

Deformaciones Elementales, y
Correspondencia HK/QK

Oscar MACIA (U. Valencia, ES)

(en colaboración con A. SWANN (Aarhus U., DK))

PRIMER ENCUENTRO CONJUNTO RSME-UMA

Buenos Aires, AR

Diciembre 14, 2017

1 Planning 1/3

Introducción y motivación

2 La lista de Berger

Teorema

Sea M una variedad Riemanniana n -dimensional simplemente conexa, orientada, que no es localmente un producto, ni simétrica. Entonces su grupo de holonomía pertenece a la siguiente lista:

M. Berger (1955)

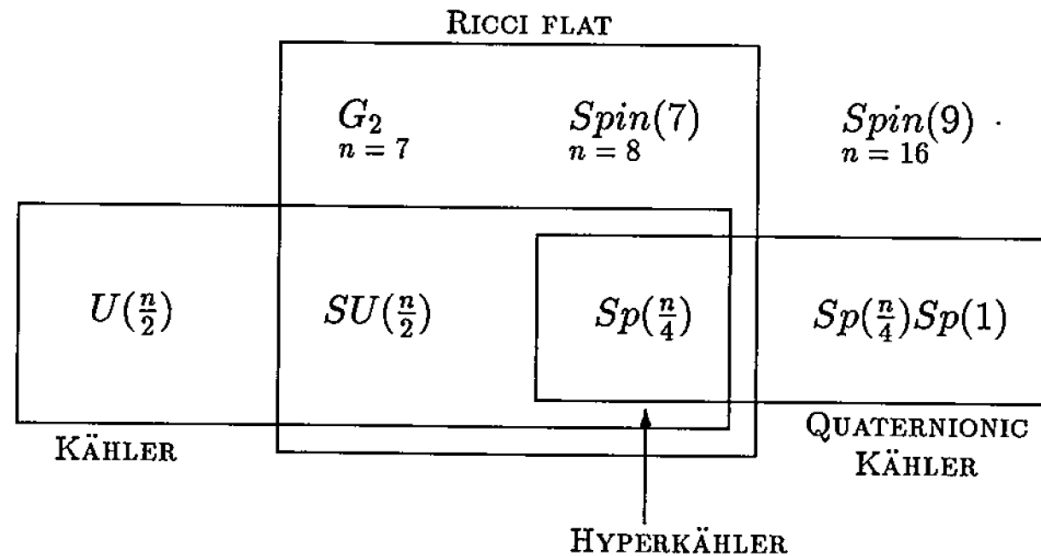


image credit: S.M. Salamon (1989)

3 Kähler, and Quaternionic Kähler Manifolds

$$(M^{2m}, g) + \{\text{Hol} \subseteq U(m)\} \Rightarrow K$$

$$U(m) = SO(2m) \cap Sp(m, \mathbb{R}) \subset GL(m, \mathbb{C})$$

$$(M^{4k}, g) + \{\text{Hol} \subseteq Sp(k)Sp(1)\} \Rightarrow QK$$

$$Sp(k)Sp(1) \not\subseteq U(m) \Rightarrow QK \not\subseteq K$$

$$\text{Hol} \subsetneq Sp(k)Sp(1) \Rightarrow \begin{cases} -\text{Hol} \subseteq Sp(k) \subset Sp(k)Sp(1) \Rightarrow \text{HK} \\ \quad Sp(k) \subset U(m) \Rightarrow \text{HK} \subset K \\ -M \text{ symmetric space} \end{cases}$$

4 Why QK?

Curvature

QK \Rightarrow Einstein

QK + $\{s = 0\} \Rightarrow$ HK

Wolf spaces

	$\mathbb{H}\mathbb{P}^n$,	$\text{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$,	$\text{Gr}_4(\mathbb{R}^{n+4})$	
G_2	F_4	E_6	E_7	E_8
$\text{SO}(4)$	$\text{Sp}(3)\text{Sp}(1)$	$\text{SU}(6)\text{Sp}(1)$	$\text{Spin}(12)\text{Sp}(1)$	$\text{E}_7\text{Sp}(1)$

