# Lecciones 8 & 9.
# Aplicacion (lineal) tangente.

Estudia: 1–9,14–17,19–32.

## 7.1.– Introduccion. Detalles sobre la notacion.

1. En la presente leccion introducimos la *aplicacion (lineal) tangente*, la aplicacion lineal entre los espacios tangente a $X$ en $a$, y a $Y$ en $f(a)$, inducida por un morfismo entre variedades $f : X \to Y$.

2. La notacion y nomenclatura de esta aplicacion es muy variada y puede llevar en muchos casos a la confusion. Por tanto, voy a aclarar mi esquema de notacion junto con las otras notaciones mas comunes.

3. Denotaremos a la *aplicacion (lineal) tangente* por $T_a(f)$ en su *version local* (ie., al considerarla actuando sobre los espacios tangente a los puntos) o por $T(f)$ en su *version global* (ie., al considerarla actuando sobre los fibrados tangente).

4. <u>Otra notacion</u> habitual para $T_a(f)$ es $(f_*)_a$ o incluso $f_*$ cuando el punto de $X$ sobre el que se considera el espacio tangente esta suficientemente claro.

   (a) Por abuso de notacion es comun utilizar tambien el signo $f_*$ para el *push-forward* de *campos vectoriales*, aplicacion intimamente relacionada con la que ocupa a esta leccion -pero diferente a ella- y que veremos mas adelante. Por esta razon decidimos utiliar una notacion que diferencie entre ambas aplicaciones, y reservamos el simbolo $f_*$ para mas adelante.

   (b) La *aplicacion (lineal) tangente* es tambien llamada a veces *aplicacion diferencial*, y no es extrao ecspäter encontrarsela incluso bajo la notacion $(df)_a$, pues al calcular en coordenadas locales se reduce a calcular la derivada de la expresion de la aplicacion en las cartas dadas.

## 7.2.– Aplicacion tangente. Version local $T_a(X) \to T_{f(a)}(Y)$.

5. (**def(1).**) Sean $X, Y$ variedades diferenciables, $f : X \to Y$ un morfismo de variedades, y sea $a \in X$. Sea $v \in T_a(X)$ el vector tangente a $X$ en $a$ inducido por la curva $\alpha \in C(X, a)$, ie., $v = p(\alpha)$. La composicion $(f \circ \alpha)$ es una curva diferenciable en $C(Y, f(a))$ e induce un vector tangente $p(f \circ \alpha) \in T_{f(a)}Y$. Definimos la <u>**aplicacion lineal tangente a $f$ en $a$**</u> o simplemente <u>**aplicacion tangente a $f$ en $a$**</u> a la aplicacion $T_a(f) : T_a(X) \to T_{f(a)}(Y)$ tal que <u>$T_a(f)(v) := p(f \circ \alpha)$</u> para $v = p(\alpha)$.

6. (**prop.**) *Sea $f : X \to Y$ un morfismo entre variedades diferenciables, y sea $v \in T_a(X)$. Sea $\alpha \in C(X, a)$ tal que $v = p(\alpha)$. Entonces, la expresion del vector tangente $T_a(f)(v) \in T_{f(a)}(Y)$ no depende de la curva diferenciable representante $\alpha$ que induce el vector $v$.*

7. (**demo.**) Haciendo actuar $T_a(f)(v)$ sobre $g \in \mathcal{F}(f(a))$ se tiene

$$\begin{aligned} (T_a(f)(v))(g) &= p(f \circ \alpha)(g) = \frac{d(g \circ (f \circ \alpha))}{dt}(0) = \frac{d((g \circ f) \circ \alpha)}{dt}(0) \\ &= p(\alpha)(g \circ f) = v(g \circ f) \end{aligned}$$

y la expresion de $T_a(f)(v)$ no depende de la curva diferenciable representante $\alpha$ que induce el vector tangente $v = p(\alpha)$, pues la aplicacion compuesta $g \circ f$ es diferenciable y esta definida en unentorno de $a$, ie., $g \circ f \in \mathcal{F}(a)$.

