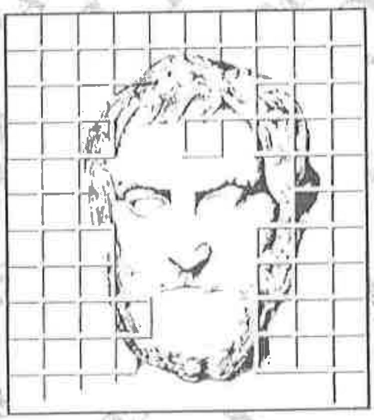
«EPSILON»

REVISTA DE LA S.A.E.M. "THALES"



SEPARATA

Nº 30

EDITA: S.A.E.M. "THALES" - FACULTAD DE MATEMATICAS
APARTADO 1160 - 41080 SEVILLA (ESPAÑA)

D.L.: SE - 421 - 1984 / I.S.S.N.: 1131 - 9321

METODOS NUMERICOS EN MUSICA

Vicente Liern
Departament d'Economia Financiera y Matemàtica
Universitat de València.

RESUMEN. Este trabajo es un resumen de una experiencia llevada a cabo con estudiantes de bachillerato y de facultad. La idea es utilizar la atracción que la música despierta en nuestros alumnos para hacer una revisión de conceptos matemáticos.
Tomando como tema la afinación musical, se hace uso de conceptos como logaritmos, sucesiones, convergencia, etc. Se muestra que las notas afinadas se obtienen con un criterio meramente matemático y, además, se explica por qué las notas afinadas son siete o doce y por qué una orquesta nunca puede estar perfectamente afinada.

ABSTRACT: This paper describes a didactical experience in which secondary school and undergraduate students participated. The key point is using the attraction that our students feel for music for doing a review of several mathematical concepts.
The musical tuning give rise to concepts as logarithms, sequences, convergence, etc. It is shown that the tuned notes are obtained with a merely mathematical criterion, besides we explain why the tuned notes must be seven or twelve and why and orchestra never can be perfectly on tune.

1. INTRODUCCION

La estrecha relación entre las matemáticas y la música se conoce desde la antigüedad griega. Se sabe que la Escuela pitagórica elaboró una teoría de la música, muy elogiada, que se basaba en los números. Sin embargo, no todo fueron elogios para esta concepción matemática de la música. Por ejemplo, en la *Metafísica* de Aristóteles se censura a los pitagóricos porque afirmaron *"...que muchos atributos* *de los números pertenecían a los cuerpos sensibles; postularon que... los atributos de los números existían en las notas musicales, en los cielos y en otras muchas cosas".*

No obstante, a pesar de las críticas, la teoría numérico-musical de Pitágoras se acepta durante muchos siglos. Será a partir del Barroco cuando se empieza a distinguir claramente entre la música como ciencia y la música como arte: frente a *G. Zarlino* y sus leyes matemáticas, *Vicenzo Galilei*, padre de Galileo Galilei, sostiene que la palabra y la emoción humana son las guías de la música.

Intentar resolver esta discusión histórica resultaría pretencioso por nuestra parte, por ello no se ha intentado abordar el estudio matemático de la música en general, sino de una mínima parte de ella en la que todos aceptan el carácter numérico: la *afinación musical*.

La presente experiencia ha sido desarrollada con alumnos de últimos cursos de bachillerato y de primer curso de facultad. Consiste en aprovechar la atracción que la música despierta en nuestros alumnos para hacer una revisión de conceptos matemáticos. Ellos saben que la mayoría de la música que escuchan ha salido de un ordenador y que incluso los micrófonos que utilizan los cantantes en directo pasan por una mesa de mezclas que modifica la entonación. Pues se trata de utilizar estas ideas y los instrumentos con los que pasan gran parte de su ocio (cassetes, discos...) para obtener conceptos matemáticos que en principio distan mucho de aparecer en su tiempo libre.

