# Tema 2.- Va de funciones

## 2.1.- Definición de funciones y funciones sencillas.

### Forma de dar una función.

Dar una función es establecer una forma de hacer corresponder un valor y sólo uno a cada valor de la variable.

Se expresa

$$y = f(x)$$

donde $x$ es la *variable independiente*, $y$ es la *variable dependiente* y $f$ es la función.

En las que estudiaremos, tanto la variable independiente como la dependiente varían en un subconjunto de los números reales. El campo de variabilidad de la $x$ se llama *dominio* o campo de definición de la función $f$.

Toda función se puede representar por un conjunto de puntos en el plano que se llama *gráfica* de la función. Esta formado por todos los puntos de coordenadas $(x, f(x))$.

Por tanto, una forma de dar una función, la primera, es mediante la gráfica. Veamos ejemplos con una gráfica (paseo.pdf)

**Ejemplos** Describir el estado de los ahorros, la temperatura de un enfermo, una etapa de la Vuelta, una salida con la peña.

**Ejemplos más serios** Concentración de un reactivo con el tiempo, presión atmosférica con la altura, altura de un liquido en un deposito con forma irregular.

La gran ventaja de una gráfica es que hay ciertas propiedades de la función que son evidentes:

1.- Puntos en los que está definida y si es de verdad una función (nofuncion.pdf y paseo.pdf), las posibles discontinuidades.

2.- Tramos en los que la función es creciente y tramos en los que es decreciente, puntos en los que se alcanza un máximo o un mínimo relativo, tramos en los que la función es creciente y tramos en los que es decreciente, puntos de inflexión, etc.

3.- También está claro los ceros de la función (donde se hace 0). Es inmediato resolver ecuaciones (puntos en los que la función toma un valor dado ($f(x) = a$) e inecuaciones ($f(x) \leq a$).

Por desgracia, la mayor parte de veces no disponemos de la gráfica, sino que la función viene dada por una expresión analítica.

Por ejemplo, cuando proviene de resolución de problemas, leyes físicas, problemas geométricos (áreas, volúmenes, etc.) Vamos a estudiar las posibles expresiones analíticas en orden creciente de complejidad.

Antes de entrar en funciones con expresiones sencillas, un par de avisos para navegantes.

1.- No tiene porque ser la misma expresión analítica en toda la definición. Por ejemplo, la función valor absoluto se define

$$\mid x \mid = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Incluso más difícil es la función parte entera. Trata de darle una expresión analítica.

También la misma función puede tener dos expresiones analíticas. Por ejemplo

$$f(x) = x + 2$$

y

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

son la misma función. Pruébalo.

Funciones lineales.

Vamos a ver la más simple de las expresiones analíticas, la función lineal

$$y = ax + b.$$

**Ejemplo** 1.- La función lineal expresa la relación entre magnitudes proporcionales (al mismo aumento de la variable corresponde siempre el mismo aumento de la función). Por ejemplo las relaciones peso/precio, peso/volumen, etc.

2.- Hay bastantes leyes físicas que son una aproximación lineal: ley de Hooke, ley de Ohm, movimiento rectilineo uniforme, el consumo de una bombilla, etc.

La gráfica de la función lineal es una recta en el plano (no horizontal). Veamos ejemplos de rectas $y = ax + b$ variando su pendiente $a$: primero que pasan por el origen (yx.pdf, 2orig.pdf, 3orig.pdf) y luego más generales (de pendiente positiva (pendientepos.pdf), negativa (2pen.pdf y 3pen.pdf)

Como está claro por la gráfica, la función lineal $ax + b$ tiene un único cero en $x = -b/a$ Igualmente para cada $y_0$, existe un único $x$ con $ax + b = y_0$ (Calcúlalo).

Miremos en la gráfica y calculemos analíticamente cual es el conjunto de puntos que cumplen $ax + b \leq 0$ (Mira como depende del signo de $a$). Y lo mismo con $ax + b \leq y_0$.

## Funciones cuadráticas.

La siguiente en grado de dificultad es la función cuadrática

$$y = ax^2 + bx + c.$$

**Ejemplo** Corresponde a algunas leyes físicas: movimiento uniformemente acelerado, caída libre, frenado, etc. También aparece en problemas geométricos relacionados con áreas.

Su gráfica es una parábola en el plano con eje vertical. Vamos a entretenernos viendo varias parábolas.

Primero una colección con coeficiente director unitario ($a = 1$). son parab10.pdf, parab12.pdf y parab13.pdf. Todas reducen a la forma $(x - x_0)^2 + y_0$ teniendo el vértice en el punto $(x_0, y_0)$.

Luego una visión de lo que pasa cuando cambiamos el coeficiente director parab20.pdf, parabmed.pdf y parabneg.pdf.

Por las gráficas vistas, esta claro que una parábola tiene $0, 1$ o $2$ ceros. Vienen dados por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Igualmente para cada $y_0$, se pueden calcular los $x$ con $ax^2 + bx + c = y_0$ (Calcúlalo).

