

# RESONANCIA DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS. MEDIDA DE LA PERMITIVIDAD DIELECTRICA DE LIQUIDOS POLARES

Premio Rotary 1992  
Resonancias en cables y cavidades  
José Manuel Villalba, Francisco Javier Manjón y Antonio Guirao

Premio Rotary 1995  
Medida de la permitividad dieléctrica de líquidos polares  
Francisco Camarena y Miguel Angel Ballesteros

Objetivos: Estudiar las resonancias de ondas electromagnéticas en cables coaxiales y en una cavidad paralelepípeda, viendo las analogías con el caso de resonancias de ondas acústicas. Medir la permitividad dieléctrica compleja de líquidos polares.

Material: Analizador de espectros de 500 MHz, generador de barrido, osciloscopio, cables coaxiales y conectores BNC, caja paralele-pípeda, y tubos coaxiales de cobre vacíos y rellenos de líquido.

## 1. INTRODUCCIÓN

Se dispone en esta práctica de un analizador de espectros que junto a un generador de barrido y un osciloscopio nos va a permitir analizar la respuesta en frecuencia de un sistema, es decir, la amplitud de la señal transmitida por ese sistema en función de la frecuencia de la señal incidente. El generador de barrido proporciona una señal armónica sinusoidal de frecuencia variable. Esta señal se propaga a través de un cable coaxial hasta el sistema que se pretende estudiar, y la señal transmitida se propaga a través de otro cable coaxial hasta el analizador de espectros. El analizador de espectros procesa la señal recibida, representando en pantalla el resultado del coeficiente de transmisión en función de la frecuencia. El rango dinámico de funcionamiento del analizador de espectros de que disponemos en esta práctica va desde 0 Hz a 500 MHz. En ese rango la longitud de onda de la señal es mayor de 60cm, lo que permite estudiar cómodamente el fenómeno de resonancias electromagnéticas en cables y cavidades cuyos tamaños sean del orden de metros.

Es muy útil tener en mente la analogía con el caso de resonancias de ondas acústicas. En ambos casos se trata de la propagación de ondas en sistemas confinados, lo que significa que sólo determinadas longitudes de onda o frecuencias podrán hacerlo, dando lugar al fenómeno de resonancia.

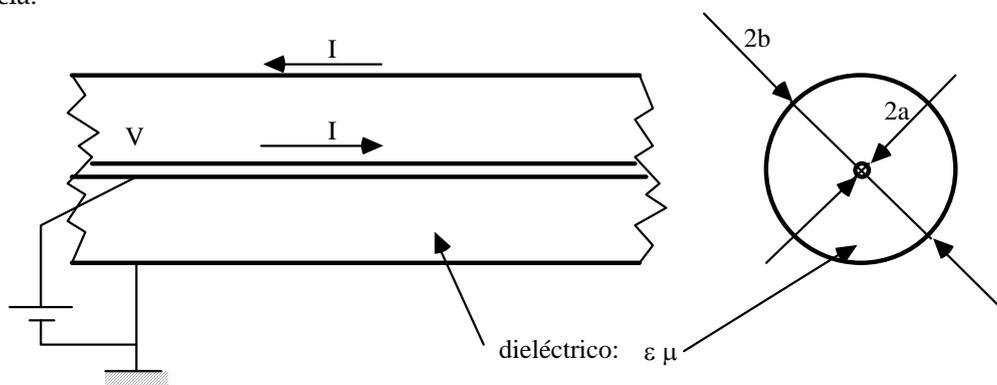


Figura 1. Cable RG58:  $2b=2.54$  mm,  $2a=0.74$  mm

En primer lugar consideraremos el caso de resonancias en cables coaxiales. Para ello conviene analizar el fenómeno de conducción eléctrica en un cable coaxial desde la perspectiva de los campos E y H generados en su interior. De acuerdo con la figura 1, si existe una diferencia de potencial V entre los conductores que definen el cable, existirá un campo eléctrico en el dieléctrico:

$$\vec{E} = \frac{V}{r \ln(b/a)} \vec{u}_r \quad (1)$$

y del mismo modo, si existe una corriente I, existirá también un campo magnético:

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \vec{u}_\varphi \quad (2)$$

Si la diferencia de potencial V y la intensidad I son variables con el tiempo, los campos E y H también serán variables con el tiempo. Los campos E(t) y H(t) serán solución de las ecuaciones de Maxwell y también solución de la ecuación de ondas. Si la dependencia temporal es armónica, escribimos E(z,t) y H(z,t) de la forma:

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_r \quad (3)$$

$$\vec{H}(z,t) = H_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_\varphi$$

donde las amplitudes  $E_0$  y  $H_0$  vienen dadas por las ecuaciones (1) y (2). Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones de Maxwell es fácil comprobar que el número de ondas k viene dado por:  $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ , y que la velocidad de fase es  $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ . También puede comprobarse que las amplitudes  $E_0$  y  $H_0$  tienen que guardar la proporción:

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (4)$$

La propagación de una onda electromagnética dada por las ecuaciones (3), significa que a lo largo del cable la diferencia de potenciales y la intensidad también serán ondas que pueden expresarse en la forma:

$$V(z,t) = V_0 \cos(\omega t - kz) \quad (5)$$

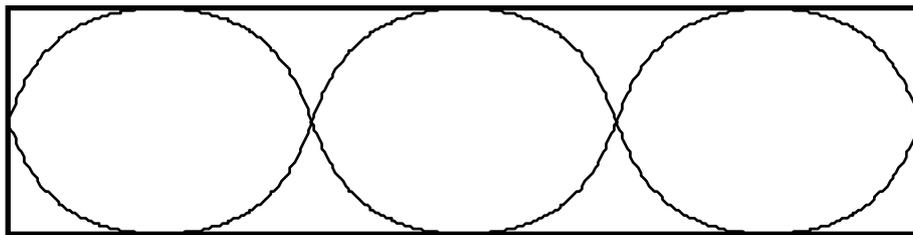
$$I(z,t) = I_0 \cos(\omega t - kz)$$

La relación de estas expresiones con las de los campos vendrá dada por las ecuaciones (1) y (2).

