Leccion 17.
El corchete de Lie.

17.1.– El corchete (de Lie)

1. (**nota.**) *Si bien las derivadas parciales* $(\partial_{u^i,x})_{1\leq i\leq m}$ *conmutan entre si (teorema de Schwartz de la igualdad de las derivadas cruzadas), las derivaciones* D_ξ *definidas por campos vectoriales satisfacen esta regla de conmutacion cuando se trata de campos vectoriales coordenados de la misma carta, pero no en general. La diferencia es un nuevo campo vectorial llamado corchete de Lie.*

2. (**prop.**) *Sea* (U, u) *una carta de la variedad diferenciable* X, *sea* $x \in U \subset X$, $f \in C^\infty(U)$. *Entonces,*

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_x \frac{\partial f}{\partial u^j} - \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_x \frac{\partial f}{\partial u^i} = 0.$$

3. (**demo.**) Para todo $x \in U$ se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial u^i}(x) = \frac{\partial (f\circ u^{-1})}{\partial r^i}(u(x)) = \left(\frac{\partial (f\circ u^{-1})}{\partial r^i}\circ u\right)(x)$$

es decir

$$\frac{\partial f}{\partial u^i} = \left(\frac{\partial (f\circ u^{-1})}{\partial r^i}\circ u\right).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_x \frac{\partial f}{\partial u^j} &= \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_x \left(\frac{\partial (f\circ u)}{\partial r^j}\circ u\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{\partial (f\circ u^{-1})}{\partial r^j}\circ u\right)\right)(x) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial r^i}\left(\left(\frac{\partial (f\circ u^{-1})}{\partial r^j}\circ u\right)\circ u^{-1}\right)\right)(u(x)) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial r^i}\left(\frac{\partial (f\circ u^{-1})}{\partial r^j}\right)\right)(u(x)) = \left(\frac{\partial^2 (f\circ u^{-1})}{\partial r^i \partial r^j}\right)(u(x))
\end{aligned}$$

Por el teorema de Schwartz el ultimo termino no se altera si se intercambia el orden de las derivadas parciales, y la proposicion queda demostrada. *qed*

4. (**prop.**) *Sean* D_1, D_2 *derivaciones un algebra* A, *definimos una aplicacion lineal* $A \to A$, *por*

$$[D_1, D_2]a = D_1(D_2 a) - D_2(D_1 a),$$

para todo $a \in A$. *Entonces,* $[D_1, D_2]$ *es tambien una derivacion de* A.

5. (**demo.**) Sean $a, b \in A$, tenemos que

$$\begin{aligned}
[D_1, D_2](a.b) &= D_1((D_2a).b + a.(D_2b)) - D_2((D_1a).b + a.(D_1b)) \\
&= (D_1(D_2a)).b + D_2a.D_1b + D_1a.D_2b + a.(D_1(D_2b)) \\
&\quad -(D_2(D_1a)).b - D_1a.D_2b - D_2a.D_1b - a.(D_2(D_1b)) \\
&= ([D_1, D_2]a).b - a.([D_1, D_2]b)
\end{aligned}$$

6. (**def.**) Llamamos a $[D_1, D_2]$ el **conmutador** de las derivaciones $D_1,\ D_2$ de A.

7. (**prop.**) *El conmutador tiene las siguientes propiedades,*

   (a) Antisimetria, $[D_2, D_1] = -[D_1, D_2]$;

   (b) Identidad de Jacobi, $[D_1[D_2, D_3]] + [D_2, [D_3, D_1]] + [D_3, [D_1, D_2]] = 0$.

8. Consideremos los campos vectoriales $\xi,\ \eta \in \Gamma(TX)$ y sus respectivas derivaciones asociadas $D_\xi,\ D_\eta$ del algebra de funciones $C^\infty(X)$. Si consideramos el conmutador $[D_\xi, D_\eta]$, este es una derivacion de $C^\infty(X)$.

9. (**prop.**) *Si D es una derivacion del algebra asociativa $C^\infty(X)$, entonces existe un unico campo vectorial ζ sobre X tal que $D = D_\zeta$.*

10. La demostracion de esta proposicion es bastante tecnica y la omitiremos. El lector interesado puede consultar el libro de Matsushima, pp. 73.

11. (**def.**) Por la proposicion anterior, existe un campo vectorial ζ sobre X tal que $[D_\xi, D_\eta] = D_\zeta$. El campo vectorial ζ es llamado el **conmutador** o el **corchete (de Lie) de los campos vectorailes** ξ, η y lo denotamos por $\zeta = [\xi, \eta]$. Es decir, $[D_{\xi}, _{\eta}] = D_{[\xi,\eta]}$. Para toda $f \in C^\infty(X)$ tendremos

$$D_{[\xi,\eta]}f = D_\xi(D_\eta f) - D_\eta(D_\xi f).$$

12. (**prop.**) *El corchete de Lie de campos vectoriales satisface las siguientes propiedades:*

    (a) $[\xi + \eta, \zeta] = [\xi, \zeta] + [\eta, \zeta]$;

    (b) $[\xi, \eta + \zeta] = [\xi, \eta] + [\xi, \zeta]$;

    (c) $[\eta, \xi] = -[\xi, \eta]$;

    (d) $[f.\xi, g.\eta] = f.g.[\xi, \eta] + f.(D_\xi g).\eta - g.(D_\eta f).\xi$;

    (e) $[\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] + [\zeta, [\xi, \eta]] = 0$,

    para todos los $\xi, \eta, \zeta \in \Gamma(TX),\ f, g \in C^\infty(X)$.

13. (**prop.**) *Sea $c = (U; u)$ un sistema de coordenadas de X en U, $u = (u^1, \ldots, u^m)$. Sean ξ, η campos vectoriales sobre X. Entonces, en U se tiene*

$$[\xi, \eta] = \sum_{1 \le i,j \le m} \left(\xi^i . \frac{\partial \eta^j}{\partial u^i} - \eta^i . \frac{\partial \xi^j}{\partial u^i} \right) \frac{\partial}{\partial u^j}$$

14. (**demo.**)

$$
\begin{aligned}
[\xi,\eta] &= \left[\sum_{1\leq i\leq m}\xi^i\cdot\frac{\partial}{\partial u^i},\sum_{1\leq j\leq m}\eta^j\cdot\frac{\partial}{\partial u^j}\right]\\
&= \sum_{1\leq i,j\leq m}\left[\xi^i\cdot\frac{\partial}{\partial u^i},\eta^j\frac{\partial}{\partial u^j}\right]\\
&= \sum_{1\leq i,j\leq m}\left(\xi^i.\eta^j\cdot\left[\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}\right]+\xi^i\cdot\frac{\partial\eta^j}{\partial u^i}\cdot\frac{\partial}{\partial u^j}-\eta^j\cdot\frac{\partial\xi^i}{\partial u^j}\cdot\frac{\partial}{\partial u^i}\right).
\end{aligned}
$$

Dado que las derivadas parciales conmutan entre si (por el teorema de Schwartz de la igualdad las derivadas cruzadas) el primer termino es cero, y los terminos restantes conducen al resultado sobre $U \subset X$ tras renombrar los indices mudos. *qed*