de densidad será : $f(x)=rqx^{r-1}e^{-qx^r}$

Es habitual que se utilice como segundo parámetro el valor de β con $q=\frac{1}{\beta^r}$

Siendo así la función de densidad: $f(x)=r\frac{1}{\beta^r}x^{r-1}e^{-\frac{1}{\beta^r}x^r}=\frac{r}{\beta^r}x^{r-1}e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^r}$

O bien : $f(x)=r\frac{1}{\beta^r}x^{r-1}e^{-\frac{1}{\beta^r}x^r}=\frac{r}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{r-1}e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^r}$

Donde r = parámetro conocido como de *forma* , de manera que si su valor es uno el número de hechos (normalmente fallos) es constante en el tiempo, si r< 1 éste numero decrece , mientras que si r>1 , el número de hechos-fallos aumenta con el tiempo.

El parámetro β se denomina de *escala* o "vida característica"

La distribución de Weibull permite controlar cuál es la distribución de fallos de un componente que pretendemos controlar y que a través de nuestro registro de hechos-fallos observamos que éstos varían a lo largo del tiempo y dentro de lo que se considera tiempo normal de uso. Se utilizará la distribución o análisis de Weibull cuando se observe que en nuestro proceso hay muchos fallos y los tiempos entre fallos no se ajustan a una distribución más sencilla. Su utilidad habitual es el control de fallos en componentes de sistemas.
Normalmente se utiliza la función de distribución que será como ya vimos y para $q=\frac{1}{\beta^r}$:

$$F(x)=1-e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^r}$$

La media de la distribución vendrá dada por $\mu=\beta\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)$

Si r = 1 La distribución Wiebull de tendría de función de densidad

$$f(x)=\frac{r}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{r-1}e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{r}} \rightarrow r=1 \rightarrow \frac{1}{\beta}e^{-\frac{1}{\beta}x}$$ es decir

una exp(1/β) , así la distribución exponencial puede considerarse un caso particular de una Wiebull cuando el parámetro forma es 1 (r=1)

Ejemplo: El tiempo que tarda en fallar un transistor de un sistema eléctrico sigue una distribución de Weibull con vida característica 5000 horas y parámetro de forma ½.

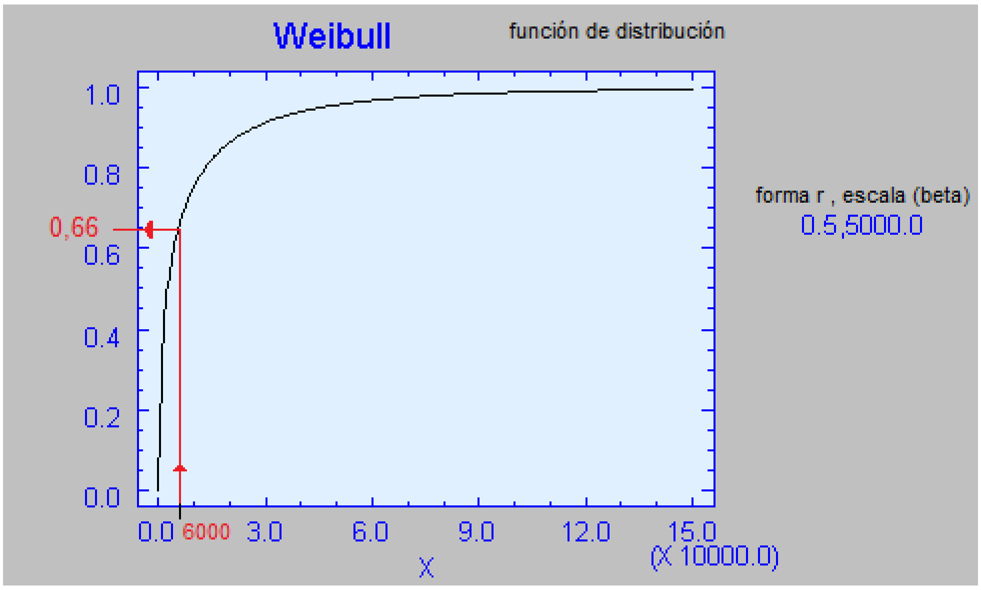
a)Hallar la probabilidad de que dicho transistor dure menos de 6000 horas

Tiempo de duración del transistor (t) será una Weibull de parámetros:

β= escala o vida característica = 5000 r = forma = ½

$$P(t<6000)=F(t=6000)=1-e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{r}}=1-e^{-\left(\frac{6000}{5000}\right)^{1/2}}=1-0,33=0,66$$

de manera gráfica :



b) cuanto tiempo cabe esperar que durará un transistor:

$$E[t]=\beta\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)=5000\Gamma(1+2)=5000\ (3\text{-}1)!=10000 \text{ horas}$$

Distribución de Maxwell

Se trata de una distribución derivada de la distribución gamma .Sea una distribución Gamma G(p,m)

$$f(x)=\frac{p^m e^{-px} x^{m-1}}{\Gamma(m)} \quad \text{para } x\in[0,\infty[\quad \text{y con} \quad p,m > 0$$

en concreto una G(q, 3/2) cuya función e densidad será:

$$f(x)=\frac{q^{\frac{3}{2}} e^{-qx} x^{\left(\frac{3}{2}-1\right)}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}=2\sqrt{\frac{q^3}{\pi}}\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-qx}$$

Distribución de Rayleigh

La distribución de Rayleigh es una derivada de la distribución exponencial por tanto también de una Gamma. De un único parámetro, sigma.

Si X e Y son distribuciones normales independientes de media 0 y misma desviación típica (sigma = A) .

Entonces:

$$Si\ Z=\sqrt{X^2+Y^2} \quad Z\rightarrow Rayleigh\left[sigma=A\right]$$

Su función de densidad viene dada por :

$$f(x)=\frac{xe^{\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)}}{\sigma^2} \quad para \ \ x\geq 0$$

siendo su función de distribución :

$$F(x)=1-e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)} \quad para\ x\in\left[0;\infty\right]$$

La media viene dada por : $E\left[x\right]=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ mientras que la varianza será:

$Var\left[x\right]=D^2\left[x\right]=\frac{4-\pi}{2}\sigma^2$ siendo la moda igual a su parámetro sigma

Si $Si\ X \to R[1]\ \ entonces\ \ X^2 \to \chi^2_{gl=2}$

Por otro lado:

Si X sigue una distribución de Wiebull de parámetro de escala $:\beta = b\sqrt{2}$ y de parámetro de forma : r=2 , es decir : $X \to W\left[b\sqrt{2}:2\right]$ entonces:

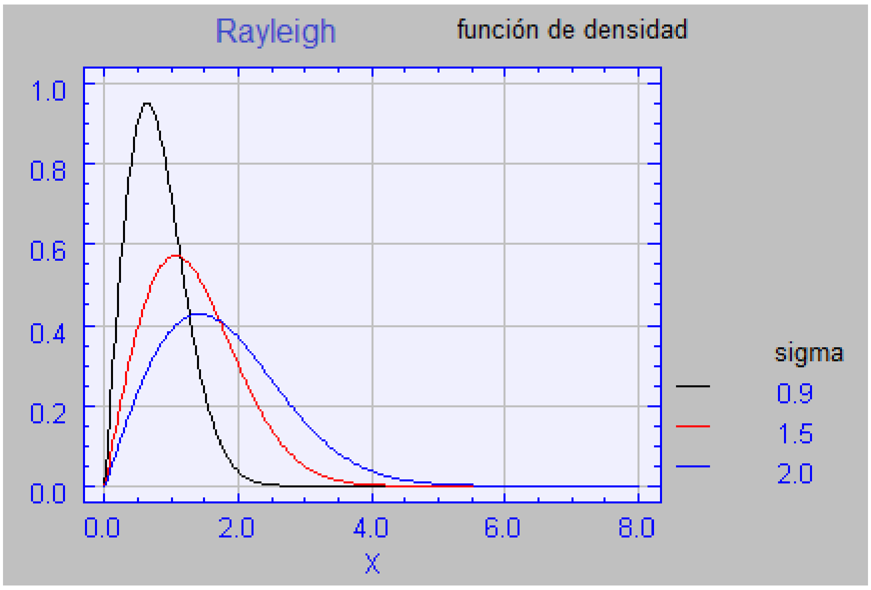
$$f(x) = \frac{r}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{r-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^r} \to r=1\ \ y\ \ \beta = b\sqrt{2} \to$$

$$\to f(x) = \frac{2}{b\sqrt{2}}\left(\frac{x}{b\sqrt{2}}\right)^{2-1} e^{-\left(\frac{x}{b\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{x}{b^2}\ e^{-\left(\frac{x^2}{2b^2}\right)}$$

que es la función de densidad de una distribución Rayleigh de parámetro b luego:

$X \to W\left[b\sqrt{2}:2\right]\ \ entonces\ \ X \to R[b].$

La representación de su función de densidad será:



Ejemplo: La amplitud de una señal de radio de frecuencia modulada sigue una distribución Rayleigh(1/2). Calcular un valor de la amplitud mínimo que ocurre el 20% de las veces.

Valor mínimo (a) será uno que de él hacia arriba(mayor) sólo ocurre el 20% de las veces , por tanto con probabilidad 0,2 luego:

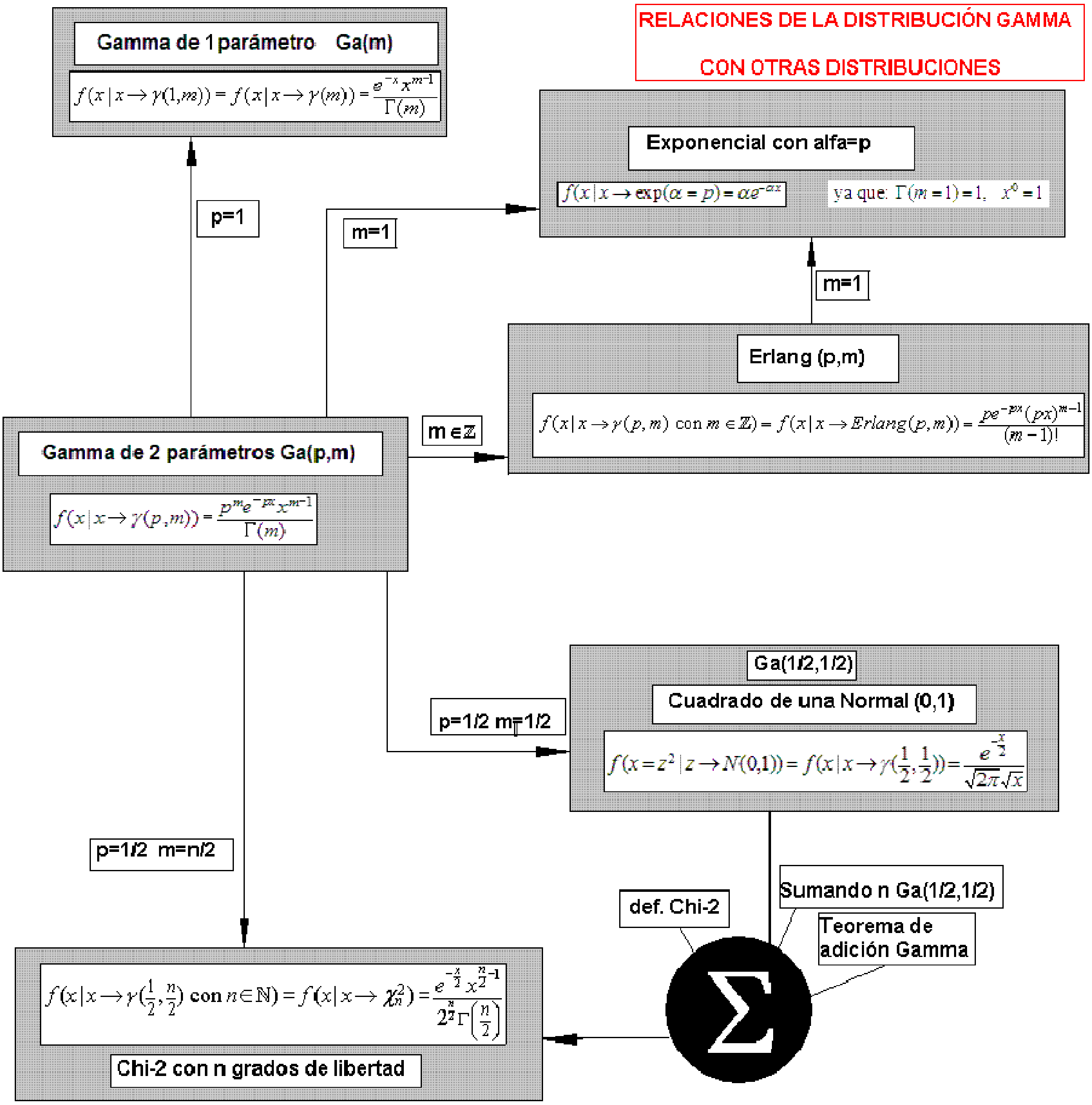
Si X = amplitud de señal y $X \to R\left(1/\sqrt{2}\right)$

$P(X > a) = 0,2 \rightarrow P(X < a) = 0,8$

$$0,8 = F(x = a) = 1 - e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)} = 1 - e^{-\left(\frac{x^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)} = 1 - e^{-x^2}$$

$$0,2 = e^{-x^2} \quad 5 = e^{x^2} \rightarrow \ln 5 = x^2 \ln e \rightarrow \sqrt{1,6} = a = 1,2$$

En el siguiente cuadro se pueden apreciar algunas de la relaciones de la distribución Gamma con otras distribuciones de variable continua:


RELACIONES DE LA DISTRIBUCIÓN GAMMA
CON OTRAS DISTRIBUCIONES
Gamma de 1 parámetro Ga(m)
$f(x|x\to\gamma(1,m)) = f(x|x\to\gamma(m)) = \frac{e^{-x}x^{m-1}}{\Gamma(m)}$
Exponencial con alfa=p
$f(x|x\to \exp(\alpha=p)) = \alpha e^{-\alpha x}$
ya que: $\Gamma(m=1)=1,\ x^0=1$
p=1
m=1
m=1
Erlang (p,m)
$f(x|x\to\gamma(p,m)$ con $m\in\mathbb{Z}) = f(x|x\to Erlang(p,m)) = \frac{pe^{-px}(px)^{m-1}}{(m-1)!}$
$m \in \mathbb{Z}$
Gamma de 2 parámetros Ga(p,m)
$f(x|x\to\gamma(p,m)) = \frac{p^m e^{-px}x^{m-1}}{\Gamma(m)}$
Ga(1/2,1/2)
Cuadrado de una Normal (0,1)
$f(x=z^2|z\to N(0,1)) = f(x|x\to\gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2})) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{x}}$
p=1/2 m=1/2
p=1/2 m=n/2
def. Chi-2
Sumando n Ga(1/2,1/2)
Teorema de adición Gamma
Σ
$f(x|x\to\gamma(\frac{1}{2},\frac{n}{2})$ con $n\in\mathbb{N}) = f(x|x\to\chi^2_n) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}$
Chi-2 con n grados de libertad

Distribución Lognormal

Si los logaritmos Y de una variable aleatoria X se distribuyen normalmente se dice que X se distribuye log-normalmente.