Intentamos reivindicar las matemáticas como un lenguaje capaz de "traducir" a una forma más manejable los conceptos de la vida cotidiana, pretendiendo con ello retomar la trayectoria histórica del pensamiento matemático, que ha consistido en estudiar problemas concretos para llegar a abstraer a partir de ellos. La idea general de todo el trabajo es fijar un tema: LA AFINACION MUSICAL y, a partir de él, estudiar qué propiedades matemáticas podemos obtener.

2. CONCEPTOS PREVIOS

En primer lugar necesitamos convenir que, en todo lo que se va a tratar, un sonido se va a identificar con su frecuencia, con lo cual tenemos que el conjunto de todos los sonidos posibles es R^+.

Los conceptos musicales que vamos a necesitar son: *afinación y octava.*

1) *Afinar* es elegir una cantidad *finita* de sonidos, y estos sonidos serán llamados sonidos afinados o *notas musicales*. Esto, dicho en lenguaje matemático, no es otra cosa que hacer una elección finita de números de R^+.
2) Si un sonido tiene frecuencia f y otro 2f se dice que el primero es una *octava* más bajo (o grave) que el segundo.

Los sonidos que difieren en una o varias octavas se consideran equivalentes e incluso reciben el mismo nombre. Matemáticamente se resume si consideramos R+ dividido en intervalos de una octava de amplitud de la forma:

$$\ldots[\frac{1}{2^2} f, \frac{1}{2} f[, \quad [\frac{1}{2} f, f[, \quad [f, 2f[,\ldots$$

basta con que consideremos uno sólo de estos intervalos, porque para pasar de uno a otro no hay más que multiplicar por alguna potencia de 2.

Esta idea se expresa más fácilmente mediante una relación binaria de equivalencia de la forma siguiente:

"Dos sonidos de frecuencias f_1 y f_2 están relacionados por $\mathcal{R}$ si $f_1 = 2^n f_2$ para algún n natural".

Así, en lugar de estudiar todo R^+, estudiamos sólo el conjunto cociente $R^+/\mathcal{R}$ que es un intervalo de la forma $[f,2f[$. Este, evidentemente depende de f, por ello lo que se hace es fijar un sonido patrón f_0 (que en la actualidad es el la = 440Hz) con ello, podemos concretar todo el estudio al intervalo $[f_0, 2f_0[$ o si queremos al intervalo $[1,2[$, porque una vez obtenidos los valores en este intervalo no hay más que multiplicarlos por f_0.

Concretemos el problema a estudiar:

Hemos visto que la idea de octava, o la relación binaria $\mathcal{R}$, no sólo es útil desde un punto de vista musical, sino que matemáticamente simplifica mucho el conjunto a estudiar que pasa de R^+ a $[1,2[$. Para obtener el conjunto de los sonidos, no tenemos más que elegir números de $[1,2[$, por ejemplo $\{a_1, a_2, \ldots a_k\}$, y multiplicarlos por f_0. El conjunto de sonidos afinados dentro de una octava es:

$$A = \{a_1 f_0, a_2 f_0, \ldots, a_k f_0\}$$

En principio, la elección de números de $[1,2[$ es arbitraria, sin embargo, en el resto de la experiencia veremos que las afinaciones que han perdurado han respondido a criterios meramente matemáticos.

3. AFINACION PITAGORICA[1]

La afinación que introdujo *Pitágoras de Samos* (580-500 a.C.) en la antigua Grecia puede resumirse en la siguiente idea:

> *"Dada una cuerda que produce un sonido f_0, los sonidos afinados se obtienen multiplicando o dividiendo por 3 la longitud de la cuerda cuantas veces se quiera".*

Con ello, las notas afinadas son un subconjunto de las sucesiones $\{3^n f_0\}_{n\geq 0}$ y $\{1/3^n f_0\}_{n\geq 0}$. Sin embargo, hemos establecido en el apartado anterior que los puntos deben pertenecer al intervalo $[1,2[$, por ello, lo primero que haremos es suponer que $f_0 = 1$, y después deberemos dividir las sucesiones por una potencia adecuada de 2 para que sus puntos estén en $[1,2[$. Por ejemplo:

1. Este sistema sigue utilizándose en la actualidad en la afinanciación de los instrumentos de cuerda.

$$\frac{3}{2}, \frac{3^2}{2^3}, \frac{3^3}{2^4}, \frac{3^4}{2^6}, \ldots$$

$$\frac{2^2}{3}, \frac{2^4}{3^2}, \frac{2^5}{3^3}, \frac{2^7}{3^4}, \ldots$$

Para dar con una fórmula general que nos permita conocer cuál es la potencia de 2 adecuada hemos empezado calculando $\log_2 3^n$, i.e.

$$\log_2 3 = 1{,}585\ldots, \quad \log_2 3^2 = 3{,}190\ldots, \quad \ldots \quad \log_2 3^k = k \cdot 1{,}585\ldots$$

En cada caso, la parte no decimal de los resultados anteriores nos indican cuál es la potencia de 2 necesaria. Por tanto, la fórmula general sería:

$$2^{E[\log_2 3^n]}$$

donde E[x] es la parte entera de x.

Así pues, las sucesiones pitagóricas a estudiar son:

$$\left\{\frac{3^n}{2^{E[\log_2 3^n]}}\right\}_{n\geq 0} \quad \text{y} \quad \left\{\frac{3^{-n}}{2^{E[\log_2 3^{-n}]}}\right\}_{n\geq 0}$$

Matemáticamente el problema ya estaría resuelto. Sin embargo, esta solución, dada sin más, no refleja el espíritu de la afinación pitagórica en su totalidad. Falta resolver algunos problemas: hacer uso de que sean siete las *notas fundamentales*, obtener una nota a partir de otra, obtener ***notas alteradas*** a partir de las fundamentales... Por ello, vamos a dar un proceso algorítmico que permita obtener las notas afinadas siendo fieles a la evolución histórica de esta afinación.

Algoritmo Pitagórico

Notas Fundamentales

Las siete notas fundamentales, a partir de las cuales se obtienen todas las demás, reciben en música los nombres do, re, mi fa, sol, la si[2]. Veamos cómo se obtienen estas notas:

1) Representamos cada nota por un número de la forma siguiente:

1 = Do, 2 = Re, 3 = Mi, 4 = Fa, 5 = Sol, 6 = La, 7 = Si

2. También está muy extendida la notación empleada en los países de lengua inglesa. En ellos, las notas se nombran con las letras del abecedario del modo siguiente:

A = La, B = Si, C = Do, D = Re, E = Mi, F = Fa, G = Sol

2) Escribimos una "caja" formada por 4 filas de siete números como sigue:

1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7

3) Empezando por el 4 de la primera fila, vamos contando sucesivamente 4 "lugares" (a esto le llamaremos "salto") y marcamos los números así obtenidos:

1	2	3	$\boxed{4}$	5	6	7
$\boxed{1}$	2	3	4	$\boxed{5}$	6	7
1	$\boxed{2}$	3	4	5	$\boxed{6}$	7
1	2	$\boxed{3}$	4	5	6	$\boxed{7}$

Cada vez que hemos contado cuatro lugares de izquierda a derecha, entendemos que se ha multiplicado por 3 la frecuencia de la nota, y cada vez que saltemos de derecha a izquierda es que hemos dividido por 3 la frecuencia.

Ejemplos:

1) Dada la nota Do = 1, para obtener un La = 6, hemos tenidos que hacer 3 saltos de izquierda a derecha, por tanto:

$$La = 3^3 \cdot Do$$

Para llevarlo dentro de una octava tendríamos que dividir 3^3 por 2^4, así:

$$La = \frac{3^3}{2^4} \cdot Do$$

2) Dada la nota Mi = 3, para obtener un Fa = 4, hemos tenido que hacer 5 saltos de derecha a izquierda, por tanto:

$$Fa = \frac{1}{3^5} \cdot Mi$$

Para llevarlo dentro de una octava tendríamos que multiplicar $1/3^5$ por 2^8, así:

$$Fa = \frac{2^8}{3^5} \cdot Mi$$

Notas Alteradas

Evidentemente, con siete notas, por mucho que las que subiésemos o bajásemos alguna octava, no dispondríamos de los sonidos suficientes para desarrollar toda la música. Por ello, se necesita añadir nuevas notas, las llamadas *notas alteradas*. Las alteraciones pueden ser de dos tipos:

a) Si la alteración de una nota r produce una nota s distinta de las notas fundamentales, de modo que la frecuencia de s es más alta que la de r, esta alteración se llama *sostenido*, y se representa por #.
b) Si la alteración de una nota r produce una nota s distinta de las notas fundamentales, de modo que la frecuencia de s es más baja que la de r, esta alteración se llama *bemol*, y se representa por b.

Un sonido puede estar alterado por varias alteraciones del mismo nombre, es decir varios sostenidos o varios bemoles.

Para obtener estas notas no hay más que extender el algoritmo que hemos descrito antes a nuevas cajas. Veámoslo:

1) A la caja de notas fundamentales dada en el apartado anterior le añadimos, por ejemplo, una caja por arriba y por debajo. La caja de arriba originará las notas alteradas por un bemol, y la de debajo las alteradas por un sostenido.
2) Marcamos primero las notas fundamentales, y una vez marcadas éstas seguimos marcando las cajas añadidas, es decir:

1	2	3	$\boxed{4}$	5	6	7	
$\boxed{1}$	2	3	4	$\boxed{5}$	6	7	= Con 1 bemol b
1	$\boxed{2}$	3	4	5	$\boxed{6}$	7	
1	2	$\boxed{3}$	4	5	6	$\boxed{7}$	
1	2	3	$\boxed{4}$	5	6	7	
$\boxed{1}$	2	3	4	$\boxed{5}$	6	7	= Fundamentales
1	$\boxed{2}$	3	4	5	$\boxed{6}$	7	
1	2	$\boxed{3}$	4	5	6	$\boxed{7}$	
1	2	3	$\boxed{4}$	5	6	7	
$\boxed{1}$	2	3	4	$\boxed{5}$	6	7	= Con 1 sostenido #
1	$\boxed{2}$	3	4	5	$\boxed{6}$	7	
1	2	$\boxed{3}$	4	5	6	$\boxed{7}$	

Como ocurría con las notas fundamentales, un salto de izquierda a derecha significa multiplicar por 3 la frecuencia, y un salto de derecha a izquierda dividir por 3. Veamos algún ejemplo:

Ejemplos:

3) Dada la nota Do = 1, para obtener un Fa# = 4 (de la siguiente caja), hemos tenido que hacer 6 saltos de izquierda a derecha, por tanto:

$$Fa^{\#} = 3^6 \cdot Do$$

Para llevarlo dentro de una octava tendríamos que dividir 3^6 por 2^9, así:

$$Fa^{\#} = \frac{3^6}{2^9} \cdot Do$$

4) Dada la nota Re = 2, para obtener un $Mi^b = 3$ (de la caja anterior), hemos tenido que hacer 5 saltos de derecha a izquierda, por tanto:

$$Mi^b = \frac{1}{3^5} \cdot Re$$

Para llevarlo dentro de una octava tendríamos que multiplicar $1/3^5$ por 2^8, así:

$$Mi^b = \frac{2^8}{3^5} \cdot Re$$

La cantidad de alteraciones podría aumentarse tanto como quisiéramos. Si añadimos dos cajas por arriba de las notas fundamentales y dos por debajo de éstas, obtendríamos notas con 2 bemoles, con 1 bemol, fundamentales, con 1 sostenido y con 2 sostenidos respectivamente. Repitiendo el proceso, se podría aumentar al número de cajas tanto como se quiera.

El proceso parece infinito pero no es así. Llega un momento en que, si el número de notas es demasiado grande, el oído humano no es capaz de distinguir unas notas de otras.