8. Sean $(U; \xi)$, $(V; \eta)$ sistemas de coordenadas de $X$, $Y$ en $a \in X$, $f(a) \in Y$ respectivamente, adaptadas a $f$ en algun entorno de $a \in X$. Sea $v \in T_a(X)$. Entonces, dado que $T_a(f)(v) \in T_{f(a)}(Y)$ se tiene

$$\begin{aligned} T_a(f)\left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}\right)_a &= \sum_{1 \leq j \leq n} \left[T_a(f)\left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}\right)_a (\eta^j)\right]\left(\frac{\partial}{\partial \eta^j}\right)_{f(a)} \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{\partial(\eta^j \circ f)}{\partial \xi^i}\right)(a)\left(\frac{\partial}{\partial \psi^j}\right)_{f(a)} \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{\partial(\eta^j \circ f \circ \xi^{-1})}{\partial r^i}\right)(\xi(a))\left(\frac{\partial}{\partial \eta^j}\right)_{f(a)} \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{\partial F^j}{\partial r^i}\right)(\xi(a))\left(\frac{\partial}{\partial \eta^j}\right)_{f(a)} \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} D_i(F)^j(\xi(a))\left(\frac{\partial}{\partial \eta^j}\right)_{f(a)} \end{aligned}$$

Donde $D(F)(\xi(a))$ es la derivada de la expresion del morfismo $f : X \to Y$ en las cartas dadas.

9. Analogamente, y teniendo en cuenta que, dado un sistema de coordenadas $(U; \xi)$ de $X$ en $a$, la expresion local del vector tangente $u$ seria $u = \sum_{1 \leq i \leq} u^i(\partial/\xi^i)_a$, podriamos reescribir la derivacion anterior como

$$\begin{aligned} T_a(f)(u) &= T_a(f)\left(\sum_{1 \leq i \leq n} u^i \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}\right)_a\right) = \sum_i u^i T_a(f)\left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}\right)_a \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} u^i D_i(F)^j(\xi(a))\left(\frac{\partial}{\partial \eta^j}\right)_{f(a)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{1\leq j\leq n} \left( \sum_{1\leq i\leq n} u^i D_i(F)^j(\xi(a)) \right) \left( \frac{\partial}{\partial \eta^j} \right)_{f(a)} = \sum_{1\leq j\leq n} v^j \left( \frac{\partial}{\partial \eta^j} \right)_{f(a)}$$

donde, $v^j = \sum_{1\leq i\leq n} u^i D_i(F)^j(\xi(a))$. Esto nos da pie a definira *aplicacion lineal tangente de $f$ en $a$* en terminos de las aplicaciones $\theta_c : \mathbf{R}^n \to T_a(X)$, con $c$ carta de $X$ en $a$, y de vectores tangente definidos como clases de equivalencia de pares $(carta, \mathbf{R}^n - vector)$.

10. (**def(2).**) Sean $X, Y$ variedades diferenciables, $f : X \to Y$ un morfismo de variedades; sea $a \in X$ y sean $c = (U; \xi)$ una carta de $X$ en $a$, y $c' = (V; \eta)$ adaptada a $c$ por $f$, ie., $f(U) \subset V$. La expresion de $f$ en los sistemas de coordenadas dados es $F = \eta \circ f \circ \xi^{-1}$, con $F : \xi(U) \subset \mathbf{R}^n \to \eta(V) \subset \mathbf{R}^n$. La derivada de $F$ en $\xi(a)$ define una aplicacion lineal $D(F)(\xi(a)) : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ que induce la correspondiente **aplicacion lineal tangente a $f$ en $a$** o simplemente **aplicacion tangente a $f$ en $a$** entre los espacios tangente $T_a(f) : T_a(X) \to T_{f(a)}(Y)$ al componer apropiadamente con $\theta_{c'}$ y $\theta_c^{-1}$, ie., $T_a(f) := \theta_{c'} \circ D(F)(\xi(a)) \circ \theta_c^{-1}$.

