

EXPERIMENTOS CON MICROONDAS

Objetivos: Estudiar la polarización de las ondas electromagnéticas en la región de las microondas, las características de un polarizador lineal de microondas, y el estudio cualitativo y cuantitativo del efecto Doppler con ondas electromagnéticas, y su empleo para determinar la velocidad de un móvil.

Material: Emisor de microondas con antena de bocina y alimentador de 9V, detector con antena de bocina y medidor incorporado, polarizador de rejilla con soporte, osciloscopio digital y elementos mecánicos del montaje.

1. INTRODUCCIÓN

Se dispone en esta práctica de un emisor y un detector de microondas de 10.5 GHz, o sea de ondas electromagnéticas de 2.9 cm de longitud de onda. Esta radiación electromagnética nos va a permitir abordar varias experiencias relacionadas con la polarización y sus efectos, así como el efecto Doppler. Para ello esta práctica tiene una primera parte en la que se miden algunas características generales de la radiación electromagnética disponible en nuestro montaje experimental. Posteriormente, en una segunda parte, se estudiará un polarizador de microondas formado por un conjunto de varillas metálicas delgadas, alineadas paralelamente en un plano y uniformemente espaciadas. Este estudio permite determinar el estado de polarización de la radiación disponible. Finalmente abordaremos el estudio del efecto Doppler por reflexión en un objeto en movimiento, lo que nos permitirá medir la velocidad de dicho objeto.

1.1 DIAGRAMA DE RADIACIÓN DE UNA ANTENA DE BOCINA

En esta práctica vamos a usar como emisor y receptor de microondas antenas de bocina, por lo que vamos a dedicar un estudio detallado al estudio de estas antenas.

Una antena de bocina es un emisor de ondas electromagnéticas que se utiliza habitualmente en la región de las microondas. La teoría de radiación por aberturas es el fundamento básico para analizar las características radiantes de las antenas de abertura; esta teoría está fuera del alcance de este curso, aunque en la asignatura de Óptica se dan algunos fundamentos básicos de la teoría de difracción por aberturas.

Desde un punto de vista básico, podemos considerar que una antena de abertura radia ondas planas en todas las direcciones del espacio; estas ondas planas tienen diferente amplitud. La representación gráfica de la potencia transportada por estas ondas en las diferentes direcciones del espacio constituye un elemento fundamental para caracterizar una antena. A esta representación se le denomina **diagrama de radiación de la antena**. El diagrama de radiación es habitualmente una representación en tres dimensiones (θ, ϕ, P) : en el plano (θ, ϕ) se representa la dirección que deseamos caracterizar, y la coordenada Z asociada a ese punto representa la potencia transportada por la onda emitida en esa dirección (P) . Así pues, el diagrama de radiación de una antena nos permite visualizar la forma en que la antena distribuye la energía en todas las direcciones del espacio. Habitualmente se representan dos cortes de este diagrama de radiación, con lo que evitaremos tener que usar gráficos tridimensionales; estos planos - para el tipo de antena que nos ocupa - son los planos que contiene al campo eléctrico (plano E), y el que contiene al campo magnético (plano H).

El diagrama de radiación de una antena de abertura está íntimamente relacionado con la distribución del campo electromagnético en su abertura. La teoría de radiación por aberturas demuestra que el diagrama de radiación de una antena es la transformada de Fourier del campo

electromagnético que existe en la abertura radiante. Para el caso que nos ocupa, el campo electromagnético en la abertura de la antena es de la forma (ver Figura 1):

$$\vec{E}_{abertura} = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \vec{u}_y \quad ; \quad -a/2 \leq x \leq a/2 \quad (1)$$

donde E_0 es la amplitud del campo eléctrico del campo en la abertura.

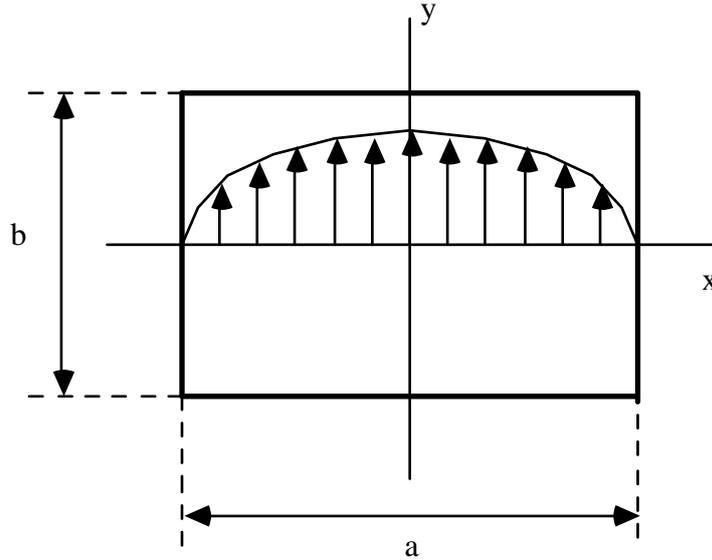


Figura 1. Campo eléctrico en la abertura de una antena de bocina.