Tiene la ventaja que X>0 y que la transformación Log tiende a reducir la asimetría positiva ya que al sacar logaritmos se reducen en mayor proporción los datos mayores que los menores.

Limitaciones: tiene solamente dos parámetros, y requiere que los logaritmos de la variables estén centrados en la media

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\frac{-1}{2}\frac{(y-\mu_y)}{\sigma_y{}^2}} \qquad x > 0$$

donde y = ln x
donde, μ_y : media de los logaritmos de la población (parámetro escalar), estimado $\bar{y}$
σ_y : Desviación estándar de los logaritmos de la población, estimado s_y.

La distribución lognormal tiene por tanto dos parámetros: μ_y (media aritmética del logaritmo de los datos o tasa de fallos) y σ_y (desviación estándar del logaritmo de los datos o tasa de fallos).

Dichos parámetros serán estimados , así :

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

$$s_y = \left\{ \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (\ln(x_i) - \bar{y})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

La media de una distribución log-normal vendrá dada por :

Para una variable

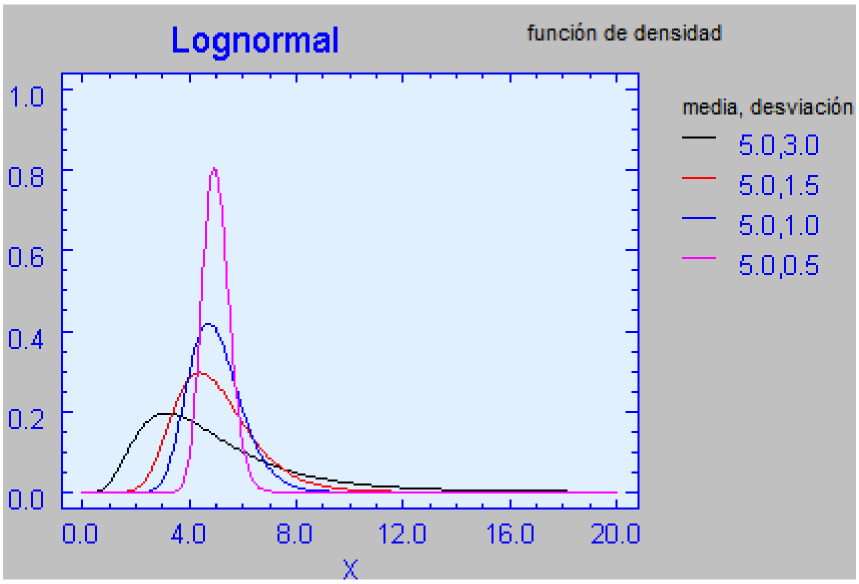
$$x \Rightarrow log - normal(\mu_y;\sigma_y) \equiv LN(\mu_{\ln x};\sigma_{\ln x})$$

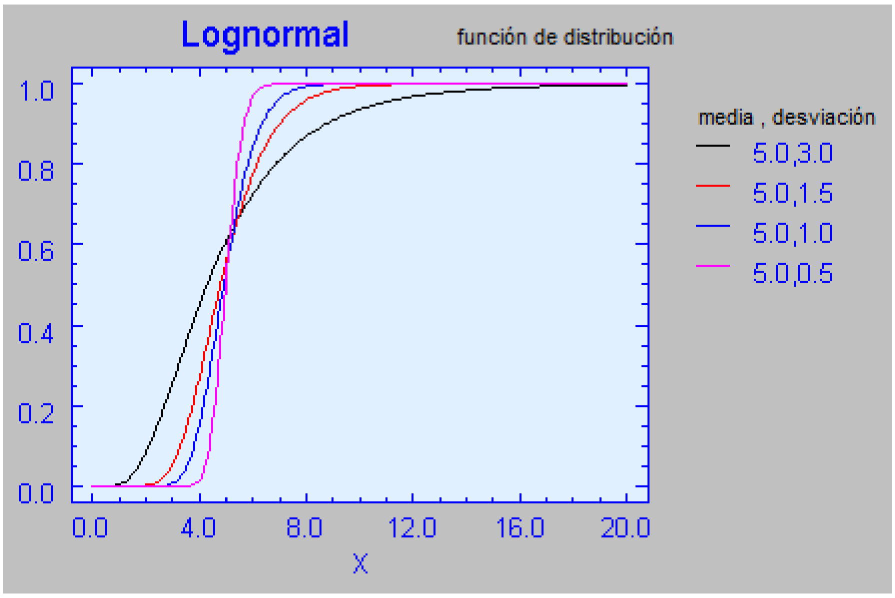
media y varianza serán :

$$E[x] = \mu_x = e^{\mu_y + \frac{1}{2}\sigma_y}$$

$$Var[x] = \sigma_x^2 = \left(e^{\sigma_y^2} - 1\right) \cdot e^{2\mu_y + \sigma_y^2}$$

La representación gráfica de las funciones de densidad y distribución para distintos valores de sus parámetros serán:





La distribución lognormal tiene, principalmente, las siguientes características y/o aplicaciones:

+ Representa la evolución con el tiempo de la tasa de fallos, en la primera fase de vida de un componente, entendiéndose como tasa de fallos la probabilidad de que un componente que ha funcionado hasta el instante t, falle entre t y t + dt.

+ Permite fijar tiempos de reparación de componentes, en este caso el tiempo la variable de la distribución.

+ Describe la dispersión de las tasas de fallo de componentes, ocasionada por diferente origen de los datos, distintas condiciones de operación, entorno, bancos de datos diferentes, etc. En este caso la variable independiente de la distribución es la tasa de fallos.

+ Es idónea para parámetros que son a su vez producto de numerosas cantidades aleatorias (múltiples efectos que influyen sobre la fiabilidad de un componente).

Cálculo de probabilidades con la Lognormal.

La distribución o modelos LogNormal $x \Rightarrow LN(\mu_y;\sigma_y)$ puede expresarse como una Normal Tipificada [0,1] , t . mediante el cambio $t = \dfrac{\ln(x) - \mu_y}{\sigma_y}$

Dado que si se plantea la probabilidad de que $x \in [x_1; x_2]$ dicha probabilidad sería

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu_y}{\sigma_y}\right)^2} dx \quad \text{resolviendo}$$

mediante $t = \dfrac{\ln(x) - \mu_y}{\sigma_y}$ y $dx = x\sigma_y dt$ pasando los límites de integración a

$$x_1 \rightarrow z_1 = \frac{\ln(x_1) - \mu_y}{\sigma_y} \qquad \text{y para} \quad x_2 \rightarrow z_2 = \frac{\ln(x_2) - \mu_y}{\sigma_y}$$

lo que nos daría: $P(x_1 < x < x_2) = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu_y}{\sigma_y}\right)^2} dx = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Ejemplo(1) general reducido: La variable X supone los tiempos en segundos de reparación de un componente. Presuponemos que X seguirá un modelo Log-Normal . Con sólo diez datos y para abreviar . Tomamos los logaritmos neperianos de la variable X (lnx). Contrastamos que dichos valores siguen una distribución normal de media 3.02 y desviación típica 1,92 mediante un test no paramétrico. En este caso podemos decir que $X \Rightarrow LN(3,02\ ;\ 1,92)$

x	lnx
1	0
2,52725328	0,92713305
5,2122986	1,65102095
9,29390485	2,22935879
15,6219583	2,74867751
25,82447	3,25132249
43,4078894	3,77064121
77,3994018	4,34897905
159,631327	5,07286695
538,995354	6,28970695
Media muestral	3,0289707
Desv. muestral	1,92529721

