

Corrientes de Foucault. Medida de conductividad eléctrica por inducción electromagnética.

Celia Pacheco y José Alfonso Soto

2008/2009

1. Objetivos

Modelización y estudio experimental del efecto de las corrientes de Foucault inducidas en cilindros conductores en un campo magnético variable con el tiempo. La comparación de los resultados experimentales con los modelos teóricos permitirá estudiar el rango de validez de las aproximaciones realizadas y también obtendremos una medida de la conductividad eléctrica de los conductores mediante un método sin contactos eléctricos.

Por último otro de los objetivos es la familiarización con el manejo de un voltímetro síncrono.

2. Material

- Soporte con bobina primaria y bobinas secundarias en su interior.
- Fuente de alimentación de corriente alterna, de frecuencia y amplitud regulable.
- Cilindros de cobre y aluminio, huecos y macizos de diversos tamaños.
- Voltímetro síncrono.
- Amperímetro digital.
- Cables de conexión.
- Resistencia de 1Ω

3. Introducción

Las *corrientes de Foucault*, llamadas también en la literatura científica anglosajona Eddy currents, son corrientes inducidas en un medio conductor (con conductividad σ) en presencia de un flujo de campo magnético variable con el tiempo. La ley de Inducción de Faraday-Lenz nos dice que ese flujo de campo magnético variable con el tiempo genera un campo eléctrico, \vec{E} , y ese campo eléctrico, a través de la relación $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, genera una distribución de corrientes \vec{J} en el seno del conductor, que son las denominadas corrientes de Foucault.

En algunos casos los efectos de las corrientes de Foucault son negativos y se desean evitar. Por ejemplo, provocan pérdidas por efecto Joule en transformadores o motores. Sin embargo en otros casos dan lugar a aplicaciones prácticas de interés, como por ejemplo los detectores de

metales o los frenos magnéticos, utilizados en muchos vehículos o en sistemas de estabilización de balanzas de precisión.

En esta práctica, trabajaremos esencialmente con un transformador, alimentado con una corriente variable con el tiempo, en el que estudiaremos la variación de la fuerza electromotriz (fem) inducida en la bobina secundaria al introducir un conductor (no ferromagnético) entre el primario y el secundario. Dicha variación es debida al campo magnético creado por las corrientes de Foucault generadas en el medio conductor. El efecto es un apantallamiento o disminución del campo magnético generado por la bobina primaria, de acuerdo con la ley de Lenz.

Vamos a estudiar dos situaciones diferentes. En la primera de ellas utilizaremos un transformador diferencial, con dos bobinas secundarias iguales dispuestas simétricamente, e introduciremos en una de ellas un cilindro conductor. En el segundo montaje introducimos un cilindro conductor hueco entre la bobina primaria y la bobina secundaria.

En general, los campos eléctrico y magnético, así como las corrientes en el seno del medio conductor no están distribuidos uniformemente, penetrando una longitud característica, denominada longitud de penetración (δ), que depende de la conductividad del medio σ y de la frecuencia angular ω ($\omega = 2\pi f$) a través de la relación:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}} \quad (1)$$

Para buenos metales, en los que σ es del orden de $10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$, la longitud de penetración puede ser grande a bajas frecuencias (desde varios centímetros para frecuencias de decenas de Hz a varios milímetros en el rango de kHz). Sin embargo, a muy altas frecuencias (del orden de los MHz o más) no se puede hablar propiamente de corrientes de Foucault ya que las corrientes quedan restringidas a una capa superficial del conductor (efecto piel). En esta práctica analizaremos el papel que juega δ , comparada con el radio o grosor de los cilindros utilizados.

3.1. Transformador diferencial

Este primer apartado se basa en la generación de corrientes de Foucault en un cilindro macizo conductor. Mediremos este efecto con un transformador diferencial, esquematizado en la figura 1.

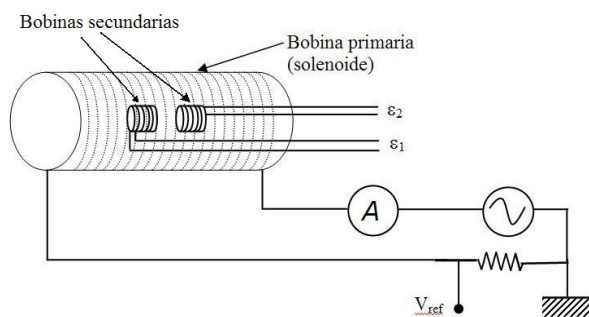


Figura 1: Esquema del sistema transformador y de la alimentación del primario.

Como observamos en la figura 1, en el interior del solenoide (primario) tenemos dos bobinas secundarias iguales dispuestas simétricamente. Este conjunto se puede analizar como un transformador cuyo núcleo es aire, en el que se medirá la fem inducida en el secundario. Inicialmente, antes de introducir el cilindro conductor, los voltajes inducidos en las dos bobinas del secundario

son iguales y su diferencia es, por tanto, nula. Al introducir el cilindro conductor en el interior de uno de los secundarios, aparece una diferencia entre la inducción de las bobinas 1 y 2 debida al flujo de campo magnético que crean las corrientes de Foucault. Si llamamos $V_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2$ cuando la muestra esté introducida en la bobina 1 y $V_2 = \epsilon_1 - \epsilon_2$ cuando esté en la bobina 2, resultará la expresión:

$$V_1 - V_2 = \frac{\mu_0 \pi}{4S} \sigma \omega^2 a^4 M I_p \quad (2)$$

donde a es el radio del cilindro conductor, σ la conductividad del mismo, ω es la frecuencia angular del campo magnético inductor, M es el coeficiente de inducción mutua entre el primario y cada una de las bobinas del secundario en aire, S la sección media de las espiras que forman el bobinado del secundario e I_p la corriente de alimentación del primario. La relación 2 es válida considerando la aproximación $a \ll \delta$ (ver apéndice 2).