Es curioso, pero mucho antes de que el análisis numérico se plantease el concepto de *convergencia*, tanto músicos como estudiosos de la acústica, fueron conscientes de que con la sucesión pitagórica podíamos obtener notas alteradas de manera que nos aproximásemos a una dada, f_1, tanto como quisiéramos. Dicho esto en lenguaje matemático sería:

> "Dada una nota f_1 podemos elegir una cantidad de términos de la sucesión pitagórica $\{a_1, a_2, ...a_n\}$ de manera que $a_n f_1$ sea tan próxima a f_1 como queramos".

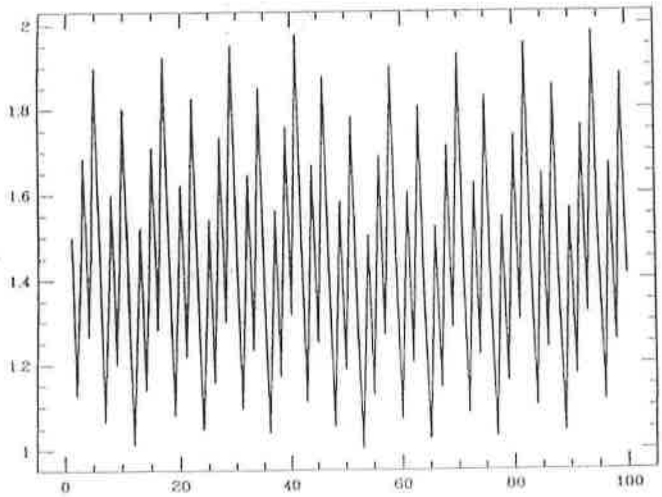
Sin duda, esto es la intuición de que en la sucesión pitagórica hay "algún tipo de convergencia"[3] hacia el 1, y esta idea será la que se utilizará para las afinaciones que damos a continuación.

4. OTROS CRITERIOS DE AFINACION

Desde finales del siglo XVII, algunos teóricos de la acústica (entre los que destaca fundamentalmente Andreas Werckmeister), conscientes de la dificultad que presenta la afinación por sucesiones de números racionales que establecen particiones irregulares del intervalo [1,2[, propusieron sistemas que establecían subintervalos de la misma longitud. Consistía en fijar *a priori* la cantidad de notas que se debe manejar, y con esto obtener los números adecuados dentro de [1,2[.

Para determinar el número de notas adecuado, estudiaron la sucesión pitagórica. Observaron que había ciertas cantidades de notas que proporcionaban muy buenos resultados. Veamos la representación de los 100 primeros términos de la sucesión:

$$\left\{\frac{3^n}{2^{E[\log_2 3^n]}}\right\}_{n\geq 1} :$$



GRAFICA PITAGORICA

En el gráfico, podemos ver que los valores más próximos al 1 se alcanzan con 12 notas ($a_{12} \approx 1.014$) y con 53 notas ($a_{53} \approx 1.0021$). Para acercarnos aún más, necesitaríamos 665 notas ($a_{665} \approx 1.00005$), pero indudablemente, un sistema de afinación que utilizase 665 notas dentro de una octava, sería absolutamente inmanejable.

3. La convergencia no es la clásica, sino que se refiere a que el límite inferior de la sucesión pitagórica es 1.

La idea que subyace en esta convergencia es:

> Si se tiene una afinación dada por 12 notas, para mejorarla habría que considerar un conjunto de 53 notas, y no tendría sentido trabajar con los números intermedios, puesto que la *precisión* que se obtiene no sería mejor que con 12 notas. Para mejorar la afinación de 53 notas habría de recurrirse a 665 notas.

Precisamente por esta idea, de todos los sistemas de afinación que se propusieron a partir del siglo XVIII (sistema de *Saveur* con 43 divisiones de la escala, sistema de *Huyghens* con 31 divisiones...) sólo tuvieron éxito los sistemas de 12 notas, *afinación temperada*, y de 53 notas, *afinación de Holder*.