11. Efectivamente, sea $c = (U; \xi)$ un sistema de coordenadas de $X$ en $a$, sea $u \in \mathbf{R}^n$, y sea $[c, v]$ la clase de equivalencia que determina un vector tangente a $X$ en $a$ bajo la relacion $(c, v) \sim (c', v')$ si $c' = (V; \eta)$ es sistema de coordenadas de $X$ en $a$ y se tiene que $c' = \eta \circ \xi^{-1}(c)$, $v' = D(\eta \circ \xi^{-1})(\xi(a))v$. Entonces $T_a(f)[c, v] = [c', v']$ con $c' = (f(U), F \circ \xi)$ y $v' = D(F)(\xi(a))v$.

12. **(prop.)** *La (***def(2)***) no depende de la eleccion de las cartas $c$, $c'$.*

13. **(prop.)** *Las definiciones (***def(1).***) y (***def(2).***) son equivalentes*

## 7.3.– Aplicacion tangente. Version global $T(X) \to T(Y)$.

14. (**prop.**) *Sean $X, Y$ variedades diferenciables, $f : X \to Y$ un morfismo de variedades y sea $a \in X$. $f$ induce una aplicacion diferenciable $T(f) : T(X) \to T(Y)$, llamada* **aplicacion lineal tangente a $f$** *que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{tikzcd} T(X) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\pi"'] & T(Y) \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

15. (**demo.**) Sea $v \in T_a(X)$. La conmutatividad del diagrama se desprende del hecho de que la expresion de $T_a(v)$ no depende del representante $\alpha \in C(X, a)$ que induce el vector $v$, ya que $T_a(v)(g \circ f) = v(g \circ f)$ (ver arriba). Escribiendo $T(f)(v) := T_a(f)(v)$, $\forall v \in T_a(X)$ es facil comprobar que $\pi(T(f)(v)) = f(a) = f(\pi(v))$, y el diagrama es conmutativo.

16. Tengase en cuenta que aunque en la notacion de $T(f) : T(X) \to T(Y)$ el punto $a$ puede ser omitido, no puede ser ignorado.

17. Sean $X, Y$ variedades diferenciables de dimension $m, n$ respectivamente. Sea $f : X \to Y$ morfismo de variedades. Sean $T(X), T(Y)$ los respectivos fibrados tangente a $X, Y$ de dimension $2m, 2n$ respectivamente. Sea $v \in T(X),\ \pi(v) = a$.
Sea $(\widetilde{U}; \zeta_X)$ un sistema de coordenadas de $T(X)$ en $v$ tal que $\zeta_X : \widetilde{U} \to \zeta_X(\widetilde{U}) \subset \xi(U) \times \mathbf{R}^m \subset \mathbf{R}^{2m}$, con $(U; \xi)$ un sistema de coordenadas de $X$ en $a$, tal que $\pi(\widetilde{U}) = U$. Analogamente, se $(\widetilde{V}; \zeta_Y)$ un sistema de coordenadas de $T(Y)$ en $T_a(f)(v)$ tal que $\zeta_Y : \widetilde{V} \to \zeta_Y(\widetilde{V}) \subset \eta(V) \times \mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}^{2n}$, con $(V; \eta)$ un sistema de coordenadas de $Y$ en $f(a)$, tal que $\pi(\widetilde{V}) = V$. Sean $U$ y $V$ adaptadas a $f$, ie., $f(U) \subset V$.
Del mismo modo que $f : X \to Y$ induce una aplicacion (su expresion) en coordenadas locales $F = \eta \circ f \circ \xi^{-1}$ tal que

$$\begin{array}{ccc} U \subset X & \xrightarrow{f} & V \subset Y \\ {\scriptstyle \xi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta} \\ \xi(U) \subset \mathbf{R}^m & \xrightarrow[F = \eta \circ f \circ \xi^{-1}]{} & \eta(V) \subset \mathbf{R}^n \end{array}$$