En esta práctica utilizaremos cilindros macizos de Al y Cu de distinto radio. Al final del guión, en la tabla 2 se muestran las características de los cilindros disponibles.

3.2. Apantallamiento con cilindros huecos

En esta parte mediremos explícitamente el apantallamiento que sufre el campo magnético del primario, al interponer un cilindro metálico entre éste y el secundario. El esquema del circuito es el de la figura 2, en donde el secundario es una única bobina centrada dentro del primario, en la que mediremos la fem inducida. Sin cilindro conductor mediremos una fem inducida $\epsilon_3^{(0)}$ mientras que al poner el cilindro conductor (tal y como se ve en la figura 3), mediremos un valor ϵ_3 menor. Esto es consecuencia de las corrientes de Foucault generadas en el cilindro conductor, que dan lugar a un campo magnético que se opone al campo del primario.

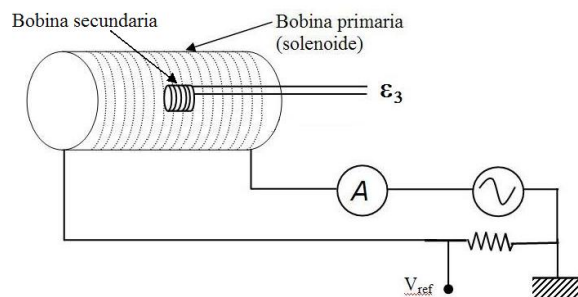


Figura 2: Montaje experimental en la medida con cilindros huecos

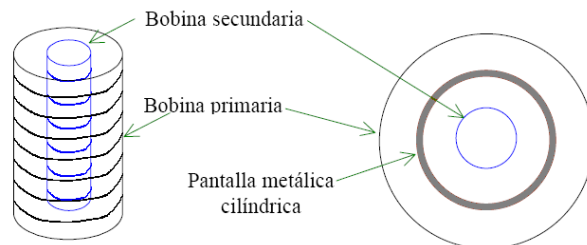


Figura 3: Disposición del cilindro conductor en el transformador.

Si llamamos B_{ext} al campo fuera del cilindro conductor (campo del primario) y B_{int} al campo en el interior del hueco del conductor (ver apéndice 2):

$$\vec{B}_{int} = \frac{1}{1 - j\Delta} \vec{B}_{ext} \quad \text{con:} \quad \Delta = \frac{\mu_0 \sigma \omega a d}{2} \quad (3)$$

en donde a es el radio interior del cilindro conductor hueco, d el grosor de la pared, σ la conductividad del material y ω la frecuencia angular. Esta expresión es válida siempre que se cumpla $d \ll \delta \ll a$, siendo δ la longitud de penetración definida en la ecuación (1).

Dado que las amplitudes de los campos magnéticos son proporcionales a las correspondientes fem inducidas, tendremos la relación:

$$\frac{\epsilon_3}{\epsilon_3^{(0)}} = \frac{B_{int}}{B_{ext}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta^2}} \quad (4)$$

Se puede definir un coeficiente de apantallamiento η de la siguiente manera:

$$\eta = 1 - \frac{B_{int}}{B_{ext}} = 1 - \frac{\epsilon_3}{\epsilon_3^{(0)}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 f^2}} \quad \text{con:} \quad k = \mu_0 \pi \sigma a d \quad (5)$$

donde η tiende a cero cuando el apantallamiento tiende a cero, es decir, $B_{int} \rightarrow B_{ext}$ (a frecuencias *bajas*). Y por otra parte, η tiende a 1 cuando el apantallamiento es máximo y $B_{int} \rightarrow 0$ (frecuencias *altas*).

La ecuación 5 se puede expresar de la siguiente forma:

$$\left(\frac{\epsilon_3^{(0)}}{\epsilon_3} \right)^2 = 1 + (\mu_0 \pi \sigma a d)^2 f^2 \quad (6)$$

que nos permitirá obtener, a partir de las medidas experimentales de las fem inducidas en función de la frecuencia, la conductividad de los cilindros.

En esta parte utilizaremos cilindros huecos de Al y Cu de distinto radio medio y grosor de pared (ver tabla 2).

4. Procedimiento experimental

En general, los voltajes que se van a medir en esta práctica son pequeños, por lo que resulta necesario emplear un voltímetro síncrono (Lock-in) para su medida. Por ello, antes de hacer las medidas conviene leer atentamente el apéndice 1, en el que se describen las funciones y utilización del mismo.

