Algunos usos del Álgebra Lineal en las decisiones de Economía y Empresa*

Fray **Luca** Bartolomeo de **Pacioli** (1445 - 1517)

Dr. Vicente Liern Carrión
Universidad de Valencia (España)
vicente.liern@uv.es

• Para citar este documento:
Liern, V. (2018). Algunos usos del Álgebra Lineal en las decisiones de Economía y Empresa. 1ª ed. [ebook]. Obtenido de: http://www.uv.es/liern

Octubre, 2018

ISBN: 978-84-09-06036-8

ÍNDICE

1. Introducción. Planes de estudio del curso previos a los estudios universitarios

MATEMÁTICAS 2 BACHILLERATO
CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

1. Sistemas de ecuaciones lineales
2. Matrices
3. Determinantes
4. Sistemas de ecuaciones. Regla de Cramer
5. Límite de una función
6. Continuidad de funciones
7. Continuidad en un intervalo. Teoremas
8. Derivadas
9. Cálculo de derivadas
10. Aplicaciones físicas y geométricas de la derivada
11. Aplicación de las derivadas al estudio de funciones
12. Optimización de funciones
13. Representación gráfica de funciones
14. Teorema de Rolle, Lagrange y Cauchy
15. Integral indefinida
16. Métodos de integración
17. Integral definida
18. Vectores en el espacio
19. Puntos, rectas y planos
20. Posiciones relativas
21. Problemas métricos

MATEMÁTICAS 2 BACHILLERATO
CIENCIAS SOCIALES

1. Sistemas de ecuaciones lineales
2. Matrices
3. Determinantes
4. Sistemas de ecuaciones. Regla de Cramer
5. Programación lineal
6. Límite de una función
7. Continuidad de funciones
8. Derivadas
9. Cálculo de derivadas
10. Aplicaciones físicas y geométricas de la derivada
11. Aplicación de las derivadas al estudio de funciones
12. Optimización de funciones
13. Representación gráfica de funciones
14. Probabilidad
15. Distribuciones discretas de probabilidad
16. Distribución binomial
17. Distribución normal
18. Inferencia estadística

VNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Guía Docente
35816 Matemáticas I

DESCRIPCIÓN DE CONTENIDOS

1. Nociones básicas de álgebra
Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales. Matrices, determinantes, rango y cálculo de la inversa.

2. Límites y continuidad de funciones
Nociones de topología en Rn. Funciones de una y varias variables: función homogénea, compuesta e implícita. Gráficas de funciones. Curvas de nivel. Conceptos de límite y continuidad.

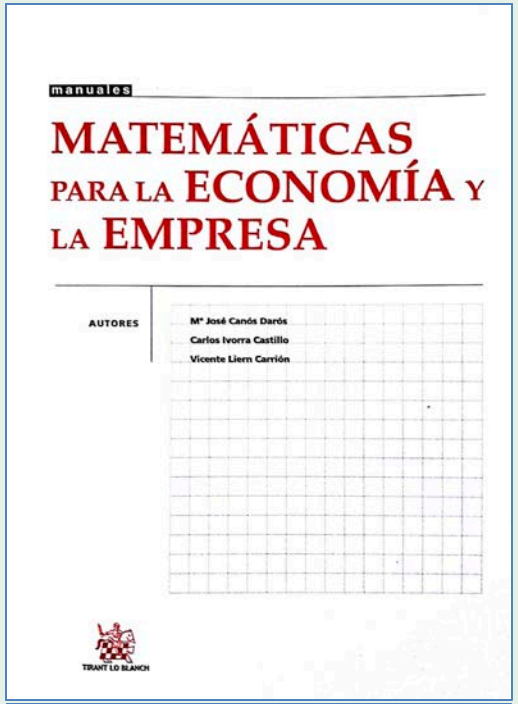
3. Derivabilidad de funciones
Definición e interpretación económica de derivada de una función real. Cálculo de derivadas. Definición e interpretación económica de derivadas parciales de funciones escalares y vectoriales. Derivadas sucesivas de funciones de una o más variables. Gradientes, jacobianas y hessianas.

4. Diferenciabilidad de funciones
Diferenciabilidad de funciones. Relación entre los conceptos de continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad. Direcciones de crecimiento de una función. Derivada de la función compuesta. Derivada de la función implícita.

5. Introducción al cálculo integral y a las ecuaciones diferenciales
Técnicas elementales de cálculo de primitivas. Integral de Riemann: Condiciones de integrabilidad y regla de Barrow. Integrales impropias de funciones reales de primera y segunda especie. Ecuaciones diferenciales de primer orden de variables separables.

Álgebra 20 %

Cálculo 80 %



Fecha de publicación: 2001
Editorial: Tirant lo Blanch
Colección: Manuales de Economía y Sociología
1ª Edición/ 200 págs./ Rústica/ Castellano/ Libro
ISBN: 9788484424505

Índice General

iii

iv

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción

Cuando una situación real se formula mediante un modelo matemático, los conceptos **'solución'** y **'decisión'** están relacionados, pero desde luego no son sinónimos. Así, un sistema de ecuaciones lineales sin solución (incompatible) puede llevar a tomar una decisión de forma clara, mientras que la solución proporcionada por un sistema compatible determinado, no tiene por qué ser válida para decidir.

Esta circunstancia hace que resulte necesario analizar los requisitos que se exigen a las soluciones para que sean útiles en modelos de la Economía y la Empresa, tales como la no negatividad, encontrarse en un rango determinado, etc.

Por otro lado, cuando existen diferentes alternativas en las soluciones, es necesario poder compararlas para determinar cuál resulta más conveniente antes de decidirnos por una opción.

Muchas veces, no interesa la solución en sí misma, sino el cambio que se produciría si se modificase algún parámetro del modelo. Por ejemplo, en un modelo de renta-gasto, puede ser más importante conocer el efecto que produciría un incremento de un 5% los impuestos que conocer el valor numérico de la renta en un momento dado.

Aquí estudiamos situaciones de equilibrio estático dadas por sistemas de ecuaciones lineales, particularizando a modelos de renta-gasto, precios de equilibrio e input-output de Leontief. Para analizar todas las posibles alternativas de una situación económica, recurrimos a los espacios vectoriales, especialmente las bases de subespacios vectoriales por ser el mínimo número de elementos capaces de generar todas las alternativas (mínima información necesaria).

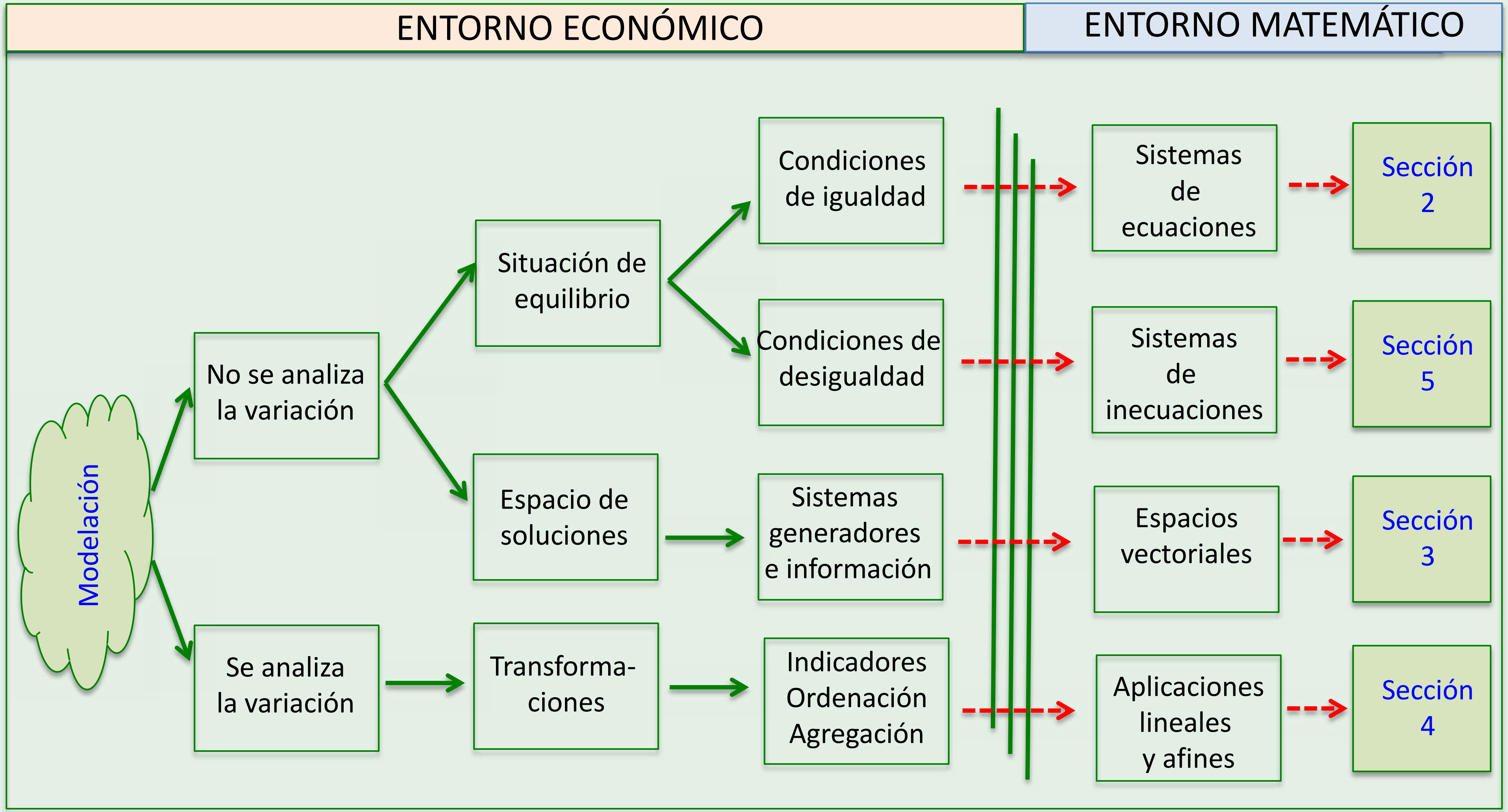
A partir de las aplicaciones lineales y afines, tratamos algunas transformaciones que resultan de gran interés en el entorno económico-empresarial: las normalizaciones lineales y “cuasi-lineales”, como paso necesario para poder comparar y agregar opciones de diferente naturaleza.

El último bloque lo dedicamos a analizar los conjuntos de alternativas dados por sistemas de inecuaciones lineales (restricciones lineales). Esto, no sólo permitirá abordar con éxito la programación lineal, sino que muestra cómo utilizar y generalizar algunas de las técnicas de sistemas de ecuaciones y de optimización, para asegurar la existencia de soluciones que verifiquen todas las condiciones.

De forma similar a lo que se ha hecho con los sistemas de ecuaciones incompatibles, se presentan métodos para intentar hacer viables algunos sistemas de inecuaciones.

Desde un punto de vista operativo, lo que haremos en este documento es:

- Analizar variaciones de diferentes modelos de renta-gasto keynesiano.
- Estudiar condiciones para que las funciones de oferta y demanda lineales de varios mercados proporcionen unos precios de equilibrio factibles. Para ello, analizaremos la utilidad de incorporar parámetros a los sistemas de ecuaciones lineales y comprobaremos cuándo las soluciones paramétricas verifican las condiciones propias de la situación económica modelada.
- Revisar resultados de Álgebra Lineal que garantizan la no negatividad de los modelos input-output de Leontief.
- Presentar las bases de subespacios vectoriales como conjuntos *minimales* que contienen toda la información necesaria para conocer todas las alternativas.
- Proporcionar técnicas que permiten modificar los sistemas de de inecuaciones lineales sin solución, de manera que resulten viables.


ENTORNO ECONÓMICO
ENTORNO MATEMÁTICO
Modelación
No se analiza la variación
Se analiza la variación
Situación de equilibrio
Espacio de soluciones
Transforma-ciones
Condiciones de igualdad
Condiciones de desigualdad
Sistemas generadores e información
Indicadores Ordenación Agregación
Sistemas de ecuaciones
Sistemas de inecuaciones
Espacios vectoriales
Aplicaciones lineales y afines
Sección 2
Sección 5
Sección 3
Sección 4

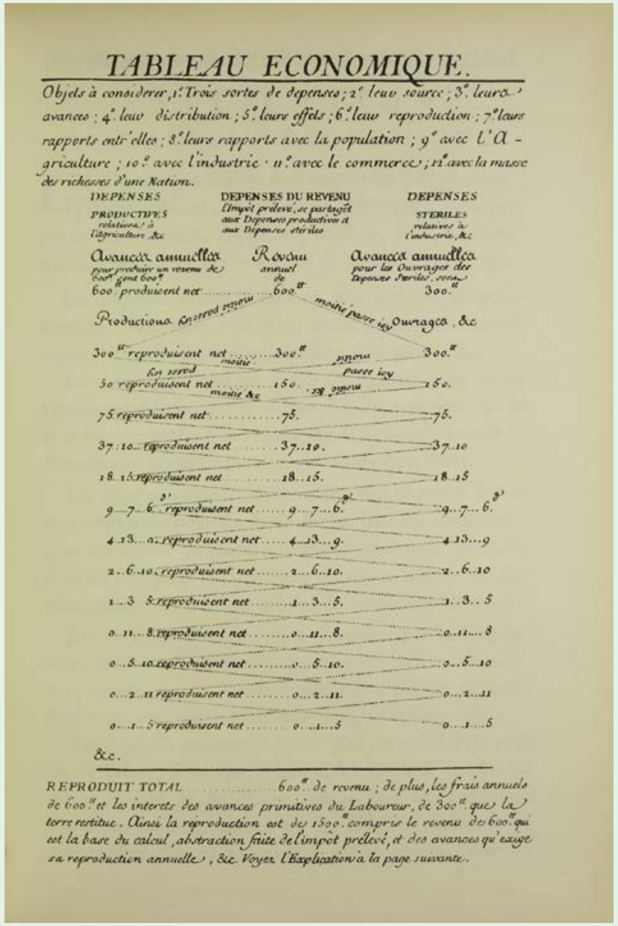
2. Equilibrio estático

Sistemas de ecuaciones lineales

a.- Modelo de renta nacional

b.- Precios de equilibrio

c.- Modelos input-output



François Quesnay (1694 –1774)

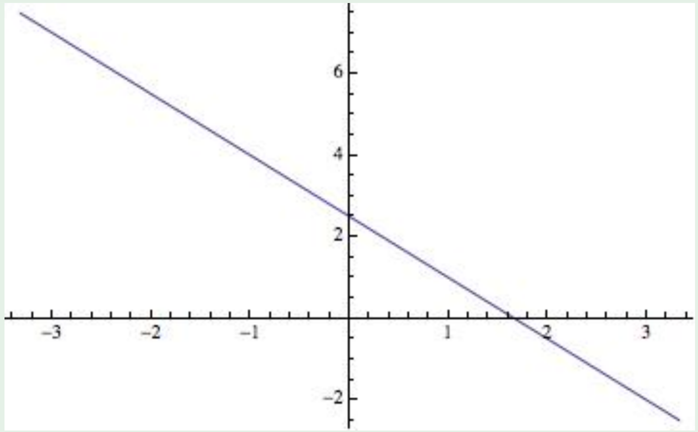
El Tableau Économique describe un modelo para la economía de las naciones según el cual la sociedad se divide en tres clases

2. Equilibrio estático

1. ¿Qué tipos de sistemas de ecuaciones lineales se utilizan para modelar los equilibrios en Economía y Empresa?
2. Las variaciones, ¿cuándo se modelan con variables y cuándo con parámetros?
3. ¿Qué tipos de soluciones pueden aparecer y cuáles aportan información?
4. ¿Cuándo interesan las soluciones y cuándo las diferencias entre ellas?
5. Si el sistema de ecuaciones es incompatible, ¿la labor de modelación no ha servido para nada?
6. Si al sistema se le añaden condiciones, ¿por qué no se modelan como sistemas de inecuaciones?

$$\left.\begin{array}{ll} 3x + 2y & = 5 \\ 3x + 2y & = 5 \end{array}\right\}$$

$x = \alpha, \quad y = \frac{5}{2} - \frac{3\alpha}{2},$
$\alpha \in \mathrm{R}$



$$\left.\begin{array}{rl} (3+0.001)x + (2+0.001)y & = (5+0.002) \\ 3x + 2y & = 5 \end{array}\right\}$$

$x = 1, \quad y = 1$

$$\left.\begin{array}{rl} (3+0.001)x + (2+0.001)y & = (5+0.001) \\ 3x + 2y & = 5 \end{array}\right\}$$

$x = 3, \quad y = -2$

$$\left.\begin{array}{rl} (3+\frac{0.001}{2})x + (2+\frac{0.001}{3})y & = (5+0.001) \\ 3x + 2y & = 5 \end{array}\right\}$$

No tiene solución

Variables, parámetros? …

Variables

$$\left.\begin{array}{l} xy + 3z = 5 \\ y + 2z = w \end{array}\right\}$$

Variables+parámetros

$$\left.\begin{array}{l} \alpha y + 3z = 5 \\ y + 2z = \beta \end{array}\right\} \quad \alpha,\beta \in \mathrm{R}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - 4z + 6t = 2 \\ x + 2y + 3z - 4t = 5 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & b \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2+4z-6t \\ 1 & 2 & 5-3z+4t \end{array}\right]$$
$$\begin{array}{cc|c} x & y & b \end{array}$$

Variables

$$\left.\begin{array}{l} xy + 3z = 5 \\ x + 2z = w \end{array}\right\}$$

Variables+parámetros

$$\left.\begin{array}{l} \alpha y + 3z = 5 \\ x + 2z = \beta \end{array}\right\} \quad \alpha,\beta \in \mathrm{R}$$

3. Resuelve, por el método de Gauss, el siguiente sistema.

PAU

$$\begin{cases} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{cases} \xrightarrow[\substack{E_2 \to E_2 - E_3 \\ E_4 \to E_4 - 3E_3}]{E_1 \to E_1 - E_3} \begin{cases} -4y - 2z = -2 \\ 4y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ 4y + 2z = 2 \end{cases}$$

Las ecuaciones primera, segunda y cuarta son iguales, por lo que podemos eliminar dos de ellas. Así, el sistema se reduce a:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$$

Este sistema tiene dos ecuaciones no triviales y tres incógnitas, por lo que es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

Para hallarlas, se toma una de las incógnitas, por ejemplo la y, como un parámetro y se procede de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 1 - y \\ z = 1 - 2y \end{cases}$$

Si a la incógnita y le damos el valor λ, resulta $\begin{cases} x + z = 1 - \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$.