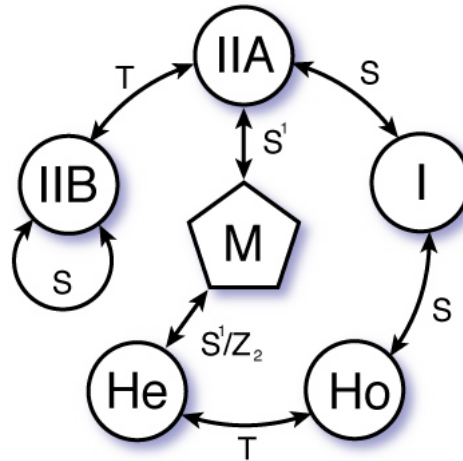
(A) LeBrun-Salamon Conjecture: $\{\text{QK} + s > 0\} \Rightarrow$ **Wolf**

Alekseevsky spaces

\exists Homogeneous, non-symmetric QK, with $s < 0$.

(B) Find explicit examples of non-compact QK manifolds

5 Dualidad-T y c-map



c-map

$$K_1 \times QK_2 \times \mathbb{C}H(1) \longrightarrow K_2 \times QK_1 \times \mathbb{C}H(1)$$

$$K^{2m} \xrightarrow{\text{c-map}} QK^{4(m+1)}$$

$$K^{2m} \xrightarrow{\text{c-map r\u00edgido}} HK^{4m}$$

Cecotti, Ferrara & Girardello (1989), Ferrara & Sabharwal (1990)

6 **SUGRA** $N = 2, D = 4$

Kaluza-Klein $4D \rightarrow 3D$

Multiplete Gravitacional

$4D$	#s	$3D$	#s	*	#s
$V_{\hat{\mu}}^i$ ψ^Λ		$V_\mu^i, A_\mu, e^{2\sigma}$ ψ^Λ	1	V_μ^i, a, ϕ ψ^Λ	2
$A_{\hat{\mu}}^0$		A_0^0, A_μ^0	1	$\zeta^0, \tilde{\zeta}^0$	2

m Multipletes vectoriales

$4D$	#s	$3D$	#s	*	#s
$A_{\hat{\mu}}^i$ λ_{Λ}^i ϕ^i		A_0^i, A_μ^i λ_{Λ}^i ϕ^i	m	$\zeta^i, \tilde{\zeta}^i$ λ_{Λ}^i ϕ^i	2m
	2m, \mathbb{R}		2m		2m

7 Planning 2/3

Introducción y motivación

Geometría diferencial del c-map

8 (Segunda) Motivación

2. Dar una construcción geométrica del c-map.

$$K^{2m} \xrightarrow{\text{c-map}} QK^{4(m+1)}$$

En realidad ...

$$PSK^{2m} \xrightarrow{\text{c-map}} QK^{4(m+1)}$$

9 Variedades Kählerianas especiales I

Variedad Kähleriana especial, SK

$$\text{SK} = (\text{K}, \nabla^s)$$

1. $\nabla^s \omega = 0$,
2. $\text{R}(\nabla^s) = \text{T}(\nabla^s) = 0$,
3. $\nabla_X^s IY = \nabla_Y^s IX$ (“condición especial”)

Variedad Kähleriana especial cónica, CSK

$$\text{CSK} = (\text{SK}, X) \quad X \in \mathfrak{X}M$$

1. $g(X, X) \neq 0$;
2. $\nabla^s X = -I = \nabla^g X$.