4.1. Transformador diferencial

4.1.1. Medida del coeficiente de inducción mutua

En primer lugar, realizaremos medidas para determinar el coeficiente de inducción mutua M , entre el primario y cada uno de los secundarios (en aire). Como los dos secundarios son iguales bastará con determinar M para uno de ellos, por ejemplo el 1. Teniendo en cuenta la ley de inducción de Faraday, la fem inducida en el secundario 1 se puede poner como:

$$\epsilon_1 = M \omega I_p \quad (7)$$

Para determinar M realizaremos el montaje experimental esquematizado en la figura 1, llevando la señal ϵ_1 (ver figura 4) al canal A del voltímetro síncrono (con el conmutador en la

posición A) y la señal V_{ref} a la entrada *reference input* (ver apéndice 1). Fijaremos la frecuencia del generador en un valor de 1000 Hz y mediremos ϵ_1 en función de I_p , en el rango $[0,650]$ mA (la fuente puede llegar hasta 1 A, pero a 1000 Hz, la corriente está limitada por la impedancia del sistema). Con esta serie de medidas podremos determinar M , teniendo en cuenta la relación 7.

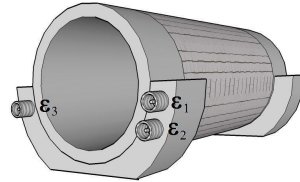


Figura 4: Conectores de las diferentes bobinas secundarias

4.1.2. Medida diferencial

Ahora, para hacer la medida diferencial, conectaremos ϵ_1 y ϵ_2 (ver figura 4) a los canales A y B del voltímetro síncrono, poniendo el conmutador del voltímetro síncrono en la posición $A - B$, que nos dará el valor de la diferencia de voltajes $\epsilon_1 - \epsilon_2$. El voltaje resultante, en ausencia de muestra conductora, debe ser nulo, por la simetría del sistema. Esta condición debe cumplirse con un margen de error comparable o menor que los voltajes V_1 y V_2 que se van a medir. En principio, si las bobinas secundarias están bien centradas $\epsilon_1 - \epsilon_2$ debe ser inferior a $10\mu V$. Debemos comprobar que esta condición se cumple, y tratar con cuidado el montaje experimental para no introducir asimetrías que alteren dicha condición.

Para iniciar las medidas, conviene hacerlo con un cilindro conductor que de una señal grande. Por ejemplo empezaremos con el cilindro de Al de mayor radio. Fijaremos la frecuencia f a 1kHz y alimentaremos el primario con una corriente de 650mA. A continuación, mediremos $V_1 - V_2$ para una serie de valores de la corriente I_p cubriendo el rango $[0, 650]$ mA. Para ello introduciremos secuencialmente (con mucho cuidado) el cilindro en el interior de cada una de las bobinas secundarias (figura 5). Una forma práctica de hacer las medidas es colocar el cilindro en una de las bobinas, hacer el barrido (descendiente) en función de I_p y después pasarlo a la otra bobina y hacer el barrido (ascendente) en función de I_p . Nótese que entre V_1 y V_2 hay una diferencia de signo (diferencia de fase de π). La medida de $V_1 - V_2$ permite realizar una sustracción sencilla que elimina la señal de fondo que aparece como consecuencia de una diferencia residual entre las dos bobinas.

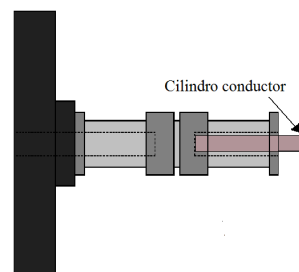


Figura 5: Disposición del cilindro conductor en el interior de una de las bobinas secundarias.

Repetiremos este proceso para los diferentes cilindros de Al y Cu, por orden de radio de-

creciente. En el caso de que la diferencia entre V_1 y V_2 (en valor absoluto) sea muy pequeña (comparable a la del error de medida), se pueden realizar las medidas introduciendo el cilindro sólo en una de las bobinas, agilizando así la toma de datos.

El análisis de datos lo haremos con la expresión 2, de la que se puede obtener, a partir del ajuste correspondiente, el valor de la conductividad (σ). Téngase en cuenta en el cálculo, que la sección transversal media de la bobina secundaria es $S = (306 \pm 6)10^{-6}m^2$.

Analícese el papel del radio de los cilindros y de la longitud de penetración (δ) en la validez del modelo teórico, así como la influencia del material usado (aluminio o cobre).

Al final del guión, en la tabla 1 tenemos la conductividad de las muestras de Al y Cu, medidas por una técnica convencional de cuatro puntos, para poder comparar con los resultados obtenidos para cada cilindro.

4.2. Apantallamiento con cilindros huecos

En esta segunda parte de la práctica mediremos el apantallamiento producido al interponer un cilindro metálico entre el primario y el secundario.

El dispositivo experimental es el de la figura 2. Conectaremos ϵ_3 (ver figura 4) al canal A del voltímetro síncrono, poniendo el conmutador en la posición A, y la señal V_{ref} seguirá siendo la de sincronía.

Alimentaremos el primario con una corriente $I_p = 0,3A$ que mantendremos constante en todas las medidas. A una determinada frecuencia mediremos la fem inducida en el secundario sin el cilindro conductor, $\epsilon_3^{(0)}$, y después con el cilindro conductor, ϵ_3 , haciendo un conjunto de medidas en función de la frecuencia, en el rango $[0, 2000]$ Hz. Una forma práctica de hacer las medidas es medir primero $\epsilon_3^{(0)}$ en función de la frecuencia (por ejemplo en orden ascendente) y después introducir (con cuidado) el cilindro hueco (figura 6) y medir ϵ_3 (esta vez en orden decreciente, por ejemplo). Hay que tener en cuenta que al variar la frecuencia o introducir un cilindro conductor, varía la impedancia del circuito, y por tanto hay que reajustar la tensión de salida de la fuente de alimentación para mantener en todo momento la corriente del primario constante.