Sustituyendo el valor de z dado por la segunda ecuación en la primera, se obtiene:

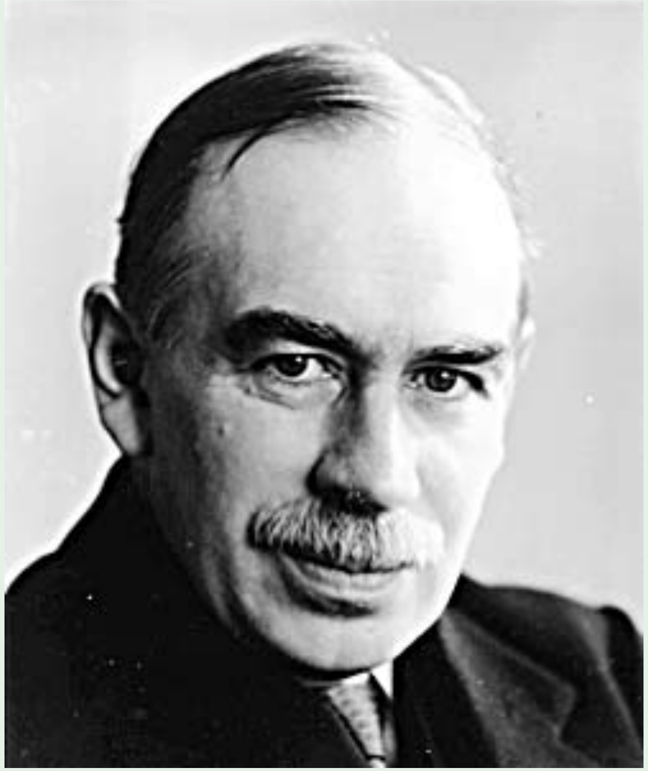
$$x + (1 - 2\lambda) = 1 - \lambda \Rightarrow x = \lambda$$

Con lo que, finalmente, la solución del sistema es $x = \lambda$, $y = \lambda$, $z = 1 - 2\lambda$; $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vizmanos, J.R. et al. (2011): Matemáticas 2, Ediciones SM, ISBN: 978-84-675-3472-6

B. Equilibrio estático

a.- Modelo de renta nacional
Modelos keynesianos



John Maynard Keynes (1883 –1946)
Fue un economista británico, considerado como uno de los más influyentes del siglo XX.

Sean Y = renta nacional

C = Gastos de consumo

I = Inversión

G = Gasto público

Básicamente, el modelo keynesiano de renta nacional supone:

$$\left.\begin{array}{l} Y = C + I_o + G_o \\ C = a + b\,Y \qquad a > 0,\ 0 < b < 1 \end{array}\right\}$$

b: Propensión marginal al consumo (en tanto por 1)

a: Consumo exógeno y autónomo (no cambia)

$$\left.\begin{array}{rl} Y - C &= I_0 + G_0 \\ -bY + C &= a \end{array}\right\}$$

$$Y^* = \frac{1}{1-b}(a + I_0 + G_0)$$

$$C^* = \frac{1}{1-b}(a + bI_0 + bG_0)$$

Con otras letras, el modelo keynesiano de renta nacional es:

$$\left.\begin{array}{l} x = y + a + b \\ y = c + \lambda x \qquad a, b, c > 0,\ 0 < \lambda < 1 \end{array}\right\}$$

λ: Propensión marginal al consumo (en tanto por 1)

$$\left.\begin{array}{r} x - y = a + b \\ -\lambda x + y = c \end{array}\right\} \qquad x^* = \frac{1}{1-\lambda}(a+b+c) \qquad y^* = \frac{1}{1-\lambda}(da+db+c)$$

NOTA: En general, expresar las variables como x, y y los parámetros como λ, a, b hace que el o la estudiante distinga más fácilmente de qué tipos de variables se trata (endógenas o exógenas).

Sean Y = renta nacional
C = Gastos de consumo
I = Inversión
G = Gasto público
T = Cuantía de impuestos

a es el consumo autónomo
b es la propensión marginal al ahorro
d “impuestos fijos”
t tasa impositiva

$$\left.\begin{array}{ll} Y = C + I + G & \\ C = a + b\,(Y-T) & (a>0,\ 0<b<1) \\ T = d + t\,Y & (d>0,\ 0<t<1) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} Y - C & = & I + G \\ -bY + C + bT & = & a \\ -tY + T & = & d \end{array}\right\}$$

$$Y^* = \frac{a - bd + I + G}{b(t-1)+1}$$

$$C^* = \frac{a - bd - b(t-1)(I+G)}{b(t-1)+1}$$

$$T^* = \frac{d - bd + t(a + I + G)}{b(t-1)+1}$$

Como

$$b(t-1)+1 \neq 0,$$

el sistema tiene solución única.

$$\left.\begin{array}{ll} x = y + a + b & \\ y = c + \lambda\,(x-z) & (a,b,c,d > 0) \\ z = d + \mu\, x & (0 < \lambda,\ \mu < 1) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & a+b \\ -\lambda x & + & y & + & \lambda z & = & c \\ -\mu x & & & + & z & = & d \end{array}\right\}$$

$$x^* = \frac{a+b+c-\lambda d}{\lambda(\mu-1)+1}$$

$$y^* = \frac{\lambda((1-\mu)(a+b)-d)+c}{\lambda(\mu-1)+1}$$

$$z^* = \frac{\mu(a+b+c)+(1-\lambda)d}{\lambda(\mu-1)+1}$$

Como

$$\lambda(\mu-1)+1 \neq 0,$$

el sistema tiene solución única.

NOTA: Desde un punto de vista matemático, se trata de un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas y los valores x*, y*, z*, no se ven como fórmulas, sino como la solución del sistema.

Sean Y = renta nacional

C = Gastos de consumo T = impuestos

I = Inversión

G = Gasto público

Básicamente, el modelo keynesiano de renta nacional supone:

$$\left.\begin{aligned} Y &= C + I_o + G_o \\ C &= c_0 + c_1\,(Y-T) \qquad c_0 > 0,\ 0 < c_1 < 1 \end{aligned}\right\}$$

c_1: Propensión marginal al consumo (en tanto por 1)

c_0: Consumo exógeno y autónomo (no cambia)

$$\left.\begin{aligned} Y - C &= I_0 + G_0 \\ -c_1 Y + C &= c_0 - c_1 T \end{aligned}\right\}$$

$$Y^* = \boxed{\frac{1}{1-c_1}}\,(c_0 - c_1 T + I_0 + G_0)$$

$$C^* = \boxed{\frac{1}{1-c_1}}\,(c_0 - c_1 T + c_1 I_0 + c_1 G_0)$$

Multiplicador de Keynes

Solución *versus* decisión: diferencia entre soluciones

Ejemplo 2.1: Si un sistema económico tiene una propensión al consumo $c_1=0.8$, y el gasto se incrementa en 200 um (política fiscal expansiva), ¿cuál sería el incremento en la renta?

$$\begin{cases} Y^0 = \dfrac{1}{1-0.8}(c_0 - 0.8T + I_0 + G_0) = 5(c_0 - 0.8T + I_0 + G_0) \\ Y^1 = 5(c_0 - 0.8T + I_0 + G_0 + \Delta G_0) \end{cases}$$

$$\underline{\Delta Y = Y^1 - Y^0 = 5 \times 200 = 1000 \text{ um}}$$

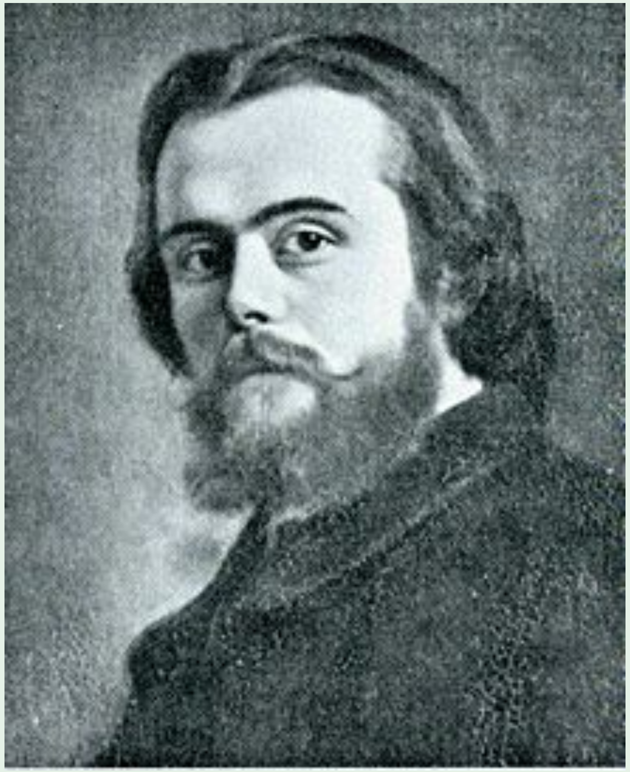
Ejemplo 2.2: Si un sistema económico tiene una propensión al consumo $c_1=0.9$, y los impuestos aumentan 100 um (política fiscal contractiva), ¿cuál sería el incremento en la renta?

$$\begin{cases} Y^0 = \dfrac{1}{1-0.9}(c_0 - 0.9T + I_0 + G_0) = 10(c_0 - 0.9T + I_0 + G_0) \\ Y^1 = 10(c_0 - 0.9(T + \Delta T) + I_0 + G_0) \end{cases}$$

$$\underline{\Delta Y = Y^1 - Y^0 = -9 \times 100 = -900 \text{ um}}$$

B. Equilibrio estático

b.- Precios de equilibrio

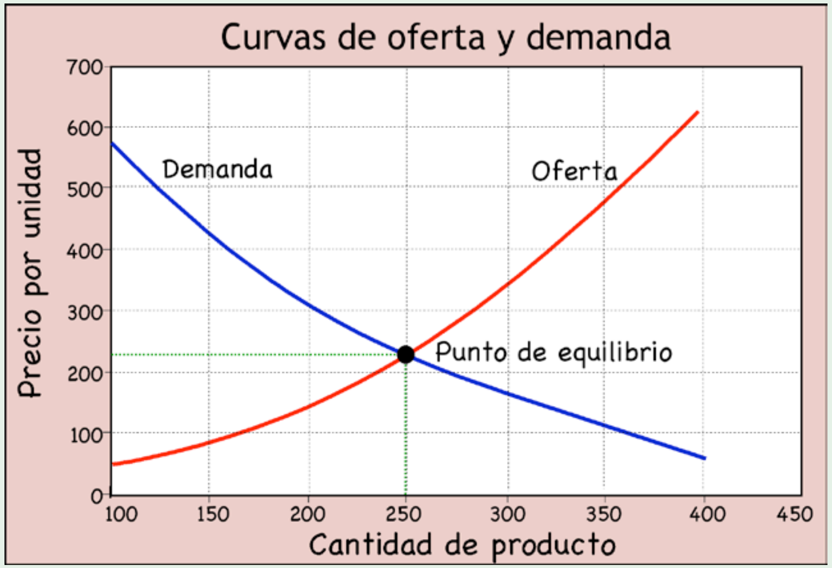


Léon Walras (1834 –1910)
Considerado el fundador de la economía matemática, fue el primero en analizar y describir el equilibrio general como un problema matemático.

El concepto de equilibrio es fundamental en economía. Una situación de equilibrio es una situación estable u óptima, porque en ella la empresa opera con el menor coste posible, obtiene el máximo beneficio, la asignación de los recursos económicos es la mejor para la utilidad de un individuo, etc. Todas estas posibilidades tienen en común que se cuenta con varios fenómenos económicos que suceden simultáneamente y se debe determinar el punto o puntos en los que la situación es beneficiosa.

Precios de equilibrio

El primer equilibrio que veremos es el general, que consiste en analizar los fenómenos de la economía cuando todos los sectores que la componen se consideran de modo simultáneo. El primero que formuló matemáticamente esta situación fue Léon Walras (1834 – 1910).



Suponemos un mercado en el que los precios vienen dados sólo por la interacción entre la oferta y la demanda (libre competencia), es decir que las empresas carecen de poder para manipular el precio. En este caso, para calcular el equilibrio no hay más que igualar las curvas de oferta y de demanda. Si estas curvas están en función del precio, su intersección nos proporciona el precio de equilibrio.

Ejemplo 2.3: Consideramos *x, y, z* los precios de un mercado en el que se venden tres productos *A*, *B* y *C*. Calcula los precios de equilibrio si se estima que la oferta (S) y la demanda (D) de cada uno de ellos viene dada por

$SA = 15x + y + 3z - 13$ $\quad DA = 70 - 8x - y - z$
$SB = x + 20y + 10z - 10$ $\quad DB = 93 - 2x - 4y - z$
$SC = 10x + 15y + 30z - 50$ $\quad DC = 107 - x - 3y - 5z$

Se trata de calcular los precios para los que la oferta coincide con la demanda. Esto nos lleva a resolver el sistema de ecuaciones lineales que se obtiene al hacer *SA=DA, SB=DB* y *SC=DC*. Si pasamos todas las incógnitas a una parte de la igualdad y los términos independientes a la otra, el sistema queda de la forma siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 23x + 2y + 4z = 83 \\ 3x + 24y + 11z = 103 \\ 11x + 18y + 35z = 157 \end{array}\right\}$$

Los precios de equilibrio son
$x = 3$ u.m., $y = 3$ u.m., $z = 2$ u. m.

$$\left.\begin{array}{l} 23x + 2y + 4z = 83 \\ 3x + 24y + 11z = 103 \\ 11x + 18y + 35z = 157 \\ x, y, z \geq 0 \end{array}\right\}$$

Este tipo de problemas podría no tener solución porque no existen los precios de equilibrio (sistema incompatible), porque alguno de ellos es negativo o porque la oferta o la demanda sean negativas, y en este caso no tendría sentido económico.

Ejemplo 2.4: Una empresa fabrica tres productos A, B y C. Un análisis de la empresa muestra que su capacidad de producción para unos precios p_1, p_2 y p_3 (resp.) viene dada por

$$S_A = 2p_1 + p_2 + 2p_3 - 15$$
$$S_B = 4p_1 + 2p_2 + 3p_3 - 10$$
$$S_C = 2p_1 + 2p_2 + p_3 - 20$$

Por otra parte, un estudio de mercado indica que la demanda prevista es

$$D_A = 95 - 8p_1 - 5p_2 - 3p_3$$
$$D_B = 90 - p_1 - 8p_2 - p_3$$
$$D_C = 70 - p_1 - p_2 - 3p_3$$

Calcula los precios con los que la empresa equilibraría su situación económica.

$$\left.\begin{aligned} 10p_1 + 8p_2 + 9p_3 &= 110 \\ 5p_1 + 10p_2 + 4p_3 &= 100 \\ 3p_1 + 3p_2 + 4p_3 &= 98 \end{aligned}\right\}$$

$$p_1 = -\frac{160}{157}, \quad p_2 = \frac{270}{157}, \quad p_3 = \frac{3450}{157}.$$

No existen unos precios que equilibren la situación

No puede fijar unos precios a sus productos (adaptados a la situación).
Ha gastado 2000 \$ en el análisis interno de la empresa.
Ha gastado 9000 \$ en el estudio de mercado encargado a una empresa.

?

Modificamos la modelación de las ofertas (porque las ofertas dependen de la empresa)

$S_A = 2p_1 + p_2 + 2p_3 - 15$

$S_B = 4p_1 + 2p_2 + 3p_3 - 10$

$S_C = 2p_1 + 2p_2 + p_3 - 20$

$S_A = (2+\alpha)p_1 + (1-\alpha)p_2 + (2-\alpha)p_3 - 15$

$S_B = (4-\alpha)p_1 + (2+\alpha)p_2 + (3-\alpha)p_3 - 10$ $\quad 0 \leq \alpha \leq 1$

$S_C = (2-\alpha)p_1 + (2-\alpha)p_2 + (1+\alpha)p_3 - 20$

Sin embargo, mantenemos las demandas propuestas en el estudio que se ha encargado

$D_A = 95 - 8p_1 - 5p_2 - 3p_3$

$D_B = 90 - p_1 - 8p_2 - p_3$

$D_C = 70 - p_1 - p_2 - 3p_3$

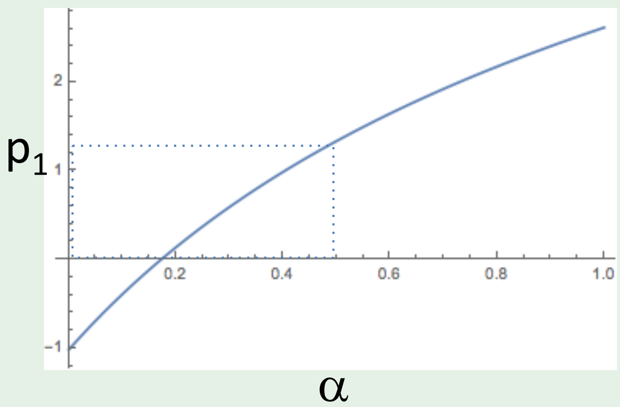
Operando como antes, se llega al sistema paramétrico siguiente

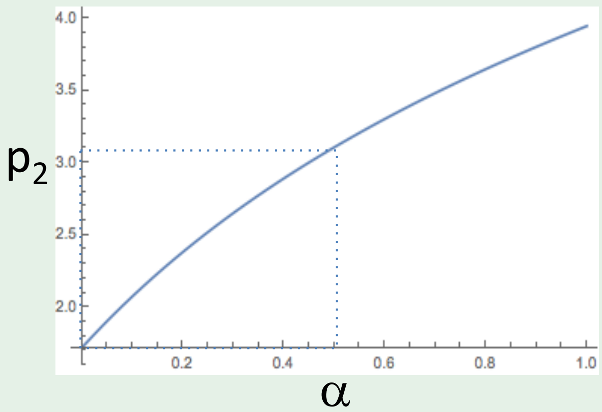
$$\left.\begin{aligned}(10+\alpha)p_1 + (6-\alpha)p_2 + (5-\alpha)p_3 &= 110\\ (5-\alpha)p_1 + (10+\alpha)p_2 + (4-a)p_3 &= 100\\ (3-\alpha)p_1 + (3-\alpha)p_2 + (4+\alpha)p_3 &= 90\end{aligned}\right\}$$

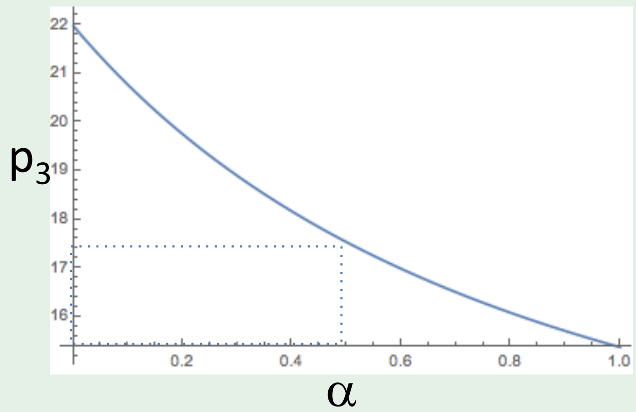
$$p_1 = \frac{20(-8+43\alpha+19\alpha^2)}{157+208\alpha+52\alpha^2-4\alpha^3} \qquad p_3 = \frac{10(345+248\alpha+42\alpha^2)}{157+208\alpha+52\alpha^2-4\alpha^3}$$

$$p_2 = \frac{10(27+96\alpha+40\alpha^2)}{157+208\alpha+52\alpha^2-4\alpha^3} \qquad 157+208\alpha+52\alpha^2-4\alpha^3 \neq 0$$

Graficamente, se tiene







Si tomamos el valor α=0.5, las nuevas ofertas son

$S_A = 2p_1 + p_2 + 2p_3 - 15$
$S_B = 4p_1 + 2p_2 + 3p_3 - 10$
$S_C = 2p_1 + 2p_2 + p_3 - 20$

$S_A = 2.5p_1 + 0.5p_2 + 1.5p_3 - 15$
$S_B = 3.5p_1 + 2.5p_2 + 2.5p_3 - 10$
$S_C = 1.5p_1 + 1.5p_2 + 1.5p_3 - 20$

que, junto con las demandas,

$D_A = 95 - 8p_1 - 5p_2 - 3p_3$
$D_B = 90 - p_1 - 8p_2 - p_3$
$D_C = 70 - p_1 - p_2 - 3p_3$

Sustituyendo α=0.5 en la solución anterior,

$$p_1 = \frac{20(-8+43\alpha+19\alpha^2)}{157+208\alpha+52\alpha^2-4\alpha^3} \qquad p_2 = \frac{10(27+96\alpha+40\alpha^2)}{157+208\alpha+52\alpha^2-4\alpha^3} \qquad p_3 = \frac{10(345+248\alpha+42\alpha^2)}{157+208\alpha+52\alpha^2-4\alpha^3}$$

p_1 = 1.334552 \$, p_2 = 3.107861 \$, P_3= 17.53199 \$

Calculamos las cantidades de la oferta y la demanda en equilibrio,

$S_A = D_A = 16.18830 \times 10^3$ u., $S_B = D_B = 46.27057 \times 10^3$ u., $S_C = D_C = 12.96161 \times 10^3$ u.