Ejemplo(2):

Conocemos que los rendimientos monetarios, en miles de euros, a largo plazo de los futuros que maneja nuestra empresa se distribuyen como una Log-Normal de media 3 y desviación típica 2.

a)Calcular la probabilidad de que dichos rendimientos se sitúen entre 78 y 120 miles de euros.

b) Hallar el valor esperado de los rendimientos monetarios

Rendimientos monetarios = x $\quad x \Rightarrow LN\left[3;2\right]$

a)

$$P(78 < x < 120) = P\left(\frac{\ln 78 - \mu_{\ln x}}{\sigma_{\ln x}} < t < \frac{\ln 120 - \mu_{\ln x}}{\sigma_{\ln x}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{4,356-3}{2} < t < \frac{4,787-3}{2}\right) = P\left(0,678 < t < 0,8937\right) =$$

$$F(0,8937) - F(0,678) = 0,814 - 0,751 = 0,063$$

b) el valor esperado vendrá dado por

$$E[x] = \mu_x = e^{\mu_y + \frac{1}{2}\sigma_y}$$

$$x \Rightarrow LN(3;2)$$

$$E[x] = \mu_x = e^{3+\frac{1}{2}2} = e^4 = 54,59$$

Distribución de Pareto

La distribución de Pareto (Vilfredo Pareto (1848–1923)), es una distribución de probabilidad biparamétrica que tiene como función de densidad:

$$f(x) = \frac{\alpha}{x} \cdot \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha} = \frac{\alpha \cdot x_0^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} \qquad \text{donde } x \geq x_0 \;\; ; x_0 > 0 \;\; ; \alpha > 0$$

siendo x_0 conocido como valor inicial y α es conocido como índice de pareto.

Su función de distribución viene dada por :

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha} \quad si \;\; x \geq x_0$$

Su media vendrá dada por:

$$E[x] = \mu = \int_{x_0}^{\infty} \frac{x\alpha x_0^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} dx = \frac{\alpha x_0}{\alpha - 1} \quad \text{siempre que } \alpha > 1$$

La varianza será :

$$\operatorname{var}[x] = \frac{\alpha x_0^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} \quad si \;\; \alpha > 2$$

Si $\alpha \leq 2$ no existe ya que :

$E\left[x^2\right] = \mu = \int_{x_0}^{\infty} \frac{x^2 \alpha x_0^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} dx = \frac{\alpha^2 x_0}{\alpha - 2}$ y dicha integral no es convergente , siendo el momento negativo si $\alpha \leq 2$, siendo imposible al ser par

La moda será el valor inicial

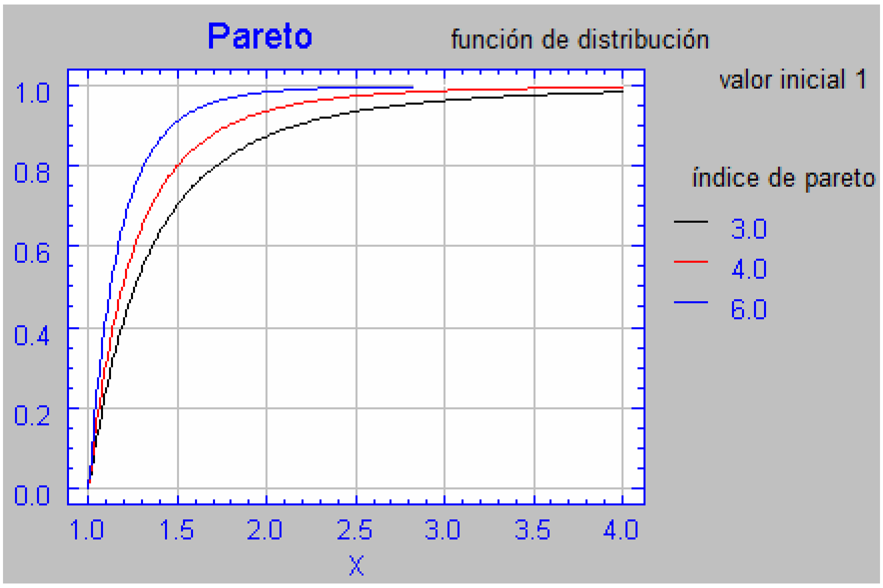
La mediana vendrá dada por

$$0,5 = P(x < M_e) = F(M_e) = 1 - \left(\frac{x_0}{M_e}\right)^{\alpha}$$

$$0,5 = 1 - \left(\frac{x_0}{M_e}\right)^{\alpha} \rightarrow 0,5 = \left(\frac{x_0}{M_e}\right)^{\alpha}$$

$$0,5 = \frac{x_0^{\alpha}}{M_e^{\alpha}} \rightarrow \frac{1}{0,5} = \frac{M_e^{\alpha}}{x_0^{\alpha}} \rightarrow 2x_0^{\alpha} = M_e^{\alpha} \leftrightarrow M_e = x_0 2^{1/\alpha}$$

gráficamente su función de distribución será :



La distribución de la renta parece adecuarse a una distribución de Pareto en ciertas situaciones. Es la conocida ley de Pareto o de 80/20.El 20% de la población posee el 80% de la renta y el resto (80%) de la población sólo posee el 20% de la renta. La distribución de Pareto parece adecuada a aquellas circunstancias en las que quiera establecerse una distribución de alguna magnitud acumulable entre pocos que acumulan grandes cantidades y muchos que acumulan muy poca cantidad. Casos serían : Pocos grandes errores , muchos pequeños errores. Grandes errores en un disco duro, pequeños errores . Pocos grandes incendios, muchos pequeños incendios (en Hectáreas, p.ej,)….Pocos grandes accidentes y muchos pequeños accidentes.

Distribución de Pareto trasladada al origen (tipo II).

Como se dijo anteriormente la distribución de Pareto tiene dos parámetros:

x_0 conocido como valor inicial y α es conocido como índice de Pareto en muchas ocasiones es conveniente que el valor inicial sea cero, lo que da lugar a la distribución de Pareto tipo II.

Consiste en modificar la variable Y que se distribuye como una distribución de pareto con parámetros $y_0;\alpha$

de manera que $X = Y - y_0$

De manera que :

$$F(x) = P(X \leq x) = P(Y - y_0 \leq x) = P(Y \leq x - y_0) = 1 - \left(\frac{y_0}{x + y_0}\right)^{\alpha}$$

Distribución de Burr

La distribución de Burr se emplea habitualmente para estudiar las pérdidas que se puedan ocasionar en carteras de seguros.

Se establece de la siguiente manera:

Sea X una variable aleatoria con distribución de Pareto con parámetros $x_0 = 1;\alpha$

Donde se lleva a cabo el cambio de variable: $Z^{\beta} = X$ para $\beta > 0$ tendremos por tanto:

Que $Z = X^{1/\beta}$

$$F(z) = P(Z \leq z) = P(X^{1/\beta} \leq z) = P(X \leq z^{\beta}) = 1 - \left(\frac{1}{z^{\beta}}\right)^{\alpha}$$

para que el origen sea 0 ya que partimos de $x_0 = 1$ haríamos la transformación Y=Z-1(Pareto tipo II)

con lo que la la función de distribución quedaría: $F(Y) = 1 - \left(\frac{1}{1 + y^{\beta}}\right)^{\alpha}$ con parámetros

alfa y beta mayores que cero:

habitualmente los parámetros suelen denominarse:

$\alpha = k$ $\beta = c$ con lo que la expresión de una distribución de Burr (k, c) en su función de distribución quedaría como

$$F(x) = 1 - \left(1 + x^{c}\right)^{-k}$$

siendo su función de densidad: $f(x) = Kcx^{c-1}(1+x^c)^{-(k+1)}$

los diversos momentos ordinarios vendrán dados por la expresión general :

$$E\left[X^r\right] = \frac{k\Gamma\left(k - {r}/{c}\right)\cdot\Gamma\left({r}/{c} + 1\right)}{\Gamma\left(k+1\right)}$$

Distribución de Cauchy

La denominada distribución o modelo de Cauchy-Lorentz , es una distribución continua de aplicación especial en la física y en el estudio de rendimientos de activos financieros, así como por relaciones con algunas distribuciones importantes. Tiene dos parámetros $\lambda;\alpha$ y su campo de variación $\left[+\infty;-\infty\right]$.