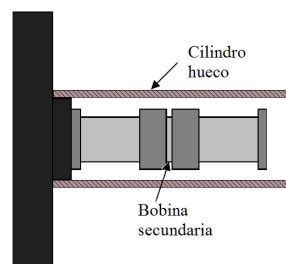


Figura 6: Disposición del cilindro hueco en el sistema.

Repetiremos las medidas para cada uno de los cilindros conductores de Al y Cu disponibles, con radio medio y grosor de pared diferente (ver tabla 2). Bastará con medir ϵ_3 para los distintos cilindros, ya que $\epsilon_3^{(0)}$ será equivalente en todos.

El análisis de datos lo realizaremos teniendo en cuenta la expresión 6, de la que podemos obtener, a partir del correspondiente ajuste por mínimos cuadrados el valor de la conductividad (σ) para cada cilindro. Podremos comparar con los valores de la tabla que aparece al final el guión.

Se puede analizar también la influencia del grosor del cilindro en relación a la longitud de

penetración (Ecuación 1), para estudiar la validez de las aproximaciones consideradas en el modelo teórico (ver apéndice 3).

Finalmente, si se representa el factor de apantallamiento η en función de la frecuencia (ecuación 5), se puede estudiar cómo afecta a dicho apantallamiento el grosor de pared del cilindro, para un material dado (por ejemplo Al), o bien, fijado el grosor de pared (por ejemplo 1 mm) qué material (Al o Cu) produce un mayor apantallamiento.

5. Tablas

Material	$\sigma(10^6\Omega^{-1}m^{-1})$
Al macizos	$21,1 \pm 0,2$
Al huecos	$22,2 \pm 0,1$
Cu	$58,0 \pm 0,6$

Tabla 1: Conductividades determinadas por la técnica de cuatro puntos.

Macizos	a (mm)	Huecos	a (mm)	d (mm)
Al 1	$1,93 \pm 0,03$	Al 1	$17,95 \pm 0,05$	$1,95 \pm 0,03$
Al 2	$2,40 \pm 0,05$	Al 2	$17,88 \pm 0,05$	$1,10 \pm 0,03$
Al 3	$2,95 \pm 0,02$	Al 3	$17,69 \pm 0,05$	$0,61 \pm 0,04$
Al 4	$3,43 \pm 0,03$	Cu 1	$18,00 \pm 0,05$	$1,90 \pm 0,03$
Al 5	$3,97 \pm 0,03$	Cu 2	$17,90 \pm 0,05$	$1,12 \pm 0,03$
Al 6	$4,968 \pm 0,008$			
Cu 1	$1,48 \pm 0,01$			
Cu 2	$2,91 \pm 0,05$			
Cu 3	$4,02 \pm 0,08$			
Cu 4	$4,97 \pm 0,01$			

Tabla 2: Características de los conductores usados.

6. Bibliografía

- L. D. Landáu, E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media* (Pergamon, Oxford, 1960).
- B. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* (Prentice-Hall, New Jersey, 1989).
- A. Edgar and J.W. Quilty, “A mutual inductance apparatus for measuring magnetic susceptibility and electrical conductivity”, *American Journal Physics* **61**, 943-946 (1993).
- S. Fahy, Charles Kittel, and Steven G. Louie, “Electromagnetic screening by metals”, *American Journal Physics* **56**, 989-992 (1988).
- J. Íñiguez, V. Raposo, A.G. Flores, M. Zazo and A. Hernández-López, “Measurement of the electrical conductivity of metallic tubes by studying magnetic screening at low frequency”, *American Journal Physics* **73**, 206-210 (2005).
- J. Pellicer-Porres, R. Lacomba-Perales, J. Ruiz-Fuertes, D. Martínez-García, and M.V. Andrés, “Force characterization of eddy currents”, *American Journal Physics* **74**, 267-271 (2006).

Apéndice 1: Voltímetro síncrono.

El voltímetro síncrono es un voltímetro de corriente alterna diseñado para medir la amplitud de voltajes pequeños, que pueden estar superpuestos con otras diferencias de potencial de frecuencias distintas y amplitudes incluso mayores que la señal que se quiere medir.

DESCRIPCIÓN DEL VOLTÍMETRO 500 MC "LOCK-IN AMPLIFIER":

1. Conector "power" de puesta en marcha.
2. Módulo "signal inputs". Conectores de entradas A, B e I. Los conectores A y B se emplean para poder medir V_A y $V_A - V_B$. El voltímetro funciona como amperímetro en el caso de emplear el canal de entrada I, que en esta práctica no se empleará. Se selecciona el modo de medida mediante un interruptor de tres posiciones: A, A-B, I.
3. Módulo "filters". Los conmutadores "line notch" y "line \times 2 notch" activan filtros que eliminan de las señales de entrada la componente alterna de frecuencia $50Hz$ y $100Hz$, respectivamente. En nuestra práctica no es necesario su empleo.
4. Módulo "sensitivity". Selector de escala. En esta práctica emplearemos típicamente las escalas entre $100\mu V$ y $300mV$. Conviene, no obstante, en el caso de no saber la amplitud de la señal que se va a medir, empezar siempre con la escala más grande.
5. Módulo "display". Es el módulo de medida. El indicador digital puede proporcionarnos:
 - a) la amplitud de la señal que se está midiendo (posición "signal in"),
 - b) la señal del indicador analógico que en todas las escalas está entre -10 y $+10 V$ (posición "output") y que coincide con la salida auxiliar "output" (conector coaxial auxiliar, que no se empleará en esta práctica) y
 - c) el desplazamiento del cero ("offset").