E

Afinación temperada

Su gran difusión se debe a J.S. Bach, por eso también se le llama sistema de Bach. Propone la elección de 12 puntos del intervalo [1,2[dados por $\{2^{k/12}\}_{k=0}^{11}$. La idea es elegir en [1,2[los puntos:

$$x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5,\ x^6,\ x^7,\ x^8,\ x^9,\ x^{10},\ x^{11}$$

por tanto, necesariamente $x = \sqrt[12]{2}$.

En este sistema afinan el piano y el arpa, y su éxito ha sido tal que es el sistema que sirve de modelo de afinación a las orquestas y, de hecho, las palabras afinado y temperado suelen usarse como sinónimos.

Afinación de Holder

Propone la elección de 53 puntos del intervalo [1,2[dados por $\{2^{k/53}\}_{k=0}^{52}$. La idea es elegir en [1,2[los puntos:

$$x^0,\ x^1,\ x^2,\ ...,\ x^{52}$$

por tanto, necesariamente $x = \sqrt[53]{2}$.

En este sistema afinan las voces humanas, por ello se le llama tradicionalmente *escala solfística*.

5. COMENTARIOS

1) Las matemáticas son un buen lenguaje capaz de explicar la música.
2) Los logaritmos, parte entera, sucesiones, convergencia, gráficos de funciones... sirven para algo más que la clase de matemáticas. En todos los conciertos en directo, en las grabaciones e incluso en algunos tipos de KARAOKE, los sonidos han sido tratados matemáticamente.

3) En la actualidad hay distintos tipos de afinación que conviven dentro de la orquesta, esto hace que no pueda darse una afinción perfecta. Analicemos el siguiente ejemplo:

Un violín afina en el sistema de Pitágoras y un piano en el sistema temperado, como $2^{1/12}$ no es racional, $\nexists$ m, n $\in$ Z – {0} de manera que:

$$2^{m/12} = \frac{3^n}{2^{E[\log_2 3^n]}}$$

por tanto estos dos instrumentos nunca pueden afinar exactamente.

4) Aunque no tuviesen demasiado sentido en la música actual[4], podrían darse otras sucesiones que determinasen nuevas afinaciones. Para poder trabajar sobre este tema, añadimos un modo muy fácil de poder oir la afinación en el ordenador:

En BASIC

Basta con escribir $\boxed{\text{SOUND frecuencia (en Hz), tiempo (en seg.)}}$.

Por ejemplo:

```
10 SOUND 130.81,10
20 SOUND 30.81, 15
.....
```

En LOGO

Basta escribir $\boxed{\text{TONE frecuencia (en Hz.), tiempo (en seg.)}}$.

Por ejemplo:

```
TONE 130.81, 10
TONE 30.81, 15
.....
```

6. BIBLIOGRAFIA

[1] CHALLAY, J., CHALLAN, H. (1964): *"Teorie complete de la musique"*. Ed. Alphonse Leduc et Cia. EDITIONS MUSICALES, Paris.

[2] LIERN, V. (1991): *"La música: una ajuda per a les classes de matemátiques"*. Actas de las V Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. Castellón, 20-23 de marzo de 1991.

[3] LIERN, V. (1993): "Las Matemáticas de la Afinación Musical". *Enseñanza de las Ciencias*. Número Extra. IV Congreso, pp.: 333-334.

[4] MATRAS, J.J. (1977): *"Le son"*. Ed. Presses Universitaires de France, Paris.

[5] NEUBAUER, J. (1992): *"La emancipación de la Música"*. Colección La balsa de la medusa, Visot Dis. S.A.

[6] STROMBERG, K.R. (1981): *"An Introduction to Classical Real Analysis"*. Ed. Wadsworth and Brooks. Pacific Grove, California.

[7] TATON, R. (1985): *"Historia general de las Ciencias"* (Tomo I). Ed. Destino S.A., Barcelona (1985).

4. Cuando hablo de música actual estoy excluyendo la música hecha por ordenador para la cual, cualquier tipo de afinación puede resultar muy útil.