10 Variedades Kählerianas especiales II

* Mapa momento

$$\mu : M \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto \|X_p\|^2$$

Variedad Kaehleriana especial proyectiva, PSK

$$\text{PSK} = \text{CSK} //_c X = \mu^{-1}(c) / X \quad c \in \mathbf{R}$$

$$\text{CSK}_0 = \mu^{-1}(c) \longrightarrow \text{CSK}$$



$$\text{CSK} //_c X = \text{PSK}$$

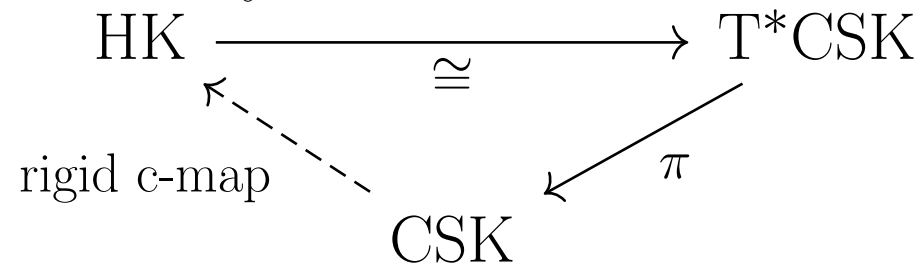
11 Perspectiva general, I: c-map

$$\begin{array}{ccc} \text{CSK}^{2(m+1)} & \xrightarrow{\text{rigid c-map}} & \text{HK}^{4(m+1)} \\ \downarrow //_{cX} & & \\ \text{PSK}^{2m} & \xrightarrow{\text{c-map}} & \text{QK}^{4(m+1)} \end{array}$$

12 ¿Por qué tantas hipótesis?

Proposición

Sea M Kähler (K). Entonces, T^*M está dotado de una estructura HK natural, compatible con su estructura simpléctica estándar si y solo si M es SK.



Proposición

El levantamiento horizontal \tilde{X} de la isometría cónica X a $T^*(\text{CSK})$ es isometría, y cumple que

$$L_{\tilde{X}}\omega_I = 0, \quad L_{\tilde{X}}\omega_J = \omega_K, \quad L_{\tilde{X}}\omega_K = -\omega_J$$

13 **Perspectiva general, II: HK/QK**

$$\begin{array}{ccc}
 \text{CSK}^{2(m+1)} & \xleftarrow{\pi} & \text{HK}^{4(m+1)}(+S^1) \\
 \downarrow //_{cX} & & \downarrow \text{HK/QK} \\
 \text{PSK}^{2m} & \dashrightarrow \text{c-map} & \text{QK}^{4(m+1)}
 \end{array}$$

14 Planning 3/3

Introducción y motivación

Geometría diferencial del c-map.

Twist y correspondencia HK/QK

15 El Twist

$$\begin{array}{ccc}
 Y \in \mathfrak{X}P : S^1 \hookrightarrow P & & \\
 \pi \swarrow & & \searrow \pi_W \\
 X \in \mathfrak{X}M : S^1 \hookrightarrow M^n & \xrightarrow{\text{twist}} & W^n = P / \langle X' \rangle
 \end{array}$$

A. Swann, (2007, 2010)

1. $P(M, S^1)$: conexión θ , curvatura $\pi_M^* F = d\theta$.
2. $L_X F = 0$
3. $X' = X^\theta + aY \in \mathfrak{X}P$: tal que $L_{X'}\theta = L_{X'}Y = 0$.
4. $W = P / \langle X' \rangle$ con acción inducida por Y .