En nuestro caso emplearemos la posición "signal in" para disponer en todo momento del valor de la medida en el indicador digital.

6. Módulo "expand". Normalmente se utilizará en la posición $\times 1$. Alternativamente puede proporcionar una señal amplificada en un factor 10.
7. Módulo "auto". Función automática del voltímetro síncrono en la que se autoajustan la escala, el tiempo de integración, el cero y la fase. La función acaba proporcionando una medida de la señal, que será correcta si la señal es nítida y sin fluctuaciones. El proceso "auto" dura unas decenas de segundos, hasta que se apaga su luz, y, dado que puede proporcionar un resultado erróneo, conviene revisar manualmente dicho resultado ante la menor duda de su correcto funcionamiento (ver el apartado "realización de medidas" de este apéndice).
8. Módulo "time constant". Este módulo permite fijar el tiempo de promediado o integración: es el tiempo durante el cual el aparato integra la señal y la promedia. Dado que en nuestra práctica se trabaja con frecuencias de 100 a $2000Hz$, un tiempo de $300ms$ es adecuado porque supone realizar un promediado en unos $30 - 600$ ciclos, y, por otra parte, es lo bastante rápido para que la respuesta del aparato sea prácticamente instantánea.
9. Módulo "internal oscillator". No se emplea en esta práctica.

10. Módulo "reference input", "reference", "phase" y "display". El "reference input" es el borne de conexión de la señal de referencia o sincronismo del aparato. Esta es una señal cuya frecuencia debe ser idéntica a la de la señal que se desea medir. En nuestro caso se empleará la diferencia de potencial en los extremos de la resistencia de 1Ω conectada en serie con la bobina primaria. Esta señal constituye la señal de sincronismo del voltímetro, de tal modo que la lectura corresponde en todo momento a la proyección en el plano complejo de la señal de medida sobre la señal de sincronismo:

$$V_{lectura} = V_{medida} \cos \phi \quad (8)$$

siendo ϕ la diferencia de fase entre ambas señales (esta diferencia de fase se puede modificar). El indicador digital "reference" da el valor de la fase ϕ ó de la frecuencia de la señal, según se desee conmutando con el control "display". Finalmente, "phase", es un módulo que dispone de un ajuste fino y otro a saltos de 90° . El modo de operación usual del voltímetro consiste en ajustar ϕ tal que $\cos \phi = 1$. Este ajuste se realiza del siguiente modo:

- a) El voltímetro realiza una medida: $V_{lectura}(\phi)$
 b) Variamos la fase hasta que $V_{lectura}(\phi + \phi_R) = 0$, donde ϕ_R es la fase que hemos añadido; en este caso $\cos(\phi + \phi_R) = 0$, y $\phi + \phi_R = 90^\circ$.

- c) Aumentamos la fase en 90° (ó en $-90^\circ = 270^\circ$), por lo tanto:

$$\cos(\phi + \phi_R + 90^\circ) = \cos(180^\circ) = -1 \text{ ó}$$

$$\cos(\phi + \phi_R - 90^\circ) = \cos(0^\circ) = +1.$$

Por lo tanto, la lectura del voltímetro coincide con la tensión que queremos medir:

$$V_{lectura}(\phi + \phi_R + 90^\circ) = V_{medida}(-1) = -V_{medida} \text{ ó}$$

$$V_{lectura}(\phi + \phi_R - 90^\circ) = V_{medida}(+1) = V_{medida}$$

11. Módulo "status". Indicadores de errores de funcionamiento. El aparato enciende alguno de los indicadores (luces rojas) cuando el voltímetro no está funcionando correctamente. Los errores que detecta son:

"overload": indica que la medida excede el fondo de la escala que se está utilizando; si se enciende este indicador el fondo de escala debe cambiarse a una escala mayor.

"unlock": el aparato está funcionando sin sincronismo (o bien porque no se ha conectado V_{ref} , o bien porque la señal V_{ref} no tiene una frecuencia estable, o bien porque no tiene suficiente amplitud).

"interface", "keyboard" y "error": se refieren al empleo del voltímetro en conjunción con un ordenador de control, que no se emplea en esta práctica.

PUESTA EN MARCHA DEL VOLTÍMETRO SÍNCRONO:

1. Al poner en marcha el aparato, su configuración es la que el fabricante ha establecido por defecto. Debemos ajustar el selector de lectura (5) a la posición "signal in" y el tiempo de integración (8) a 300 ms.
2. En primer lugar se conectará la V_{ref} del voltímetro, al conector "reference input". Observaremos que el indicador de falta de sincronismo del voltímetro (11) se apaga.
3. Conectaremos al canal A la señal a medir, poniendo el conmutador en la posición A. Para la medida diferencial conectaremos las señales correspondientes a los canales A y B, poniendo en este caso el conmutador en la posición A-B.

REALIZACION DE MEDIDAS:

Conviene realizar manualmente alguna medida (al menos la primera) para entender correctamente el funcionamiento del aparato. Posteriormente, a lo largo de la práctica se puede utilizar la función "auto", pero siempre comprobando su correcto funcionamiento, tal como a continuación se explica.