Miremos en la gráfica y calculemos analíticamente cual es el conjunto de puntos que cumplen $ax^2 + bx + c \leq 0$ (Mira como depende del signo de $a$). Lo mismo con $ax^2 + bx + c \leq y_0$.

## 2.2.- Funciones algo más complicadas.

Funciones polinómicas.

Su expresión genérica es de la forma

$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Se llama *polinomio* a la expresión $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ y usamos $P(x)$ para denotar un polinomio genérico. Los $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0$ se llaman *coeficientes.* El primero no nulo $a_n$ se llama coeficiente director y $n$ es el *grado.* El coeficiente $a_0$ es el *término independiente.*

Veamos algunas gráficas: cuadrat.pdf, cub.pdf, cuart.pdf, cuartbonica.pdf

1.- Operaciones.- Las suma de polinomios se realiza término a término. El producto de polinomios se define teniendo en cuenta que $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$. En general no existe la división exacta.

2.- División con resto.- Como con números enteros hay una división con resto, siendo el resto un polinomio de grado inferior al del divisor.

3.- Raíces.- El resto al dividir por un factor lineal $x - a$ es siempre el valor del polinomio en $a$, con lo que $P(x)$ es divisible por $x - a$ si y sólo si $a$ es una raíz ($P(a) = 0.$)

Hay una regla simplificada para dividir polinomios por expresiones lineales $(x - a)$ conocida como la regla de Ruffini.

4.- Factorización. Los polinomios se pueden factorizar como los números naturales. Los primos en este caso son los factores lineales $(x + 5)$ y los cuadráticos con raíces imaginarias conjugadas $(x^2 + 1)$.

Función proporcionalidad inversa.

Es la función

$$y = 1/x.$$

Corresponde a una ley de proporcionalidad inversa (cuando uno crece, el otro decrece). En Física sale bastante (ley de Boyle-Mariotte, ley de Ohm). En Geometría la relación entre los lados de un rectángulo de área constante, entre los catetos de un triángulo rectángulo de área fija.

Definición.- No está definida en el 0, por lo que es una función

$$\mathbb{R} - \{0\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, \infty[ \to \mathbb{R}.$$

Su gráfica se puede ver en inversa.pdf

## Funciones algebraicas.

Son funciones del tipo
$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}$$
donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

1.- Definición. No está definida en los ceros de $Q(x)$, por lo que el primer trabajo es ver su campo de definición.

2.- Fracciones equivalentes. Las fracciones algebraicas se pueden manejar como los números fraccionarios (representan el mismo si numerador y denominador se multiplica por el mismo polinomio, se suman y multiplican como fracciones ordinarias, etc.)

Hay que tener más cuidado con las funciones que representan ya que al multiplicar numerador y denominador por el mismo polinomio hay más puntos donde la función no está definida. Como sólo son un número finito, casi nunca importa.

## Funciones con radicales.

Ya definimos los números correspondientes a las raíces. Con ellos se puede definir las funciones
$$y = \sqrt[n]{x}$$
(una para cada $n$).

1.- Definición. La primera cuestión es que tienen campo de definición distinto según que $n$ sea par o impar. Para $n$ impar es todo $\mathbb{R}$ y para $n$ par es sólo los números positivos ($[0, \infty[$).

2.- Sólo el positivo. También es conocido que para $n$ par y $x$ positivo, hay dos raíces (positiva, negativa). La función raíz se forma con la raíz positiva sólo.

Así $y = \pm\sqrt{x}$ no es función (xq?). La función es $y = \sqrt{x}$ (o sea, $\sqrt{x} = +\sqrt{x}$).

Veamos un par de gráficas: raizcuad.pdf y raizcub.pdf

## Funciones inversas.

Supongamos una función dada por una expresión
$$y = f(x).$$

Si podemos despejar la $x$ y obtenerla en función de la $y$, obtenemos la función inversa
$$x = f^{-1}(y).$$

**Ejemplo** Ver la función inversa de $y = x^3$ y la de $y = x^2$. Ver los campos de definición.

Daros cuenta que la gráfica de $f^{-1}$ es la simétrica de la gráfica de $f$ respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

## 2.3.- Seguimos complicando.

Funciones trigonométricas.

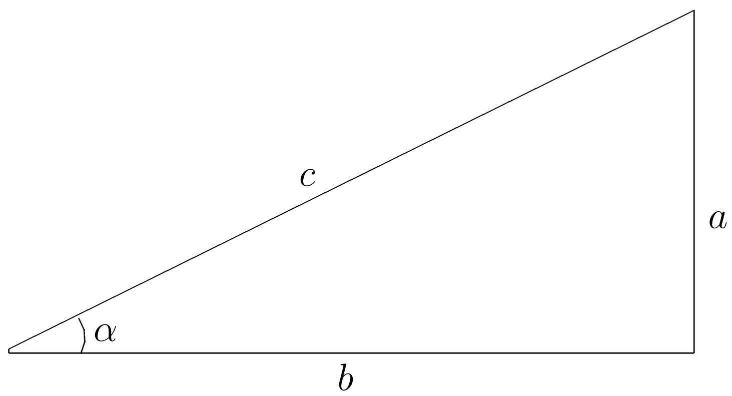
Las funciones trigonométricas están asociadas a ángulos (medidos en radianes, eso si). Tienen una interpretación geométrica que usaremos, pero su definición verdadera y su cálculo en realidad se hace de forma mucho más complicada (usando su expresión como la suma de una serie).