Su función de densidad viene dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi\lambda\left(1 + \frac{\left(x-\alpha\right)^2}{\lambda}\right)} = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)\frac{1}{\lambda^2 + \left(x-\alpha\right)^2}$$

En el caso particular de que $\lambda = 1 \quad y \quad \alpha = 0$

La $f(x) = \left(\frac{1}{\pi}\right)\frac{1}{1+x^2}$ que corresponde a la $C(\lambda = 1;\alpha = 0)$ conocida como Cauchy estándar.

Esta distribución (Cauchy estándar) es el cociente de dos distribuciones Normales de media 0 y desviación típica sigma: N[0;σ] .No siendo cierto el postulado inverso, es decir que si una C[0,1] es el cociente de dos variables aleatorias está no tienen por qué distribuirse como normales N[0;σ]

La Función Generatriz de Momentos viene dada por

$\varphi(t) = e^{\alpha\cdot t - \lambda|t|}$ que no es diferenciable en t=0 por lo que la distribución no tiene momentos respecto al origen lo que conlleva que no tiene media y varianza.

La función de distribución viene dada por:

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)+\frac{1}{2}$$

La distribución de Cauchy cumple el teorema de adición para ambos parámetros:

Así:
$$z=x_1+x_2+x_3+\ldots x_n$$
$$\textit{siendo}\ \ x_i \to C(\lambda_i\,;\alpha_i)$$
$$Z \to C(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\ \ ;\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i)$$

Una distribución C(1; 0) coincide con una t de student con un grado de libertad

Si $x \to t_{gl=1}$

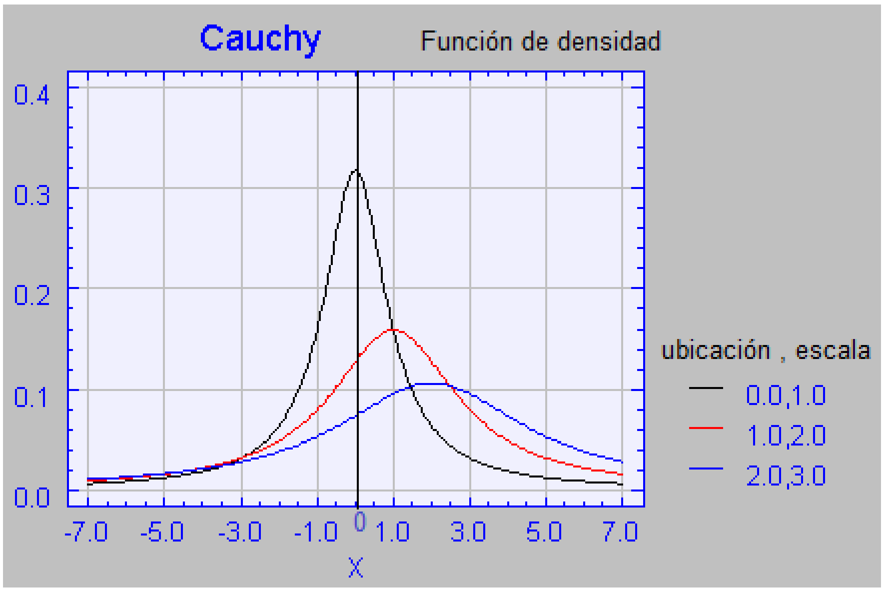
$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}}\left[1+\frac{x^2}{n}\right]^{\frac{-(n+1)}{2}}$$

si n=1

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{1\pi}}\left[1+\frac{x^2}{1}\right]^{-\frac{(1+1)}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}\left[1+\frac{x^2}{1}\right]^{-1}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow C(1;0)$$

Los parámetros de la distribución podrían contemplarse como :

α es el parámetro de *corrimiento* que especifica la ubicación del pico de la distribución, y λ es el parámetro de *escala* que especifica el ancho medio al máximo. Esto puede comprobarse gráficamente



Distribución de Laplace

Una variable sigue una distribución de Laplace ,

$x \to L[\lambda;\alpha] \;\; para \;\; x \in [-\infty,\infty]$ si su función de densidad es:

$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\alpha|}$ siendo $\lambda > 0 \;\; y \;\; \alpha \in [-\infty,\infty]$ y $\lambda = \frac{1}{S}$ siendo S el parámetro de escala y alfa el de ubicación (más adelante media) .

Tomando parámetro S directamente la función de densidad quedaría como :

$$f(x) = \frac{1}{2s} e^{-\frac{|x-\alpha|}{s}}$$

puede considerarse la composición de dos exponenciales iguales de signo cambiado. De ahí que en ocasiones se le denomine doble exponencial.

A nivel operativo la función de densidad quedaría:

$$f(x) = \frac{1}{2s} e^{-\frac{|x-\alpha|}{s}} = \begin{cases} \frac{1}{2s} e^{-\frac{|\alpha-x|}{s}} & si \;\; x < \alpha \\ \frac{1}{2s} e^{-\frac{|x-\alpha|}{s}} & si \;\; x \geq \alpha \end{cases}$$

Su función de distribución vendrá dada por:

$$F(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\left(\frac{\alpha-x}{s}\right)} & si\ x<\alpha \\ 1-\frac{1}{2}e^{-\left(\frac{x-\mu}{s}\right)} & si\ x\geq\alpha \end{cases}$$

Media, mediana y moda coinciden siendo: α

La varianza de la distribución $x \to L[\lambda;\alpha] \quad para \quad x \in [-\infty,\infty]$

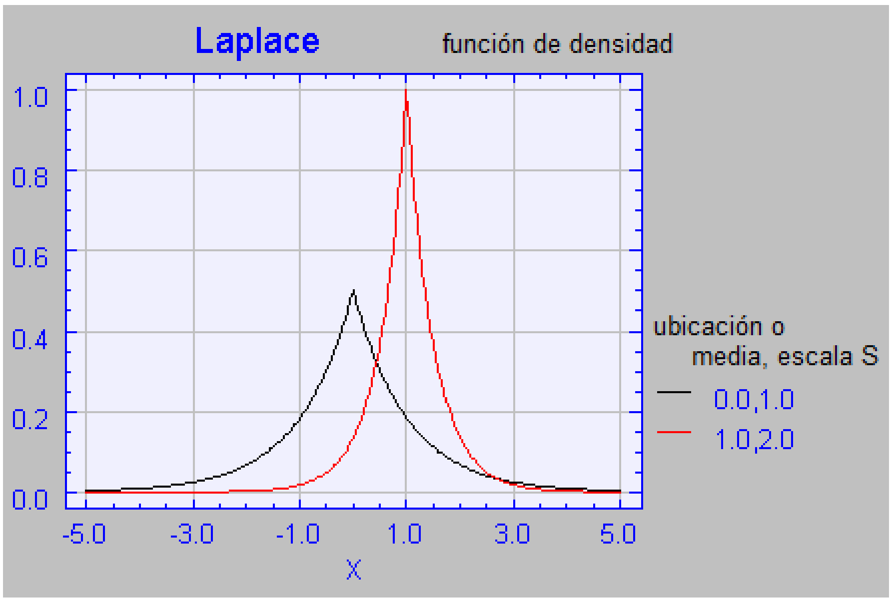
En la que el parámetro de escala es S siendo $\lambda = \frac{1}{S}$

$$\text{será} \quad Var[x] = \sigma^2 = \frac{2}{\lambda^2}$$

La varianza de la distribución $x \to L[S;\alpha] \quad para \quad x \in [-\infty,\infty]$

En la que el parámetro de escala es S , lógicamente será $Var[x] = \sigma^2 = 2S^2$

Gráficamente la función densidad será:



Distribución logística

La distribución logística es un modelo de probabilidad de carácter continuo se debe a Pierre Verhulst (1845) . Esta distribución aparece en el contexto de la regresión logística. Es de utilidad en los estudios de crecimiento de población, propagación de epidemias, difusión y venta de nuevos productos, mortalidad de la población, en definitiva procesos de crecimiento en los que se produzca estado de saturación.