Proceso de medida manual:

1. Al encender el aparato, se activa la escala de $1000mV$. Ajustar la fase del voltímetro de acuerdo con (10) y reducir de escala si la señal es pequeña, observando siempre que el indicador de "overload" no se encienda. No siempre se debe reducir la escala hasta que el indicador de error se encienda, pues en ocasiones las cifras del lector fluctúan de tal modo que no se mejora la precisión de la medida por disminuir de escala.
2. Una vez ajustada la fase se puede tomar la medida del lector digital. Si la última cifra fluctúa en un cierto margen, se puede tomar dicho margen como el intervalo de error de la medida. Si las fluctuaciones son grandes puede ser práctico pasar a una escala mayor. Se puede intentar reducir dicha fluctuación aumentando el tiempo de integración, pero ello requiere esperar un tiempo sensiblemente mayor que el de integración para que la medida se estabilice y pueda realizarse, resultando en alguna ocasión poco práctico.
3. Al realizar una medida, sobre todo si se está en el proceso de ajuste del aparato, es necesario medir: $V_{lectura}(\phi)$; $V_{lectura}(\phi + 90^\circ)$; $V_{lectura}(\phi + 180^\circ)$; $V_{lectura}(\phi + 270^\circ)$

Si el ajuste de la fase se ha realizado correctamente, $V_{lectura}(\phi + 90^\circ) = V_{lectura}(\phi + 270^\circ) = 0$ e idealmente $V_{lectura}(\phi) = V_{medida}$ y $V_{lectura}(\phi + 180^\circ) = -V_{medida}$. Sin embargo, es usual que se obtenga una diferencia entre $V_{lectura}(\phi)$ y $V_{lectura}(\phi + 180^\circ)$, que simplemente se debe a un desajuste del cero del aparato. En este caso, se puede ajustar el cero del aparato con los controles "offset" del módulo (5), o simplemente tomar $V_{medida} = \frac{1}{2}(|V_{lectura}(\phi)| + |V_{lectura}(\phi + 180^\circ)|)$ (esto es lo más recomendable).

Proceso de medida automático:

4. Una vez realizadas la puesta en marcha del aparato y al menos una medida manual, que nos servirá de comprobación, activaremos la función "auto". Una vez realizada la función (al apagarse su indicador óptico) el aparato dará el valor de V_{medida} , y habrá reajustado los parámetros: escala, ajuste de cero, tiempo de integración y fase.
5. Comprobación: Incrementando repetidamente la fase en 90° , se pueden medir $V_{lectura}(\phi)$; $V_{lectura}(\phi + 90^\circ)$; $V_{lectura}(\phi + 180^\circ)$; $V_{lectura}(\phi + 270^\circ)$ comprobando que $V_{lectura}(\phi + 90^\circ) = V_{lectura}(\phi + 270^\circ) = 0$ y $V_{lectura}(\phi) = -V_{lectura}(\phi + 180^\circ) = V_{medida}$.
6. En una serie de medidas a frecuencia fija, en función de la corriente del primario I_p , una vez ejecutada la función auto para la primera medida, el resto puede simplemente medirse cambiando la escala según se necesite, pero sin reajustar las fases ni reejecutar la función auto. En todo caso se puede realizar alguna comprobación al principio para ver que efectivamente no se requiere.. Incluso para agilizar las medidas, se puede tomar $V_{medida} = V_{lectura}(\phi)$, sin necesidad de hacer la media con $|V_{lectura}(\phi + 180^\circ)|$, siempre que el ajuste de cero sea bueno.
7. En las medidas en función de la frecuencia para estudiar el apantallamiento con cilindros huecos, habrá que realizar un reajuste de la fase para cada valor de frecuencia y cada vez que se introduzca un cilindro conductor (ejecutando la función auto).

Apéndice 2: Corrientes de Foucault en cilindros macizos. Modelo teórico.

En este apéndice vamos a presentar el cálculo de las corrientes de Foucault inducidas en cilindros conductores y su efecto sobre la fem inducida en el montaje diferencial. Se puede hacer un cálculo sencillo para la geometría particular del problema, haciendo una serie de consideraciones y aproximaciones. Vamos a considerar un problema con simetría cilíndrica: un cilindro conductor de radio a , muy largo (infinito) que se introduce en el seno de un campo magnético variable con el tiempo, creado por la bobina primaria, alimentada con corriente alterna. Consideraremos que éste campo magnético es axial y uniforme. Si empleamos notación compleja para la dependencia armónica, podemos escribir el campo del solenoide como:

$$\vec{B}_0(t) = B_0(t) \vec{u}_z = B_0 e^{-j\omega t} \vec{u}_z \quad (9)$$

Calcularemos las corrientes de Foucault y el campo magnético que generan, aplicando un proceso iterativo. En ese proceso iterativo, el campo del primario (ecuación 9) será el campo magnético a orden cero, que nos servirá para calcular el campo eléctrico inducido y las corrientes en el conductor, a primer orden. Para ello aplicaremos la ley de Faraday-Lenz:

$$\oint_{C_1} \vec{E}_i^{(1)} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_1} \vec{B}_0 d\vec{S} \quad (10)$$