$T(f) : T(X) \to T(Y)$ induce una aplicacion (su expresion) en coordenadas locales $\zeta_Y \circ T(f) \circ \zeta_X^{-1}$ tal que

$$\zeta_Y \circ T(f) \circ \zeta_X^{-1} = (F, D(F)(\xi(a)))$$

es decir

$$\begin{array}{ccc} T(\widetilde{U}) \subset T(X) & \xrightarrow{T(f)} & T(\widetilde{V}) \subset T(Y) \\ {\scriptstyle \zeta_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \zeta_Y} \\ \xi(U) \times \mathbf{R}^m \subset \mathbf{R}^{2m} & \xrightarrow[(F, DF(\xi(a)))]{} & \eta(V) \times \mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}^{2n} \end{array}$$

$$\begin{aligned} &(\zeta_Y \circ T(f) \circ \zeta_X^{-1})(a^1, \ldots, a^m; b^1, \ldots, b^m) \\ &= (\zeta_Y \circ T(f)) \left( \sum_{1 \le i \le m} b^i \left( \frac{\partial}{\partial \xi^i} \right)_a \right) \\ &= \zeta_Y \left( \sum_{1 \le i \le m} \sum_{1 \le j \le n} b^i \left( \frac{\partial(\eta^j \circ f)}{\partial \xi^i} \right)(a) \left( \frac{\partial}{\partial \eta^j} \right)_{f(a)} \right) \\ &= \left( \eta \circ f(a); \sum_{1 \le j \le n} \sum_{1 \le i \le m} b^i \left( \frac{\partial(\eta^j \circ f)}{\partial \xi^i} \right)(a) e_j \right) \end{aligned}$$

$$= \left( \eta \circ f \circ \xi^{-1}(a^1, \ldots, a^m); \sum_{1 \le j \le n} \sum_{1 \le i \le m} b^i \left( \frac{\partial (r^j(\eta \circ f \circ \xi^{-1}))}{\partial r^i} \right) (\xi(a)) e_j \right)$$

$$= \left( \eta \circ f \circ \xi^{-1}(a^1, \ldots, a^m); \sum_{1 \le i \le m} b^i D_i (\eta \circ f \circ \xi^{-1})^j (\xi(a)) e_j \right)$$

$$= (F(a^1, \ldots, a^m); \sum_{1 \le i \le m} \sum_{1 \le i \le m} D_i F^j (\xi(a)) b^i)$$

$$= (F, DF(\xi(a))(a^1, \ldots, a^m; b^1, \ldots, b^m).$$

18. Recuperando la notacion local para la *aplicacion tangente* y permitiendo cierto abuso en la notacion, llamando $\zeta_{\mathbf{R}^m}(a) : T_a(X) \to \mathbf{R}^m$, isomorfismo reciproco de $\theta_c : \mathbf{R}^m \to T_a(X)$ (de tal modo que $\zeta_{\mathbf{R}^m}(a) = (pr_{n+1}, \ldots, pr_{2n}) \circ \zeta_X$ podriamos escribir

$$\begin{array}{ccc} T_a(U) & \xrightarrow{T_a(f)} & T_{f(a)}(V) \\ {\scriptstyle \zeta_{\mathbf{R}^m}(a)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \zeta_{\mathbf{R}^n}(f(a))} \\ \mathbf{R}^m & \xrightarrow[DF(\xi(a))]{} & \mathbf{R}^n \end{array}$$

$$DF(\xi(a)) \circ \zeta_{\mathbf{R}^m}(a) = \zeta_{\mathbf{R}^n}(f(a)) \circ T_a(f).$$

19. (**prop.**)

    (a) Sea $id_X : X \to X$, entonces $T_a(id_X) : T_a(X) \to T_a(X)$ tal que $T_a(id_X) = id_{T_a(X)}$.

    (b) Sea $f : X \to Y$, y $g : Y \to Z$ morfismos de variedades. Entonces se tiene que
    $$T_a(g \circ f) = T_{f(a)}(g) \circ T_a(f).$$

    (c) Sea $f : X \to Y$ morfismo entre variedades, la aplicacion $T_a(f) : T_a(X) \to T_{f(a)}(Y)$ es lineal.