Calculando la transformada de Fourier de la ecuación (6) encontramos el campo radiado por la antena de abertura en cualquier punto del espacio (ver Apéndice B). Para nuestro caso, elegiremos el sistema de referencia xyz (y el sistema de coordenadas esféricas asociado) de la Figura 1. Teniendo en cuenta que la radiación se produce hacia $z > 0$, cuando la expresión del diagrama de radiación se escribe para el plano $y=0$, ó plano-H (porque el campo magnético está contenido en este plano), encontramos que la expresión teórica del diagrama de radiación (expresado en potencia) viene dada por:

$$P(\theta, \phi = 0^\circ) = P_0 \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi a \text{sen } \theta}{\lambda}\right)}{1 - \left(\frac{2a \text{sen } \theta}{\lambda}\right)^2} \right)^2 \quad (2)$$

donde $P(\theta, \phi=0^\circ)$ es la potencia radiada en la dirección θ del plano $\phi=0^\circ$ (plano-H), y P_0 es la potencia radiada en la dirección normal a la antena ($\theta=0^\circ$). El diagrama de radiación en el plano $x=0$, ó plano-E (porque el campo eléctrico está contenido en dicho plano) viene dado por (ver apéndice B):

$$P(\theta, \phi = 90^\circ) = P_0 \left(\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi b \text{sen } \theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi b \text{sen } \theta}{\lambda}} \right)^2 \quad (3)$$

donde $P(\theta, \phi=90^\circ)$ es la potencia radiada en la dirección θ del plano $\phi=90^\circ$ (plano-E), y P_0 es la potencia radiada en la dirección normal a la antena ($\theta=0^\circ$). En la Figura 2 mostramos esquemáticamente los planos H y E de la antena de bocina.

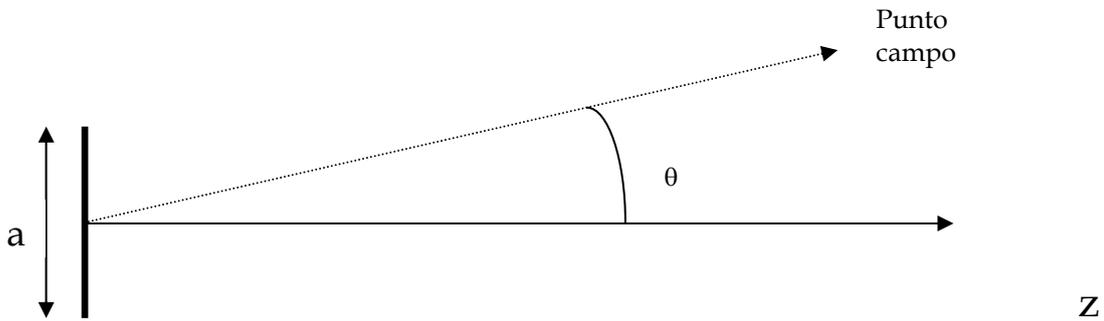


Figura 2 (a). Plano-H de una antena de bocina.

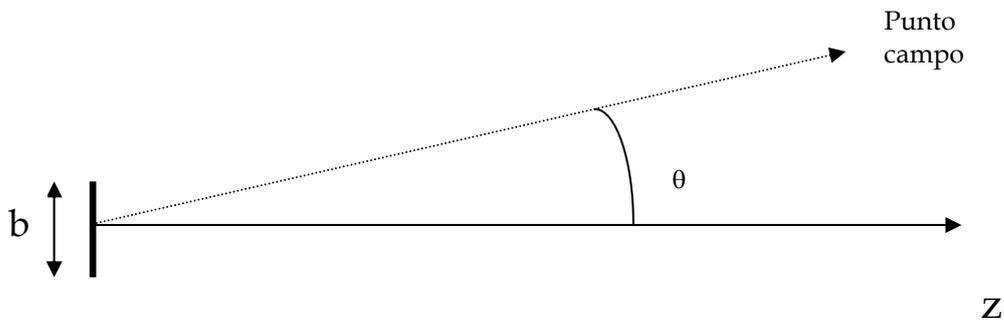


Figura 2 (b). Plano-E de una antena de bocina.