16 Twist data

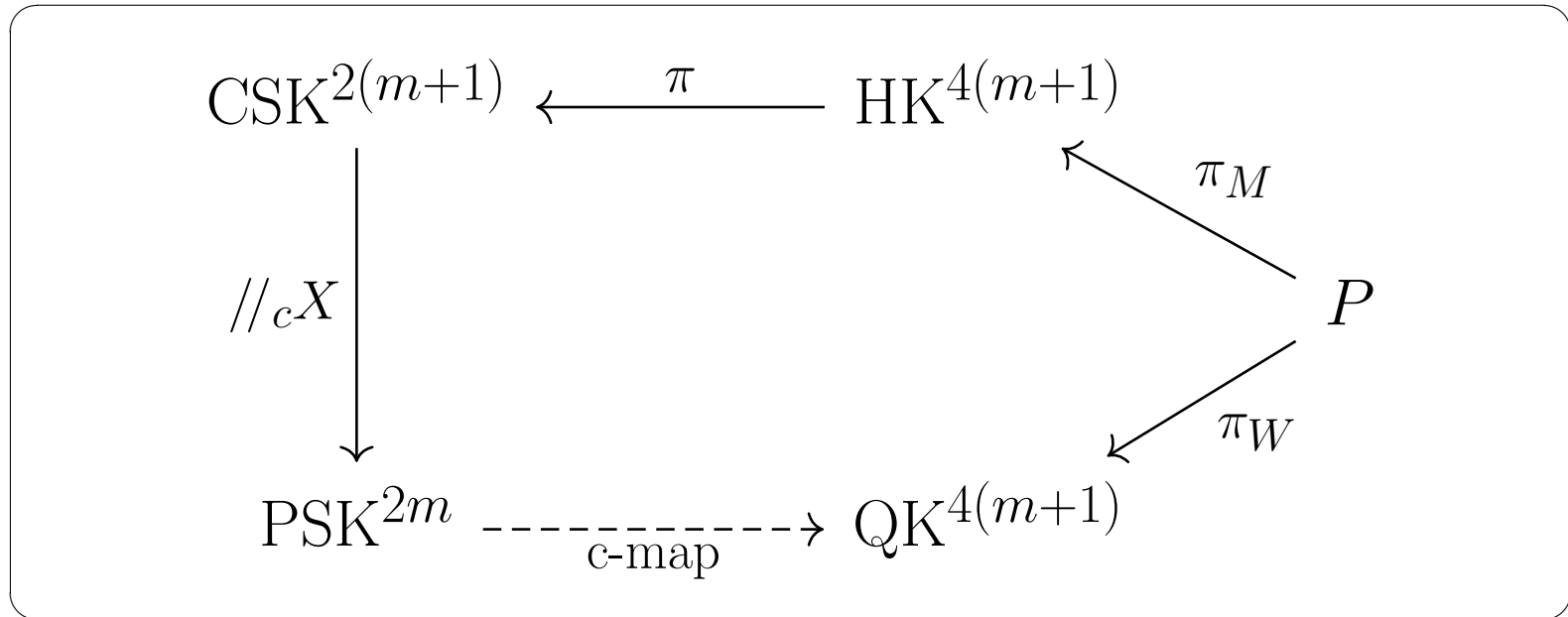
$$(M, X, F, a) \implies \begin{array}{ccc} & P & \\ \pi_M \swarrow & & \searrow \pi_W \\ M & & W \end{array}$$

Twist data

- 1) M , una variedad C^∞ .
- 2) $X \in \mathfrak{X}M$, generando la acción de S^1 .
- 3) $F \in \Omega^2 M$, X -invariante, con periodos enteros.
- 4) $a \in C^\infty M$ tal que

$$da = -X \lrcorner F$$

17 Idea: Twist vs HK/QK



18 Tensores \mathcal{H} -relacionados

$$\begin{array}{ccc}
 & P & \\
 \pi_M \swarrow & & \searrow \pi_W \\
 M & & W
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 T_p P = \mathcal{H}_p + \mathcal{V}_p \\
 \mathcal{H}_p \cong T_{\pi(p)} M \cong T_{\pi_W(p)} W
 \end{array}$$

$\sim_{\mathcal{H}}$

$$\alpha \in \mathbf{T}M, \quad \alpha_W \in \mathbf{T}W$$

$$\alpha \sim_{\mathcal{H}} \alpha_W \iff (\pi_M^* \alpha)|_{\mathcal{H}} = (\pi_W^* \alpha_W)|_{\mathcal{H}}$$