20. (**demo.**)

    (a) Trivial.

    (b) Sea $a \in X,\ h \in \mathcal{F}((g \circ f)(a))$, y sea $v \in T_a(X)$. Entonces,
    $$\begin{aligned} (T_a(g \circ f)(v))(h) &= v(h \circ (g \circ f)) = v((h \circ g) \circ f) \\ &= (T_a(f)(v))(h \circ g) = ((T_{f(a)}(g))(T_a(f)(v)))(h) \\ &= ((T_{f(a)}(g) \circ T_a(f))(v))h. \end{aligned}$$

    (c) Si $\lambda, \mu \in \mathbf{R},\ u, v \in T_a(X)$ y $h \in \mathcal{F}(f(a))$, se tiene
    $$\begin{aligned} (T_a(\lambda u + \mu v))h &= (\lambda u + \mu v)(h \circ f) = \lambda u(h \circ f) + \mu v(h \circ f) \\ &= (\lambda T_a(f)(u))(h) + (\mu T_a(f)(v))(h) = (\lambda T_a(f)(u) + \mu T_a(f)(v))h. \end{aligned}$$

## Addendum.: Diferencial de una funcion

21. (**def.**) Sea $f : X \to \mathbf{R}^n$ un morfismo $C^r(X; \mathbf{R}^n)$. Llamamos **diferencial de $f$ en $a$**, y la denota por $d_a f$ o $df_a$ a la aplicacion lineal continua $\zeta_{\mathbf{R}^n}(a) \circ T_a(f)$ de $T_a(X)$ en $\mathbf{R}^n$.

22. Para todo $v \in T_a(X)$ denotaremos por $\langle d_a f, v\rangle = v(f)$ el valor de $d_a f$ en $v$.

23. $d_a f$ es un covector tangente a $X$ en $a$, ie., $d_a f \in T_a(X)^*$.

24. (**prop.**) Sean $f, g$ morfismos en $C^r(X; \mathbf{R})$ ie., funciones de $X$ en $\mathbf{R}$. Entonces, $d_a(fg) = d_a(f)g(a) + f(a)d_a(g)$.

25. (**demo.**) Sea $v \in T_a(X)$,

$$\begin{aligned} \langle\langle d_a(fg), v\rangle &= v(fg) = v(f)g(a) + f(a)v(g) \\ &= v(g(a)f) + v(f(a)g) = v(g(a)f + f(a)g) \\ &= \langle d_a(g(a)f + f(a)g), v\rangle\rangle = \langle g(a)d_a f + f(a)d_a g, v\rangle \end{aligned}$$

de donde se sigue que $d_a(fg) = g(a)d_a f + f(a)d_a g$.

26. Sea $X$ variedad diferenciable, $(U; \xi)$ un sistema de coordenadas de $X$ en $a$ y $v \in T_a(X)$, de tal modo que

$$v = \sum_{1\le i\le n} v^i \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}\right)_a = \sum_{1\le i\le n} d_a\xi^i(v) \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}\right)_a$$

Si $f \in C^\infty(X, \mathbf{R})$ tendremos,

$$\langle d_a f, v\rangle = v(f) = \sum_{1\le i\le n} d_a\xi^i(v) \left(\frac{\partial f}{\partial \xi^i}\right)(a)$$

y podemos identificar

$$d_a f = \sum_{1\le i\le n} \frac{\partial f}{\partial \xi^i}(a) d_a\xi^i.$$

## 7.4.– El homomorfismo dual

27. Para cada $a \in X$, $T_a(f) : T_a(X) \to T_{f(a)}(Y)$ es un homomorfismo, y podemos considerar el homomorfismo dual $T_a^*(f) : T^*_{f(a)}(Y) \to T_a^*(X)$.

