CONSTRUCCIÓN TWIST DEL C-MAP

Oscar Macia (U. Valencia)

(en colaboración con A. Swann)

Zaragoza

Enero 31, 2017

1 Planning

Introducción y motivación. c-map

Interludio: Construcción geométrico–diferencial del
c-map
(versión pre-twist)

Twist y correspondencia hK/qK

2 Planning 1/3

Introducción y motivación. c-map

3 La lista de Berger

Teorema

Sea M una variedad Riemanniana n-dimensional simplemente conexa, orientada, que no es localmente un producto, ni simétrica. Entonces su grupo de holonomía pertenece a la siguiente lista:

M. Berger (1955)

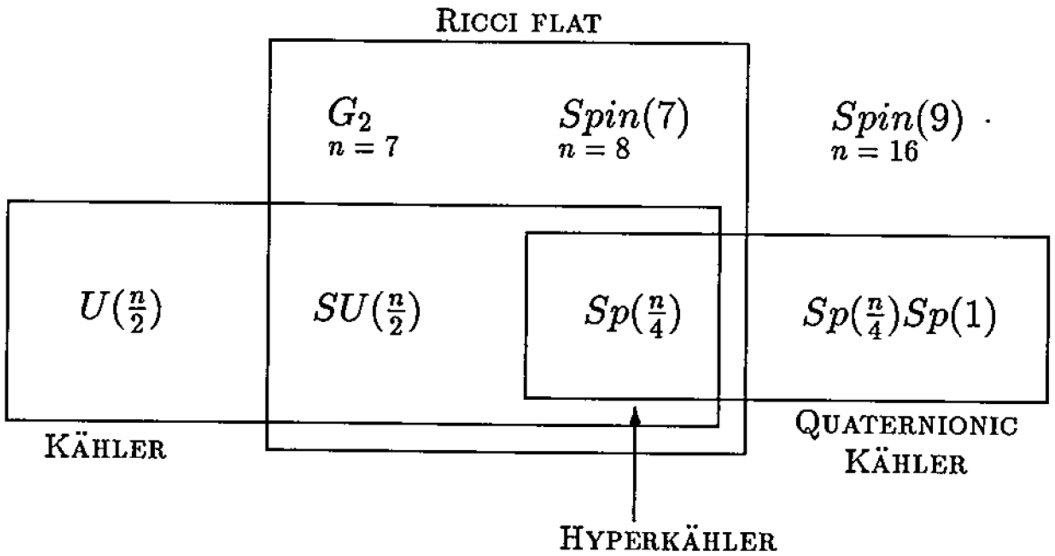

image credit: S.M. Salamon (1989)

4 Variedades Kählerianas (K)

$$(M^{2m}, g) + \{\mathrm{Hol} \subseteq \mathrm{U}(m)\} \Rightarrow \mathrm{K}$$

$$\mathrm{U}(m) = \mathrm{SO}(2m) \cap \mathrm{Sp}(m, \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$$

$$\mathrm{U}(m) \subset \mathrm{GL}(m, \mathbb{C}) \Rightarrow \exists I \in End(TM) : I^2 = -Id$$

$$\mathrm{d}\Lambda^{1,0} \subset \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{1,1}$$

$$\mathrm{U}(m) \subset \mathrm{SO}(2m) \Rightarrow g(IX, IY) = g(X, Y)$$

$$\mathrm{U}(m) \subset \mathrm{Sp}(m, \mathbb{R}) \Rightarrow \omega(X, Y) = g(IX, Y) \in \Lambda^2 T^* M$$

$$\mathrm{d}\omega = 0$$

5 Variedades quaterniónicas Kähler (QK)

$$(M^{4k}, g) + \{\mathrm{Hol} \subseteq \mathrm{Sp}(k)\mathrm{Sp}(1)\} \Rightarrow \mathrm{QK}$$

$$\exists I, J, K \in \Gamma \mathrm{End} TM \ : \ I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -Id$$
$$g(AX, AY) = g(X, Y) \qquad A = I, J, K$$
$$\omega_A(X, Y) = g(AX, Y) \in \Lambda^2 T^* M$$
$$\Omega = \sum_A \omega_A^2 \in \Lambda^4 T^* M \qquad\qquad \nabla\Omega = 0.$$

$$\mathrm{Sp}(k)\mathrm{Sp}(1) \not\subset \mathrm{U}(m) \Rightarrow \mathrm{QK} \not\subset \mathrm{K}$$

$$\mathrm{Hol} \subsetneq \mathrm{Sp}(k)\mathrm{Sp}(1) \Rightarrow \begin{cases} *\mathrm{Hol} \subseteq \mathrm{Sp}(k) \subset \mathrm{Sp}(k)\mathrm{Sp}(1) \Rightarrow \mathrm{HK} \\ *M \text{ espacio simétrico} \end{cases}$$