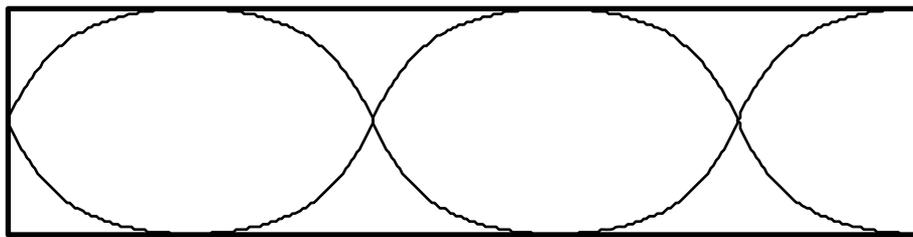
En resumen, al conectar un generador armónico a un cable coaxial, se generará y propagará una onda electromagnética en su interior análoga a la onda acústica que puede propagarse por un

tubo al conectar uno de sus extremos a un altavoz que emita una señal armónica. Al llegar la onda electromagnética al extremo del cable se producirá en el mismo una reflexión generándose una onda estacionaria en su interior. Es interesante distinguir dos casos típicos:

- Extremo del cable cortocircuitado (figura 2a): En este caso la diferencia de potencial en el extremo será cero; ello significa que la onda estacionaria de potencial tendrá un nodo en el extremo del cable. Es el caso equivalente al de una onda acústica reflejándose en el extremo de un tubo cerrado.
- Extremo del cable en circuito abierto (figura 2b): En este caso el extremo del cable será un vientre de la onda estacionaria de potencial. Este caso se correspondería con el de una onda acústica reflejándose en el extremo abierto de un tubo.



a



b

Figura 2

Por ello, las ondas estacionarias resonantes en un cable de longitud  $L$  con ambos extremos cortocircuitados serán aquellas tales que  $L$  sea un múltiplo de medias longitudes de onda, que es la separación entre dos nodos consecutivos:

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

y en el caso de cable con un extremo cortocircuitado y otro en circuito abierto será

$$L = n \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

Por último, el segundo tipo de sistema en el que estudiaremos las resonancias electromagnéticas es una cavidad paralelepípeda. En este caso las frecuencias de las resonancias vienen dadas por la expresión:

$$f_{pmn} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{d}\right)^2} \quad (8)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío (porque la cavidad está rellena de aire),  $a$ ,  $b$  y  $d$  son las dimensiones de la cavidad y  $p$ ,  $m$  y  $n$  son números enteros, no pudiendo ser dos o tres de ellos cero, simultáneamente (solo puede ser uno de los tres igual a cero, aunque puede que ninguno de los tres sea cero). Desde un punto de vista numérico, conviene ir probando diferentes combinaciones de los índices  $p$ ,  $m$ , y  $n$ , para obtener las frecuencias de resonancia más bajas de la cavidad.

Una aplicación importante de las propiedades de las resonancias en cables y cavidades es su empleo para medir la permitividad dieléctrica de medios materiales. Por una parte, nos plantearemos la medida de la permitividad dieléctrica de un medio con absorción despreciable, o sea con conductividad despreciable, empleando un método perturbativo y la cavidad paralelepípeda. Por otra parte, nos plantearemos también medir la permitividad compleja de líquidos polares, o sea, sustancias con una cierta conductividad cuyo origen está asociado al carácter polar de sus moléculas.

En el caso de emplear la cavidad paralelepípeda, el método más sencillo que podríamos imaginar sería llenar todo el interior de la cavidad con el medio material a estudiar. Con ello, la medida de las frecuencias de resonancia determinaría la permitividad mediante la ecuación (8) sin más que cambiar  $c$  por la velocidad de fase correspondiente al medio material, y así determinar su índice de refracción y permitividad dieléctrica. Sin embargo, lo más usual es disponer de muestras materiales pequeñas en comparación al tamaño de la cavidad, en cuyo caso se emplea un método perturbativo: se mide la pequeña variación que se produce en las frecuencias de resonancia al introducir la muestra del material que queremos analizar, y de dicha variación se deduce la permitividad mediante un cálculo aproximado (ver Apéndice: Perturbaciones en una cavidad).

En el caso de los líquidos polares, hemos de considerar que la propagación de una onda electromagnética en un medio material que tenga una cierta conductividad  $\sigma$  viene determinada por las ecuaciones de onda:

$$\Delta \vec{E} + \omega^2 \mu \epsilon \left(1 + \frac{j\sigma}{\omega \epsilon}\right) \vec{E} = 0$$

$$\Delta \vec{H} + \omega^2 \mu \epsilon \left(1 + \frac{j\sigma}{\omega \epsilon}\right) \vec{H} = 0$$
(9)

De tal modo que el medio se puede caracterizar mediante su permitividad compleja,  $\tilde{\epsilon}$ , y su correspondiente valor relativo,  $\tilde{\epsilon}_r$  :

$$\tilde{\epsilon}_r = \frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon_0} = \epsilon_r + \frac{j\sigma}{\omega \epsilon_0}$$
(10)