28. (**def.**)Sea $\omega \in T^*_{f(a)}(Y)$ y $v \in T_a(X)$ se define $T_a^*(f)$ de modo que

$$\langle \omega, T_a(f)v\rangle = \langle T_a^*(f)\omega, v\rangle$$

29. (**prop.**) *Se tiene por tanto que, si* $h \in \mathcal{F}(f(a)) \subset C^\infty(Y)$, *entonces* $(T_a^*(f))(d_{f(a)}h) = d_a(h \circ f)$

30. (**demo.**) Sea $v \in T_a(X)$ por construccion de $T_a(f)$ se tiene

$$\langle d_{f(a)}g, T_a(f)v\rangle \quad = \quad (T_a(f)(v))(g) = v(g \circ f) = \langle d_a(g \circ f), v\rangle$$

Por otro lado por la definicion de $T_a^*(f)$ se tiene que

$$\langle d_{f(a)}g, T_a(f)v\rangle \quad = \quad \langle (T_a^*(f))(d_{f(a)}g), v\rangle$$

y la relacion se sigue.

31. En general, el homomorfismo dual $T_a^*(f)$ no es la restriccion de una aplicacion diferenciable $T^*(Y) \to T^*(X)$ salvo en el caso en que $f$ sea un difeomorfismo.
La razon es que el morfismo $f : X \to Y$ nos permite definir, infinitesimalmente, $T_a(f) : T_a(X) \to T_{f(a)}(Y)$, y utilizando ambas, un morfsimo $T(f) : T(X) \to T(Y)$. Aunque podemos utilizar la relacion de dualidad existente infinitesimalmente entre $T_a(X)$ y su dual para definir $T_a^*(f) : T_{f(a)}^*(Y) \to T_a^*(X)$, definir un hipotetico morfismo $T(f)^* : T(Y)^* \to T(X)^*$ requeriria disponer de un morfismo $f^{-1} : Y \to X$ que no esta garantizado en general (salvo que $f$ sea difeomorfismo).

## 7.5.– Ejemplos

32. **Aplicacion tangente de una curva diferenciable $\alpha$ en $t_0$**
Sea $I$ el intervalo $]a, b[\subset \mathbf{R}$ y $\alpha : I \to X$ una curva diferenciable en $X$. Queremos calcular la aplicacion tangente a $\alpha$ en $t_0 \in I$. Es decir

$$T_{t_0}(\alpha) : T_{t_0}(I) \to T_{\alpha(t_0)}(X)$$

Tomamos el atlas de $I$ compuesto por una sola carta $c = (I, id)$ tal que $id : I \to I \subset \mathbf{R} : r \mapsto r^1$, es decir, identificamos los puntos de $I$ con la coordenada canonica $r^1$ de $\mathbf{R}$.
Esta carta induce una base canonica de $T_{t_0}(I)$ con un unico vector: $(\partial/\partial r)_{t_0}$.
La aplicacion tangente $T_{t_0}(\alpha)$ envia $(\partial/\partial r)_{t_0} \in T_{t_0}(I)$ en $(T_{t_0}(\alpha))(\partial/\partial r)_{t_0} \in T_{\alpha(t_0)}X$.
Sea $f \in \mathcal{F}(\alpha(t_0))$, tendremos que

$$\left((T_{t_0}(\alpha))\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{t_0}\right) f = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{t_0} (f \circ \alpha) = \frac{\partial(f \circ \alpha)}{\partial r}(t_0)$$

Sea $(U; \xi)$ un sistema de coordenadas de $X$ en $\alpha(t_0)$. En este caso podremos escribir el vector tangente $(T_{t_0}(\alpha))(\partial/\partial r)_{t_0}$ como

$$\begin{aligned}(T_{t_0}(\alpha))\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{t_0} &= \sum_{i=1}^n \left((T_{t_0}(\alpha))\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{t_0}\right)(\xi^i)\left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}\right)_{\alpha(t_0)} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\xi^i \circ \alpha)}{\partial r}(t_0)\left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}\right)_{\alpha(t_0)}\end{aligned}$$

donde, como siempre, $\xi^i \circ \alpha = r^i \circ \xi \circ \alpha$ son las componentes de la curva en el sistema de coordenadas $(U, \xi)$ de $X$ en $\alpha(t_0)$.