1.2 POLARIZADOR DE REJILLA

Un polarizador de rejilla está formado por un conjunto de varillas conductoras equiespaciadas, paralelas entre sí, y dispuestas en un plano, como indica la Figura 3. Las rejillas de varillas se usan en el rango de las microondas como polarizadores lineales. Para entender el funcionamiento de este tipo de dispositivos pasivos, comenzaremos por suponer que una onda electromagnética incide normalmente sobre una rejilla de varillas. En la Figura 3, dicha onda incide perpendicularmente al plano del papel, "entrando" en la rejilla que hay dibujada. El campo eléctrico de dicha onda se puede descomponer en dos componentes, una componente paralela a las varillas ($E_{||}$), y otra componente perpendicular a las mismas (E_{\perp}),

$$\vec{E} = E_{||} \vec{u}_{||} + E_{\perp} \vec{u}_{\perp}$$

$$E_{||} = E_0 \sin \beta ; E_{\perp} = E_0 \cos \beta \quad (4)$$

donde E_0 es la amplitud del campo incidente, y donde $\vec{u}_{||}$ y \vec{u}_{\perp} son los vectores unitarios en las direcciones paralela y perpendicular a las varillas, respectivamente.

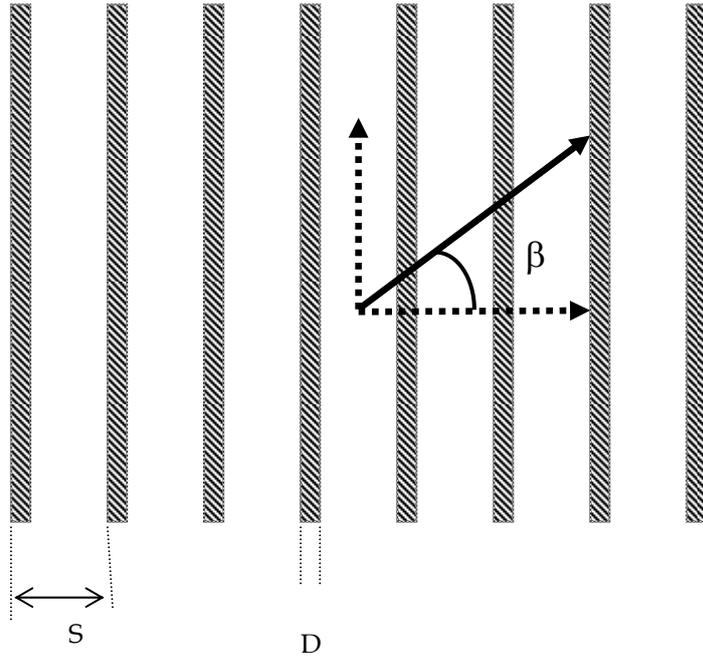


Figura 3. Polarizador de rejilla de varillas

La componente del campo eléctrico paralela a las varillas conductoras induce corrientes eléctricas sobre las mismas. Estas corrientes son, en términos relativos, grandes, en el sentido que los electrones pueden moverse a lo largo de toda la varilla. La corriente inducida produce la reflexión de dicha componente; a este fenómeno se le denomina **efecto Hertz**. Por contra, la componente del campo eléctrico perpendicular a las varillas induce corrientes que son, en sentido relativo, pequeñas (comparadas con las del otro caso), ya que los electrones solo pueden moverse en la dirección transversal de las varillas; dicha componente atraviesa la rejilla prácticamente sin alterarse. A este fenómeno se le denomina **efecto Dubois**. Así pues, la componente paralela a las varillas es fundamentalmente reflejada, mientras que la componente perpendicular a las varillas es fundamentalmente transmitida: la rejilla de varillas se comporta como un polarizador lineal, y el eje de dicho polarizador (el eje indica la dirección del campo eléctrico transmitido) está en la dirección perpendicular a las varillas (ver Figura 4).