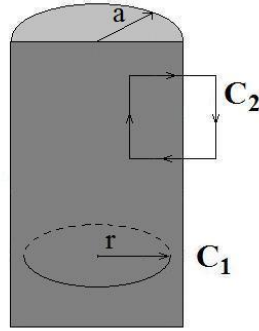


Figura 7: Caminos de integración en el cilindro

Siendo C_1 el camino de integración representado en la figura 7. Dada la simetría cilíndrica, podemos obtener el campo eléctrico inducido y las corrientes que generan en el seno del cilindro conductor como:

$$\vec{E}_i^{(1)} = j \frac{\omega r}{2} B_0(t) \vec{u}_\phi \quad (11)$$

$$\vec{J}_i^{(1)} = \sigma \vec{E}_i^{(1)} = j \sigma \frac{\omega r}{2} B_0(t) \vec{u}_\phi \quad (12)$$

Las corrientes $\vec{J}_i^{(1)}$ generan, a su vez, un campo magnético $\vec{B}_i^{(1)}$ que es cero fuera del cilindro conductor y dentro tiene dirección \vec{u}_z y es uniforme (análogo a lo que ocurre con un solenoide indefinido). Aplicando el Teorema de Ampère (ver nota al final):

$$\oint_{C_2} \vec{B}_i^{(1)} d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_2} \vec{J}_i^{(1)} d\vec{S} \quad (13)$$

al camino de integración C_2 de la figura 7, se puede obtener:

$$\vec{B}_i^{(1)}(r, t) = j \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4} (a^2 - r^2) \vec{B}_0(t) \quad (14)$$

El esquema es repetir las iteraciones, aplicando sucesivamente la ley de Faraday-Lenz y el teorema de Ampère, es decir:

$$\vec{B}_i^{(1)} \rightarrow \vec{E}_i^{(2)} \rightarrow \vec{J}_i^{(2)} \rightarrow \vec{B}_i^{(2)} \rightarrow \dots \quad (15)$$

Así, podemos obtener las corrientes de Foucault y el campo magnético que generan hasta el grado de aproximación deseado:

$$\vec{J}_i = \vec{J}_i^{(1)} + \vec{J}_i^{(2)} + \vec{J}_i^{(3)} + \dots \quad (16)$$

$$\vec{B}_i = \vec{B}_i^{(1)} + \vec{B}_i^{(2)} + \vec{B}_i^{(3)} + \dots \quad (17)$$

El resultado se puede expresar de una forma compacta de la siguiente forma:

$$\vec{J}_i(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k g_k(r) \vec{B}_0(t) \vec{u}_\phi \quad (18)$$

$$\vec{B}_i(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k f_k(r) \vec{B}_0(t) \quad (19)$$

$$\text{con: } C_k = j \sigma \omega \left(\frac{2j}{\delta^2} \right)^{k-1}; \quad g_k(r) = \frac{1}{r} \int_0^r f_{k-1}(y) y dy; \quad (20)$$

$$A_k = \left(\frac{2j}{\delta^2} \right)^k; \quad f_k(r) = \int_r^a \frac{dx}{x} \left\{ \int_0^x f_{k-1}(y) y dy \right\}; \quad f_0 = 1 \quad (21)$$

donde δ es la longitud de penetración del campo definida en la ecuación (1) del guión.

El campo total \vec{B} en presencia del conductor será:

$$\vec{B}(r, t) = \vec{B}_0(t) + \vec{B}_i(r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k f_k(r) \vec{B}_0(t) \quad (22)$$

En nuestro caso, al tener un transformador diferencial, la fem inducida por \vec{B}_0 se compensa, y por lo tanto al introducir un cilindro conductor en uno de los secundarios, la señal que aparece ($\epsilon_1 - \epsilon_2$) es la fem inducida por \vec{B}_i :

$$\epsilon_i = -N_S \frac{d\Phi_i}{dt} = -N_S \frac{d}{dt} \int_S \vec{B}_i d\vec{s} = - \sum_{k=1}^{\infty} 2\pi j \omega N_S \left(\frac{2j}{\delta^2} \right)^k B_0(t) \int_0^a f_k(r) r dr \quad (23)$$

Siendo N_S el número de espiras del secundario (uno de ellos). Si además, tenemos en cuenta que:

$$\vec{B}_0(t) = B_0(1) I_p(t) \quad (24)$$

siendo $I_p(t)$ la corriente de alimentación del primario y $B_0(1)$ la amplitud del campo para una corriente de 1A. Podemos calcular los primeros términos de la serie y obtener:

$$\epsilon_i = - \frac{\mu_0 \pi}{8S} M \sigma \omega^2 a^4 \left[1 + j \frac{1}{3} \left(\frac{a}{\delta} \right)^2 - \frac{11}{96} \left(\frac{a}{\delta} \right)^4 - j \frac{19}{480} \left(\frac{a}{\delta} \right)^6 + \dots \right] I_p(t) \quad (25)$$

donde S es la sección transversal del secundario y $M = N_S B_0(1)S$ el coeficiente de inducción mutua entre el primario y secundario (en aire).

Lo que medimos al poner el cilindro conductor secuencialmente en la bobina 1 y en la bobina 2 es:

$$V_1 - V_2 = 2 |\epsilon_i| \quad (26)$$

Con lo que habría que hacer el módulo del número complejo que aparece entre corchetes. Si consideramos la aproximación $\delta \gg a$ podemos cortar la serie en el primer término y tendremos:

$$V_1 - V_2 \cong \frac{\mu_0 \pi}{4S} M \sigma \omega^2 a^4 I_p \quad (27)$$

Lo que permite hacer un análisis muy sencillo en función de la corriente de alimentación del primario, y obtener la conductividad σ , siempre que se cumpla la aproximación antes citada.