La distribución logística viene explicitada por dos parámetros:

$x \to L(\alpha;\beta)$

Su función de densidad es: para $-\infty < x < \infty$

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}}{\beta\left(1+e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}\right)^2}$$

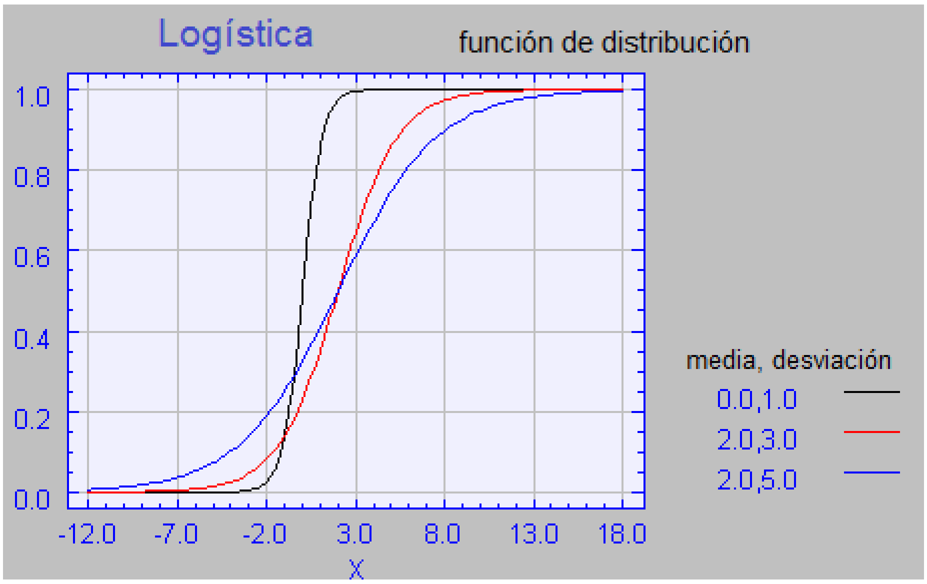
siendo su función de distribución: para $-\infty < x < \infty$

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}}$$

Si se lleva a cabo el cambio de variable $y = \dfrac{x-\alpha}{\beta}$

Obtendremos la distribución Logística estandarizada L(0,1) cuya función de cuantía será $f(y) = \dfrac{e^{-y}}{\left(1+e^{-y}\right)^2}$

La representación gráfica de la función de distribución de un modelo logística para varios valores será:



Obsérvese en el gráfico que a los parámetros se les denomina , media y desviación

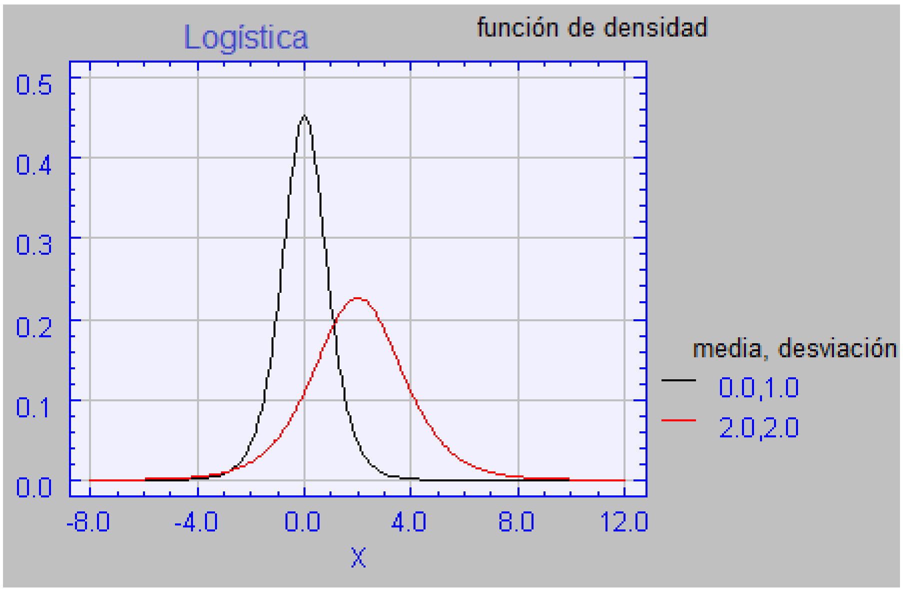
En el caso de alfa podemos decir que es cierto dado que si :

$$x \rightarrow L[\alpha \; ; \; \beta] \quad E[x] = \mu = \alpha$$

en el caso de la desviación es casi cierto y podría considerarse pues la varianza si:

$$x \rightarrow L[\alpha \; ; \; \beta] \quad Var[x] = \frac{\pi^2}{3}\beta^2$$

en otros aspectos podemos aportar que la distribución logística es simétrica , por lo que su coeficiente de simetría es 0 , además es leptocúrtica pues su coeficiente de curtosis es 1,2. La función de densidad es parecida a la de la distribución normal:



en el gráfico anterior de la función de densidad puede constatarse que la distribución tiene de moda y mediana el valor del parámetro alfa , es decir , la media

Distribución de Gumbel, o valor extremo.

La variable aleatoria está definida para todo el eje real. Tiene dos parámetros :

$\mu = moda \, , parámetro \;\; de \;\; localización$
$\sigma = parámetro \;\; de \;\; escala \, .$

La importancia de esta distribución radica en que se ocupa de modelizar probalidades de valores extremos, de ahí su nombre. Por ejemplo modelizar el máximo de indemnizaciones mensuales en base a las acontecidas como máximas en años anteriores de años anteriores. Es útil , también, para predecir crecidas de ríos , movimientos sísmicos..

