

# Ejercicios de Distribuciones Muestrales

## Índice:

- [Ejercicio 3.5 — Distribución muestral de la media](#)
- [Ejercicio 3.6 — Varianza muestral](#)
- [Ejercicio 3.12 — Diferencia de medias muestrales](#)
- [Ejercicio 3.15 — Proporción muestral](#)

## EJERCICIO 3.5 — Distribución muestral de la media

**Enunciado:** Si se parte de una población con distribución  $N(2, 4)$  y se extraen muestras aleatorias simples de tamaño 36, ¿cuál es la probabilidad de que la media de una muestra sea menor que 4 y mayor que 2?

### Datos

| Parámetro                                  | Valor             |
|--------------------------------------------|-------------------|
| Media poblacional ( $\mu$ )                | 2                 |
| Desviación típica poblacional ( $\sigma$ ) | 4                 |
| Tamaño de muestra ( $n$ )                  | 36                |
| Valores pedidos                            | $2 < \bar{X} < 4$ |

### Paso 1: Distribución de la media muestral

Como la población es normal:

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma / \sqrt{n})$$

$$\sigma_{\bar{X}} = 4 / \sqrt{36} = 4 / 6 = 0,6667$$

$$\bar{X} \sim N(2, 0,6667)$$

### Paso 2: Tipificación

$$Z = (\bar{X} - \mu) / (\sigma / \sqrt{n})$$

Para  $\bar{X} = 2$ :

$$Z_1 = (2 - 2) / 0,6667 = 0$$

Para  $\bar{X} = 4$ :

$$Z_2 = (4 - 2) / 0,6667 = 3$$

### Paso 3: Cálculo de la probabilidad

$$P(2 < \bar{X} < 4) = P(0 < Z < 3) = \Phi(3) - \Phi(0)$$

$$= 0,9987 - 0,5000 = 0,4987$$

$$\mathbf{P(2 < \bar{X} < 4) \approx 0,4987 \rightarrow 49,87 \%}$$

## EJERCICIO 3.6 — Varianza muestral

**Enunciado:** Dada una población  $X$  cuya distribución es normal con media desconocida y varianza igual a 16. ¿Cuál es el porcentaje de muestras, de tamaño 41, en las que se verifica que la varianza muestral es mayor que 14,111 y menor que 15,3522?

**Solución esperada:** 10 %

### Datos

| Parámetro                           | Valor                    |
|-------------------------------------|--------------------------|
| Varianza poblacional ( $\sigma^2$ ) | 16                       |
| Tamaño de muestra ( $n$ )           | 41                       |
| Valores pedidos                     | $14,111 < S^2 < 15,3522$ |

### Paso 1: Estadístico de contraste

$$\chi^2 = (n - 1) \cdot S^2 / \sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

con  $n - 1 = 40$  grados de libertad.

### Paso 2: Tipificación

Para  $S^2 = 14,111$ :

$$\chi^2_1 = 40 \cdot 14,111 / 16 = 35,2775$$

Para  $S^2 = 15,3522$ :

$$\chi^2_2 = 40 \cdot 15,3522 / 16 = 38,3805$$

### Paso 3: Cálculo de la probabilidad

$$P(35,2775 < \chi^2_{40} < 38,3805)$$

Consultando la tabla chi-cuadrado con 40 gl:

$$P(\chi^2_{40} > 35,2775) \approx 0,675$$

$$P(\chi^2_{40} > 38,3805) \approx 0,575$$

$$P = 0,675 - 0,575 = 0,10$$

$$P(14,111 < S^2 < 15,3522) \approx 0,10 \rightarrow 10 \%$$

## EJERCICIO 3.12 — Diferencia de medias muestrales

**Enunciado:** Consideradas dos poblaciones X e Y con distribuciones  $N(25, 15)$  y  $N(10, 11)$ , de las que se extraen muestras aleatorias simples e independientes, con tamaños  $n_X = 100$  y  $n_Y = 150$  respectivamente, ¿cuál es la probabilidad de que la diferencia de las medias muestrales ( $\bar{X} - \bar{Y}$ ) tome valores comprendidos entre 12,745 y 17,255?

**Solución esperada:** 0,803

### Datos

| Población | Media ( $\mu$ ) | Desv. típica ( $\sigma$ ) | Tamaño (n) |
|-----------|-----------------|---------------------------|------------|
| X         | 25              | 15                        | 100        |
| Y         | 10              | 11                        | 150        |

### Paso 1: Distribución de la diferencia de medias

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_X - \mu_Y, \sqrt{(\sigma_X^2/n_X + \sigma_Y^2/n_Y)})$$

Media:

$$\mu_X - \mu_Y = 25 - 10 = 15$$

Error típico:

$$\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{(225/100 + 121/150)} = \sqrt{(2,25 + 0,80667)} = \sqrt{3,05667} = 1,7483$$

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(15, 1,7483)$$

### Paso 2: Tipificación

Para  $\bar{X} - \bar{Y} = 12,745$ :

$$Z_1 = (12,745 - 15) / 1,7483 = -1,29$$

Para  $\bar{X} - \bar{Y} = 17,255$ :

$$Z_2 = (17,255 - 15) / 1,7483 = +1,29$$

### Paso 3: Cálculo de la probabilidad

$$P(-1,29 < Z < 1,29) = 2 \cdot \Phi(1,29) - 1$$

$$\Phi(1,29) = 0,9015$$

$$P = 2 \cdot 0,9015 - 1 = 0,803$$

$$P(12,745 < \bar{X} - \bar{Y} < 17,255) \approx 0,803$$

## EJERCICIO 3.15 — Proporción muestral

**Enunciado:** Se sabe que el 80 % de los habitantes de cierta población prefieren disfrutar de sus vacaciones en la temporada estival. Si se obtiene una m.a.s. de 90 habitantes de dicha población, ¿cuál es la probabilidad de que menos de 81 prefiera disponer de sus vacaciones en verano?

**Solución esperada:** 0,9911

### Datos

| Parámetro                  | Valor                            |
|----------------------------|----------------------------------|
| Proporción poblacional (p) | 0,80                             |
| Tamaño de muestra (n)      | 90                               |
| Nº de éxitos observados    | menos de 81 $\rightarrow X < 81$ |

### Paso 1: Proporción muestral

La proporción muestral  $\hat{p} = X/n$  sigue aproximadamente una normal ( $n \cdot p = 72 > 5$  y  $n \cdot (1-p) = 18 > 5$ ):

$$\hat{p} \sim N(p, \sqrt{p \cdot (1-p)/n})$$

$$\mu_{\hat{p}} = 0,80$$

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{0,80 \cdot 0,20 / 90} = \sqrt{0,001778} = 0,04216$$

### Paso 2: Tipificación

"Menos de 81" equivale a  $\hat{p} < 81/90 = 0,90$ .

$$Z = (0,90 - 0,80) / 0,04216 = 2,372$$

### Paso 3: Cálculo de la probabilidad

$$P(\hat{p} < 0,90) = P(Z < 2,372) = \Phi(2,372)$$

$$\Phi(2,37) = 0,9911$$

$$\mathbf{P(X < 81) \approx 0,9911}$$