Lema

$$\alpha \in \Omega^p M^X \implies \exists! \alpha_W \in \Omega^p W : \alpha_W \sim_{\mathcal{H}} \alpha$$

$$\pi_W^* \alpha_W = \pi^* \alpha - \theta \wedge \pi^*(a^{-1} X \lrcorner \alpha)$$

19 Calculando el twist

$$\left. \begin{array}{l} d\alpha_W \\ \alpha \in \Omega^p M^X, \end{array} \right\} \quad d\alpha_W \sim_{\mathcal{H}} d\alpha - \frac{1}{a} F \wedge (X \lrcorner \alpha).$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Twisted exterior differential, } d_W \\ \alpha_W \sim_{\mathcal{H}} \alpha, \quad d\alpha_W \sim_{\mathcal{H}} d_W \alpha \\ d_W := d - \frac{1}{a} F \wedge X \lrcorner \end{array} \right\}$$

20 Twist e Integrabilidad

Caso complejo —

Sea I una estructura compleja invariante en M , \mathcal{H} -relacionada con una estructura casi-compleja I_W en W , I_W es integrable sii $F \in \Omega_I^{1,1} M$.

Caso Kähleriano $K \rightarrow \mathbb{C}$ —

$$\begin{array}{ccc} & S^{2n+1} \times T^2 & \\ \pi_M \swarrow & & \searrow \pi_W \\ \mathbb{C}P^n \times T^2 & & S^{2n+1} \times S^1 \end{array}$$

21 Necesidad de introducir deformaciones

Problema

$$d\alpha = 0 \not\Rightarrow d\alpha_W = 0$$

$$d\alpha_W \sim d_W\alpha = d\alpha - \frac{1}{a}F \wedge (X \lrcorner \alpha) = -\frac{1}{a}F \wedge (X \lrcorner \alpha) \neq 0$$

22 Simetrías de la estructura HK = (M, g, I, J, K)

Simetría giratoria (*rotating*)

$$X \in \mathfrak{X}M$$

$$1. L_X(g) = 0.$$

$$2. L_X(I) = \langle I, J, K \rangle$$

$$3. (a) L_X I = 0, \quad (b) L_X J = K, \quad (c) L_X K = -J$$

23 Deformación elemental de la métrica HK

g_α

$$\mathbb{H}X = \langle X, IX, JX, KX \rangle$$

$$\alpha_0 = g(X, \cdot), \quad \alpha_A = -g(AX, \cdot) \quad (A = I, J, K)$$

$$g_\alpha := \alpha_0^2 + \sum_A \alpha_A^2 \equiv g|_{\mathbb{H}X}$$

g^N , Deformación elemental de la métrica

$$g^N = fg + hg_\alpha, \quad f, g \in \mathcal{C}^\infty M$$

24 Unicidad de la construcción

Teorema

$$(M^{4k}, g, I, J, K)$$

$$X \in \mathfrak{X}M$$

μ

HK, $k \geq 2$

Simetría rotatoria

Mapa momento

$\exists!$ deformación elemental

$$g^N = -\frac{1}{\mu - c}g + \frac{1}{(\mu - c)^2}g_\alpha$$

$\exists!$ twist data

$$F = kG = k(d\alpha_0 + \omega_I), \quad a = k(g(X, X) - \mu + c).$$

W

QK

25 Idea de demostración

1. A partir de g^N y de (I, J, K) construye ω_A^N y Ω^N .
2. Imponemos que un twist arbitrario de Ω^N sea QK .
3. Descomponemos estas ecuaciones en componentes relativas a $TM = \langle \mathbb{H}X \rangle \oplus \langle \mathbb{H}X \rangle^\perp$.
4. Este calculo conduce a $f = f(\mu)$, $h = h(\mu)$ y $h = f'$.
5. La condicion $da = -X \lrcorner F$ determina a .
6. Imponer $dF = 0$ onduce a ODE para determinar f .

GRACIAS