Su función de densidad viene dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{\left(-e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\right)} \qquad \text{para } x \in [-\infty ; \infty]$$

su función de distribución es:

$$F(x) = e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}}$$

la media es $E[x] = \mu + \gamma\sigma \;\; siendo \;\; \gamma = cte.de \;\; Euler - Mascheroni \cong 0,5772$

la moda coincide con el parámetro μ

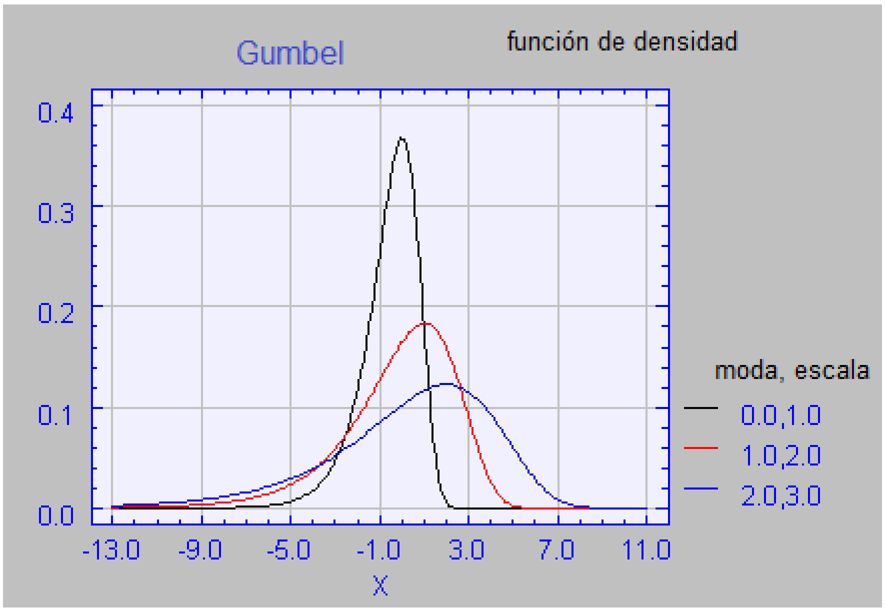
en cuanto a su varianza es: $Var[x] = \frac{\pi^2}{6}\sigma^2$

existe la distribución de Gumbel estándar , cuando $\mu = 0 \;\; y \;\; \sigma = 1$

siendo su función de densidad y de distribución :

$f(t) = e^{-x} e^{-e^{-x}} \qquad y \qquad F(x) = e^{-e(-t)}$

su representación gráfica será:



obsérvese como las curvas tienden al extremo superior

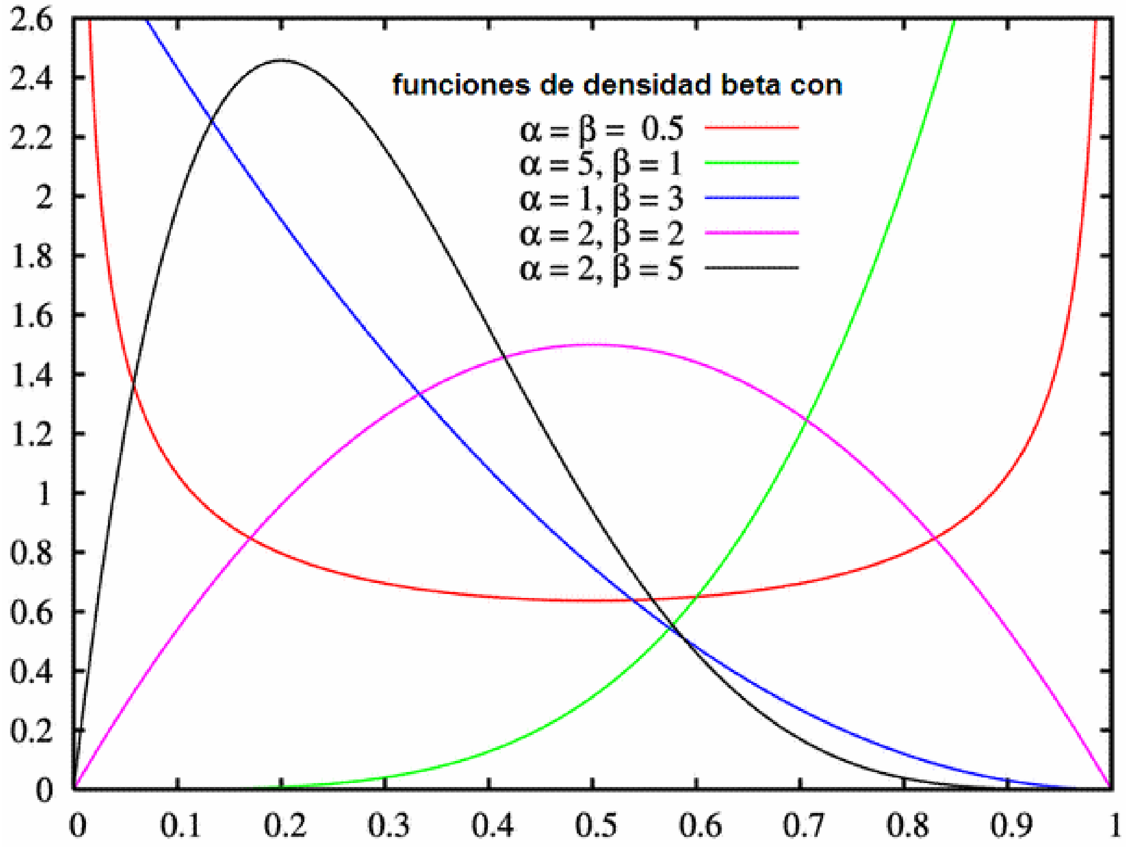
Distribución Beta

Diremos que una variable aleatoria x con campo de variación [0,1] sigue una distribución Beta (de primera especie) de parámetros α ,β (positivos ambos) cuando su función de densidad obezca a la expresión:

$$x \rightarrow Beta(\alpha,\beta) \qquad f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\beta(\alpha,\beta)} \quad x \in [0,1]$$

Debido a que su campo de variación es el compacto [0,1] la distribución beta se utiliza a menudo como modelo de distribución de probabilidades o proporciones. También se usa en la estimación bayesiana de proporciones y probabilidades como distribución conjugada a una verosimilitud binomial. En relación con esto, aunque el resultado es independiente, es interesante hacer ver que una distribución Beta(1,1) coincide con una distribución uniforme en el intervalo [0,1],U([0,1]).

La representación gráfica para diversos valores de alfa y beta es:



La media , varianza y moda de una distribución de Beta son respectivamente:

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2.(\alpha+\beta+1)} \qquad \mu_0 = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}$$

Ya que:

Media , varianza y moda de una distribución de Beta

Dada una variable x, que sigue una distribución beta de parámetros α y β, su media vendrá dada por:

$$\mu = E(x) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 \frac{x.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\beta(\alpha,\beta)}dx = \frac{1}{\beta(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{(\alpha+1)-1}(1-x)^{\beta-1}dx =$$

$$= \frac{\beta(\alpha+1,\beta)}{\beta(\alpha,\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+1).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+1+\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}.\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+1+\beta)} = \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}$$

Por otro lado, la varianza vendrá dada por :

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2 \ \text{ y } \ \alpha_2 = E(x^2)$$

$$\alpha_2 = E(x^2) = \int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{\beta(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{(\alpha+2)-1}(1-x)^{\beta} dx =$$

$$= \frac{\beta(\alpha+2,\beta)}{\beta(\alpha,\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+2).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+2+\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta).(\alpha+\beta+1)}$$

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

La moda puede obtenerse maximizando la función de densidad: derivando su denominador e igualando esta derivada a cero:

$$\max f(x) = \frac{1}{\beta(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \Rightarrow \max N(x) = x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

$$N'(x) = 0 = (\alpha-1)x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta-1} + x^{\alpha-1}.(\beta-1)(1-x)^{\beta-2}.(-1) =$$
$$= (\alpha-1)x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta-1} - (\beta-1)x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-2} = 0$$

Para valores de x distintos de cero y de 1 podemos dividir por x elevado a (alfa-2) y por (1-x) elevado a (beta-2):

$$(\alpha-1)(1-x) - (\beta-1)x = 0 \quad \Rightarrow (\alpha-1)(1-x) = (\beta-1)x \quad \Rightarrow x = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}$$

de modo que la moda acaba siendo :

$$\boxed{\mu_0 = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}}$$

Distribución Beta (1,1)