La permitividad dieléctrica de un líquido polar tiene la forma:

$$\tilde{\epsilon}_r = (1 + \chi_0) + j \chi_0 \tau \omega$$

$$\chi_0 = \frac{\epsilon_r(0) - 1}{1 + (\omega\tau)^2}$$
(11)

siendo  $\epsilon_r(0)$  la permitividad relativa estática, o sea para frecuencia cero ( $\omega=0$ ), y  $\tau$  el tiempo de relajación del medio. Por lo tanto, la combinación de las ecuaciones (10) y (11) nos conduce a:

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= 1 + \chi_0 \\ \sigma &= \chi_0 \tau \epsilon_0 \omega^2\end{aligned}\tag{12}$$

En el rango de medida de nuestro analizador de espectros, la mayor parte de materiales polares cumplen  $(\omega\tau)^2 \ll 1$ , en consecuencia:

$$\begin{aligned}\chi_0 &\cong \epsilon_r(0) - 1 = cte. \\ \epsilon_r &= 1 + \chi_0 \cong \epsilon_r(0) = cte.\end{aligned}\tag{13}$$

La medida de las resonancias de un tubo de cobre coaxial cortocircuitado y relleno del material dieléctrico nos va a permitir determinar  $\epsilon_r$  y  $\sigma$ , y con ello los parámetros característicos de la sustancia  $\epsilon_r(0)$  y  $\tau$ . Por una parte, la medida de las frecuencias de resonancia nos permitirá determinar la velocidad de propagación y con ello  $\epsilon_r$ . Por otra parte, la medida del factor de calidad de cada resonancia nos permitirá determinar las pérdidas del resonador y con ello la conductividad  $\sigma$ .

Desde un punto de vista circuital, el sistema formado por un cable coaxial cortocircuitado, y relleno de un material dieléctrico con pérdidas, puede ser interpretado como el circuito mostrado en la Figura 3.

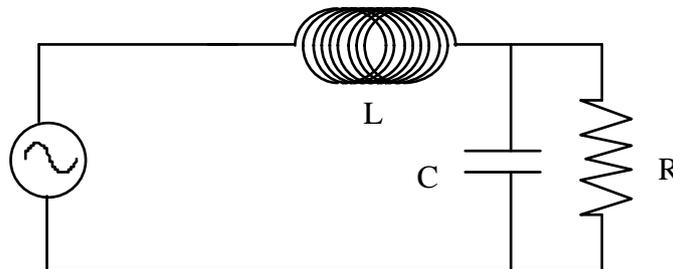


Figura 3

En este circuito resonante, el generador de corriente alterna representa la excitación del circuito (en nuestro caso proporcionada por el analizador de espectros), el condensador C representa la capacidad que existe entre los dos conductores del cable coaxial, la bobina L representa la autoinducción existente en el cable, y la resistencia R representa las pérdidas óhmicas del dieléctrico con pérdidas que rellena el cable. Observemos que las pérdidas óhmicas en los conductores de cobre del cable coaxial no se han considerado porque son despreciables (si se hubiesen tenido en cuenta, se habría añadido una resistencia en serie con la bobina).

El factor de calidad Q de un circuito resonante se define de la forma:

$$Q \equiv \omega_R \frac{\text{Energía almacenada en un periodo a la frecuencia } \omega_R}{\text{Potencia disipada en un periodo a la frecuencia } \omega_R}\tag{14}$$

donde  $\omega_R$  es la frecuencia de resonancia del circuito. El factor de calidad es una medida de la "bondad" del circuito resonante considerado, indicando las características de la resonancia. Esta definición es equivalente a la siguiente:

$$Q = \frac{\omega_R}{\Delta\omega} \quad (15)$$

donde  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ , siendo  $\omega_1$  y  $\omega_2$  las frecuencias donde la potencia se reduce a la mitad (alrededor de la frecuencia de resonancia  $\omega_R$ ). Para el circuito de la Figura 3 se puede demostrar (aplicando la ecuación (14) ó la ecuación (15)) que el factor de calidad resulta ser:

$$Q = R C \omega_R \quad (16)$$

Dado un sistema formado por dos conductores separados por un medio dieléctrico con pérdidas, se puede demostrar (ver Wangsness, por ejemplo) que el producto de la resistencia del sistema por su capacidad cumple siempre la igualdad:

$$R C = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (17)$$

Para demostrar esta propiedad, se considera de un lado el sistema formado por los dos conductores entre los que circula una corriente eléctrica en un medio de conductividad  $\sigma$ , y, de otro lado, el sistema condensador formado por los dos conductores separados por un medio de permitividad dieléctrica  $\epsilon$ . La propiedad (17) es general para cualquier sistema de dos conductores separados por un medio con pérdidas, y no está relacionada con los sistemas resonantes.

Combinando las ecuaciones (15), (16) y (17), encontramos:

$$\frac{1}{\Delta\omega} = RC = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\sigma} \quad (18)$$

Usando (18), (12) y (13) tenemos:

$$\Delta\omega = \left( \frac{\epsilon_r(0) - 1}{\epsilon_r(0)} \tau \right) \omega_R^2 \quad (19)$$

Esta ecuación nos permite determinar el tiempo de relajación  $\tau$  a partir de la medida de diferentes resonancias en un mismo tubo: ajustaremos por mínimos cuadrados  $\Delta\omega$  en función de  $(\omega_R)^2$ , y la pendiente de dicha recta nos proporciona  $\tau$  si conocemos previamente el valor de  $\epsilon_r(0)$ .

## 2. MONTAJE Y MEDIDAS EXPERIMENTALES

### 2.1. Resonancias en cables coaxiales y de un circuito LC serie

Antes de iniciar el estudio de las resonancias en varias configuraciones de cables coaxiales, debe leerse atentamente el Apéndice: Analizador de espectros de frecuencia.