6 Variedades hiperkählerianas (HK)

$$(M^{4k}, g) + \{\mathrm{Hol} \subseteq \mathrm{Sp}(k)\} \Rightarrow \mathrm{HK}$$

$$\mathrm{Sp}(k) \subset \mathrm{U}(m) \Rightarrow \mathrm{HK} \subset \mathrm{K}$$

$$\exists I, J, K \in \Gamma \mathrm{End} TM : I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -Id$$

$$\omega_A \in \Lambda^2 T^* M \qquad \mathrm{d}\omega_I = \mathrm{d}\omega_J = \mathrm{d}\omega_K = 0.$$

Curvatura

$$\mathrm{QK} \Rightarrow \mathrm{Einstein}$$

$$\mathrm{QK} + \{s = 0\} \Rightarrow \mathrm{HK}$$

7 (Primera) Motivación

Espacios de Wolf

$$\mathbb{H}\mathrm{P}^n, \quad \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2}), \quad \mathrm{Gr}_4(\mathbb{R}^{n+4})$$

$$\frac{\mathrm{G}_2}{\mathrm{SO}(4)}, \ \frac{\mathrm{F}_4}{\mathrm{Sp}(3)\mathrm{Sp}(1)}, \ \frac{\mathrm{E}_6}{\mathrm{SU}(6)\mathrm{Sp}(1)}, \ \frac{\mathrm{E}_7}{\mathrm{Spin}(12)\mathrm{Sp}(1)}, \ \frac{\mathrm{E}_8}{\mathrm{E}_7\mathrm{Sp}(1)}$$

Espacios de Alekseevsky

$\exists$ espacios homogeneos, no simétricos, QK con $s < 0$.

(Primera) Motivación

Espacios de Wolf

$$\mathbb{HP}^n, \quad \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2}), \quad \mathrm{Gr}_4(\mathbb{R}^{n+4})$$

$$\frac{\mathrm{G}_2}{\mathrm{SO}(4)}, \frac{\mathrm{F}_4}{\mathrm{Sp}(3)\mathrm{Sp}(1)}, \frac{\mathrm{E}_6}{\mathrm{SU}(6)\mathrm{Sp}(1)}, \frac{\mathrm{E}_7}{\mathrm{Spin}(12)\mathrm{Sp}(1)}, \frac{\mathrm{E}_8}{\mathrm{E}_7\mathrm{Sp}(1)}$$

Espacios de Alekseevsky

$\exists$ espacios homogeneos, no simétricos, QK con $s < 0$.

1. Encontrar ejemplos explícitos de variedades QK

"*The mathematical problems that have been solved or techniques that have arisen out of physics in the past have been the lifeblood of mathematics.*"

Sir Michael F. Atiyah *Collected Works Vol. 1 (1988), 19, p.13*

9 Dualidad-T y c-map

Dualidad-T

$$\mathrm{IIA} \longleftrightarrow \mathrm{IIB}$$

c-map

$$\mathrm{K}_1 \times \mathrm{QK}_2 \times \mathbb{C}\mathrm{H}(1) \longrightarrow \mathrm{K}_2 \times \mathrm{QK}_1 \times \mathbb{C}\mathrm{H}(1)$$

$$\mathrm{K}^{2m} \overset{\text{c-map}}{\dashrightarrow} \mathrm{QK}^{4(m+1)}$$

Cecotti, Ferrara & Girardello (1989), Ferrara & Sabharwal (1990)

c-map rígido

$$\mathrm{K}^{2m} \overset{\text{c-map rígido}}{\dashrightarrow} \mathrm{HK}^{4m}$$

 SUGRA $N = 2, D = 4$

Kaluza-Klein 4D→3D

Multiplete Gravitacional

$4D$	#s	$3D$	#s	*	#s
$V^i_{\hat{\mu}}$		$V^i_\mu,\ A_\mu,\ e^{2\sigma}$	$\mathbf{1}$	$V^i_\mu,\ a,\ \phi$	$\mathbf{2}$
ψ^Λ		ψ^Λ		ψ^Λ	
$A^0_{\hat{\mu}}$		$A^0_0,\ A^0_\mu$	$\mathbf{1}$	$\zeta^0,\ \tilde{\zeta}^0$	$\mathbf{2}$

m Multipletes vectoriales

$4D$	#s	$3D$	#s	*	#s
$A^i_{\hat{\mu}}$		$A^i_0,\ A^i_\mu$	$\mathbf{m}$	$\zeta^i,\ \tilde{\zeta}^i$	$\mathbf{2m}$
λ^i_Λ		λ^i_Λ		λ^i_Λ	
ϕ^i	$2\mathbf{m}, \mathbb{R}$	ϕ^i	$\mathbf{2m}$	ϕ^i	$\mathbf{2m}$

Planning 2/3

Introducción y motivación: c-map.