Nota:

En la aplicación del Teorema de Ampère, se ha tenido en cuenta, por una parte, que la permeabilidad del medio conductor es $\mu \cong \mu_0$. Esta condición se cumple muy bien para ambos conductores utilizados en la práctica, Al y Cu, ya que tienen una susceptibilidad magnética muy pequeña (del orden de 10^{-5}). Por otra parte, como la frecuencia es muy baja (del orden del kHz), y los medios conductores utilizados tienen una constante dieléctrica $\epsilon_r \cong 1$, se puede ver que la corriente de desplazamiento es completamente despreciable frente a la corriente de conducción (corrientes de Foucault).

Apéndice 3: Corrientes de Foucault en cilindros huecos. Modelo teórico.

En este apéndice vamos a presentar el cálculo de las corrientes de Foucault inducidas en cilindros huecos y su efecto sobre el campo magnético en el interior de dichos cilindros. Consideraremos en este caso también simetría cilíndrica: cilindro conductor hueco muy largo (infinito) con un grosor de pared d pequeño comparado con el radio interior a del cilindro (ver figura 8). Llamaremos \vec{B}_{in} , \vec{E}_{in} a los campos electromagnéticos en el interior del cilindro (en el hueco), \vec{B}_c , \vec{E}_c y \vec{J}_c a los campos y las corrientes de Foucault en el medio conductor, y \vec{B}_{ext} , \vec{E}_{ext} a los campos en el exterior del cilindro.

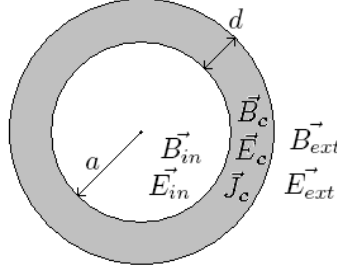


Figura 8: Campos en torno a una sección transversal del cilindro hueco

Los campos son armónicos, luego en particular:

$$\vec{B}_{in} = B_{in} e^{-j\omega t} \vec{u}_z \quad (28)$$

$$\vec{B}_{ext} = \vec{B}_0 = B_0 e^{-j\omega t} \vec{u}_z \quad (29)$$

Si realizamos las aproximaciones $\delta \gg d$ y $a \gg d$, podemos considerar que B_c , E_c y J_c son uniformes en d (Sabemos que, en realidad, tanto los campos como las corrientes tienen una penetración limitada en el medio conductor).

Vamos a calcular el campo eléctrico en el medio conductor (\vec{E}_c en $r = a$). Para ello utilizamos la ley de Faraday-Lenz, tomando como camino de integración una circunferencia de radio a (curva C_1 en la figura 9).

Como el grosor de la pared d es muy pequeño comparado con a , podemos considerar que la contribución al flujo de campo magnético es sólo la del campo \vec{B}_{in} .

$$\oint_{C_1} \vec{E}_c d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_1} \vec{B}_{in} d\vec{S} \quad (30)$$

Teniendo en cuenta las consideraciones de simetría de los campos tendremos:

$$2\pi a E_c = \frac{\partial B_{in}}{\partial t} \pi a^2 = j\omega B_{in} \pi a^2 \quad (31)$$

$$\vec{E}_c(t) = j \frac{\omega a}{2} B_{in}(t) \vec{u}_\varphi \quad (32)$$

Este campo, además, genera corrientes de Foucault en el conductor de la forma:

$$\vec{J}_c(t) = \sigma \vec{E}_c(t) = j \frac{\sigma \omega a}{2} B_{in}(t) \vec{u}_\varphi \quad (33)$$

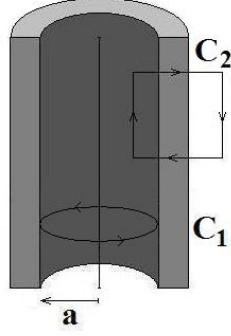


Figura 9: Caminos de integración

Ahora, con esta distribución de corrientes, podemos aplicar el teorema de Ampère a una curva C_2 (ver figura 9).

$$\oint_{C_2} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_2} \vec{J}_c d\vec{S} \quad (34)$$

Los campos \vec{B} tienen dirección axial, luego no hay contribución a la circulación de \vec{B} en los tramos horizontales y además, por la simetría \vec{B}_{in} y \vec{B}_{ext} son uniformes:

$$B_{in} - B_{ext} = \mu_0 J_c d = j \frac{\mu_0 \sigma \omega a d}{2} B_{in} \quad (35)$$

$$B_{in} \left(1 - j \frac{\mu_0 \sigma \omega a d}{2} \right) = B_{ext} \quad (36)$$

$$\vec{B}_{in} = \frac{1}{1 - j\Delta} \vec{B}_{ext} \quad \text{con:} \quad \Delta = \frac{\mu_0 \sigma \omega a d}{2} \quad (37)$$

Por tanto, vemos que para $\omega \rightarrow 0$, $B_{int} \rightarrow B_{ext}$, mientras que conforme aumenta la frecuencia B_{int} disminuye, es decir, hay un apantallamiento del campo en el interior del cilindro conductor. Conforme aumenta ω , aumentan también las corrientes de Foucault inducidas en el cilindro conductor, y por tanto aumenta el campo magnético que éstas generan. Este campo magnético se opone al campo exterior (ley de Lenz), y tiende a compensarlo.