

NÚMEROS NATURALES Y ENTEROS.

RECORDAD:

Los números naturales son $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

Los números enteros son $Z = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots\}$

Representación gráfica de los números enteros:



Para efectuar una operación hemos de tener en cuenta la prioridad o jerarquía de las operaciones, que es la siguiente:

1. Se calculan los paréntesis, operando del interior al exterior.
2. Se efectúan las potencias y radicales.
3. Se efectúan las multiplicaciones y divisiones.
4. Se efectúan las sumas y restas.

En igualdad de prioridad, se trabaja de izquierda a derecha.

Ejercicio de autoaprendizaje:

a) Calcular $(-2) \cdot (3 - 4 \cdot (3 + 2 \cdot (-4))) =$

Operamos dentro del paréntesis más interior. 1º el producto

Operamos dentro del paréntesis más interior.. La suma

Operamos dentro del paréntesis 1º el producto

$$(-2) \cdot (3 - 4 \cdot (3 + 2 \cdot (-4))) = (-2) \cdot (3 - 4 \cdot (3 + (-8))) = (-2) \cdot (3 - 4 \cdot (-5)) = (-2) \cdot (3 + 20) =$$

$$= (-2) \cdot (23) = -46$$

Con ayuda de la calculadora:

2	±	×	(3	-	4	×	(3	+	2	×	4	±))	=
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Operamos dentro del paréntesis. La suma

El resultado es: -46

Ejercicio propuesto

1. Calcular manualmente y con ayuda de calculadora:

a) $-3 + (-5) - (-4) =$

h) $3 - 3(4 - (-3)) =$

b) $15 - (-9 + 3) =$

i) $(3 - 2)(-5 + 3 \times 4) =$

c) $12 - 9 \times 3 =$

j) $6 - (4 + 18 : 2) =$

d) $-2 + 6 : (-3) =$

k) $5 - 3(2 + 3 \times 5 \times (-4) + 2) =$

e) $3 \times (-2) + 4 \times 5 =$

l) $(3 + 5 \times 4 + 8 : (-2))(4 \times 3 - 5) =$

f) $12 - 3 \times (-2) - 7 =$

m) $-5 + 3 \times 4 - 2(12 - 4 \times 3) =$

g) $16 + 4 : (-2) \times (-3) =$

$$n) (7 - 8)(3 - 5 \times (-2)) - 3 =$$

$$o) (8 - 4 \times 3 - 4)(7 + 4 \times 3) =$$

$$p) (3^2 + 4 \times 2) - 5(4^3 + 2 \times 7) =$$

$$q) (4 - 3^2 \times 5)(7 - 12 : 3) =$$

$$r) (3 - 4 \times 2^3) + 3(4^2 - 3) =$$

$$s) 4^2 + 12 \times 3 : 2 - 5 \times (-3) =$$

$$t) (3^2 - 4(5 - 12 \times 4 - 6) - 2)(3 - 2^3) =$$

$$u) 2 - 3^3 - 5(4 - 5(2 - 3 \times (-4)) + 5^2) =$$

RECORDAD:

Un número a es múltiplo de b si al dividir a entre b la división es exacta, es decir, existe un número n tal que $a = b \cdot n$. En este caso diremos que a es divisible por b .

Un número es primo si sólo es divisible por el y por la unidad.

Criterios de divisibilidad.

Un número es divisible por 2 si la cifra de las unidades es divisible por 2

Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es divisible por 3

Un número es divisible por 5 si la cifra de las unidades es divisible por 5.

Un número es divisible por 11 si sumadas las cifras que ocupen el lugar impar contadas a partir de las unidades y restado este número con la suma de las cifras que ocupan el lugar par a partir de las unidades, el número resultante es divisible por 11.

El máximo común divisor de dos números a y b $\text{mcd}(a, b)$ es el mayor de todos los divisores que son comunes a los dos números a, b .

El mínimo común múltiplo de dos números a y b $\text{mcm}(a, b)$ es el menor de todos los múltiplos que son comunes a los dos números a, b .

Ejercicios de autoaprendizaje:

a) Efectuar la descomposición factorial de 1320.

Para hacer la descomposición factorial de un número como producto de números primos tendremos en cuenta los criterios de divisibilidad. Efectuaremos divisiones sucesivas.

$$\begin{array}{r|l} 1320 & 2 \\ 660 & 2 \\ 330 & 2 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{Entonces, } 1320 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$

b) Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de 36 y 120.

Para calcular el máximo común divisor de dos números, factorizamos los dos números. El mcd es el producto de los números primos comunes elevados al menor exponente.