Veamos algunos resultados más generales para que un modelo de precios de equilibrio tenga solución.

Teorema 1

Dado un sistema incompatible Ax=b, con A=[a_{ij}] una matriz *nxn*, si existe un menor de orden (n-1)x(n-1) distinto de 0, entonces existe

A'x=b un sistema compatible determinado,

siendo A'=[a'_{ij}], con $a'_{ij} = a_{ij}$ excepto un término que es $a'_{i_0 j_0} = a_{i_0 j_0} + \alpha$, con $\alpha \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN:

Por ser incompatible, |A|=0, pero por hipótesis, sabemos que existe un menor (n-1)x(n-1) no nulo. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ & \cdots & \\ a_{n2} & a_{n3} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Definimos

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11}+\alpha & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\text{Det(A')} = \text{Det (A)} + \alpha \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ & \cdots & \\ a_{n2} & a_{n3} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Desarrollo de Laplace con la 1ª fila

$\alpha \neq 0$

El menor es no nulo

A'x=b es un sistema compatible determinado.

■

Aplicación 1. Viabilidad de sistemas mediante el Teorema 1

El sistema siguiente no tiene solución

$$\left.\begin{aligned} x-y+z&=3\\ 2x-y+z&=4\\ x-2y+2z&=0 \end{aligned}\right\}$$

Como
$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4+1=-3\neq 0$$

Si hacemos $a'_{13}=a_{13}+0.01$, se tiene

$$\left.\begin{aligned} x-y+(1.01)z&=3\\ 2x-y+z&=4\\ x-2y+2z&=0 \end{aligned}\right\}$$

$$x=\frac{8}{3},\quad y=168,\quad z=\frac{500}{3}$$

En realidad cualquier valor $a_{13}=1+\alpha$, con α no nulo haría que el sistema tuviese solución.

Aplicación 2. Viabilidad de sistemas mediante parametrización de coeficientes

El sistema siguiente no tiene solución

$$\left.\begin{aligned} x-y+z&=3\\ 2x-y+z&=4\\ x-2y+2z&=0 \end{aligned}\right\}$$

Nos planteamos si realmente algunos coeficientes podrían ser descritos mediante intervalos, en lugar de números reales concretos.

Por ejemplo,

Caslsson, C., Korhonen, P. (1986): A parametric approach to fuzzy linear programming, Fuzzy Sets and Systems, 20: 17–30.

$$\left.\begin{aligned} x-[0.75,1]y+[0.7,1]z&=3\\ [1.75,2.25]x-y+[1,1.25]z&=[3.8,4]\\ [0.5,1]x-2y+2z&=0 \end{aligned}\right\}$$

Parametrizamos cada intervalo mediante 0≤α≤1 de modo que α=1 significa lo "más verosímil" y α=0 lo "menos verosímil".

$$\left.\begin{aligned} x-(0.75+0.25\alpha)y+(1-0.3\alpha)z&=3\\ (1.75+0.5\alpha)x-y+(1+0.25\alpha)z&=4-0.2\alpha\\ (0.5+0.5\alpha)x-2y+2z&=0 \end{aligned}\right\}$$

Aplicación 2.

Una vez parametrizado,

$$\left.\begin{array}{r} x-(0.75+0.25\alpha)y+(1-0.3\alpha)z=3 \\ (1.75+0.5\alpha)x-y+(1+0.25\alpha)z=4-0.2\alpha \\ (0.5+0.5\alpha)x-2y+2z=0 \end{array}\right\}$$

el sistema se puede resolver en función de α

$$x=\frac{16(11\alpha^2-300\alpha+100)}{5(5\alpha^3-24\alpha^2-309\alpha+120)},\quad y=\frac{4(6\alpha^3-209\alpha^2+565\alpha+600)}{5(5\alpha^3-24\alpha^2-309\alpha+120)}$$

$$z=\frac{-4\alpha^3+64\alpha^2+612\alpha+400}{5\alpha^3-24\alpha^2-309\alpha+120},\qquad 5\alpha^3-24\alpha^2-309\alpha+120\neq 0$$

Pero este resultado es poco operativo.

En la práctica se suele resolver el sistema para unos cuantos grados de verdad (o satisfacción), por ejemplo α=0, 0.1, 0.2, ..., 0.9, 1.

Aplicación 2.

A pesar de que dar valores concretos al parámetro no proporciona soluciones generales, puede ser suficiente para tomar decisiones.

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ 2x - y + z &= 4 \\ x - 2y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$x = \frac{16(11\alpha^2 - 300\alpha + 100)}{5(5\alpha^3 - 24\alpha^2 - 309\alpha + 120)},$$

$$y = \frac{4(6\alpha^3 - 209\alpha^2 + 565\alpha + 600)}{5(5\alpha^3 - 24\alpha^2 - 309\alpha + 120)},$$

$$z = \frac{-4\alpha^3 + 64\alpha^2 + 612\alpha + 400}{5\alpha^3 - 24\alpha^2 - 309\alpha + 120},$$

$$5\alpha^3 - 24\alpha^2 - 309\alpha + 120 \neq 0$$

α	x	y	z
0	2.666666667	4	3.333333333
0.1	2.524638497	5.891327294	5.197051708
0.2	2.259217877	9.842011173	9.16424581
0.3	1.391414441	23.76583976	23.31363007
0.4	8.197752809	-89.09483146	-91.96404494
0.5	3.79184953	-16.67210031	-18.09404389
0.6	3.335087719	-9.485263158	-10.81929825
0.7	3.147792562	-6.733916968	-8.071728807
0.8	3.039085714	-5.26464	-6.632228571
0.9	2.964363553	-4.340936772	-5.74900946
1	2.907692308	-3,7	-5.153846154

¡ OJO ! No siempre se puede llegar a soluciones adecuadas.

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=3\\ 2x+y+3z&=7\\ x+2y&=5 \end{aligned}\right\}$$

no tiene solución

Si aplicamos el teorema 1,

$$\left.\begin{aligned} x+y+1.01z&=3\\ 2x+y+3z&=7\\ x+2y&=5 \end{aligned}\right\}$$

tiene solución $x=203,\quad y=\text{-}99,\quad z=\text{-}100$

La reformulación del sistema con intervalos “razonables” no es condición suficiente ni de compatibilidad, ni de no negatividad de las soluciones.

¡ OJO ! No siempre se puede llegar a soluciones adecuadas.

Dado un sistema Ax=b, con A=[a_{ij}] una matriz *nxn*, de modo que todos los coeficientes y los menores sean positivos, eso no implica que las solución sea no negativa.

Consideramos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 5y = 1 \\ x + 3y = 1 \end{array}\right\}$$

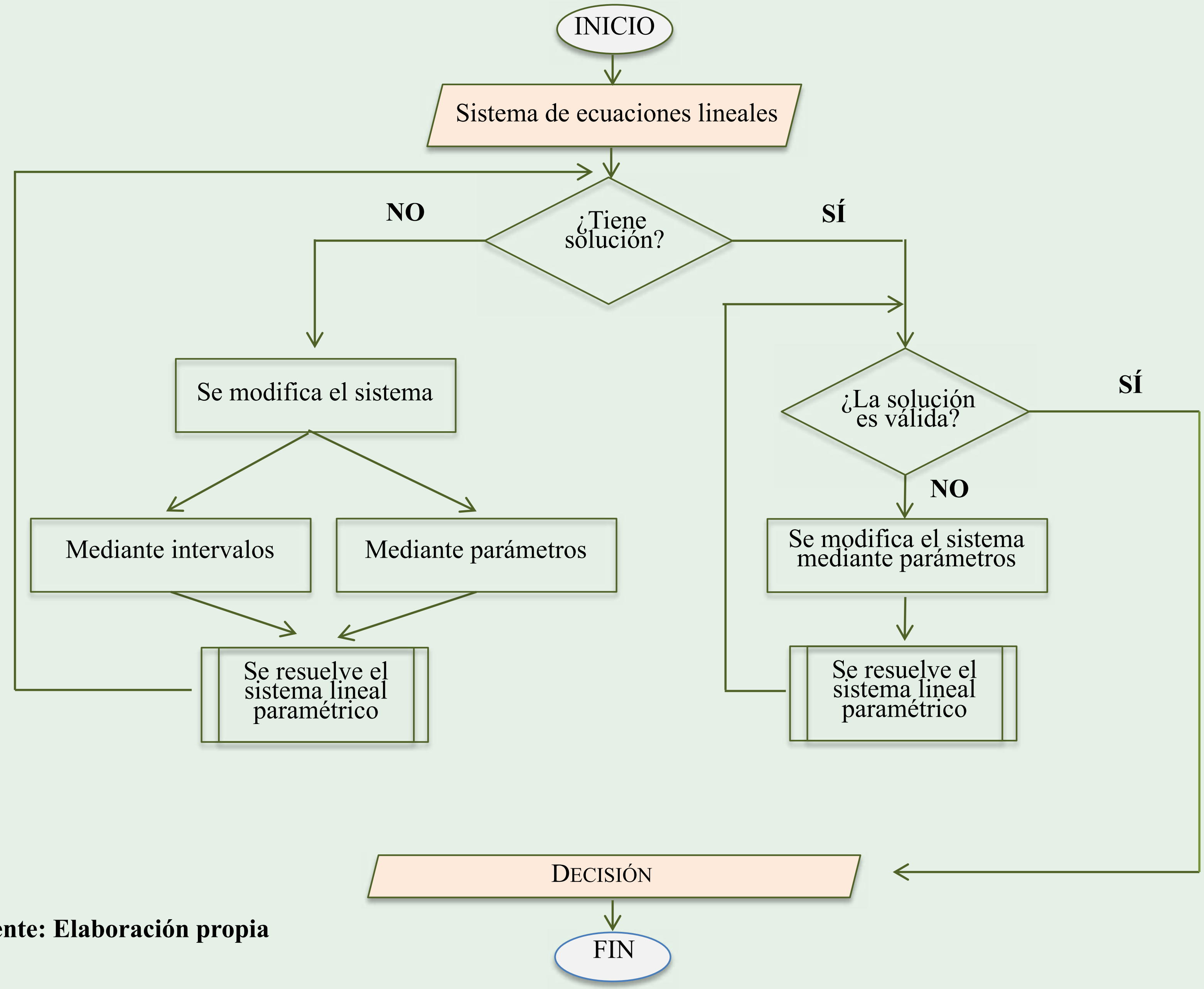
$$a_{ij} > 0,\ b_j > 0$$

$$|2| = 2 > 0,\quad \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$x = -2, \quad y = 1$$

Hemos visto que es posible hacer viable un problema incompatible que verifica determinadas condiciones, pero eso no quiere decir que siempre se puedan proporcionar soluciones útiles en la toma de decisiones. Normalmente, cuando éstos u otros métodos fallan, es necesario recurrir a una nueva modelación del problema.

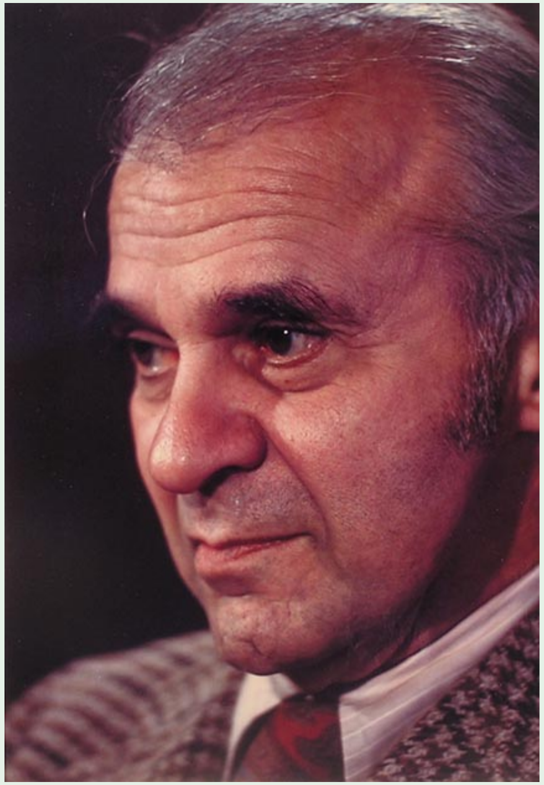
DIAGRAMA DE FLUJO



Fuente: Elaboración propia

B. Equilibrio estático

c.- Modelos input-output

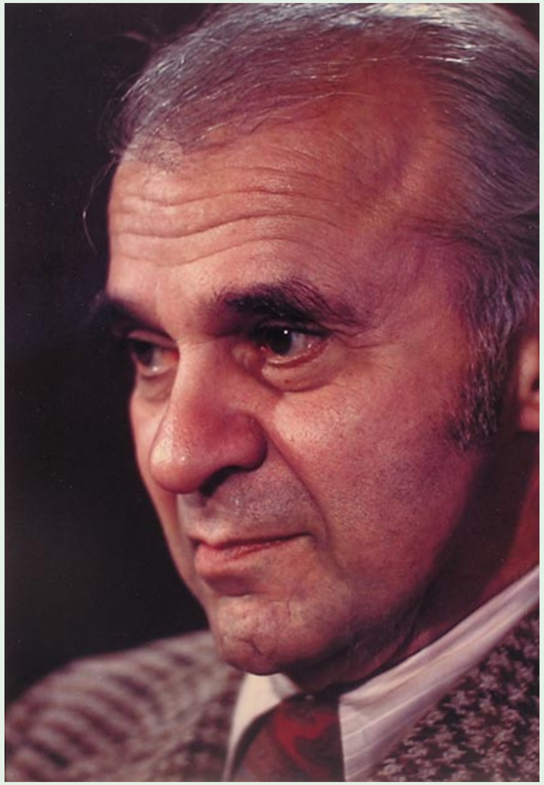


Wassily Leontief (1905-1999)
"Premio Nobel" en el año 1973

El modelo input-output de Leontief es una aproximación a las interrelaciones que se dan entre los distintos sectores en los que puede dividirse una economía, vistas como partes de un equilibrio general.

Lo fundamental será conocer las cantidades que intercambian los sectores, más que las condiciones de equilibrio de mercado. Este modelo, por el que Wassily Leontief (1905-1999) recibió el "Premio Nobel" en el año 1973, se basó en el procedimiento descrito en el Tableau Économique por François Quesnay (1694 – 1774) y en los trabajos sobre el equilibrio general de Léon Walras (1834 – 1910) .

En la actualidad sigue siendo uno de los modelos más empleados en Economía.



Wassily Leontief (1905-1999)
"Premio Nobel" en el año 1973

Consideramos una economía formada por n sectores interrelacionados, de modo que cada uno produce un único bien.
Cada sector debe atender las demandas (*inputs*) de los n sectores y unas demandas externas (*demandas finales*).
Se trata de calcular el nivel de producción de cada sector para satisfacer esas demandas.

$$\begin{array}{c|c}
 & \text{Output} \\
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \end{array} \\
\hline
\text{Input} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ . \\ n \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A}
\end{array}$$

Matriz input-output

a_{ij} = unidades del sector i consumidas para producir una unidad del sector j.

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ = Cantidad de inputs necesarios para producir una unidad del sector j.

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ = No tiene sentido económico directo.

- x_i = nivel de producción del sector i.
- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i$ = Producción total del sector i.

a_{ij} = unidades del sector i consumidas para producir una unidad del sector j

x_i = nivel de producción del sector i

d_i = demanda externa del input i

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + d_1 = x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + d_2 = x_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + d_n = x_n \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n = d_1 \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \ldots - a_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 + \ldots + (1-a_{nn})x_n = d_n \end{array}\right\}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ & \ldots & \ldots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & 1-a_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de Leontief ?}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

A X+D =X

$\boxed{\text{(I-A)X=D}}$

¿El sistema tiene siempre solución? ¿Ésta será no negativa?

Teorema (Hawkins, David; Simon, Herbert A.; 1949)

Dado un sistema (I-A)x=d, sea I-A=B, i. e. B=[b_{ij}] una matriz *nxn* con de manera que

$$(i)\ b_{ij} < 0,\ i \neq j,\ b_{ii} > 0$$
$$(ii)\ d_i > 0$$

Entonces, $\left|b_{11}\right| > 0, \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots,\ \left|B\right| > 0 \longleftrightarrow$ (I-A)x=d tiene solución con x $\geq$ 0

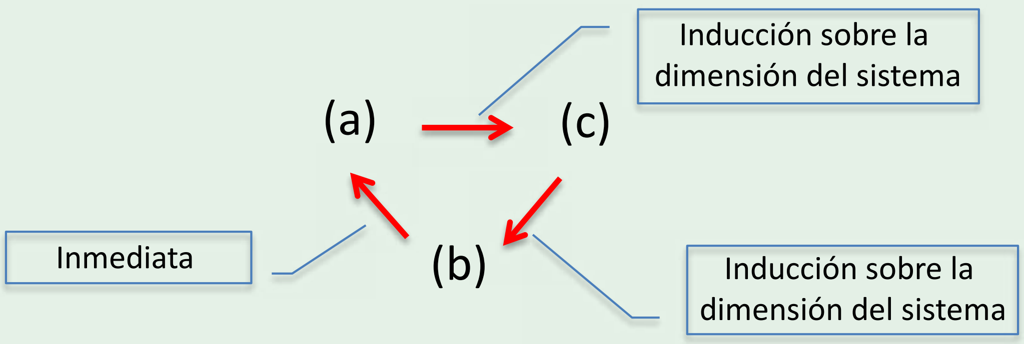
Hawkins, David; Simon, Herbert A. (1949). "Some Conditions of Macroeconomic Stability", Econometrica. 17 (3/4): 245–248.