El generador de barrido genera una señal armónica de frecuencia variable que se transmite a través de un cable coaxial hasta el analizador de espectros (ver Figura 4), apareciendo en la pantalla del analizador una gráfica aproximadamente plana. Cuando conectamos un sistema resonante en el punto A, se produce una absorción de energía a las frecuencias de resonancia. Esa energía absorbida por el sistema resonante aparece en el analizador de espectros como una disminución en la señal recibida. Así pues, las frecuencias de resonancia aparecerán en el espectro como picos de señal pequeña, dado que el cable coaxial absorberá energía apreciablemente sólo cuando está en resonancia.

Realizar el montaje de la Figura 4. En el extremo A del conector coaxial en forma de T se conectará en primer lugar el circuito LC serie montado con un conector coaxial, y se medirá su frecuencia de resonancia. Seguidamente se conectarán varios cables coaxiales de distinta longitud, aproximadamente entre 1 y 3 metros. Conviene empezar por un cable de longitud pequeña, dejando su extremo B en circuito abierto. Medir las frecuencias de resonancia de acuerdo con el Apéndice: Medida de frecuencias con el analizador de espectros. Para un cable dado, una vez medidas sus frecuencias de resonancia con su extremo en circuito abierto, se cortocircuitará el extremo B del cable (con la terminación correspondiente) y se medirán las nuevas frecuencias de resonancias.

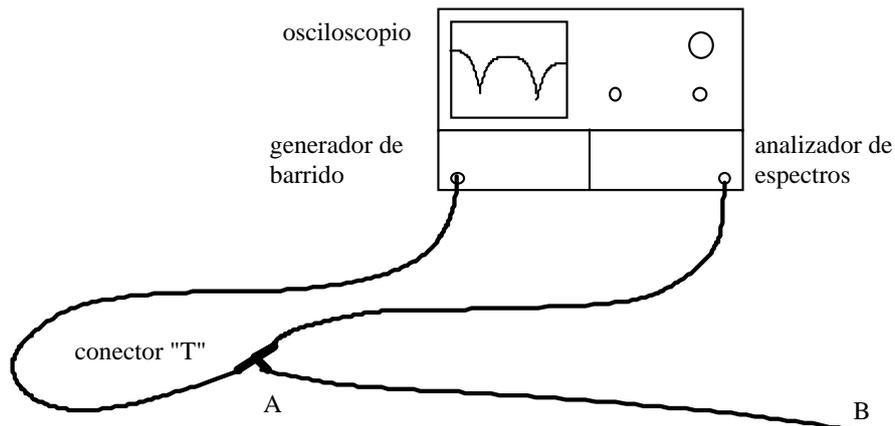


Figura 4

El resultado de estas medidas debe analizarse en base a las ecuaciones (6) y (7). El extremo A del cable se comporta como un extremo cortocircuitado. En el caso de tener el extremo B cortocircuitado la ecuación (6) define las resonancias del cable; esta ecuación reescrita en función de la frecuencia determina las frecuencias de resonancia  $f_n$ :

$$f_n = \frac{v}{2L} n \quad (20)$$

En el caso de tener el extremo B en circuito abierto, la ecuación (7) nos determina las frecuencias de resonancia  $f_n$  dadas por:

$$f_n = \frac{v}{2L} n - \frac{v}{4L} \quad (21)$$

Analizar la representación de  $f_n$  en función de  $n$  para ambos casos, de acuerdo con estas ecuaciones, y para cables de varias longitudes. Del ajuste de estas curvas podemos determinar la

velocidad de fase de la señal que se propaga en los cables ( $v$ ). El valor de dicha velocidad está relacionado con la permitividad dieléctrica relativa del material dieléctrico que rellena los cables coaxiales:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} \quad (22)$$

Así pues, se puede obtener el valor de  $\epsilon_r$ , y compararlo con el correspondiente valor del material de relleno de los cables coaxiales.

El montaje de la Figura 5 nos va a permitir analizar las resonancias en un anillo de cable coaxial. En principio cabría esperar observar todas las frecuencias que satisfagan  $L = (m\lambda)/2$ , de modo que aquellas ondas que cumplan esta condición cada vez que den una vuelta al anillo interferirán constructivamente consigo mismas. Sin embargo, en nuestro caso, a partir del punto A se propagarán dos ondas en sentidos contrarios, ambas de la misma amplitud, por lo que sólo aquellos que cumplan la condición citada con  $m$  impar se superpondrán constructivamente dando lugar a una onda estacionaria, o sea, una resonancia. La condición  $L = (m\lambda)/2$  con  $m$  impar indica que las frecuencias de resonancia  $f_n$  son:

$$f_n = \frac{v}{L} \quad n = \frac{v}{2L} \quad n=1,2,3... \quad (23)$$

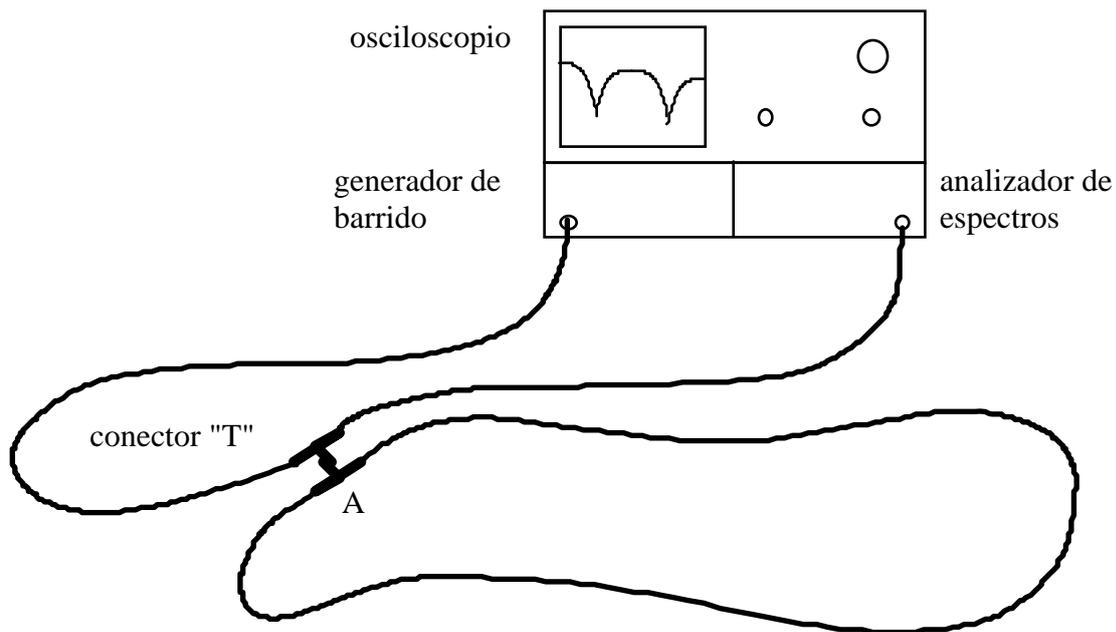


Figura 5

Medir estas frecuencias de resonancia para anillos de varias longitudes y analizar la representación gráfica de  $f_n$  en función de  $n$ . Obtener la velocidad de fase ( $v$ ), y el valor de la permitividad dieléctrica relativa ( $\epsilon_r$ ) del material dieléctrico que rellena el cable coaxial. Comparar dicho resultado con el obtenido en otras medidas.

## 2.2. Resonancias en una cavidad paralelepípeda

Disponemos de una cavidad paralelepípeda de lados  $a=100$  cm,  $b= 50$  cm y  $d= 25$  cm, una de cuyas superficies laterales es deslizable de tal forma que el lado  $a$  es variable. Dicha superficie deslizable contiene una espira con un conector coaxial, mientras que otra espira se ha situado en la cara fija opuesta de la caja paralelepípeda. Tal y como indica la Figura 6, una de estas espiras se conectará a la salida del generador de barrido (la que está en el lado fijo), y la otra a la entrada del analizador de espectros (la que está en el lado móvil). La primera espira genera unos campos  $E$  y  $H$  a su alrededor, que si tienen la frecuencia adecuada, resonarán en la cavidad excitando el modo correspondiente. Este modo se propaga en la cavidad, induciendo una fuerza electromotriz en la segunda espira, que a su vez generará la correspondiente onda en el cable conectado al analizador. En este caso, a diferencia de lo que ocurre en los cables coaxiales, hay transmisión apreciable de energía sólo a las frecuencias de resonancia de la cavidad. Por lo tanto, a las frecuencias de resonancia, se observará en el analizador de espectros un aumento de la señal recibida.

En este caso la identificación de las resonancias en la gráfica del osciloscopio no es tan fácil como en los casos anteriores. Resulta ser de bastante ayuda deslizar la cara móvil al mismo tiempo que se observa la pantalla, pues de este modo es más fácil identificar las resonancias, que deben desplazarse hacia frecuencias mayores al disminuir el lado  $a$  del paralelepípedo. En este montaje conviene dejar sin pulsar todos los atenuadores de 10db del Analizador de Espectros.