Factorizamos 36 y 120:

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{Entonces } 36 = 2^2 \cdot 3^2, \quad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Por tanto, el $\text{mcd}(36, 120) = 2^2 \cdot 3 = 12$

Para calcular el mínimo común múltiplo de dos números, factorizamos los dos números y el mcm es el producto de los números primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

Por tanto, $\text{mcm}(36, 120) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$

También podemos utilizar la fórmula
$$\text{mcm}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\text{mcd}(a, b)}$$

Por tanto $\text{mcm}(36, 120) = \frac{36 \cdot 120}{\text{mcd}(36, 120)} = \frac{36 \cdot 120}{12} = 360$

Ejercicios propuestos

2. Efectuar la descomposición factorial de los siguientes números:

- | | | | |
|----------|----------|---------|---------|
| a) 3780= | d) 1260= | g) 503= | j) 468= |
| b) 52= | e) 960= | h) 312= | k) 270= |
| c) 53= | f) 500= | i) 211= | l) 198= |

3. Calcular todos los divisores de los siguientes números:

- | | | | |
|-------|--------|--------|--------|
| a) 12 | c) 220 | e) 990 | g) 23 |
| b) 36 | d) 800 | f) 770 | h) 198 |

4. Calcular el máximo común divisor de:

- | | |
|------------------------------|----------------------------------|
| a) $\text{mcd}(360, 1890)=$ | f) $\text{mcd}(1750, 1000)=$ |
| b) $\text{mcd}(3960, 5808)=$ | g) $\text{mcd}(800, 3500)=$ |
| c) $\text{mcd}(100, 120)=$ | h) $\text{mcd}(270, 2268)=$ |
| d) $\text{mcd}(96, 64)=$ | i) $\text{mcd}(990, 1260, 960)=$ |
| e) $\text{mcd}(12, 18, 24)=$ | j) $\text{mcd}(90, 12, 60)=$ |

5. Calcular el mínimo común múltiplo de:

- | | |
|------------------------------|----------------------------------|
| a) $\text{mcm}(360, 1890)=$ | f) $\text{mcm}(1750, 1000)=$ |
| b) $\text{mcm}(3960, 5808)=$ | g) $\text{mcm}(800, 3500)=$ |
| c) $\text{mcm}(100, 120)=$ | h) $\text{mcm}(270, 2268)=$ |
| d) $\text{mcm}(96, 64)=$ | i) $\text{mcm}(990, 1260, 960)=$ |
| e) $\text{mcm}(12, 18, 24)=$ | j) $\text{mcm}(90, 12, 60)=$ |

Problemas:

1. Para pagar dos facturas, una de 29€ y la otra de 47€, damos dos billetes de 50€. ¿Cuánto dinero me devolverán?.
2. Un submarinista se encuentra en la superficie del mar. Baja primero 17 m, después 9 m más y a continuación sube 5. ¿A qué profundidad se encuentra finalmente?
3. Hemos comprado un ordenador por 1134€. Hemos pagado la mitad al contado. Si pagamos el resto en 9 mensualidades iguales. ¿Cuánto dinero cuesta cada una de estas mensualidades?
4. ¿Qué diferencia de años hay desde Platón que nació 420 años antes de J.C. y el año 2001?

5. Por una carretera pasan 11 coches cada minuto. ¿Cuántos coches pasan cada hora? ¿y cuántos cada día?.
6. Durante una tormenta observamos un relámpago y, 7 segundos después, nos llega el ruido del trueno. Si la velocidad del sonido es de 340 metros por segundo, ¿a qué distancia desde nosotros se ha producido el relámpago?
7. En una división el divisor es 25, el cociente es 16 y el resto es 6. ¿Cuál es el dividendo?
8. En una urbanización viven 13500 personas. Hay un pino por cada 180 personas y 4 algarrobos por cada 60 personas.
 - a) ¿Cuántos pinos hay en la urbanización?
 - b) ¿Y algarrobos?
 - c) ¿Cuántos árboles se ha de plantar para que haya un árbol por cada 9 habitantes?
9. Al poner en funcionamiento un congelador, la temperatura disminuye 2 grados cada 8 minutos. En el momento de la puesta en marcha, el interior del congelador está a 14°C
 - a) ¿Cuánto tiempo tardará en llegar -24°C ?
 - b) ¿Qué temperatura tendrá al cabo de dos horas de funcionamiento?.
10. En un concurso de televisión ganamos 60€ por cada respuesta adivinada y perdemos 4€ por cada respuesta fallada. ¿Qué cantidad ha ganado un concursante que ha adivinado 12 preguntas y ha fallado 5?.
11. Tenemos un tonel con 150 litros de vino y otro con 275 litros de aceite. Se quiere poner el vino y el aceite en garrafas de la misma capacidad, la más grande posible y sin mezclar los líquidos.
 - a) ¿Cuántos litros debe tener cada garrafa para que no quede ni vino ni aceite en los toneles?
 - b) ¿Cuántas garrafas hacen falta?.
12. Dos barcos han salido juntos del puerto de Valencia, hoy.
 - a) ¿Cuántos días tardarán en volver a salir juntos si el primero sale cada 28 días y el segundo cada 42 días?
 - b) ¿Cuántos viajes habrá hecho cada barco?
13. Una plaza tiene 45 m de largo por 25 de ancho. Si queremos alicatarla con azulejos cuadrados todos iguales y tan grandes como se pueda.
 - a) ¿Cuál será la longitud del lado de cada azulejo?
 - b) ¿Cuántos azulejos harán falta?
14. Un letrero luminoso se enciende cada 12 segundos, otro cada 20 y un tercero cada 35. Si a las 6 de la tarde se han encendido los tres a la vez. ¿Cuántos segundos pasarán para volver a coincidir?