Interludio: Construcción geométrico–diferencial del c-map (versión pre-twist)

12 (Segunda) Motivación

2. Dar una construcción geométrica del c-map.

$$\mathrm{K}^{2m} \xrightarrow[\text{c-map}]{} \mathrm{QK}^{4(m+1)}$$

En realidad ...

$$\mathrm{PSK}^{2m} \xrightarrow[\text{c-map}]{} \mathrm{QK}^{4(m+1)}$$

Variedades Kählerianas especiales I

Variedad Kḧleriana especial, SK

$$\mathrm{SK} = (\mathrm{K},\ \nabla^s)$$

1. $\nabla^s \omega = 0$,
2. $\mathrm{R}(\nabla^s) = \mathrm{T}(\nabla^s) = 0$,
3. $\nabla^s_X IY = \nabla^s_Y IX$ ("condición especial ")

Variedad Kähleriana especial cónica, CSK

$$\mathrm{CSK} = (\mathrm{SK}, X) \qquad X \in \mathfrak{X}M$$

1. $g(X, X) \neq 0$;
2. $\nabla^\omega X = -I = \nabla^g X$.

 Variedades Kählerianas especiales II

* Mapa momento

$$\mu : M \to \mathbb{R} : p \mapsto ||X_p||^2$$

Variedad Kaehleriana especial proyectiva, PSK

$$\mathrm{PSK} = \mathrm{CSK}//_c X = \mu^{-1}(c)/X \qquad c \in \mathbf{R}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CSK}_0 = \mu^{-1}(c) & \longrightarrow & \mathrm{CSK} \\ \downarrow & & \\ \mathrm{CSK}//_c X = \mathrm{PSK} & & \end{array}$$

15 **Panorama general** temp

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{CSK}^{2(m+1)} \arrow[d, "//_c X"'] & \\
\mathrm{PSK}^{2m} \arrow[r, dashed, "\text{c-map}"'] & \mathrm{QK}^{4(m+1)}
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{T}^*\mathrm{CSK} \equiv \mathrm{HK}$$

Correspondencia hK/qK

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{CSK}^{2(m+1)} \arrow[d, "//_c X"'] & \mathrm{HK}^{4(m+1)} \arrow[l, "\mathbb{R}^{2(m+1)}"'] \\
\mathrm{PSK}^{2m} \arrow[r, dashed, "\text{c-map}"'] & \mathrm{QK}^{4(m+1)}
\end{tikzcd}
$$

Haydys (2008), Hitchin (2009, 2011), Cortes et al. (2013)

17 Planning 3/3

Introducción y motivación física del c-map

Interludio: Construcción geométrico–diferencial del c-map
(versión pre-twist)

Twist y correspondencia hK/qK

El Twist

$$
\begin{tikzcd}
 & Y\in\mathfrak{X}P : S^1 \circlearrowright P \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi_W"] & \\
X\in\mathfrak{X}M : S^1 \circlearrowright M^n \arrow[rr, dashed, "twist"'] & & W^n = P/\langle X'\rangle
\end{tikzcd}
$$

A. Swann, (2007, 2010)

1. $P(M, S^1)$: conexión θ, curvatura $\pi_M^* F = d\theta$.
2. $L_X F = 0$
3. $X' = X^\theta + aY \in \mathfrak{X}P$: tal que $L_{X'}\theta = L_{X'}Y = 0$.
4. $W = P/\langle X'\rangle$ con acción inducida por Y.

19 Twist data

$$(M, X, F, a) \Longrightarrow \begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\pi_M"'] \arrow[dr, "\pi_W"] & \\ M & & W \end{tikzcd}$$

Twist data

1) M, una variedad C^∞.
2) $X \in \mathfrak{X}M$, generando la acción de S^1.
3) $F \in \Omega^2 M$, X-invariante, con periodos enteros.
4) $a \in C^\infty M$ tal que

$$\mathrm{d}a = -X \lrcorner F$$

Idea: Twist vs hK/qK

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{CSK}^{2(m+1)} \arrow[dd, "//_c X"'] & \mathrm{HK}^{4(m+1)} \arrow[l, "\mathbb{R}^{2(m+1)}"'] & \\
& & P \arrow[ul, "\pi_M"'] \arrow[dl, "\pi_W"] \\
\mathrm{PSK}^{2m} \arrow[r, dashed, "\text{c-map}"'] & \mathrm{QK}^{4(m+1)} &
\end{tikzcd}$$