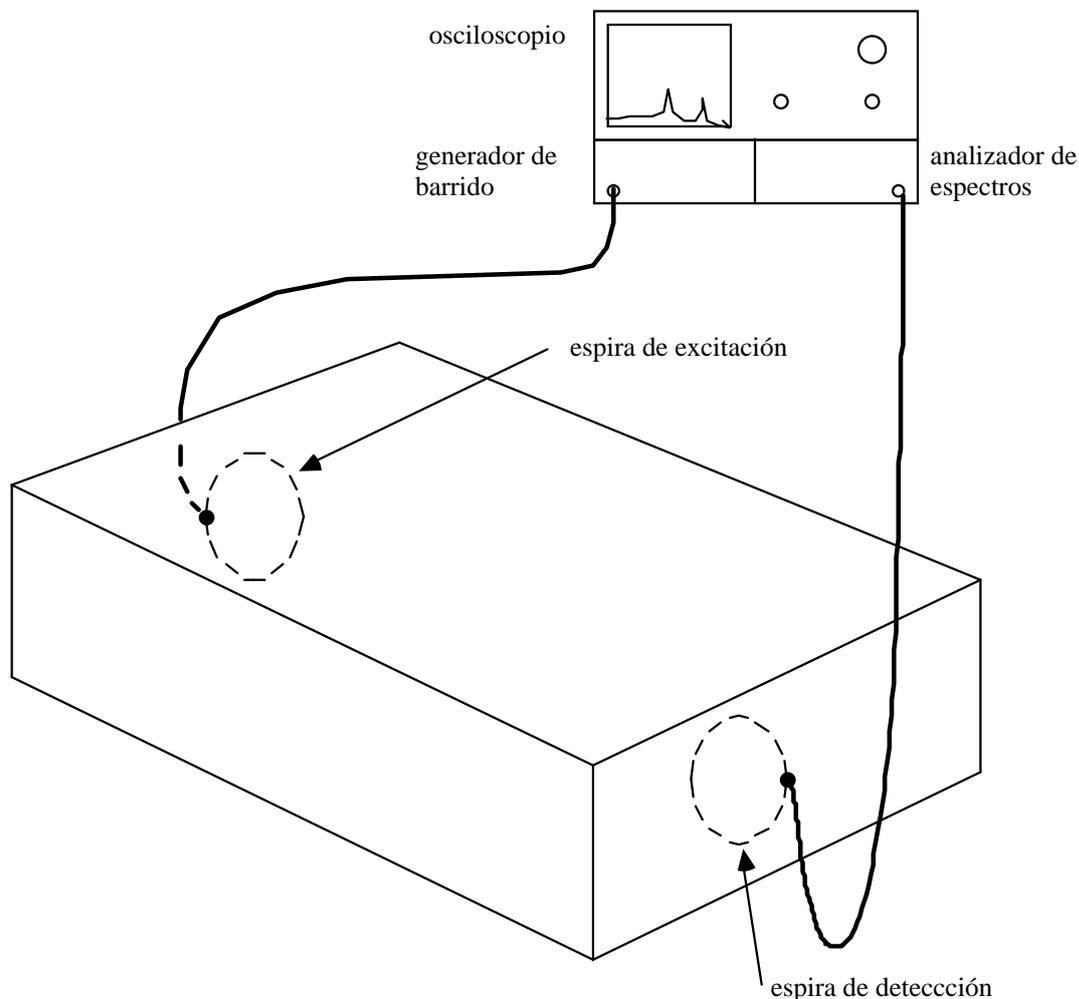


Figura 6

Dado el tamaño de la cavidad y el rango de frecuencias disponible, solo observaremos las dos primeras resonancias de la cavidad. Medir el valor de dichas frecuencias en función de la longitud del

lado a de la cavidad. Analizar gráficamente los resultados que se obtengan fundamentándose en la ecuación (8), por ejemplo representando  $f^2$  en función de  $(1/a)^2$ . La pendiente de estas rectas proporciona una medida indirecta de la velocidad de la luz en el vacío  $c$ .

### 2.3. Medida de la permitividad de un material dieléctrico (sin pérdidas)

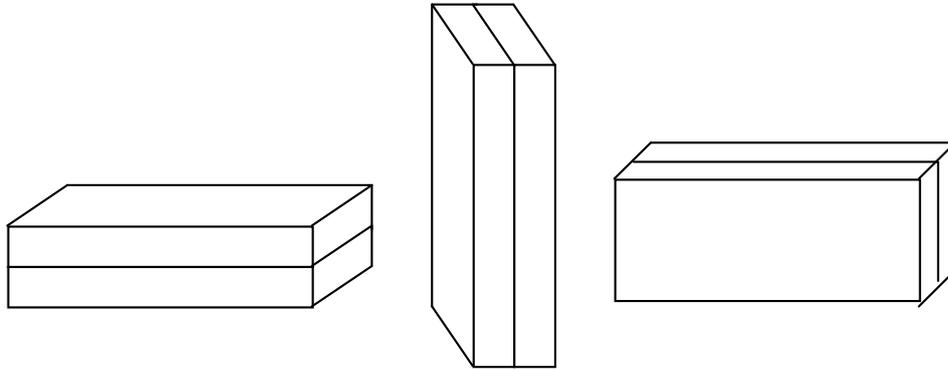


Figura 7

En nuestro caso el procedimiento será el siguiente. Disponemos de varios paralelepípedos de nylon de tamaño aproximado  $179 \times 153 \times 25 \text{ mm}^3$ . Antes de introducir estas muestras de material, nos cercioraremos que midiendo repetidamente la primera frecuencia de resonancia la dispersión es pequeña y/o despreciable. Seguidamente introduciremos una o varias muestras de nylon en el centro de la cavidad, y mediremos el cambio de la frecuencia de resonancia del modo fundamental. Es interesante realizar las medidas con varias de las orientaciones posibles de ambas muestras, como indica la Figura 7. Con estas medidas se calculará la permitividad dieléctrica del nylon (ver el Apéndice: perturbaciones en una cavidad).

También disponemos de 6 paralelepípedos de  $177 \times 65 \times 35 \text{ mm}^3$  rellenos de dieléctrico granulado. Estos paralelepípedos pueden, por ejemplo, apilarse en el centro de cavidad y medir el desplazamiento de la frecuencia de resonancia en función de la altura de la pila. Con estas medidas se calculará la permitividad dieléctrica del granulado (ver el Apéndice: perturbaciones en una cavidad).

### 2.4. Medida de la permitividad compleja de dieléctricos polares

Disponemos, para este apartado de varios tubos de cobre de 1 cm de diámetro, con un conector coaxial en un extremo, un hilo de cobre coaxial a lo largo de cada tubo, y un tapón de cobre en el otro extremo, cortocircuitando el hilo central y definiendo así una cavidad resonante cerrada. La tabla siguiente resume los tubos disponibles:

Longitud (mm)	Medio dieléctrico de relleno
1245	Aire
314	Agua
536	Metanol
163	Metanol

En este apartado se realizarán tres conjuntos de medidas. En primer lugar se medirán las resonancias y los factores de calidad de un tubo vacío (o sea relleno de aire), en segundo lugar se

medirán las frecuencias de resonancia y factores de calidad de los tubos disponibles rellenos de agua destilada, y en tercer lugar las de los rellenos de alcohol (metanol:  $\text{CH}_4\text{O}$ ). El valor de la permitividad dieléctrica relativa  $\epsilon_r$  se determina por el mismo procedimiento que para un cable coaxial cortocircuitado.