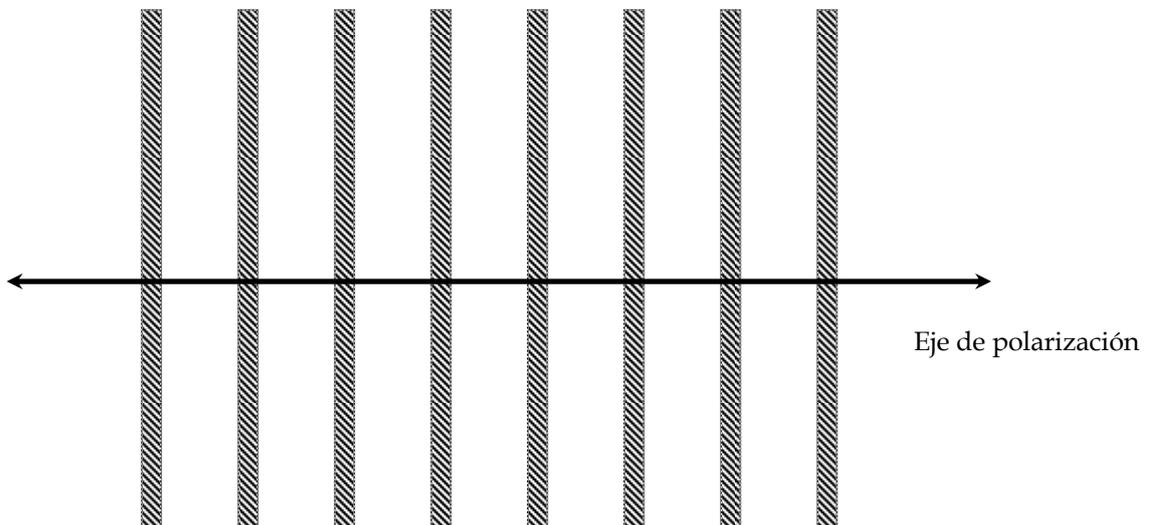


Figura 4. Eje de polarización de la rejilla de varillas

La justificación electromagnética del efecto Hertz y del efecto Dubois no es sencilla, y está fuera del alcance de esta asignatura. Sin embargo, en la bibliografía existen expresiones que permiten caracterizar las rejillas de varillas en función de sus parámetros geométricos (Diámetro de cada varilla, D , y separación entre las varillas, S , ver Figura 3), y de la longitud de onda de la onda incidente (λ). Definiendo el coeficiente de transmisión en potencia para cada una de las componentes del campo eléctrico por separado como

$$T_{\parallel} \equiv \frac{\text{Potencia transmitida en la dirección paralela}}{\text{Potencia incidente en la dirección paralela}} = \frac{|E_{\parallel trans.}|^2}{|E_{\parallel incid.}|^2}$$

$$T_{\perp} \equiv \frac{\text{Potencia transmitida en la dirección perpend.}}{\text{Potencia incidente en la dirección perpend.}} = \frac{|E_{\perp trans.}|^2}{|E_{\perp incid.}|^2}$$
(5)

encontramos que dichos coeficientes de transmisión (para el caso $S < \lambda$) vienen dados por:

$$T_{\parallel} = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{2S}{\lambda} \ln \left(\frac{S}{\pi D} \right) \right)^2}$$

$$T_{\perp} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi^2 D^2}{2\lambda S} \right)^2}{1 + \left(\frac{\pi^2 D^2}{2\lambda S} \right)^2}$$
(6)

Estas expresiones permiten justificar teóricamente el comportamiento de las rejillas de varillas que vamos a usar como polarizadores lineales de microondas a la frecuencia de trabajo, ya que para la rejilla que tenemos: $T_{\parallel} \approx 0$ y $T_{\perp} \approx 1$.

1.3 EFECTO DOPPLER

(Premio Rotary 1990; M^a. Angeles Hernández, José Luis Palau y Miguel A. Mora)

En nuestro montaje experimental el efecto Doppler se produce por reflexión de un haz de microondas en una pequeña esfera metálica que constituye la masa de un péndulo simple. Dado el orden de magnitud de las velocidades involucradas en nuestro experimento, es correcto despreciar los efectos relativistas, y considerar que el cambio relativo de frecuencia angular ω vendrá dado por:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \pm \frac{v_D}{c}$$
(7)

donde c es la velocidad de la luz y v_D es la velocidad del móvil que determina el efecto Doppler. En nuestro caso, como el efecto Doppler se produce por reflexión, cabe interpretar la interacción de la radiación con el móvil como un fenómeno doble. Por una parte el móvil hace de receptor produciéndose un efecto Doppler asociado a su velocidad v_{mv} y, por otra parte, el móvil hace de