Teorema (Nikaido, Hukukane; 1968)

Dado un sistema Bx=d, en el cuál B=[b_{ij}] es una matriz *n*xn con $b_{ij} \leq 0,\ i \neq j$.
Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) Para algún d>0, el sistema Bx=d tiene solución $x \geq 0$ *(débilmente resoluble)*
b) Para todo d$\geq$0, el sistema Bx=d tiene solución $x \geq 0$ *(fuertemente resoluble)*
c) Todos los menores principales de B son positivos *(condición de Hawkins-Simon)*

Nikaido, Hukukane (1968). Convex Structures and Economic Theory. Academic Press, pp. 90–92.



Teorema (Nikaido, Hukukane; 1968)

Dado un sistema Bx=d, en el cuál B=[b_{ij}] es una matriz *n*x*n* con $b_{ij} \leq 0,\ i \neq j$.
Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) Para algún d>0, el sistema Bx=d tiene solución $x \geq 0$ *(débilmente resoluble)*
b) Para todo d≥0, el sistema Bx=d tiene solución $x \geq 0$ *(fuertemente resoluble)*
c) Todos los menores principales de B son positivos *(condición de Hawkins-Simon)*

Nikaido, Hukukane (1968). Convex Structures and Economic Theory. Academic Press, pp. 90–92.

DEMOSTRACIÓN: (a) implica (c) (Por inducción)

Para *n=1*.

El sistema se reduce a $b_{11}x_1 = d_1$

Por hipótesis, existe una solución $x_1 \geq 0$ para algún $d_1 > 0$. Pero en realidad, como $b_{11}x_1 = d_1 > 0$ esto significa que $b_{11} = d_1 / x_1 > 0$

Lo suponemos cierto para *n-1*.

Comprobamos la implicación para *n*.

Cuando el número de ecuaciones es *n*, por hipótesis tiene solución $x_i \geq 0,\ i = 1,\dots,n,$ para algunos $d_i > 0,\ i = 1,\dots,n.$

$$b_{11}x_1 = d_1 - b_{12}x_2 - b_{12}x_3 \cdots - b_{1n}x_n \underset{\substack{\uparrow \\ b_{ij} > 0,\ i \neq j,}}{\geq} d_1 > 0,$$

$$\left.\begin{array}{rcl} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n &=& d_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n &=& d_2 \\ \dots && \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n &=& d_n \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{b'_{ij} = b_{ij} - \frac{b_{i1}b_{1j}}{b_{11}},\quad i,j \geq 2} \quad \boxed{d'_i = d_i - \frac{b_{i1}d_1}{b_{11}},\quad i \geq 2} \rightarrow \left.\begin{array}{rcl} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n &=& d_1 \\ b'_{22}x_2 + \dots + b'_{2n}x_n &=& d'_2 \\ \dots && \\ b'_{n2}x_2 + \dots + b'_{nn}x_n &=& d'_n \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} b'_{22}x_2 + \dots + b'_{2n}x_n &=& d'_2 \\ \dots && \\ b'_{n2}x_2 + \dots + b'_{nn}x_n &=& d'_n \end{array}\right\} \text{Hipótesis de inducción} \begin{vmatrix} b'_{22} & b'_{23} \dots & b'_{2n} \\ & \dots & \\ b'_{n2} & b'_{n3} \dots & b'_{nn} \end{vmatrix} > 0 \rightarrow \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots & b_{2n} \\ & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = b_{11} \begin{vmatrix} b'_{22} & b'_{23} \dots & b'_{2n} \\ & \dots & \\ b'_{n2} & b'_{n3} \dots & b'_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

(c) implica (b) (Por inducción)

Para $n=1$.
El sistema se reduce a $b_{11}x_1 = d_1$
Como se verifica (3), $b_{11} > 0,$ entonces $x_1 = d_1 / b_{11}$. Para cualquier $d_1 \geq 0,$ se tiene $x_1 \geq 0.$

Lo suponemos cierto para n-1.
Comprobamos la implicación para n.
Como antes, $b_{11} > 0,$ entonces hacemos

$$b'_{ij} = b_{ij} - \frac{b_{i1}b_{1j}}{b_{11}}, \quad i,j \geq 2$$

$$d'_i = d_i - \frac{b_{i1}d_1}{b_{11}}, \quad i \geq 2$$

$$\left.\begin{array}{l} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = d_1 \\ \boxed{\begin{array}{l} b'_{22}x_2 + \ldots + b'_{2n}x_n = d'_2 \\ \ldots \\ b'_{n2}x_2 + \ldots + b'_{nn}x_n = d'_n \end{array}} \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} b'_{22} & b'_{23} \ldots & b'_{2k} \\ & \cdots & \\ b'_{k2} & b'_{k3} \ldots & b'_{kk} \end{vmatrix} = \frac{1}{b_{11}} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} \cdots & b_{2k} \\ & \cdots & \\ b_{k1} & b_{k2} \cdots & b_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad 2 \leq k \leq n$$

$$\left.\begin{array}{l} b'_{22}x_2 + \ldots + b'_{2n}x_n = d'_2 \\ \ldots \\ b'_{n2}x_2 + \ldots + b'_{nn}x_n = d'_n \end{array}\right\}$$

Tiene una solución $x_i \geq 0,\ i = 2,\ldots,n,$ para cualesquiera términos independientes no negativos. En particular para $d'_i,\ i \geq 2$.

Hacemos $x_1 = \frac{1}{b_{11}}\left(d_1 - b_{12}x_2 - b_{12}x_3 \cdots - b_{1n}x_n\right) \quad \geq 0$

$x_i,\ i = 1,2,\ldots,n,$

Es solución

(b) implica (a)

Esta implicación es inmediata. ∎

¿Y el teorema anterior garantiza la solución del modelo input-output de Leontief?

$$\left.\begin{array}{r} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n = d_1 \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \ldots - a_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 + \ldots + (1-a_{nn})x_n = d_n \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} (\rho-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n = d_1 \\ -a_{21}x_1 + (\rho-a_{22})x_2 - \ldots - a_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 + \ldots + (\rho-a_{nn})x_n = d_n \end{array}\right\}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} (\rho - a_{ii}) & i = j \\ -a_{ij} & i \neq j \end{cases}$$

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Corolario (Nikaido, Hukukane; 1968)

Si $\rho > r_i \quad (1 \leq i \leq n)$, entonces se verifican (a), (b) y (c) del Teorema anterior.

Nikaido, Hukukane (1968). Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics. North-Holland, 1970, pp. 18–19.

<u>DEMOSTRACIÓN:</u>

Si consideramos $d_i = \rho - r_i,\ i = 1,\ldots,n$, entonces, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ es solución del sistema.

Como eso implica que verifica (1) y satisface las hipótesis del Teorema, también verifica (2) y (3).

∎

¿Y qué ocurriría si se hubiese analizado desde la perspectiva del output en lugar del input?

Teorema 2

$\longleftrightarrow$ Existe A^{-1}

Dados

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= d_2 \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= d_n \end{aligned}\right\}$$

Con solución única

$x_i,\ i = 1,2,\ldots,n,$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{n1}y_n &= p_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{n2}x_n &= p_2 \\ &\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= p_n \end{aligned}\right\}$$

Con solución única

$y_j, j = 1,2,\ldots,n,$

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i y_i = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} d_i y_i &= \left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\right)y_1 + \left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n\right)y_2 + \ldots + \left(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n\right)y_n \\ &= \left(a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{n1}y_n\right)x_1 + \left(a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{n2}y_n\right)x_2 + \ldots + \left(a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n\right)x_n \\ &= \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.5: Una economía está formada por dos sectores A y B.

- La producción de A es de 20 u. de las cuales, 10 u. las utiliza para la propia sección, 6 u. son usadas por la sección B y 4 u. se destinan a la demanda exterior.
- La producción de B es de 30 u. de las cuales, 5 u. las utiliza para la propia sección, 10 u. son usadas por la sección B y 15 u. se destinan a la demanda exterior.

Expresa esta situación mediante un modelo input-output de Leontief.

	A	B	Demanda exterior	Total
A	10	6	4	20
B	5	10	15	30

	A	B	Demanda exterior	Total
A	1/2	1/5	1/5	1
B	1/4	1/3	1/2	1

x_1 = nivel de producción de A (expresado en u.)
x_2 = nivel de producción de B (expresado en u.)

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{10}{20}x_1 + \frac{6}{30}x_2 + 4 \\ x_2 &= \frac{5}{20}x_1 + \frac{10}{30}x_2 + 15 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{5}x_2 &= 4 \\ -\frac{1}{4}x_1 + \frac{2}{3}x_2 &= 15 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = 20 \text{ u.}, \quad x_2 = 30 \text{ u.}$$

	A	B	Demanda exterior	Total
A	10	6	4	20
B	5	10	15	30

$\Rightarrow$

	A	B	Demanda exterior	Total
A	1/2	1/5	1/5	1
B	1/4	1/3	1/2	1

x_1 = nivel de producción de A (expresado en u.)
x_2 = nivel de producción de B (expresado en u.)

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/5 \\ 1/4 & 1/3 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$I - A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/5 \\ -1/4 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Matriz de Leontief

$$\Rightarrow \boxed{(I - A)X = D}$$

Ejemplo 2.6: Si la demanda exterior de A es 8 u. y la demanda exterior de B es 20 u. , ¿Cuál es la producción que mantiene el equilibrio de la economía del Ejemplo 2.5.?

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{10}{20}x_1 + \frac{6}{30}x_2 + 8 \\ x_2 &= \frac{5}{20}x_1 + \frac{10}{30}x_2 + 20 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{5}x_2 &= 8 \\ -\frac{1}{4}x_1 + \frac{2}{3}x_2 &= 20 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = \frac{560}{17} \text{ u.,} \quad x_2 = \frac{720}{17} \text{ u.}$$

$$(I - A)X = D \Rightarrow \boxed{X = (I - A)^{-1} D}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/5 \\ -1/4 & 2/3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40/17 & 12/17 \\ 15/17 & 30/17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 560/17 \\ 720/17 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.7: Expresa en una tabla de doble entrada los resultados del Ejemplo 2.6.

Se tiene

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{10}{20}x_1 + \frac{6}{30}x_2 + 8 \\ x_2 &= \frac{5}{20}x_1 + \frac{10}{30}x_2 + 20 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{5}x_2 &= 8 \\ -\frac{1}{4}x_1 + \frac{2}{3}x_2 &= 20 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = \frac{560}{17}\text{ u.},\quad x_2 = \frac{720}{17}\text{ u.}$$

	A	**B**	**Demanda exterior**	Total
A	$1/2\ x_1$	$1/5\ x_2$	$1/5\ x_1$	x_1
B	$1/4\ x_1$	$1/3\ x_2$	$1/2\ x_2$	x_2

	A	B	Demanda exterior	Total
A	280/17	144/17	136/17	560/17
B	140/17	240/17	360/17	720/17

ERROR 1

* Confundir filas con columnas

	A	B	Demanda exterior	Total
A	10	6	4	20
B	5	10	15	30

Demanda exterior
8
20

	A	**B**	**Demanda exterior**	Total
A	10/20	6/20	4/20	20/20
B	5/30	10/30	15/30	30/30

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{10}{20}x_1 + \frac{6}{20}x_2 + 8 \\ x_2 = \frac{5}{30}x_1 + \frac{10}{30}x_2 + 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{10}x_2 = 8 \\ -\frac{1}{6}x_1 + \frac{2}{3}x_2 = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = 40 \text{ u.}, \quad x_2 = 40 \text{ u.}$$

Está claro que la solución obtenida no es correcta

$$x_1 = \frac{560}{17} \text{ u.}, \quad x_2 = \frac{720}{17} \text{ u.}$$

ERROR 1

¿Cómo podría haberse dado cuenta el estudiante?

	A	B	Demanda exterior	Total
A	10	6	4	20
B	5	10	15	30

	A	**B**	**Demanda exterior**	Total
A	10/20	6/20	4/20	20/20
B	5/30	10/30	15/30	30/30

Al expresarlo como un modelo input-output de Leontief, la producción x_1 debe ser 20 y la de x_2 debe ser 30.

Si se confunden filas y columnas …

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{10}{20}x_1 + \frac{6}{20}x_2 + 4 \\ x_2 &= \frac{5}{30}x_1 + \frac{10}{30}x_2 + 15 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{10}x_2 &= 4 \\ -\frac{1}{6}x_1 + \frac{2}{3}x_2 &= 15 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = \frac{430}{17}\text{ u.},\quad x_2 = \frac{490}{17}\text{ u.}$$

$$\neq$$

$$x_1 = 20\text{ u.},\quad x_2 = 30\text{ u.}$$

ERROR 1

	A	B	Demanda exterior	Total
A	10	6	4	20
B	5	10	15	30

	A	B	Demanda exterior	Total
A	10/20	6/20	4/20	20/20
B	5/30	10/30	15/30	30/30

a_{11}= unidades de A usadas para elaborar una unidad de A

a_{12}= unidades de A usadas para elaborar una unidad de B

a_{21}= unidades de B usadas para elaborar una unidad de A

a_{22}= unidades de B usadas para elaborar una unidad de B

- Si para elaborar 20 u. de A se necesitan 10 u. de A, cada unidad de A usa 10/20 u. de A, $a_{11}= 10/20$
- Si para elaborar 30 u. de B se necesitan 6 u. de A, cada unidad de B usa 6/30 u. de A, $a_{12}= 6/30$
- Si para elaborar 20 u. de A se necesitan 5 u. de B, cada unidad de A usa 5/20 u. de B, $a_{21}= 5/20$
- Si para elaborar 30 u. de B se necesitan 10 u. de B, cada unidad de B usa 10/30 u. de B, $a_{22}= 10/30$

ERROR 2

¿Podría pensarse cada producción por separado a partir de la tabla?

	A	B	Demanda exterior	Total
A	1/2 x_1	1/5 x_2	1/5 x_1	x_1
B	1/4 x_1	1/3 x_2	1/2 x_2	x_2

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{5}x_1 = 8 \\ \\ \dfrac{1}{2}x_2 = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = 40 \text{ u.}, \quad x_2 = 40 \text{ u.}$$

$$\neq$$

$$x_1 = \frac{560}{17} \text{ u.}, \quad x_2 = \frac{720}{17} \text{ u.}$$

No está bien planteado. Cualquier cambio en una "casilla" implica cambios en las Restantes.

ERROR 2

Modifiquemos sólo una demanda

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{10}{20}x_1 + \frac{6}{30}x_2 + a \\ x_2 &= \frac{5}{20}x_1 + \frac{10}{30}x_2 + 15 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{5}x_2 &= a \\ -\frac{1}{4}x_1 + \frac{2}{3}x_2 &= 15 \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 = \frac{4}{17}(10a + 45), \quad x_2 = \frac{15}{17}(a + 30), \quad a \geq -\frac{9}{2}$$

Modifiquemos las dos demandas

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{10}{20}x_1 + \frac{6}{30}x_2 + a \\ x_2 &= \frac{5}{20}x_1 + \frac{10}{30}x_2 + b \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{5}x_2 &= a \\ -\frac{1}{4}x_1 + \frac{2}{3}x_2 &= b \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 = \frac{4}{17}(10a + 3b), \quad x_2 = \frac{15}{17}(a + 2b)$$

Ejemplo 2.8: Supongamos 3 industrias interrelacionadas I_1, I_2, I_3 que producen un único bien cada una y cuya producción se obtiene de la forma siguiente:

Cada unidad de I_1 requiere 0.3 unidades de I_1, 0.2 unidades de I_2 y 0.3 unidades de I_3.
Cada unidad de I_2 requiere 0.1 unidades de I_1, 0.2 unidades de I_2 y 0.3 unidades de I_3.
Cada unidad de I_3 requiere 0.2 unidades de I_1, 0.5 unidades de I_2 y 0.1 unidades de I_3.

Si las demandas exteriores son:

45 unidades de I_1, 50 unidades de I_2 y 51 unidades de I_3.

Determina los niveles de producción que permite el equilibrio de esta economía.

$$\left.\begin{array}{r} 0.3x_1+0.1x_2+0.2x_3+45=x_1 \\ 0.2x_1+0.2x_2+0.5x_3+50=x_2 \\ 0.3x_1+0.3x_2+0.1x_3+51=x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 0.7x_1-0.1x_2-0.2x_3=45 \\ -0.2x_1+0.8x_2-0.5x_3=50 \\ -0.3x_1-0.3x_2+0.9x_3=51 \end{array}\right\}$$

$$x_1=\frac{430}{3}\text{ u.},\quad x_2=\frac{620}{3}\text{ u.},\quad x_3=\frac{520}{3}\text{ u.}$$

Ejemplo 2.8: Supongamos 3 industrias interrelacionadas I_1, I_2, I_3 que producen un único bien cada una y cuya producción se obtiene de la forma siguiente:

Cada unidad de I_1 requiere 0.3 unidades de I_1, 0.2 unidades de I_2 y 0.3 unidades de I_3.
Cada unidad de I_2 requiere 0.1 unidades de I_1, 0.2 unidades de I_2 y 0.3 unidades de I_3.
Cada unidad de I_3 requiere 0.2 unidades de I_1, 0.5 unidades de I_2 y 0.1 unidades de I_3.

Si las demandas exteriores son:

45 unidades de I_1, 50 unidades de I_2 y 51 unidades de I_3.

Expresa en una tabla la producción que permite el equilibrio de esta economía.

$$\left.\begin{aligned} 0.7x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 45 \\ -0.2x_1 + 0.8x_2 - 0.5x_3 &= 50 \\ -0.3x_1 - 0.3x_2 + 0.9x_3 &= 51 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = \frac{430}{3}\text{ u.}, \quad x_2 = \frac{620}{3}\text{ u.}, \quad x_3 = \frac{520}{3}\text{ u.}$$

	I_1	I_1	I_1	Demanda exterior	Total
I_1	129/3	62/3	104/3	45	430/3
I_2	86/3	124/3	260/3	50	620/3
I_3	129/3	186/3	52/3	51	520/3

MODELO INPUT-OUTPUT CERRADO

Ejemplo 2.9: Supongamos 3 industrias interrelacionadas I_1, I_2, I_3 que producen un único bien cada una y cuya producción se obtiene de la forma siguiente:

Cada unidad de I_1 requiere 0.6 unidades de I_1, 0.2 unidades de I_2 y 0.2 unidades de I_3.
Cada unidad de I_2 requiere 0.2 unidades de I_1, 0.5 unidades de I_2 y 0.3 unidades de I_3.
Cada unidad de I_3 requiere 0.1 unidades de I_1, 0.3 unidades de I_2 y 0.6 unidades de I_3.