Radianes. Un *radian* es el arco que abarca la longitud del radio ($r$). Como la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, en una circunferencia hay $2\pi$ radianes. Como también hay 360º, y un número es proporcional al otro, tenemos

$$\text{n}^{\text{o}} \text{ de radianes} = \text{n}^{\text{o}} \text{ de grados} \cdot \frac{2\pi}{360}.$$

**Ejercicio** Halla los valores en radianes de los ángulos más usados.

'Definición' geométrica Se asocian a razones de triángulos rectángulos. Así, dado el triángulo




Podemos definir

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}; \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}.$$

El que esta definición es buena es consecuencia de que estas razones no varían con la longitud de la hipotenusa. Sólo dependen del ángulo.

Date cuenta que la tangente del ángulo es la pendiente de la hipotenusa.

Valores habituales.

| | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|
| sen | | | | | |
| cos | | | | | |
| tg | | | | | |

Igualdad fundamental. El teorema de Pitágoras equivale a que el seno y coseno cumplen

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Esta igualdad nos permite definir los tres en función de uno (hay que tener cuidado con el signo). Lo dejamos para ejercicios.

Funciones trigonométricas. Las funciones definidas geométricamente sólo tienen sentido para valores de la variable entre 0 y $2\pi$. Para definirlos en general se extienden por periodicidad

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha); \quad \operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{sen}(\alpha)$$

Con eso hemos definido funciones

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad \operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

**Ejercicio** Indica el campo de definición de la función tg.

Comportamiento con la suma.

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

Funciones del ángulo mitad.

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Funciones inversas (locales). Como se ve por la gráfica, las funciones trigonométricas no tienen inversas globales ya que, por ejemplo, hay muchos $x$ con $\operatorname{sen} x = 0$. Podemos definir una inversas locales escogiendo uno de los ángulos. Estas funciones se llaman 'arco' y son

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$
$$\operatorname{arc\,sen} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$\arctan : \mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Función exponencial.

Las distintas funciones exponenciales

$$y = a^x,$$

con $a$ un número real positivo ($a > 0$) se definen para que sean la extensión de las potencias que conocemos $a^{\frac{p}{q}}$ y por lo tanto, que cumplan las propiedades habituales de potencias. Su definición estricta y su cálculo se hace de forma mucho más complicada (usando su expresión como la suma de una serie).

**Ejemplos.-** La población de gérmenes de un cultivo tiene un crecimiento exponencial con el tiempo. La desintegración radioactiva, el enfriamiento de un cuerpo, el valor de la moneda siguen leyes exponenciales (de exponente negativo algunas)

Veamos gráficas

Propiedades básicas. Se cumple

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

y como consecuencia $a^0 = 1$

También se cumple

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

y como consecuencia $a^1 = a$.

Por último,

$$a^x = a^y \quad \text{sólo pasa cuando} \quad x = y.$$

También hay relaciones entre las exponenciales de distinta base y el mismo exponente. Así

$$a^x = b^x \quad \text{sólo pasa cuando} \quad a = b.$$

También

$$a^x b^x = (ab)^x.$$

Como consecuencia de ello $1^x = 1$ para todo $x$.

Función logarítmica.

Si $a \geq 0$ también podemos definir la función logarítmica de base $a$:

$$y = \log_a(x).$$

Es la función inversa de la exponencial $a^x$. Por tanto está definida sólo cuando $x > 0$ y cumple

$$a^{\log_a(x)} = x; \quad \log_a(a^x) = x.$$

Relación entre logaritmos de distintas bases. Sean $\log_a(x)$ y $\log_b$. Por definición

$$a^{\log_a(x)} = x = b^{\log_b(x)}$$

Como

$$a^{\log_a(b)} = b$$

substituimos y obtenemos

$$a^{\log_a(x)} (a^{\log_a(b)})^{\log_b(x)} = a^{\log_a(b)\log_b(x)}$$

Por lo que

$$\log_a(x) = \log_a(b)\log_b(x)$$

El número $e$.

Tanto la exponencial como la logarítmica más usada son las que tienen como base el número $e$ que se puede definir como el límite de una sucesión.

La exponencial de base $e$, se llama muchas veces la exponencial. También se denota exp.

Toda otra exponencial puede reducirse a la de base $e$, ya que

$$a^x = (e^{\ln(a)})^x = (e^x)^{\ln(a)} = (\exp x)^{\ln(a)}.$$

Los logaritmos de base $e$ se llaman naturales o neperianos. La función se denota ln.

Los otros logaritmos pueden reducirse a la de base $e$, ya que

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$