reemisor de la radiación produciéndose un segundo efecto Doppler. Dado el orden de magnitud de estos efectos, podemos calcular el efecto resultante por simple superposición, o sea considerar que en nuestro caso la velocidad v_D de la ecuación (7) está determinada por dos veces la velocidad del móvil. Más aún, si la radiación incidente y la reflejada forman un ángulo α con la dirección del móvil, tal como la Figura 6 representa para nuestro montaje experimental, resultará que:

$$v_D = 2 v_m \cos \alpha \quad (8)$$

El efecto Doppler que podemos estimar a partir de las ecuaciones (7) y (8) para velocidades del móvil del orden de 1 m/s es del orden de 10^{-8} . Ello supone un cambio relativo de la longitud de onda del mismo orden de magnitud, resultando absolutamente imposible pretender medir dicho efecto directamente.

La solución que se adopta en esta práctica es hacer interferir la señal modificada por efecto Doppler con otra de referencia no alterada. Podemos escribir los campos eléctricos en el detector correspondiente a estas señales de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{E}_0 e^{j\omega t} \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_0 e^{j(\omega' t + \varphi)} \end{aligned} \quad (9)$$

donde E_1 es la señal de referencia, y E_2 la señal modificada por efecto Doppler, con $\omega' = \omega + \Delta\omega$, y donde φ es el posible desfase entre ambas señales. Hemos supuesto por simplicidad que la amplitud de ambas señales es igual.

La potencia correspondiente a la superposición de ambas señales en el detector vendrá dada por la expresión:

$$P \propto E_0^2 [1 + \cos (\Delta\omega t + \varphi)] \quad (10)$$

que en esencia no es más que un fenómeno de pulsaciones. La representación gráfica de la potencia detectada P en función del tiempo t permitirá medir la frecuencia angular $\Delta\omega$ correspondiente a dichas pulsaciones. La velocidad del móvil quedará determinada mediante la relación:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\lambda} 2v_m \cos\alpha \quad (11)$$

2. MEDIDAS EXPERIMENTALES

2.1. MEDIDA DEL DIAGRAMA DE RADIACIÓN DEL EMISOR

Realizar el montaje de la Figura 5 ajustando la posición de la boca de la bocina del emisor sobre el eje de rotación de las reglas calibradas, y situando el detector a una distancia de unos 35-40 cm. Medir la señal detectada S en función del ángulo θ y leer el Apéndice A antes de realizar las medidas.

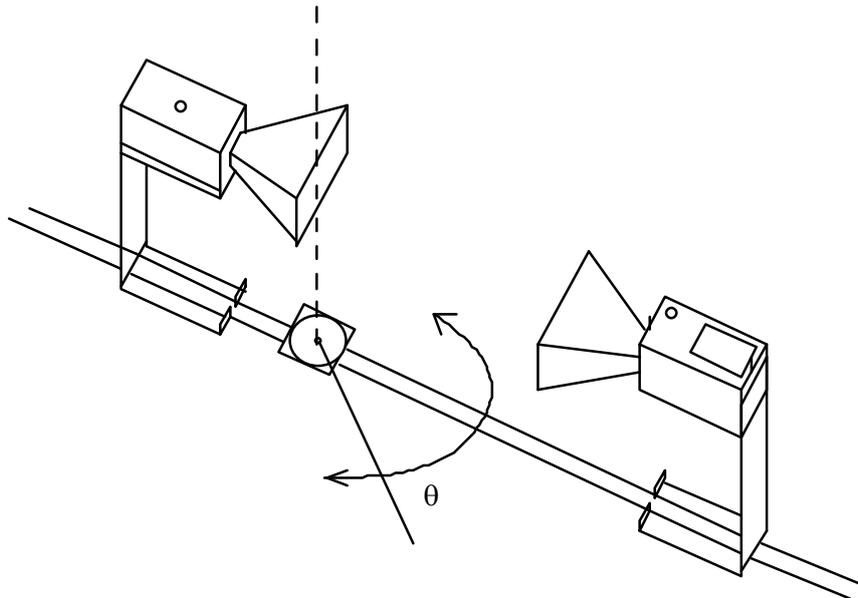


Figura 5

Realizar las siguientes medidas:

- 1) Diagrama de radiación en el plano-H: Antena emisora y antena receptora con el ángulo $\alpha=0^\circ$ (ver Figura 6).
- 2) Diagrama de radiación en el plano-E: Antena emisora y antena receptora con el ángulo $\alpha=90^\circ$ (ver Figura 6).