Determina los niveles de producción que permite el equilibrio interno de esta economía.

$$\left.\begin{array}{l} 0.6x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 = x_1 \\ 0.2x_1 + 0.5x_2 + 0.3x_3 = x_2 \\ 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.6x_3 = x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0.4x_1 - 0.2x_2 - 0.1x_3 = 0 \\ -0.2x_1 + 0.5x_2 - 0.3x_3 = 0 \\ -0.2x_1 - 0.3x_2 + 0.4x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

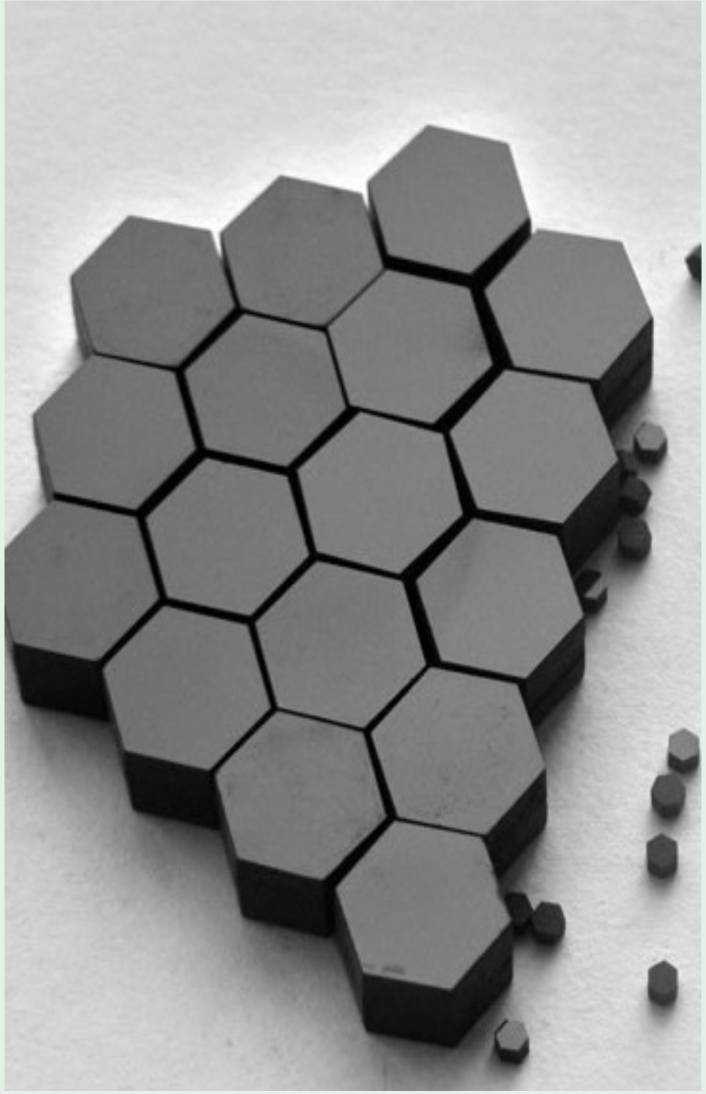
$$x_1 = \frac{11}{16}\lambda, \quad x_2 = \frac{7}{8}\lambda, \quad x_3 = \lambda, \quad \lambda \in \mathrm{R}.$$

REFERENCIAS

- Canós Darós, M. J.; Ivorra Castillo, C., Liern Carrión, V (2011): *Matemáticas para la Economía y la Empresa*, Ed. Tirant lo Blanch, Valencia (España).
- Caslsson, C., Korhonen, P. (1986): A parametric approach to fuzzy linear programming, ***Fuzzy Sets and Systems,*** 20: 17–30.
- Chiang, A. C. (1984)*. Fundamental Methods of Mathematical Economics* (Third Edition), McGraw-Hill, New York.,USA.
- Hawkins, D., Simon, H. A. (1949). Some Conditions of Macroeconomic Stability. ***Econometrica***. 17 (3/4): 245–248.
- Liern, V (2013). ¿Qué desarrollar en el área de matemáticas en la economía?. ***Revista Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas***, 62, 11-20.
- Liern, V. (2012). *Matemáticas y economía. Ventajas de la cooperación*. Manual del XIII Día Escolar de las Matemáticas, FESPM, Badajoz (España).
- Nikaido, H. (1968): *Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics*. North-Holland, 1970, Amsterdam (Holanda), pp. 18–19.
- Ramírez, P. (1992): El sistema de Leontief y su solución matemática, Lecturas de ***Economía***, 37, 127-147.
- Vizmanos, J.R., Hernández, J., Alcaide, F., Moreno, M., Serrano, E. (2011): *Matemáticas 2*, Ediciones SM, Madrid.
- https://www.youtube.com/watch?v=SAujCzDbvic
- https://www.youtube.com/watch?v=PWNwdmDz_iM

3. Conjunto de oportunidades. Espacios vectoriales

a. Conjuntos de soluciones
b. Bases y mínima información necesaria



Un espacio vectorial es un conjunto V (cuyos elementos se llaman vectores) en el que hay definidas dos operaciones: una suma de vectores, es decir, una operación que a cada par de vectores $x, y \in V$ les asigna un vector $x + y$, y un producto escalar, que a cada $\lambda \in R$ y cada vector $x \in V$ les asigna un vector $\lambda x \in V$.
Estas operaciones deben cumplir las propiedades siguientes (donde las letras griegas representan números reales y las latinas vectores):

1. $(x+y)+z = x+(y+z)$, para todo x, y
2. $x + y = y + x$, para todo x, y
3. Existe un vector $0 \in V$ tal que $x + 0 = x$, para todo vector x
4. Para cada vector x, existe otro vector $-x$ tal que $x + (-x) = 0$
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, para todo λ y todo x, y
6. $(\lambda + \mu)\, x = \lambda x + \mu x$, para todo λ, μ y todo x
7. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)\, x$, para todo λ, μ y todo x
8. $1x = x$, para todo vector x

Teorema 3. Un subconjunto de R^n definido por un sistema ecuaciones lineales homogéneas (o sea, igualadas a 0) es siempre un subespacio vectorial.

Demostración

Consideremos el sistema de ecuaciones en forma matricial: $Ax^t = 0$. El conjunto será

$$W = \{x \in R^n \mid Ax^t = 0\}.$$

Comprobamos que cumple las condiciones de subespacio vectorial:

1. $0 \in W$, pues $A \cdot 0 = 0$

2. Dados $x, y \in W$, hemos de probar que $x + y \in W$, lo cual equivale a que $A(x+y)^t = 0$. En efecto, teniendo en cuenta que $Ax^t = Ay^t = 0$ (porque $x, y \in W$),

$$A(x+y)^t = A(x^t + y^t) = Ax^t + Ay^t = 0 + 0 = 0.$$

3. Dados $x \in W$ y $\lambda \in R$, hemos de probar que $\lambda x \in W$, lo cual equivale a que $A(\lambda x)^t = 0$ Usando como antes que $Ax^t = 0$, vemos que

$$A(\lambda x)^t = A\lambda x^t = \lambda A x^t = \lambda 0 = 0.$$

Ejemplo 3.1: Una empresa distribuye su producto en cuatro mercados A, B, C y D en cantidades de x, y, z, w *miles de unidades*, respectivamente. El coste de transportar mil unidades de producto a cada mercado es de 3, 1, 2 y 1 dólares, respectivamente.
Las necesidades de los mercados y su flota de camiones les permite plantearse varios tipos de modificaciones en el transporte:
$(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta w) = (3, 2, -6, 1)$, $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta w) = (3, -2, -4, 3)$, …
Si no puede alterar la producción ni los costes de transporte, ¿son viables las dos posibilidades anteriores?

Un vector de incrementos $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta w)$ requiere un incremento de producción de

$$\Delta P = \Delta x + \Delta y + \Delta z + \Delta w$$

y un incremento de los costes de transporte

$$\Delta C = 3\Delta x + 1\Delta y + 2\Delta z + 1\Delta w.$$

Como además la empresa exige

$$\Delta P = \Delta C = 0,$$

el conjunto de incrementos factibles es

$$W = \{(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta w) \in R^4 \mid \Delta x + \Delta y + \Delta z + \Delta w = 0, \quad 3\Delta x + \Delta y + 2\Delta z + \Delta w = 0\}.$$

$$\left.\begin{array}{r} \Delta x + \Delta y + \Delta z + \Delta w = 0 \\ 3\Delta x + \Delta y + 2\Delta z + \Delta w = 0 \end{array}\right\}$$

Tomamos como parámetros $\lambda = \Delta y$, $\mu = \Delta w$, $\lambda, \mu \in R$

$$\Delta z = -2\lambda - 2\mu$$

$$\Delta x = -\Delta y - \Delta z - \Delta w = -\lambda + 2\lambda + 2\mu - \mu = \lambda + \mu$$

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta w) = (\lambda + \mu, \lambda, -2\lambda - 2\mu, \mu) = (\lambda, \lambda, -2\lambda, 0) + (\mu, 0, -2\mu, \mu)$$
$$= \lambda(1, 1, -2, 0) + \mu(1, 0, -2, 1). \qquad \lambda, \mu \in R$$

$$W = \{\lambda(1, 1, -2, 0) + \mu(1, 0, -2, 1) \mid \lambda, \mu \in R\} = \langle(1, 1, -2, 0), (1, 0, -2, 1)\rangle$$

$(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta w) = (3, 2, -6, 1) = 2(1, 1, -2, 0) + 1(1, 0, -2, 1)$ Sí es viable

$(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta w) = (3, -2, -4, 3) \neq \lambda(1, 1, -2, 0) + \mu(1, 0, -2, 1)$ No es viable

NOTA: $\{(1, 1, -2, 0), (1, 0, -2, 1)\}$ es una base de W y, como sistema generador *minimal* (con el mínimo número posible de vectores), contiene la mínima información necesaria para conocer todas las modificaciones posibles en el transporte.

Ejemplo 3.2: Un banco gestiona cuatro carteras A, B, C y D, cuyo capital se distribuye en acciones de tres compañías P, Q y R en la proporción que indica la tabla siguiente:

COMPAÑÍA	CARTERAS			
	A	**B**	**C**	**D**
P	20%	30%	25%	24%
Q	0	60%	30%	24%
R	80%	10%	45%	52%

El banco desea ampliar el capital de sus carteras.

a) Expresa todos los posibles incrementos de la inversión en cada compañía, (ΔP, ΔQ, ΔR), que pueden distribuirse entre las cuatro carteras sin crear excedentes.

b) Si el banco va a asignar el estudio de cada cartera a un empleado, ¿Cuántos empleados serían imprescindibles?

a)

Llamamos (ΔP, ΔQ, ΔR) al incremento en cada compañía.

Un incremento de capital en las carteras A, B, C, D se pueden expresar

ΔA =(0.2 ΔP, 0 ΔQ, 0.8 ΔR)

ΔB =(0.3 ΔP, 0.6 ΔQ, 0.1 ΔR)

ΔC =(0.25 ΔP, 0.3 ΔQ, 0.45 ΔR)

ΔD =(0.24 ΔP, 0.24 ΔQ, 0.5 2ΔR)

COMPAÑÍA	CARTERAS			
	A	**B**	**C**	**D**
P	20%	30%	25%	24%
Q	0	60%	30%	24%
R	80%	10%	45%	52%

$(\Delta P, \Delta Q, \Delta R) = (0.2\ \Delta A, 0\ \Delta A, 0.8\ \Delta A) + (0.3\ \Delta B, 0.6\ \Delta B, 0.1\ \Delta B) + (0.25\ \Delta C, 0.3\ \Delta C, 0.45\ \Delta C) +$
$+ (0.24\ \Delta D, 0.24\ \Delta D, 0.52\ \Delta D)$

$(\Delta P, \Delta Q, \Delta R) = \Delta A\ (0.2, 0, 0.8) + \Delta B\ (0.3, 0.6, 0.1) + \Delta C\ (0.25, 0.3, 0.45) + \Delta D\ (0.24, 0.24, 0.52)$

$W = \langle (0.2, 0, 0.8), (0.3, 0.6, 0.1), (0.25, 0.3, 0.45), (0.24, 0.24, 0.52) \rangle$

NOTA: El apartado (b) de este ejemplo hace hincapié en el carácter de generador minimal de las bases. Ya se sabe que G={(0.2, 0, 0.8), (0.3, 0.6, 0.1), (0.25, 0.3, 0.45), (0.24, 0.24, 0.52)} es un sistema generador. Ahora se trata de obtener una base contenida en G.

b)

W =< (0.2, 0, 0.8), (0.3, 0.6, 0.1), (0.25, 0.3, 0.45), (0.24, 0.24, 0.52) >

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.25 & 0.3 & 0.45 \\ 0.24 & 0.24 & 0.52 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 1 \\ 25 & 30 & 45 \\ 24 & 24 & 52 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \\ 5 & 6 & 9 \\ 6 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & -11 \\ 0 & 6 & -11 \\ 0 & 6 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

W =< (0.2, 0, 0.8), (0.3, 0.6, 0.1) >

La dimensión es 2, por lo tanto es suficiente con analizar 2 carteras.

Serían necesarios 2 empleados.

REFERENCIAS

- Canós Darós, M. J.; Ivorra Castillo, C., Liern Carrión, V (2011): *Matemáticas para la Economía y la Empresa*, Ed. Tirant lo Blanch, Valencia (España).
- Chiang, A. C. (1984). *Fundamental Methods of Mathematical Economics* (Third Edition), McGraw-Hill, New York.,USA.
- Liern, V (2013). ¿Qué desarrollar en el área de matemáticas en la economía?. ***Revista Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas***, 62, 11-20.
- Vizmanos, J.R., Hernández, J., Alcaide, F., Moreno, M., Serrano, E. (2011): *Matemáticas 2*, Ediciones SM, Madrid.

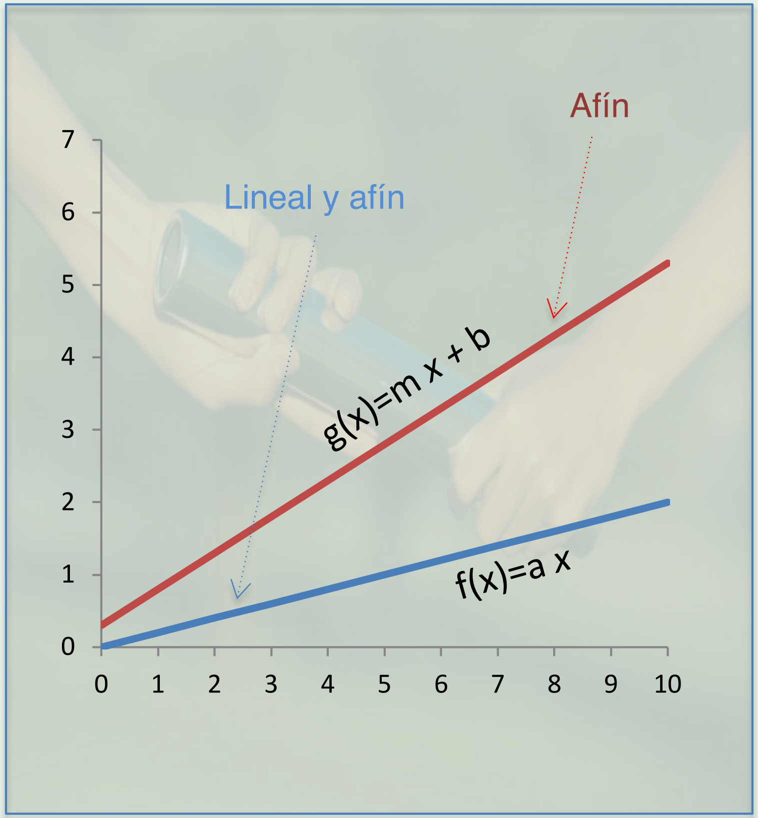
4. Transformaciones lineales y afines

a.- Formulación

b.- Normalizaciones lineales

c.- Indicadores lineales

Aplicaciones aparentemente lineales



El uso de matrices, su aritmética y sus transformaciones ha contribuido sustancialmente a la creación y desarrollo de las bases de datos.

Una **aplicación lineal** o **transformación lineal** entre dos espacios vectoriales V, W sobre el mismo cuerpo K, es una aplicación f que verifica:

a) f(u+v)=f(u)+f(v) para cualesquiera vectores u,v
b) f(λv)=λf(v) para cualquier vector v y cualquier escalar λ

$$f: R^n \longrightarrow R^m \qquad f(x) = A\,x^T \qquad A \in M_{n\times m}(R)$$

Una **aplicación** o **transformación afín** entre dos espacios afines (en nuestro caso espacios vectoriales) V, W sobre el mismo cuerpo K, es una aplicación lineal seguida de una traslación, es decir

$$g: R^n \longrightarrow R^m \qquad g(x) = A\,x^T + b^T \qquad \begin{array}{l} A \in M_{n\times m}(R) \\ b \in R^m \end{array}$$

Ejemplo 4.1: Una empresa produce cuatro tipos de artículos, a_1, a_2, a_3 y a_4, que requieren el uso de tres materias primas diferentes m_1, m_2 y m_3. Las unidades de materia prima que se emplean en elaborar cada artículo vienen expresadas en la tabla siguiente:

Materias primas	Artículos			
	a_1	a_2	a_3	a_4
m_1	1	0.2	0.1	1
m_2	0.2	0.7	0.8	0.9
m_3	0.2	2	0.9	1

a) Determina la relación que asocia cada producción con el uso de las materias primas.
b) ¿La relación anterior describe una aplicación lineal?
c) En caso afirmativo, calcula *ker f* y la antiimagen económica de (0,0,0).

a) $f: R^4 \longrightarrow R^3$

$$\left.\begin{aligned} f(1,0,0,0) &= (1,\ 0.2,\ 0.2) \\ f(0,1,0,0) &= (0.2,\ 0.7,\ 2) \\ f(0,0,1,0) &= (0.1,\ 0.8,\ 0.9) \\ f(0,0,0,1) &= (1,\ 0.9,\ 1) \end{aligned}\right\} \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.1 & 1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.2 & 2 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(x,y,z,t) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.1 & 1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.2 & 2 & 0.9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 1x + 0.2y + 0.1z + 1t \\ 0.2x + 0.7y + 0.8z + 0.9t \\ 0.2x + 2y + 0.9z + 1t \end{bmatrix}^T$$

$$f(x,y,z,t)=\left(\begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.1 & 1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.2 & 2 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right)^T=\begin{bmatrix} 1x+0.2y+0.1z+1t \\ 0.2x+0.7y+0.8z+0.9t \\ 0.2x+2y+0.9z+1t \end{bmatrix}^T$$

$$\boxed{f(a_1,a_2,a_3,a_4)=\left(1a_1+0.2a_2+0.1a_3+1a_4,\ 0.2a_1+0.7a_2+0.8a_3+0.9a_4,\ 0.2a_1+2a_2+0.9a_3+1a_4\right)}$$

b)

Sí que es una aplicación lineal

c) $$\boxed{\ker f=\left\{(x,y,z,t)\in R^4 \,/\, x=\alpha,\ y=\frac{4}{431}\alpha,\ z=\frac{422}{431}\alpha,\ t=-\frac{474}{431}\alpha,\ \alpha\in R\right\}}$$

$$\boxed{\ker_{\text{ECOMICO}}(f)=\ker(f)\bigcap(R^+)^4=\left\{(0,0,0,0)\right\}}$$

Una **normalización lineal** de números reales debe cumplir

$$f: R \longrightarrow [0,1] \qquad f(x) = \alpha\, x$$

Si x está expresado en unidades u, α tiene que estar expresada en unidades u^{-1}.