En cada serie de medidas necesitaremos medir las frecuencias de resonancia (siguiendo los procedimientos utilizados en apartados anteriores), y los factores de calidad. Para medir el factor de calidad de una resonancia deberemos centrarla en la pantalla, determinando el valor de la frecuencia de resonancia  $f_R = \omega_R / (2\pi)$ . Seguidamente ampliaremos la escala vertical del osciloscopio hasta 0.05 V/div., con lo que la escala real será de 1 dB por división, tal como puede verse en la Figura 8. La anchura de la resonancia 3 dB por encima del mínimo nos determinará  $\Delta\omega$  y con él Q:  $Q = \omega_R / \Delta\omega$ . (Recordemos que una variación de 3 dB equivale a la mitad de la potencia). La ecuación (19) nos permite determinar el tiempo de relajación  $\tau$  del material considerado (con el correspondiente ajuste de mínimos cuadrados).

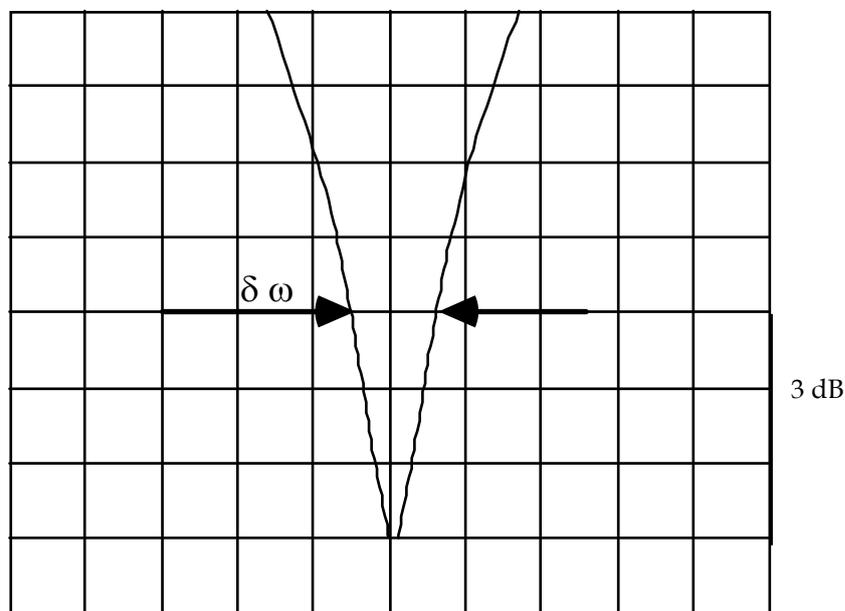


Figura 8

#### BIBLIOGRAFÍA

- J.M. Villalba, F.j. Manjón, A. Guirao y M.V. Andrés, "Resonancias de ondas electromagnéticas", Revista Española de Física, pp. 33-36, 1994.
- J. Pellicer-Porres, M.V. Andrés, " Experimental demonstration of the physics of resonant cavities", American Journal of Physics 73, 211-214 (2005).
- R.K.Wangsness, Campos electromagnéticos, Limusa, 1983, Cap. 26.
- M. Zahn, Electromagnetic field theory, Wiley, 1979, Apdos. 6.5.5 y 8.3.2, y Ej. 8.1.

- F.W. Sears, M.W. Zemansky y H.D. Young, Física Universitaria, Fondo Educativo Interamericano, México, 1986 (6ª edición), Cap. 22.
- R. Feynman, R.B. Leighton y M. Sands, Física (Volumen II: electromagnetismo y materia), Addison-Wesley Iberoamericana, 1987, Cap. 23.
- R. Feynman, R.B. Leighton y M. Sands, Física (Volumen I: mecánica, radiación y calor), Addison-Wesley Iberoamericana, 1987, Apdos. 23-3 y 23-4.
- J.R.Reitz, F.J.Milford y R.W.Christy, "Fundamentos de la Teoría Electro-magnética", Fondo Educativo Interamericano. 1984, Cap. 19)
- R.F. Harrington, Time-Harmonic Electromagnetic Fields, McGraw-Hill, 1961, Apdos. 7-1, 7-2 y 7-3.
- R.A. Waldron, Theory of guided electromagnetic waves, Van Nostrand Reinhold, Apdo. VI.A y VI.B.
- B.I.Bleaney y B.Bleaney, Electricity and Magnetism, Oxford University Press, 1976.
- Cualquier libro donde se trate el tema de vibraciones en cuerdas y resonancias de ondas acústicas en tubos.

### APÉNDICE: PERTURBACIONES EN UNA CAVIDAD

Al introducir en una cavidad de volumen  $V$  una muestra relativamente pequeña de dieléctrico, de permitividad  $\epsilon_r$  y volumen  $V_d$  (con  $V_d \ll V$ ), se producirá un pequeño desplazamiento de la frecuencia de resonancia. Este desplazamiento puede calcularse mediante métodos perturbativos, por ejemplo mediante la expresión:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = - \frac{\int_{V_d} \Delta \epsilon \vec{E}_{\text{int}} \cdot \vec{E}_0 dV}{2 \int_V \epsilon_0 \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0 dV}$$

(ecuación 7-18, p. 324, de R.F. Harrington, "Time-harmonic electromagnetic fields", McGraw-Hill, 1961) donde  $E_{\text{int}}$  es el campo en el interior del dieléctrico,  $\Delta \epsilon$  es la diferencia entre las permitividades dieléctricas ( $\Delta \epsilon = \epsilon - \epsilon_0$ ),  $E_0$  es el campo antes de introducir el dieléctrico,  $\omega_0$  es la frecuencia de resonancia antes de introducir el dieléctrico, y  $\omega$  es la frecuencia de resonancia después de introducir el dieléctrico. En el caso de aplicar esta expresión a una cavidad paralelepípeda en la que se perturbe el modo fundamental, y el dieléctrico se sitúe en el centro de la cavidad permitiendo la aproximación  $E_{\text{int}} \cong E_0 = \text{cte.}$  en  $V_d$ , entonces la expresión anterior se reduciría a:

$$\epsilon_r - 1 \approx -2 \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \frac{V}{V_d}$$

Otra posibilidad que puede ensayarse es tomar  $E_0 = A \cos(\pi x/a)$ ,  $A = \text{cte.}$  En cualquier caso, pueden estudiarse otras aproximaciones en R.F. Harrington y en R.A. Waldron, por ejemplo. También se recomienda leer el artículo de J. Pellicer-Porres y M.V. Andrés dado en la bibliografía.