Una distribución beta(1,1) coincide con una uniforme en [0,1] ya que su función de densidad degenera en la constante unidad:

$$x \to \beta(1,1) \Rightarrow f(x) = \frac{x^{1-1}(1-x)^{1-1}}{\beta(1,1)} = 1$$

Entre otras consecuencias interesantes este resultado permitirá utilizar la distribución uniforme como prior mínimo-informativa en la estimación bayesiana de proporciones permitiendo obtener una distribución posterior Beta (que es la conjugada a una verosimilitud binomial)

Función generatriz de probabilidad (FGP)

Sea una variable aleatoria discreta que toma valores en |N. la Función generatriz de probabilidades se define como:

$$G(z) = E\left[z^x\right] = \sum_{x=0}^{\infty} z^{x_i} \cdot P(x_i)$$

Como propiedad fundamental de la FGP , se establece que derivada sucesivamente da lugar a los diversos momentos de la distribución cuando z tiende a 1 de manera:

$$G^{(k)}_{x\to 1}(z) = E\left[x(x-1)(x-2)....(x-k+1)\right] \quad k = 1,2,3..$$

así:

$$G_{z\to 1}(z) = 1 \quad G'_{z\to 1}(z) = E\left[x\right] \quad G''_{z\to 1}(z) = E\left[x(x-1)\right] = E\left[x^2\right] - E\left[x\right]$$

Otra aplicación importante de la FGP consiste en :
Si X e Y son variables independientes discretas con funciones generatrices de probabilidad $G_x(z) \ y \ G_y(z)$ respectivamente , entonces la función generatriz de probabilidades de la suma de ambas variables X+ Y es :

$$G_{x+y}(z) = G_x(z) \cdot G_y(z)$$

esta propiedad es generalizable para n variables discretas independientes:
$x_1, x_2, x_3 .....x_n$
con FGP $G_{x_1}(z), G_{x_2}(z), G_{x_3}(z), ..., G_{x_n}(z)$ respectivamente
la FGP de la suma vendrá dada por:

$$G_{x_1+x_2+x_3+...+x_n}(z) = G_{x_1}(z) \cdot G_{x_2}(z) \cdot G_{x_3}(z) \cdots\cdots G_{x_n}(z)$$

Función generatriz de probabilidad del Modelo de Poisson.

Sea $x \to \wp(\lambda)$ por tanto $P(x) = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$

$$G(z) = E\left[z^x\right] = \sum_{x=0}^{\infty} z^{x_i} \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \cdot \frac{z^{x_i} \cdot \lambda^{x_i}}{x_i!} =$$

$$e^{-\lambda}\left[1 + \frac{(z\lambda)^1}{1} + \frac{(z\lambda)^2}{2!} + \frac{(z\lambda)^3}{3!} + ..\right] = e^{-\lambda} \cdot e^{z\lambda} = e^{\lambda(z-1)}$$

ya que $e^x = 1 + \dfrac{e^1}{1!} + \dfrac{e^2}{2!} + ...$

si la **FGP** de una Poisson es la anterior

podemos calcular sus momentos:

es evidente que $G_{z\to 1}(z) = e^{\lambda(1-1)} = 1$

$$G^{'}(z)=\lambda \cdot e^{\lambda(z-1)} \rightarrow G^{'}_{z\rightarrow 1}(z)=\lambda \cdot e^{\lambda(1-1)}=\lambda=E\left[x\right]$$

$$G^{''}(z)=\lambda^2 \cdot e^{\lambda(z-1)} \rightarrow G^{'}_{z\rightarrow 1}(z)=\lambda^2 \cdot e^{\lambda(1-1)}=\lambda^2=E\left[x^2\right]-E\left[x\right]$$

de donde

$$\lambda^2=E\left[x^2\right]-E\left[x\right] \rightarrow E\left[x^2\right]=\lambda^2+\lambda$$

siendo la varianza :

$$\sigma^2=E\left[x^2\right]-\left(E\left[x\right]\right)^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

como ya era conocido

Función generatriz de probabilidad del modelo de binomial.

Sea $x \rightarrow B(n,p)$ luego $P(x)=\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$

$$G(z)=E\left[z^x\right]=\sum_{x=0}^{\infty} z^{x_i} \cdot P(x_i)=\sum_{x=0}^{\infty} z^{x_i} \binom{n}{x_i} \cdot p^{x_i} q^{n-x_i}$$

desarrollando el binomio de newton obtendríamos

$G(z)0=(pz+q)^n$ como FGP de la distribución binomial

es evidente que $G_{z\rightarrow 1}(z)=(p1+q)^n=1 \quad pues \; p+q=1$

$$G^{'}(z)=n(pz+q)^{n-1} \cdot (p) \rightarrow G^{''}_{z\rightarrow 1}(z)=n(p1+q)^{n-1}p=np=E\left[x\right]$$

$$G^{''}(z)=np \cdot (n-1)(pz+q)^{n-2} \cdot p \rightarrow G^{''}_{z\rightarrow 1}=(n^2p-np)p=$$

$$=n^2p^2-np^2=E\left[x^2\right]-E\left[x\right] \rightarrow E\left[x^2\right]=n^2p^2-np^2+np$$

luego la varianza sería:

$$\sigma^2=E\left[x^2\right]-(E\left[x\right])^2=n^2p^2-np^2+np-n^2p^2=np-np^2=np(1-p)=npq$$

como ya sabíamos

Distribuciones compuestas : Binomial-Poisson

Si tenemos una variable aleatoria X que se distribuye como una binomial

$x \rightarrow B(n,p)$ donde n , el número de pruebas, es también aleatorio y se distribuye como un modelo de Poisson

$n \rightarrow \wp(\lambda)$

estaremos ante un modelo compuesto donde la binomial es la distribución principal mientras que la distribución de Poisson es la secundaria.

La probabilidad para un determinado valor (k) de x vendrá condicionada por el valor(m) que tome n que es aleatorio.

Así:

donde :

$P(n=m)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{m}}{m!} \quad m=0,1,2,3,...$ y

$$P(x=k)=\binom{n}{k}p^{k}q^{n-k}$$

dado que no conocemos el valor de n este tomará un valor cualquiera m así

$$P(x=k)=\sum_{m=k}^{\infty}\binom{m}{k}p^{k}q^{m-k}\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^{m}}{m!}=$$

$$e^{-\lambda}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{m!}{k!(m-k)!}p^{k}q^{m-k}\cdot\frac{\lambda^{m}}{m!}=e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{m!}{k!(m-k)!}p^{k}q^{m-k}\cdot\frac{\lambda^{m-k}}{m!}=$$

$$\frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^{k}}{k!}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{q^{m-k}\lambda^{m-k}}{(m-k)!}=\frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^{k}}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(q\lambda)^{m}}{m!}=$$

$$=\frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^{k}}{k!}e^{q\lambda}=\frac{e^{-p\lambda}(p\lambda)^{k}}{k!}$$

la Binomial compuesta de Poisson (la Binomial cuyo parámetro n viene dado por una Poisson) .
Tendrá de función de cuantía la de una distribución de Poisson de parámetro λp .

Ejemplo: La proporción de clientes que compra al día en una tienda es del 25% de los que entran. Por término medio entran 10 clientes al día. Calcular la probabilidad de que compren dos clientes en un día.
X= número de clientes compran de los que entran
$x\rightarrow B(n;0,25)$ donde n es desconocido y depende de un modelo de Poisson
$n\rightarrow \wp(\lambda=10)$

$$P(x=k=2)=\frac{e^{-p\lambda}(p\lambda)^{k}}{k!}=\frac{e^{-4}\cdot 4^{2}}{2!}=\frac{0,0183\cdot 16}{2}=0,146$$