Una **normalización afín** de números reales debe cumplir

$$f: R \longrightarrow [0,1] \qquad f(x) = \alpha\, x + \beta$$

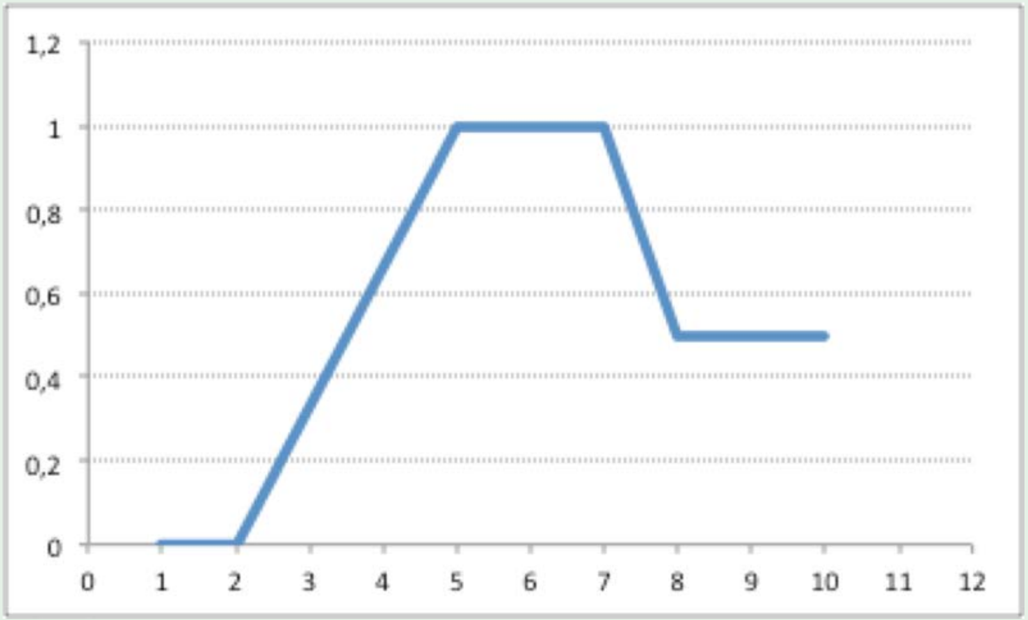
Si x está expresado en unidades u, α tiene que estar expresada en unidades u^{-1} y β debe ser adimensional.

NOTA: El objetivo de la normalización es poder comparar opciones, por eso se exige que los datos, una vez normalizados, sean adimensionales.

Una **normalización "lineal a trozos"** de números reales debe cumplir

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \qquad f(x)=\begin{cases} \dots & \dots \\ \alpha_i x+\beta_i, & x_i \le x < x_{i+1} \\ \alpha_{i+1} x+\beta_{i+1}, & x_{i+1} \le x < x_{i+2} \\ \alpha_{i+2} x+\beta_{i+2}, & x_{i+2} \le x < x_{i+3} \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Si *x* está expresado en unidades u, α_i tienen que estar expresadas en unidades u^{-1} y β_i deben ser adimensionales.



$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<2 \\ \frac{1}{3}x-\frac{2}{3}, & 2 \le x < 5 \\ 1, & 5 \le x < 7 \\ -\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}, & 7 \le x < 8 \\ \frac{1}{2}, & x \ge 8 \end{cases}$$

Ejemplo 4.2: Una empresa evalúa tres competencias de 20 empleados con valores del 1 al 10, según aparece en la tabla.

a) Normalice los datos teniendo en cuenta las aplicaciones N, R y T.

b) Ordene los candidatos según el valor de la suma de las tres competencias normalizadas.

	X	Y	Z
P1	10	1	3
P2	2	8	4
P3	7	4	2
P4	5	9	4
P5	8	3	9
P6	10	5	9
P7	6	2	9
P8	6	8	7
P9	4	9	4
P10	7	7	5
P11	10	10	9
P12	4	3	9
P13	7	9	6
P14	8	2	6
P15	10	7	10
P16	2	8	2
P17	3	2	3
P18	3	5	4
P19	9	2	5
P20	3	3	9
MIN	2	1	2
MAX	10	10	10

$$N(x) = \alpha\, x \qquad \alpha = \frac{1}{\max_i x_i} \quad u^{-1}$$

$$R(x) = \alpha\, x + \beta \qquad \alpha = \frac{1}{\max_i x_i} \quad u^{-1} \qquad \beta = \frac{-\min_i x_i}{\max_i x_i} \quad u \cdot u^{-1}$$

$$T(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}, & 2 \le x < 5 \\ 1, & 5 \le x < 7 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}, & 7 \le x < 8 \\ \frac{1}{2}, & x \ge 8 \end{cases}$$

	X	Y	Z
P1	10	1	3
P2	2	8	4
P3	7	4	2
P4	5	9	4
P5	8	3	9
P6	10	5	9
P7	6	2	9
P8	6	8	7
P9	4	9	4
P10	7	7	5
P11	10	10	9
P12	4	3	9
P13	7	9	6
P14	8	2	6
P15	10	7	10
P16	2	8	2
P17	3	2	3
P18	3	5	4
P19	9	2	5
P20	3	3	9

NX	NY	NZ
1	0,1	0,3
0,2	0,8	0,4
0,7	0,4	0,2
0,5	0,9	0,4
0,8	0,3	0,9
1	0,5	0,9
0,6	0,2	0,9
0,6	0,8	0,7
0,4	0,9	0,4
0,7	0,7	0,5
1	1	0,9
0,4	0,3	0,9
0,7	0,9	0,6
0,8	0,2	0,6
1	0,7	1
0,2	0,8	0,2
0,3	0,2	0,3
0,3	0,5	0,4
0,9	0,2	0,5
0,3	0,3	0,9

MIN	2	1	2
MAX	10	10	10

	X	Y	Z
P1	10	1	3
P2	2	8	4
P3	7	4	2
P4	5	9	4
P5	8	3	9
P6	10	5	9
P7	6	2	9
P8	6	8	7
P9	4	9	4
P10	7	7	5
P11	10	10	9
P12	4	3	9
P13	7	9	6
P14	8	2	6
P15	10	7	10
P16	2	8	2
P17	3	2	3
P18	3	5	4
P19	9	2	5
P20	3	3	9

MIN	2	1	2
MAX	10	10	10

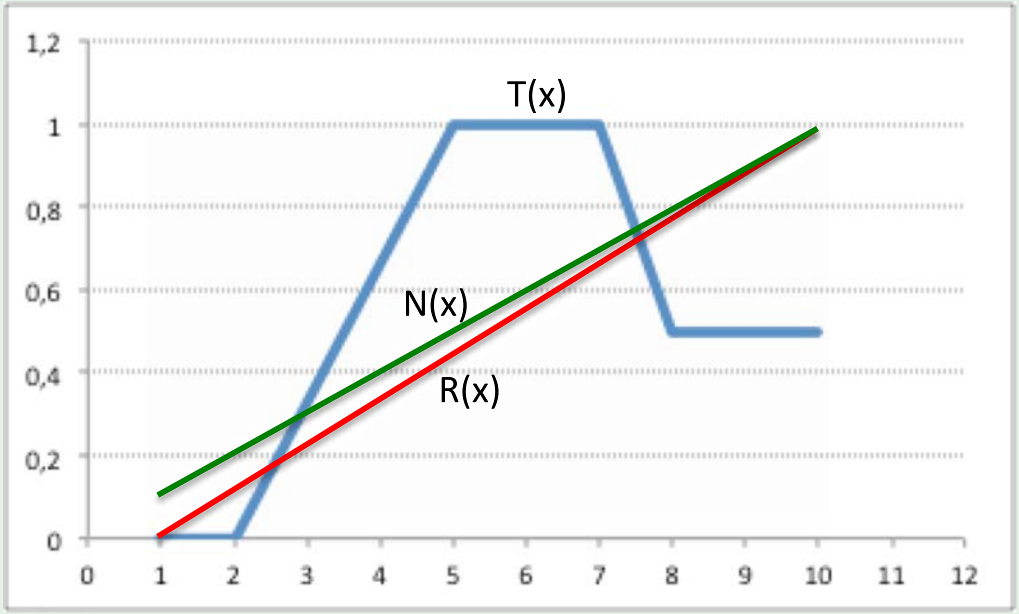
RX	RY	RZ
1	0	0,125
0	0,77777778	0,25
0,625	0,33333333	0
0,375	0,88888889	0,25
0,75	0,22222222	0,875
1	0,44444444	0,875
0,5	0,11111111	0,875
0,5	0,77777778	0,625
0,25	0,88888889	0,25
0,625	0,66666667	0,375
1	1	0,875
0,25	0,22222222	0,875
0,625	0,88888889	0,5
0,75	0,11111111	0,5
1	0,66666667	1
0	0,77777778	0
0,125	0,11111111	0,125
0,125	0,44444444	0,25
0,875	0,11111111	0,375
0,125	0,22222222	0,875

	X	Y	Z
P1	10	1	3
P2	2	8	4
P3	7	4	2
P4	5	9	4
P5	8	3	9
P6	10	5	9
P7	6	2	9
P8	6	8	7
P9	4	9	4
P10	7	7	5
P11	10	10	9
P12	4	3	9
P13	7	9	6
P14	8	2	6
P15	10	7	10
P16	2	8	2
P17	3	2	3
P18	3	5	4
P19	9	2	5
P20	3	3	9

MIN	2	1	2
MAX	10	10	10

TX	TY	TZ
0,5	0	0,33333333
0	0,5	0,66666667
1	0,66666667	0
1	0,5	0,66666667
0,5	0,33333333	0,5
0,5	1	0,5
1	0	0,5
1	0,5	1
0,6666667	0,5	0,66666667
1	1	1
0,5	0,5	0,5
0,6666667	0,33333333	0,5
1	0,5	1
0,5	0	1
0,5	1	0,5
0	0,5	0
0,3333333	0	0,33333333
0,3333333	1	0,66666667
0,5	0	1
0,3333333	0,33333333	0,5

Para visualizar mejor la diferencia entre las tres normalizaciones, en la figura siguiente representamos las funciones gráficamente.



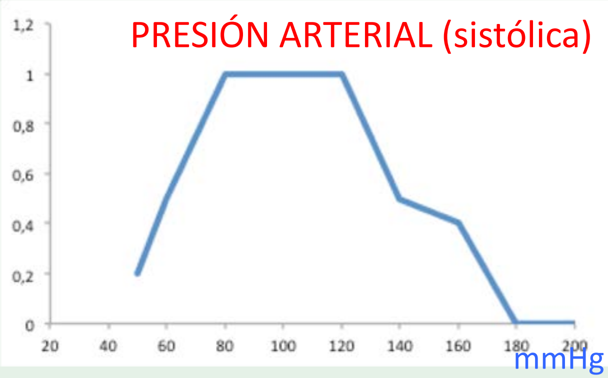
b) La ordenación es la siguiente:

Ordenación con las normalizaciones

N	R	T
P11	P11	P10
P15	P15	P8
P6	P6	P13
P13	P13	P4
P8	P8	P6
P5	P5	P15
P10	P10	P18
P4	P4	P9
P7	P7	P3
P9	P9	P12
P12	P14	P7
P14	P19	P11
P19	P12	P14
P20	P20	P19
P1	P1	P5
P2	P2	P2
P3	P3	P20
P18	P18	P1
P16	P16	P17
P17	P17	P16

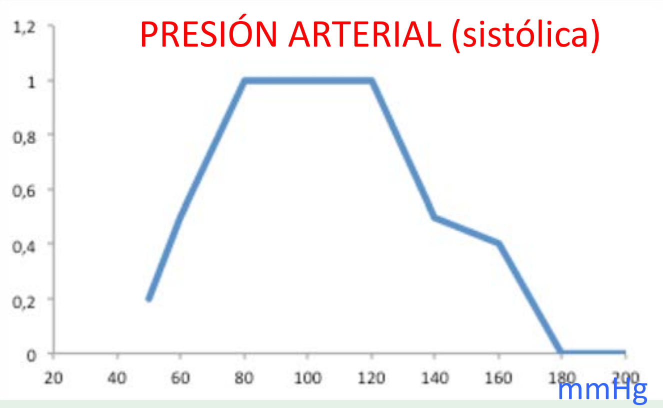
Ejemplo 4.3: Una empresa evalúa tres características de 10 empleados para ofrecer un ascenso, según aparece en la tabla. Teniendo en cuenta las preferencias de la empresa, ¿cuál debería ser la decisión?

	Presión arterial (mmHg)	Habilidades sociales (puntos)	Distancia al centro (Km)
P1	155	7	3
P2	95	6	12
P3	112	9	2
P4	123	6	14
P5	119	5	9
P6	134	8	11
P7	166	7	9
P8	99	7	7
P9	162	9	21
P10	137	6	5



Categoría	Sistólica (mmHg)
Hipotensión	menor de 80
Normal	80-120
Prehipertensión	120-139
Hipertensión grado 1 (HTA 1)	140-159
Hipertensión grado 2 (HTA 2)	160 o superior
Crisis hipertensiva (emergencia)	superior a 180

Fuente: American Heart Association



	Presión arterial (mmHg)	Habilidades sociales (puntos)	Distancia al centre (Km)
P1	155	7	3
P2	95	6	12
P3	112	9	2
P4	123	6	14
P5	119	5	9
P6	134	8	11
P7	166	7	9
P8	99	7	7
P9	162	9	21
P10	137	6	5

$$I(x_i) = \frac{1}{3}\left(T(x_i) + N(x_i) + R(x_i)\right)$$

Indicadores sintéticos lineales

	C1	C2	C3
P1	0,425	0,7	1
P2	1	0,6	0
P3	1	0,9	1
P4	0,925	0,6	0
P5	1	0,5	0,166666667
P6	0,65	0,8	0
P7	0,28	0,7	0,166666667
P8	1	0,7	0,5
P9	0,36	0,9	0
P10	0,575	0,6	0,833333333

SUMA
2,125
1,6
2,9
1,525
1,666666667
1,45
1,146666667
2,2
1,26
2,008333333

P3
P8
P1
P10
P5
P2
P4
P6
P9
P7

Algunas reflexiones acerca de indicadores y funciones "aparentemente lineales"

Un operador OWA (ordered weighted averaging) de dimensión *n* es una aplicación

$$O_w : \mathrm{R}^n \longrightarrow \mathrm{R}$$

asociada a un vector de pesos $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, con $w_i \in [0,\ 1]$ de modo que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$,

$$O_w(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i a_{(i)},$$

donde $a_{(i)}$ es el *i*-ésimo mayor valor de $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Yager, R.R. (1988): On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics 18, 183–190.

NOTA: Aunque O_w formalmente parece un operador lineal, la ordenación previa hace que no sea lineal.

Algunas reflexiones acerca de indicadores y funciones "aparentemente lineales"

Construimos el indicador

$$\boxed{I(a_1,\ldots,a_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i a_{(i)},}$$

donde $a_{(i)}$ es el i-ésimo mayor valor de $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Ejemplo 4.4: Una empresa evalúa tres características de 5 empleados para ofrecer un ascenso, según aparece en la tabla. Los pesos que se dan a cada valoración son $w_{(1)} = 0.2$, $w_{(2)} = 0.3$ y $w_{(3)} = 0.5$, siendo la más valorada la peor puntuación, después la segunda, y por último la mejor. Ordene a los empleados.

	C_1	C_2	C_3	
P_1	8	5	9	7,6
P_2	9	6	7	7,1
P_3	4	7	2	3,9
P_4	7	8	7	7,3
P_5	4	2	7	4,9

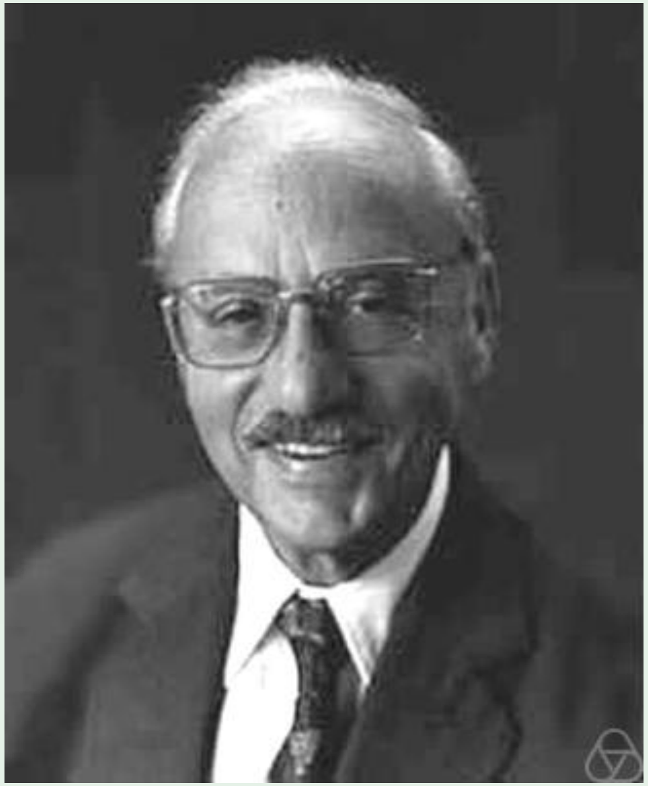
Ordenados				
P_1	9	8	5	6,7
P_2	9	7	6	6,9
P_3	7	4	2	3,6
P_4	8	7	7	7,2
P_5	7	4	2	3,6

REFERENCIAS

- Acuña-Soto, C. M., Liern, V., Pérez-Gladish, B. (2018): Multiple Criteria performance evaluation of YouTube mathematical educational videos by IS-TOPSIS. ***Operational Research - An International Journal*** (disponible en https://www.uv.es/liern/LABIPE/Publicaciones.html).
- Liern, V. (2012). *Matemáticas y economía. Ventajas de la cooperación*. Manual del XIII Día Escolar de las Matemáticas, FESPM, Badajoz (España).
- Parada-Rico, S. E., Blasco-Blasco, O., Liern, V. (2018): Adequacy Indicators Based on Pre-established Goals: An Implementation in a Colombian University. ***Social Indicators Research*** (disponible en https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11205-018-1979-z).
- Yager, R.R. (1988): On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics 18, 183–190.
- https://www.heart.org/

5. Conjuntos de restricciones. Sistemas de inecuaciones lineales

Viabilidad de sistemas de inecuaciones lineales basada en Programación Lineal



George Bernard Dantzig (1914-2005)
Físico y matemático estadounidense, reconocido por desarrollar el método simplex y es considerado como el padre de la programación lineal.

Consideramos un sistema de *m* inecuaciones lineales con *n* incógnitas

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}^1 x_1 + a_{12}^1 x_2 + \dots + a_{1n}^1 x_n \le b_1^1 \\ \dots \\ a_{m_1 1}^1 x_1 + a_{m_1 2}^1 x_2 + \dots + a_{m_1 n}^1 x_n \le b_{m_1}^1 \\ a_{11}^2 x_1 + a_{12}^2 x_2 + \dots + a_{1n}^2 x_n \ge b_1^2 \\ \dots \\ a_{m_2 1}^2 x_1 + a_{m_2 2}^2 x_2 + \dots + a_{m_2 n}^2 x_n \ge b_{m_2}^2 \end{array}\right\}$$

$$x_1, \dots, x_n \ge 0$$

$$\begin{array}{l} A_1 x \le b^1 \\ A_2 x \ge b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A_1 = [a_{ij}^1] \in M_{m1\times n}(\mathrm{R}), \\ A_2 = [a_{ij}^2] \in M_{m2\times n}(\mathrm{R}), \\ b^1 = (b_1, \dots, b_{m1}) \in \mathrm{R}^{\mathrm{m1}}, \\ b^2 = (b_1, \dots, b_{m2}) \in \mathrm{R}^{\mathrm{m2}}, \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \end{array}$$

Resolver un sistema de inecuaciones consiste en encontrar el conjunto de puntos S (conjunto de soluciones) formado por todos los valores de las incógnitas que verifican al mismo tiempo todas las inecuaciones del sistema.