21 Tensores $\mathcal{H}$-relacionados

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\pi_M"'] \arrow[dr, "\pi_W"] & \\ M & & W \end{tikzcd}$$

$$T_pP = \mathcal{H}_p + \mathcal{V}_p$$
$$\mathcal{H}_p \cong T_{\pi(p)}M \cong T_{\pi_W(p)}W$$

$\sim_{\mathcal{H}}$

$$\alpha \in \mathbf{T}M, \qquad \alpha_W \in \mathbf{T}W$$
$$\alpha \sim_{\mathcal{H}} \alpha_W \Longleftrightarrow (\pi_M^*\alpha)|_{\mathcal{H}} = (\pi_W^*\alpha_W)|_{\mathcal{H}}$$

Lema

$$\alpha \in \Omega^p M^X \Rightarrow \exists!\alpha_W \in \Omega^p W \;:\; \alpha_W \sim_{\mathcal{H}} \alpha$$
$$\pi_W^*\alpha_W = \pi^*\alpha - \theta \wedge \pi^*(a^{-1}X \lrcorner \alpha)$$

22 Calculando el twist

$d\alpha_W$

$\alpha \in \Omega^p M^X$,

$$d\alpha_W \sim_{\mathcal{H}} d\alpha - \frac{1}{a} F \wedge (X \lrcorner\, \alpha)\,.$$

Twisted exterior differential, d_W

$$\alpha_W \sim_{\mathcal{H}} \alpha, \qquad d\alpha_W \sim_{\mathcal{H}} d_W \alpha$$

$$d_W := d - \frac{1}{a} F \wedge X \lrcorner$$

23 Twist e Integrabilidad

Caso complejo

Sea I una estructura compleja invariante en M, $\mathcal{H}$-relacionada con una estructura casi-compleja I_W en W, I_W es integrable sii $F \in \Omega_I^{1,1} M$.

Caso Kähleriano $\mathrm{K} \to \mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd}
 & S^{2n+1} \times T^2 \arrow[dl, "\pi_M"'] \arrow[dr, "\pi_W"] & \\
\mathbb{C}\mathrm{P}^n \times T^2 & & S^{2n+1} \times S^1
\end{tikzcd}$$

24 Necesidad de introducir deformaciones

Problema

$$d\alpha = 0 \not\to d\alpha_W = 0$$

$$d\alpha_W \sim d_W\alpha = d\alpha - \frac{1}{a}F \wedge (X \lrcorner\, \alpha) = -\frac{1}{a}F \wedge (X \lrcorner\, \alpha) \neq 0$$

25 Simetrías de la estructura $\mathrm{HK} = (M, g, I, J, K)$

Simetría giratoria (*rotating*)

$X \in \mathfrak{X}M$

1. $L_X(g) = 0.$

2. $L_X(I) = \langle I, J, K \rangle$

3. $(a)\ L_X I = 0,\quad (b)\ L_X J = K,\quad (c)\ L_X K = -J$

Deformación elemental de la métrica HK

g_α

$$\mathbb{H}X = \langle X, IX, JX, KX \rangle$$

$$\alpha_0 = g(X, \cdot), \qquad \alpha_A = -g(AX, \cdot) \;\; (A = \mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K})$$

$$g_\alpha := \alpha_0^2 + \sum_A \alpha_A^2 \equiv g|_{\mathbb{H}X}$$

g^N, Deformación elemental de la métrica

$$g^N = fg + hg_\alpha, \qquad f, g \in \mathcal{C}^\infty M$$

Unicidad de la construcción

Teorema

(M^{4k}, g, I, J, K) HK, $k \geq 2$

$X \in \mathfrak{X}M$ Simetría rotatoria

μ Mapa momento

∃! deformación elemental

$$g^N = -\frac{1}{\mu - c} g + \frac{1}{(\mu - c)^2} g_\alpha$$

∃! twist data

$$F = kG = k(d\alpha_0 + \omega_I), \qquad a = k(g(X, X) - \mu + c).$$

W QK

O.Macia, A.F.Swann (2015)

Idea de demostración

1. A partir de g^N y de (I, J, K) construye ω_A^N y Ω^N.
2. Imponemos que un twist arbitrario de Ω^N sea QK.
3. Descomponemos estas ecuaciones en componentes relativas a $TM = \langle \mathbb{H}X \rangle \oplus \langle \mathbb{H}X \rangle^{\perp}$.
4. Este calculo conduce a $f = f(\mu),\ h = h(\mu)$ y $h = f'$.
5. La condicion $da = -X \lrcorner F$ determina a.
6. Imponer $dF = 0$ onduce a ODE para determinar f.

GRACIAS