## APÉNDICE: ANALIZADOR DE ESPECTROS DE FRECUENCIA

El sistema disponible consta de un Generador de Barrido HM8038, un Analizador de Espectros HM8028 y un osciloscopio. El conjunto del sistema genera una gráfica que es un espectro de frecuencia. El Generador de Barrido proporciona una señal armónica de amplitud constante cuya frecuencia varía de 0 Hz a 500 MHz. El Analizador de Espectros mide la amplitud de la señal para cada frecuencia, y el osciloscopio genera la gráfica: amplitud en función de la frecuencia.

El osciloscopio se utiliza simplemente como pantalla gráfica y sus controles deben permanecer fijos a lo largo de la práctica (salvo cuando explícitamente se indique lo contrario), y en la configuración XY:

- Controles de los canales A y B: ambos en la escala 0.5V, y ambos conmutadores de entrada en DC.

La salida X/Y OUT del Analizador de Espectros debe estar conectada con un cable especial al canal A (conector azul) y al canal B (conector rojo), y un pequeño cable coaxial debe mantener conectados los dos módulos HM8028 y HM8038 (OSC. OUT con OSC. INPUT). Estos dos cables de conexión **NO DEBEN DESCONECTARSE EN NINGUN MOMENTO.**

### Puesta en marcha y ajuste del sistema:

- a) Antes de poner en marcha los instrumentos, comprobar que no hay conectado ningún cable coaxial a la entrada (INPUT) del Analizador de Espectros, y que todos los conmutadores de atenuación de 10 dB están pulsados.
- b) Poner en marcha los instrumentos. Situar el selector de escala "Scanwidth MHz/Div" en la posición "Cal.Vert. Pos." y ajustar el control de posición vertical del canal B del osciloscopio para que la raya horizontal se sitúe justo una división pequeña por encima de la raya inferior de la pantalla.
- c) Seguidamente, ajustar el control "Center Frequency MHz" del Analizador de Espectros a 250 MHz, y ajustar el control "X position" del osciloscopio para que la imagen quede centrada.
- d) **Ajuste de cero:** situar el control Scanwidth en 50 MHz/div (o en la escala que se vaya a emplear), ajustar el control "Center Frequency MHz" del Analizador de Espectros a 0 MHz, y ajustar el control "X position" del osciloscopio para que el pico que genera el analizador quede centrado en la pantalla del osciloscopio. **(Este ajuste del cero deberá repetirse periódicamente, pues se desajusta al ir calentándose el aparato).**
- e) Conectar un cable coaxial directamente de la salida del Generador de Barrido (OUTPUT) a la entrada (INPUT) del Analizador de Espectros, y situar el control Scanwidth en 50 MHz/div. Desconectar alguno de los atenuadores de 10 dB del Analizador de Espectros para conseguir una imagen más o menos centrada en la pantalla del osciloscopio. En estos momentos debe de observarse una línea razonablemente horizontal, salvo un pico agudo a la izquierda.
- f) Posteriormente, los atenuadores de 10dB deberán conectarse o desconectarse en cada caso para que la imagen se vea bien, pero siempre asegurándose que la gráfica no se salga de la pantalla del osciloscopio por la parte superior. El control "level" del generador de barrido es un ajuste de la amplitud de la señal generada, y también puede utilizarse.

## **APÉNDICE: MEDIDA DE FRECUENCIAS CON EL ANALIZADOR DE ESPECTROS**

Una vez realizados los ajustes del Apéndice anterior, la pantalla del osciloscopio presentará una gráfica: amplitud en función de la frecuencia. El eje horizontal del osciloscopio representa la frecuencia  $f$ , y la escala viene fijada por el valor seleccionado con el control Scanwidth MHz/div. del Analizador de Espectros. Simultáneamente, la frecuencia del punto central del eje X del osciloscopio es siempre la que marca el lector del Analizador de Espectros, y puede seleccionarse con el Control "Center frequency MHz". Así, por ejemplo, si dicha frecuencia central es 250 MHz y la escala es 50 MHz/div., resultará que en la pantalla se verá el rango (0, 500) MHz, que es el mayor posible.

Procedimiento para la medida de las frecuencias de resonancia de un sistema concreto:

- 1) Inicialmente ajustar la frecuencia central a 250 MHz y elegir la escala 50 MHz/Div. Con ello cubrimos el rango entero de frecuencias disponibles. Repetir los ajustes de los apartados b) y c) anteriores.
- 2) Girar el control "Center frequency" hasta llevar al eje central de la pantalla del osciloscopio el pico cuya frecuencia se quiera medir.
- 3) Ampliar la escala con el control "Scanwidth" y reajustar el control "Center frequency".
- 4) El valor que marque el medidor del Analizador de Espectros será la frecuencia en MHz del pico que tengamos en ese instante centrado en la pantalla.
- 5) Recorrer ordenadamente todo el rango (0, 500) MHz, anotando la frecuencias de resonancia del sistema.