Si S_1, ..., S_m son los respectivos conjuntos de soluciones de cada una de las inecuaciones, hallar la solución del sistema consiste en explicitar $S_1 \cap \dots \cap S_m$.

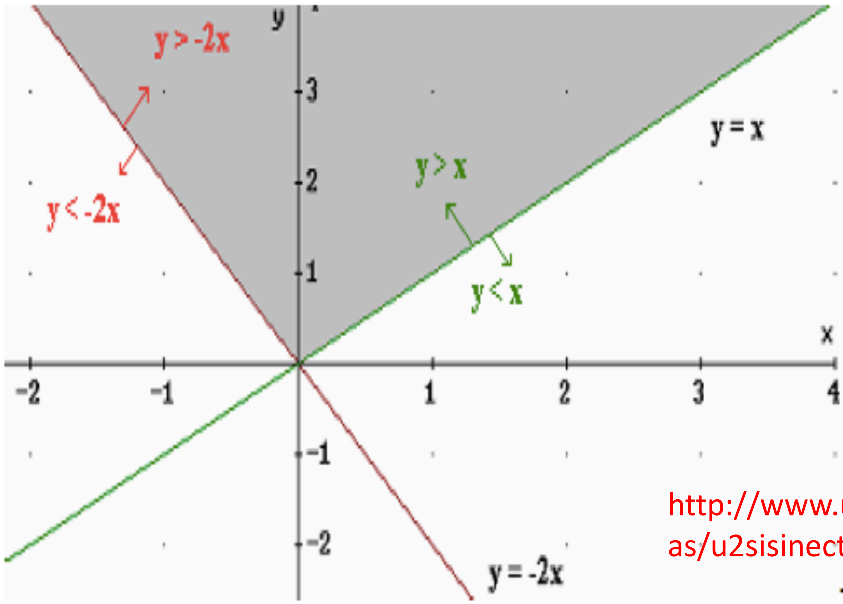
EJEMPLO Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} 2x + y > 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$

En primer lugar, se despeja y de las dos inecuaciones quedando $\begin{cases} y > -2x \\ y < x \end{cases}$

Para representar gráficamente la solución de la primera inecuación dibujamos $y = -2x$ que es la recta que une los puntos (0, 0) y (1, -2) y se considera la región donde se verifica $y > -2x$ para lo cual basta elegir un punto que no esté en la recta y comprobar si verifica o no la inecuación (por ejemplo x = 1, y = 1 es un punto que cumple la inecuación ya que al sustituir se obtiene 1 > -2).

Para representar gráficamente la solución de la segunda inecuación dibujamos $y = x$ que es la recta que une los puntos (0, 0) y (1, 1) y tomamos la región donde se verifica $y < x$ para lo cual basta elegir un punto que no esté en la recta y comprobar si verifica o no la inecuación (por ejemplo x = 2, y = 1 es un punto que cumple la inecuación ya que al sustituir se obtiene 1 < 2).

La solución del sistema es la intersección de las dos regiones que se muestra sombreada en el siguiente dibujo:



http://www.unizar.es/aragon_tres/unidad2/Sistemas/u2sisinecteto.pdf

SISTEMA DE INECUACIONES → SISTEMA DE ECUACIONES

$$\begin{array}{lcl} x_1 + 2x_2 & \geq & 4 \\ -3x_1 + 4x_2 & \geq & 5 \\ -3x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} x_1 + 2x_2 - h_1 & = & 4 \\ -3x_1 + 4x_2 - h_2 & = & 5 \\ -3x_1 + x_2 + h_3 & = & 6 \\ x_1, x_2, h_1, h_2, h_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} x_1 + 2x_2 - h_1 + \alpha_1 & = & 4 \\ -3x_1 + 4x_2 - h_2 + \alpha_2 & = & 5 \\ -3x_1 + x_2 + h_3 & = & 6 \\ x_1, x_2, h_1, h_2, h_3, \alpha_1, \alpha_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \alpha_1 & = & 4 \\ \alpha_2 & = & 5 \\ h_3 & = & 6 \\ x_1 = x_2 = h_1 = h_2 & = & 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} a_{i1}^1 x_1 + a_{i2}^1 x_2 + \ldots + a_{in}^1 x_n \geq b_i^1, & 1 \leq i \leq m_1 \\ a_{j1}^2 x_1 + a_{j2}^2 x_2 + \ldots + a_{jn}^2 x_n \leq b_j^2, & 1 \leq j \leq m_2 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{lll} & \text{Min} & \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i \\ \text{(P)} & \text{s.t.} & a_{i1}^1 x_1 + a_{i2}^1 x_2 + \ldots + a_{in}^1 x_n - h_i^1 + \alpha_i = b_i^1, \quad 1 \leq i \leq m_1, \\ & & a_{j1}^2 x_1 + a_{j2}^2 x_2 + \ldots + a_{jn}^2 x_n + h_j^2 = b_j^2, \quad 1 \leq j \leq m_2, \\ & & x, h^1, h^2, \alpha \geq 0 \end{array}$$

JUSTIFICACIÓN TEÓRICA

$$\mathrm{L}(x,h^1,h^2,\alpha,w,\pi) = \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i + \sum_{i=1}^{m_1} w_i (b_i^1 - a_{i1}^1 x_1 - \ldots - a_{in}^1 x_n - h_i^1 + \alpha_i) + \sum_{j=1}^{m_2} \pi_j (b_j^2 - a_{j1}^2 x_1 - \ldots - a_{jn}^2 x_n + h_j^2)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (-x_k) + \sum_{i=1}^{m_1} \mu_i^1 (-h_i^1) + \sum_{j=1}^{m_2} \mu_i^2 (-h_j^2) + \sum_{i=1}^{m_1} \eta_i (-\alpha_i^1)$$

TEÓRICA

JUSTIFICACIÓN

$$L(x,h^1,h^2,\alpha,w,\pi)=\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i+\sum_{i=1}^{m_1}w_i(b_i^1-a_{i1}^1x_1-\ldots-a_{in}^1x_n-h_i^1+\alpha_i)+\sum_{j=1}^{m_2}\pi_j(b_j^2-a_{j1}^2x_1-\ldots-a_{jn}^2x_n+h_j^2)$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(-x_k)+\sum_{i=1}^{m_1}\mu_i^1(-h_i^1)+\sum_{j=1}^{m_2}\mu_i^2(-h_j^2)+\sum_{i=1}^{m_1}\eta_i(-\alpha_i^1)$$

$(x^*,h^1{}^*,h^2{}^*,\alpha^*)$ óptimo de P

$(x^*,h^1{}^*,h^2{}^*,\alpha^*,w^*,\pi^*)$ óptimo de L $\longrightarrow$ $\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i^*=F^*$ Valor óptimo de P

$$\frac{\partial L}{\partial b_i^1}=w_i,\quad 1\le i\le m_1,\qquad \frac{\partial L}{\partial b_j^2}=\pi_j,\quad 1\le j\le m_2.$$

TEÓRICA

$$\boxed{b_i^1 * + \varepsilon}$$

$$\mathrm{L}(x^*, h^{1*}, h^{2*}, \alpha^*, w^*, \pi^*, b_1^1 *, \ldots, b_{m_1}^1 *, b_1^2 *, \ldots, b_{m_2}^2 *) \approx z^* + \varepsilon w_i, \quad 1 \leq i \leq m_1$$

$$\boxed{b_j^2 * + \delta}$$

$$\mathrm{L}(x^*, h^{1*}, h^{2*}, \alpha^*, w^*, \pi^*, b_1^1 *, \ldots, b_{m_1}^1 *, b_1^2 *, \ldots, b_{m_2}^2 *) \approx z^* + \delta \pi_j, \quad 1 \leq j \leq m_2$$

JUSTIFICACIÓN

$$\boxed{b_i^1 * - \frac{z^*}{w_i}}$$

$$\mathrm{L}(x^*, h^{1*}, h^{2*}, \alpha^*, w^*, \pi^*, b_1^1 *, \ldots, b_{m_1}^1 *, b_1^2 *, \ldots, b_{m_2}^2 *) \approx z^* - \frac{z^*}{w_i} w_i = 0, \quad 1 \leq i \leq m'_1$$

$$\boxed{b_j^2 * - \frac{z^*}{\pi_j}}$$

$$\mathrm{L}(x^*, h^{1*}, h^{2*}, \alpha^*, w^*, \pi^*, b_1^1 *, \ldots, b_{m_1}^1 *, b_1^2 *, \ldots, b_{m_2}^2 *) \approx z^* - \frac{z^*}{\pi_j} \pi_j = 0, \quad 1 \leq i \leq m'_2$$

FASE I

$$
\begin{array}{lll}
\text{Min} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i & \\
\text{s.t.} & a_{i1}^1 x_1 + a_{i2}^1 x_2 + \ldots + a_{in}^1 x_n - h_i^1 + \alpha_i = & b_i^1, \quad 1 \le i \le m_1, \\
 & a_{j1}^2 x_1 + a_{j2}^2 x_2 + \ldots + a_{jn}^2 x_n + h_j^2 = & b_j^1, \quad 1 \le j \le m_2, \\
 & x, h^1, h^2, \alpha \ge 0 &
\end{array}
$$

DUAL FASE I

$$
\begin{array}{llll}
\text{Max} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m_1} w_i b_i^1 + \sum_{j=1}^{m_2} \pi_j b_j^2 & & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m_1} w_i a_{ik}^1 + \sum_{i=1}^{m_1} \pi_j a_{ik}^2 \le & 0, & 1 \le k \le n, \\
 & 0 \le w_i \le 1, & & 1 \le i \le m_2, \\
 & \pi \le 0. & &
\end{array}
$$

León, T.; Liern, V (2001): A fuzzy method to repair infeasibility in linearly constrained problems. Fuzzy Sets and Systems, 122, 237-243.

PASO I

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i \\ \text{s.t.} \quad & a_{i1}^1 x_1 + a_{i2}^1 x_2 + \ldots + a_{in}^1 x_n - h_i^1 + \alpha_i = b_i^1, \quad 1 \le i \le m_1, \\ & a_{j1}^2 x_1 + a_{j2}^2 x_2 + \ldots + a_{jn}^2 x_n + h_j^2 = b_j^1, \quad 1 \le j \le m_2, \\ & x, h^1, h^2, \alpha \ge 0 \end{aligned}$$

F* valor óptimo

(w*,π*) multiplicadores

PASO II

$$r_i = \begin{cases} 0, & \text{si } w_i = 0 \\ \dfrac{F^*}{w_i}, & \text{si } w_i \ne 0 \end{cases} \qquad s_j = \begin{cases} 0, & \text{si } \pi_j = 0 \\ \dfrac{-F^*}{\pi_j}, & \text{si } \pi_j \ne 0 \end{cases}$$

$$R = (r_1, \ldots, r_{m_1})$$
$$S = (s_1, \ldots, s_{m_2})$$

PASO III

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \lambda \\ \text{s.t.} \quad & A_1 x + \lambda R \le b_i^1 \\ & A_2 x - \lambda S \ge b_j^1 \\ & 0 \le \lambda \le 1 \end{aligned}$$

- El problema es factible
- $\lambda^* \in \left[\dfrac{1}{\text{número de multiplicadores no nulos}}, 1 \right]$

Ejemplo 5.1: Consideramos el sistema de inecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 &\geq 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &\geq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 5 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \min & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \text{s.a} & -x_1 + x_2 - x_3 - h_1 + \alpha_1 = 1 \\ & 2x_1 - 3x_2 + x_3 - h_2 + \alpha_2 = 3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 - h_3 + \alpha_3 = 5 \\ & 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + h_4 = 2 \\ & x_i, h_j, \alpha_k \geq 0 \end{array}$$

$$\alpha_1 = 3.6, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \quad x_1 = 2.8, \quad x_2 = 1.2, \quad x_3 = 1, \quad h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 0$$

$$w_1 = 1, \quad w_2 = 7/15, \quad w_3 = 4/15, \quad \pi_4 = -1/15$$

$$F^* = 54/15$$

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 - x_3 &\geq 1 \\
2x_1 - 3x_2 + x_3 &\geq 3 \\
x_1 + x_2 + x_3 &\geq 5 \\
3x_1 - 2x_2 - 4x_3 &\leq 2 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

No tiene solución

León, T.; Liern, V (2001): A fuzzy method to repair infeasibility in linearly constrained problems. Fuzzy Sets and Systems, 122, 237-243.

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 - x_3 + \tfrac{54}{15}\lambda &\geq 1 \\
2x_1 - 3x_2 + x_3 + \tfrac{54}{7}\lambda &\geq 3 \\
x_1 + x_2 + x_3 + \tfrac{54}{4}\lambda &\geq 5 \\
3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 54\lambda &\leq 2 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Existe $\lambda \in [0.25,\ 1]$ de modo que
el sistema de inecuaciones tiene solución

Ejemplo 5.2: Consideramos el sistema de inecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 &\geq 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &\geq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \text{s.a} \quad & -x_1 + x_2 - x_3 - h_1 + \alpha_1 = 1 \\ & 2x_1 - 3x_2 + x_3 - h_2 + \alpha_2 = 3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 - h_3 + \alpha_3 = 5 \\ & x_i, h_j, \alpha_k \geq 0 \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = 3.2, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \quad x_1 = 3.6, \quad x_2 = 1.4, \quad x_3 = 0, \quad h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 0$$

$$w_1 = 1, \quad w_2 = 2/5, \quad w_3 = 1/5$$

$$F^* = 16/5$$

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 - x_3 &\geq 0.8604651 \\
2x_1 - 3x_2 + x_3 &\geq -2,5813952 \\
x_1 + x_2 + x_3 &\geq -6,1627904 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

No tiene solución

(10, 3, -8) es una solución del sistema de ecuaciones

(0, 0.8604651, 0) es una solución del sistema de inecuaciones

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 - x_3 + \tfrac{1}{5}\lambda &\geq 1 \\
2x_1 - 3x_2 + x_3 + 8\lambda &\geq 3 \\
x_1 + x_2 + x_3 + 16\lambda &\geq 5 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Existe $\lambda \in [0.\widehat{3},\ 1]$ de modo que el sistema de inecuaciones tiene solución

λ^*= 0,6976744

Ejemplo 5.3: Consideramos el sistema de inecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &\ge 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &\ge 7 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha_2 + \alpha_3 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + h_1 = 4 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 - h_2 + \alpha_2 = 1 \\ & x_1 - x_2 - 2x_3 - h_3 + \alpha_3 = 7 \\ & x_i, h_j, \alpha_k \ge 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &\ge 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &\ge 7 \end{aligned}\right\}$$

No tiene solución

$$\downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned}\right\}$$

No tiene solución

$$\downarrow$$

Aplicamos el Teorema

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &\ge 1 \\ x_1 - x_2 - \boxed{2.1}x_3 &\ge 7 \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 = -\frac{302}{3}, \quad x_2 = \frac{307}{3}, \quad x_3 = -100$$

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3 &\le 4\\ 2x_1+x_2-x_3 &\ge 1\\ x_1-x_2-2x_3 &\ge 7\\ x_1,x_2,x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\quad & \alpha_2+\alpha_3\\ \text{s.a}\quad & x_1+2x_2+x_3+h_1 = 4\\ & 2x_1+x_2-x_3-h_2+\alpha_2 = 1\\ & x_1-x_2-2x_3-h_3+\alpha_3 = 7\\ & x_i,h_j,\alpha_k \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3-3\lambda &\le 4\\ 2x_1+x_2-x_3 &\ge 1\\ x_1-x_2-2x_3+3\lambda &\ge 7\\ x_1,x_2,x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

$\alpha_2=0,\ \alpha_3=3,$
$x_1=4,\ x_2=0,\ x_3=0,$
$h_1=h_2=h_3=0$

Existe $\lambda\in[0.5,\ 1]$ de modo que el sistema de inecuaciones tiene solución

$\pi_1=-1,\quad w_1=0,\quad w_2=1$

λ*= 0.5

$F^*=3$

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3 &\le 5.5\\ 2x_1+x_2-x_3 &\ge 1\\ x_1-x_2-2x_3 &\ge 5.5\\ x_1,x_2,x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

(5.5, 0,0) es solución

REFERENCIAS

- León, T.; Liern, V (1996): Fuzzy methods and infeasible linear programs: an application to staff design problem. ***Fuzzy Economic Review***, 3, 79-94.
- León, T.; Liern, V (2001): A fuzzy method to repair infeasibility in linearly constrained problems. ***Fuzzy Sets and Systems***, 122, 237-243.
- Vizmanos, J.R., Hernández, J., Alcaide, F., Moreno, M., Serrano, E. (2011): *Matemáticas 2*, Ediciones SM, Madrid.
- http://www.unizar.es/aragon_tres/unidad2/Sistemas/u2sisinecteto.pdf

Ejercicios resueltos

A. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Modelo de renta-gasto

2. Precios de equilibrio

3. Input-output de Leontief

4. Sistemas infactibles

B. Espacios vectoriales

5. Sistemas generadores

C. Transformaciones basadas en aplicaciones lineales y afines

6. Normalizaciones aparentemente lineales

D. ANEXO: Sistemas de inecuaciones lineales

7. Viabilidad de sistemas de inecuaciones no factibles

A. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Modelo de renta-gasto

En una economía con propensión al consumo estimada de $c_1=0.8$, se plantean dos políticas fiscales:

a) Disminuir los impuestos en 1500 um.

b) Incrementar el gasto público en 1000 um.

¿Cuál de las dos políticas fiscales aumenta más la renta?

SOLUCIÓN:

Consideramos el modelo keynesiano

$$Y=C+I_0+G_0$$
$$C=c_0+c_1(Y-T), \quad c_0>0, \quad 0<c_1<1$$

donde Y= renta nacional, C= consumo, I=Inversión, G= gasto público, T= impuestos

$$Y^*=\frac{1}{1-c_1}\left(c_0-c_1T+G_0\right)$$
$$C^*=\frac{1}{1-c_1}\left(c_0-c_1T+c_1I_0+c_1G_0\right)$$

La renta antes de disminuir los impuestos es

$$Y^1 = \frac{1}{1-0.8}\left(c_0 - 0.8T + G_0\right) = 5\left(c_0 - 0.8T + G_0\right) = 5c_0 - 4T + 5G_0$$

Si se disminuyen los impuestos, T, en 1000 um, se tiene

$$Y^2 = \frac{1}{1-0.8}\left(c_0 - 0.8(T-1500) + G_0\right) = 5c_0 - 4T + 5G_0 + 6000$$

Por lo tanto, el incremento en la renta es

$$\Delta Y = Y^2 - Y^1 = 6000 \text{ um.}$$

Si se aumenta el gasto público, G, en 1000 um, se tiene

$$Y^3 = \frac{1}{1-0.8}\left(c_0 - 0.8T + G_0 + 1000\right) = 5c_0 - 4T + 5G_0 + 5000$$

El incremento en la renta es

$$\Delta Y = Y^3 - Y^1 = 5000 \text{ um.}$$

Entonces, la opción de disminuir los impuestos en 1500um aumenta más la renta que la de aumentar el gasto público en 1000 um.

EJEMPLOS RESUELTOS

2. Precios de equilibrio

Una empresa fabrica tres productos A, B y C. Un análisis de la empresa muestra que su capacidad de producción para unos precios p_1, p_2 y p_3 (resp.) viene dada por

$$SA = p_1 + p_2 + p_3 - 5$$
$$SB = 2p_1 + 3p_2 + p_3 - 10$$
$$SC = 2p_1 + 2p_2 + p_3 - 10$$

Por otra parte, un estudio de mercado indica que la demanda prevista es

$$DA = 45 - 3p_1 - 2p_2$$
$$DB = 40 - 2p_1 - 2p_2 - p_3$$
$$DC = 30 \qquad - p_2 - 4p_3$$

a) Calcule los precios con los que la empresa equilibraría su situación económica.
b) Si se ha gastado 4000$ en el análisis interno de la empresa para estimar las ofertas y 15000$ en el estudio de mercado, determine unos precios de equilibrio aproximados.
c) Justifique que la solución es viable.

SOLUCIÓN:

a) Planteamos el sistema SA=DA, SB=DB, SC=DC:

$$\left.\begin{aligned} 4p_1 + 3p_2 + p_3 &= 50 \\ 4p_1 + 5p_2 + 2p_3 &= 50 \\ 2p_1 + 3p_2 + 5p_3 &= 40 \end{aligned}\right\}$$

Cuya solución es

$$p_1 = 13, \quad p_2 = -2, \quad p_3 = 4$$

Como no tiene sentido que los precios sean negativos, eso significa que no existen unos precios que equilibren el mercado.

b) Como la modelación ha resultado muy costosa para la empresa, no deberíamos iniciar otro proceso de modelación, sino que podemos a comprobar si es posible, a través de un sistema paramétrico, proporcionar una solución que se aproxime a la modelación propuesta.

Como las demandas no las ha establecido la empresa, intentamos modificar ligeramente las ofertas, porque éstas sí dependen de la empresa. Hacemos, por ejemplo:

$$S_A = (1+0.5\alpha)p_1 + p_2 + p_3 - 5$$
$$S_B = (2-0.5\alpha)p_1 + 3p_2 + p_3 - 10 \qquad \alpha \in [0,1].$$
$$S_C = 2p_1 + 2p_2 + p_3 - 10$$

Ahora formulamos el nuevo sistema

$$\left.\begin{array}{r} (4+0.5\alpha)p_1 + 3p_2 + p_3 = 50 \\ (4-0.5\alpha)p_1 + 5p_2 + 2p_3 = 50 \\ 2p_1 + 3p_2 + 5p_3 = 40 \end{array}\right\}$$

Cuya solución, en función del parámetro es

$$p_1 = \frac{780}{31\alpha + 60}, \quad p_2 = \frac{20(19\alpha - 6)}{31\alpha + 60}, \quad p_3 = \frac{20(\alpha + 12)}{31\alpha + 60}, \quad \alpha \neq -\frac{60}{31}$$

Por lo tanto, para $\alpha > \frac{6}{19}$, (en realidad $\alpha \in \left[\frac{6}{19}, 1\right]$)

la solución del sistema es positiva.

Si tomamos, por ejemplo, $\alpha = 0.35$, el sistema resulta:

$$\left.\begin{array}{r} 4.175\, p_1 + 3\, p_2 + p_3 = 50 \\ 3.825\, p_1 + 5\, p_2 + 2\, p_3 = 50 \\ 2\, p_1 + 3\, p_2 + 5\, p_3 = 40 \end{array}\right\}$$

En este caso, la solución $p_1 = \frac{1200}{109}, \quad p_2 = \frac{20}{109}, \quad p_3 = \frac{380}{109}.$

c) Para justificar que tiene sentido, no sólo deben ser positivos los precios, sino que deberían serlo también las ofertas y las demandas:

$S_A = (1+0.5 \times 0.35)p_1 + p_2 + p_3 - 5 \quad = 1.175\, p_1 + p_2 + p_3 - 5$
$S_B = (2-0.5 \times 0.35)p_1 + 3p_2 + p_3 - 10 = 1.825\, p_1 + 3p_2 + p_3 - 10$
$S_C = 2p_1 + 2p_2 + p_3 - 10 \quad = 2p_1 + 2p_2 + p_3 - 10$

Sustituyendo los valores, se tiene:

$S_A = 11.60550459$ u.
$S_B = 14.12844037$ u.
$S_C = 15.87155963$ u.

3. Input-output de Leontief

Consideramos una economía formada por tres industrias interrelacionadas A, B, C. Sabemos que la matriz input-output es

$$M = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}$$

y que el vector de demanda externa es d=(210, 111, 37) unidades.

a) Interpreta el significado económico de la suma de los elementos de la tercera columna de M.
b) Interpreta el significado económico del elemento a_{12}=0.1 de la matriz M.
c) Calcula los niveles de producción que permiten el equilibrio del modelo.

SOLUCIÓN:

a) La suma de la columna 3 es la cantidad de inputs necesarios para producir una unidad de la industria C.

b) El elemento $a_{12}=0.1$ representa las unidades de la industria A consumidas para producir una unidad de la industria B.

c) Llamamos
x = nivel de producción de la industria A,
y = nivel de producción de la industria B,
z = nivel de producción de la industria C.

En forma matricial, el sistema que resulta es

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 210 \\ 111 \\ 37 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

que podemos expresar como

$$\left.\begin{aligned} 0.8x-0.1y&=210 \\ -0.2x+0.8y-0.2z&=111 \\ -0.3y+0.7z&=37 \end{aligned}\right\}$$

la solución es $x = \dfrac{56755}{193}, \quad y = \dfrac{48740}{193}, \quad z = \dfrac{31090}{193},$

por lo tanto, la industria A debe producir 56755/193 unidades, la industria B producirá 48740/193 unidades y la industria C debe producir 31090/193 unidades.

4. Sistemas no factibles

Consideramos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=3\\ 2x+y+z&=4\\ x+2y+2z&=0 \end{aligned}\right\}$$

a) Compruebe que el sistema no tiene solución.

b) ¿Es posible modificar un coeficiente (a lo sumo en 0.01) de manera que tenga solución?

SOLUCIÓN:

a) Resolvemos el sistema por el método de Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto se trata de un sistema incompatible.

b) Como

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

comprobamos que

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1 \neq 0,$$

y comprobamos que

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + (1+0.01)\,y + z &= 4 \\ x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

tiene solución:

$$x = 6, \quad y = -500, \quad z = 497.$$

B. Espacios vectoriales

5. Sistemas generadores

(Canós Darós, M. J.; Ivorra Castillo, C., Liern Carrión, V (2011): *Matemáticas para la Economía y la Empresa*, Ed. Tirant lo Blanch, Valencia (España), pp. 30,31).

Una empresa utiliza tres inputs A , B y C en cantidades x , y , z para producir dos artículos P y Q . Las cantidades requeridas para la producción de una unidad de cada producto viene dada por la tabla siguiente:

Artículos	Inputs		
	A	B	C
P	2	1	3
Q	1	2	2

La empresa estudia alterar su producción sin que se produzcan excedentes.

a) Pruebe que el conjunto de incrementos factibles $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ se puede expresar como un subespacio vectorial de R^3 generado por dos vectores.

b) Determine si el vector (5, 7, 9) es un incremento factible de los inputs de la empresa.

SOLUCIÓN:

a) Llamaremos r = cantidad producida de P.

s = cantidad producida de Q.

Para incrementar la producción P en Δr unidades se necesita un incremento de los inputs de $(\Delta x,\Delta y,\Delta z)=(2\Delta r,\Delta r,3\Delta r)$.

Para incrementar la producción Q en Δs unidades se necesita un incremento de los inputs de

$(\Delta x,\Delta y,\Delta z)=(\Delta s,2\Delta s,2\Delta s)$.

Por lo tanto, un incremento arbitrario de la producción $(\Delta r,\Delta s)$ se corresponde con un incremento de los inputs consumidos de

$$(\Delta x,\Delta y,\Delta z)=(2\Delta r,\Delta r,3\Delta r)+(\Delta s,2\Delta s,2\Delta s)=\Delta r(2,1,3)+\Delta s(1,2,2).$$

Así, el conjunto de incrementos factibles es

$$W=\left\{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)=\Delta r(2,1,3)+\Delta s(1,2,2),\ \ \Delta r,\Delta s\in R\right\}=\left\langle(2,1,3),\ (1,2,2)\right\rangle.$$

b) Debemos preguntarnos si el vector (5, 7, 9) se puede expresar como combinación lineal de (2,1,3) y (1,2,2), $(5,7,9)=\lambda(2,1,3)+\mu(1,2,2)$, es decir,

$$\left.\begin{aligned}2\lambda+\mu&=5\\ \lambda+2\mu&=7\\ 3\lambda+2\mu&=9\end{aligned}\right\}$$

Por lo tanto $\lambda=1,\quad \mu=3,$

es decir que (5,7,9) es el incremento de inputs necesario para incrementar la producción de P en 1 unidad y la de Q en 3 u.

C. Transformaciones basadas en aplicaciones lineales y afines

6. Normalizaciones aparentemente lineales

Para seleccionar dos jefes de sección, una empresa ha valorado tres competencias de 10 empleados. Se han establecido las siguientes puntuaciones entre 0 y 10 (indicando 0 lo más bajo y 10 lo más alto):

Empleado	C1	C2	C3
P1	7	4	2
P2	5	9	4
P3	8	3	9
P4	10	5	9
P5	6	2	9
P6	6	8	7
P7	4	9	4
P8	7	7	5
P9	7	9	6
P10	8	2	6

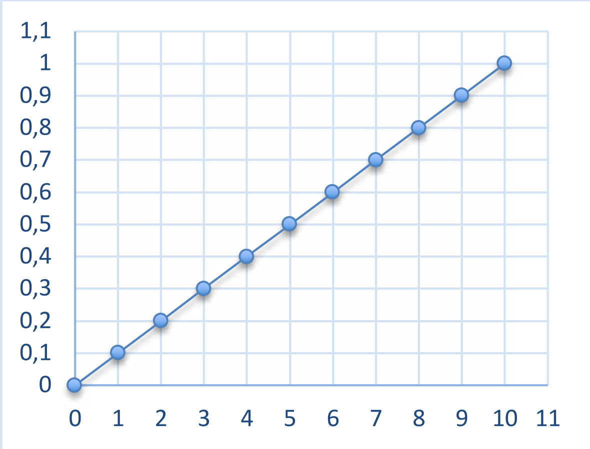
Por experiencia, los encargados de recursos humanos saben que un candidato ideal sería aquél que tuviese puntuaciones altas en C1, medias en C2 y bajas en C3. De hecho, han consensuado que las preferencias de la empresa pueden expresarse mediante los gráficos que aparecen a continuación. Teniendo en cuenta esto,

a) Normalice los datos de acuerdo con las preferencias de la empresa.

b) Si la competencia C2 tiene la misma importancia que la otras dos juntas, valore todos los candidatos e indique cuáles serían elegidos para ocupar los cargos de jefe de sección.

EJEMPLOS RESUELTOS

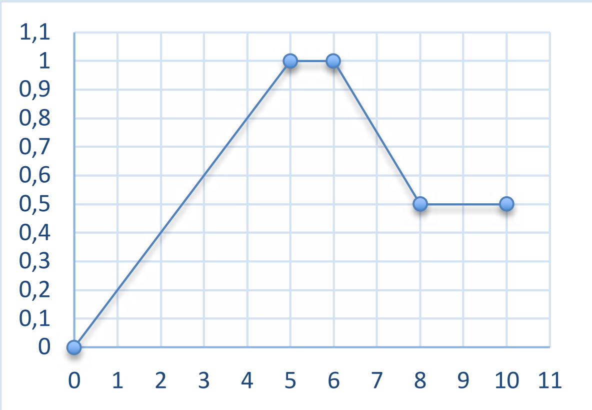
Competencia 1



$$f(x)=0.1x$$

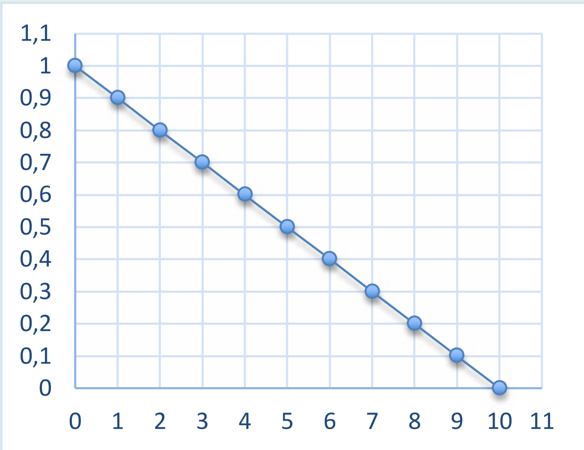
$$x\in[0,10]$$

Competencia 2



$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{5}, & 0\le x<5\\ 1, & 5\le x<6\\ \dfrac{10-x}{4}, & 6\le x<8\\ \dfrac{1}{2}, & 8\le x\le 10\end{cases}$$

Competencia 3



$$f(x)=1-0.1x$$

$$x\in[0,10]$$

SOLUCIÓN:

a) Siguiendo el procedimiento descrito y las funciones de preferencia dadas por la empresa, las normalizaciones serían las siguientes:

	Valoraciones originales			Valoraciones Normalizadas		
Candidatos	C1	C2	C3	N1	N2	N3
P1	7	4	1	0,7	0,8	0,9
P2	5	9	4	0,5	0,5	0,6
P3	8	3	9	0,8	0,6	0,1
P4	10	5	9	1	1	0,1
P5	6	2	9	0,6	0,4	0,1
P6	6	8	7	0,6	0,5	0,3
P7	4	9	4	0,4	0,5	0,6
P8	7	7	5	0,7	0,75	0,5
P9	7	9	6	0,7	0,5	0,4
P10	8	2	6	0,8	0,4	0,4

b) Como la competencia C2 tiene la misma importancia que las otras dos juntas, los pesos deben verificar $w_2=w_1+w_3$, o dicho de otro modo

$$w_1=0.25,\ \ w_2=0.5,\ \ w_3=0.25.$$

Por lo tanto, se trata de calcular

$$w_1\mathrm{N1}+ w_2\mathrm{N2}+w_3\mathrm{N3}$$

para cada candidato.

EJEMPLOS RESUELTOS

	Valoraciones Normalizadas			Normalizadas y pesadas			SUMA
Candidatos	N1	N2	N3	R1	R2	R3	
P1	0,7	0,8	0,9	0,175	0,4	0,225	0,8
P2	0,5	0,5	0,6	0,125	0,25	0,15	0,525
P3	0,8	0,6	0,1	0,2	0,3	0,025	0,525
P4	1	1	0,1	0,25	0,5	0,025	0,775
P5	0,6	0,4	0,1	0,15	0,2	0,025	0,375
P6	0,6	0,5	0,3	0,15	0,25	0,075	0,475
P7	0,4	0,5	0,6	0,1	0,25	0,15	0,5
P8	0,7	0,75	0,5	0,175	0,375	0,125	0,675
P9	0,7	0,5	0,4	0,175	0,25	0,1	0,525
P10	0,8	0,4	0,4	0,2	0,2	0,1	0,5
Pesos	0,25	0,5	0,25				

Teniendo en cuenta el valor de la suma, la ordenación de los candidatos será

P1	0,8
P4	0,775
P8	0,675
P2	0,525
P3	0,525
P9	0,525
P7	0,5
P10	0,5
P6	0,475
P5	0,375

Por lo tanto, elegiríamos P1 y P4 como jefes de sección.

EJEMPLOS RESUELTOS

D. ANEXO: Sistemas de inecuaciones lineales

7. Viabilidad de sistemas de inecuaciones no factibles

Dado el sistema de inecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\geq 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &\leq 2 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 &\geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}\right\}$$

a) Compruebe si el sistema de ecuaciones lineales asociado tiene solución y, es su caso, si se verifica la no negatividad de las variables.
b) Compruebe que el sistema de inecuaciones no tiene solución.
c) Sabiendo que el modelo de Programación Lineal asociado

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha_2 + \alpha_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 - x_3 - h_1 + \alpha_1 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 + h_2 = 2 \\ & x_1 - 2x_2 - 5x_3 - h_3 + \alpha_2 = 4 \\ & x_i, h_j, \alpha_k \geq 0 \end{aligned}$$

tiene soluciones $F^* = 5,\ \alpha^*_1 = 2,\ \alpha^*_3 = 3,\ x^*_1 = 1,\ x^*_2 = x^*_3 = 2,\ h^*_1 = h^*_2 = h^*_3 = 0,$
con multiplicadores de Lagrange

$$w_1 = 1 \text{ (primera restricción)},\ \pi_1 = -1 \text{ (segunda restricción)},\ \ w_2 = 1 \text{ (tercera restricción)}$$

Proporcione una modificación paramétrica del sistema de inecuaciones inicial que tenga solución.

SOLUCIÓN:

a) Resolvemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 &= 4 \end{aligned}\right\} \qquad x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{15}{7}, \quad x_3 = -\frac{13}{7}.$$

y comprobamos que no verifica la no negatividad de las variables.

b) Una opción para analizar las soluciones del sistema de inecuaciones, es resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - h_1 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + h_2 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 - h_3 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, h_i &\geq 0 \end{aligned}\right\}$$

en el que añadimos variables de holgura para poder expresarlo con igualdades.

Si tomamos x_3, h_1, h_2 como parámetros, la solución es

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\alpha-\beta-1\\
x_2 &= 2\alpha+\beta+\gamma+4\\
x_3 &= \gamma \qquad\qquad\qquad \alpha,\beta,\gamma\in \mathrm{R}\\
h_1 &= \alpha\\
h_2 &= \beta\\
h_3 &= -5\alpha-3\beta-7\gamma-13
\end{aligned}$$

Está claro que si tomamos $\alpha,\beta,\gamma\geq 0$, se tiene que que $h_3<0$, por lo tanto el sistema de inecuaciones no tiene solución.

c) Como conocemos los multiplicadores de Lagrange y el valor óptimo F*=5, sabemos que

$$x_1+x_2-x_3+\frac{F^*}{w_1^*}\lambda\geq 3$$

$$2x_1+x_2-x_3-\frac{F^*}{\pi_1^*}\lambda\leq 2$$

$$x_1-2x_2-5x_3+\frac{F^*}{w_2^*}\lambda\geq 1$$

sabemos que tiene solución.

Nota: Si resolvemos el programa lineal siguiente:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } \lambda \\
&\text{sujeto a} \\
&\quad x_1 + x_2 - x_3 \geq 3 - 5\lambda \\
&\quad 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 2 + 5\lambda \\
&\quad x_1 - 2x_2 - 5x_3 \geq 1 - 5\lambda \\
&\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0, \\
&\quad 0 \leq \lambda \leq 1
\end{aligned}$$

la solución óptima es $\lambda^* = 0.4$

Por lo tanto, el sistema de inecuaciones es

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\
&2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \\
&x_1 - 2x_2 - 5x_3 \geq -1 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0,
\end{aligned}$$

en el que (2,0,0) es solución del sistema modificado.