Para modificar el ángulo α deberemos aflojar un poco el tornillo de fijación.

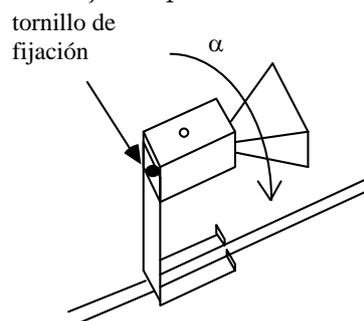


Figura 6

Deberemos tener en cuenta que el detector no mide directamente potencia: la relación (no lineal) entre la señal recibida S y la potencia P viene dada por:

$$P = k S^{1/0.76} \quad (12)$$

donde k es una constante que no precisamos conocer. Utilizar estas medidas para representar el diagrama de radiación del emisor $P(\theta)$, y determinar el ángulo θ_0 correspondiente a la dirección en la

que la intensidad radiada es la mitad del valor central máximo. Para representar el diagrama de radiación en uno de los dos planos (plano-H ó plano-E), conviene seguir el siguiente esquema:

- i) Modificando el ángulo θ desde -90° hasta $+90^\circ$, tomar medidas de S en función de θ .
- ii) Calcular la potencia asociada usando la ecuación (12) con $k=1$.
- iii) Normalizar los datos obtenidos a la unidad: dividiremos todas las potencias medidas por el valor máximo (que debe estar entorno a $\theta=0^\circ$).
- iv) Representar en una gráfica el diagrama de radiación del plano medido junto con la curva teórica (ecuaciones (2) ó (3)); la curva teórica también debe normalizarse tomando $P_0=1$.

Tened en cuenta que los valores de a y b de las antenas usadas son los siguientes:

$$a = 92 \pm 1 \text{ mm}$$

$$b = 72 \pm 1 \text{ mm}$$

Finalmente en este apartado vamos a estudiar las características polarizadoras de las antenas que estamos utilizando. Para ello, seguiremos con el montaje de la Figura 5, enfrentando las antenas (ángulo $\theta=0^\circ$). Seguidamente, prepararemos la antena emisora para emitir con polarización vertical, es decir, que el campo eléctrico sea perpendicular a la mesa donde se realiza la experiencia; para ello fijaremos el ángulo descrito en la Figura 6 a cero ($\alpha=0^\circ$). A continuación mediremos la señal detectada en la antena receptora cuando giramos su ángulo α en el intervalo $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$. La señal recibida por la antena receptora será la proyección del campo eléctrico incidente en la dirección indicada en la Figura 7: la antena receptora se comporta como un polarizador lineal. Representaremos en una gráfica la potencia (tomando en la ecuación (12) la constante $k=1$) en función del ángulo α ; dicha gráfica debe estar normalizada a su valor máximo. En dicha gráfica podemos añadir la curva teórica correspondiente, que es la conocida ley de Malus:

$$P(\alpha) = P(\alpha = 0) \cos^2 \alpha \quad (13)$$

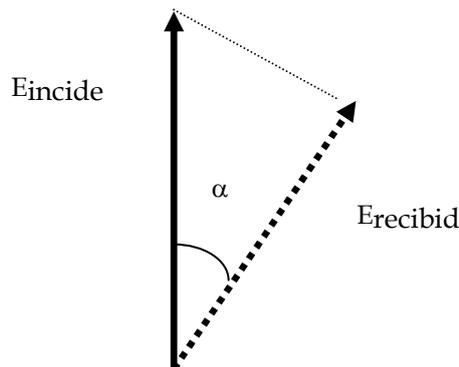


Figura 7. Ley de Malus aplicada a las antenas

2.2. MEDIDA DE λ : INTERFERÓMETRO FABRY-PEROT

Realizar el montaje de la Figura 8 utilizando las láminas dieléctricas como superficies reflectoras para definir la cavidad Fabry-Perot. Las láminas dieléctricas dejan pasar una parte de la potencia incidente, reflejando el resto de dicha energía. La potencia transmitida por un Fabry-Perot es máxima cuando el espaciado entre las superficies reflectoras es un múltiplo de $\lambda/2$.

Ajustar la separación entre las láminas dieléctricas para detectar un máximo relativo en la transmisión. Seguidamente desplazar una de las láminas dieléctricas e ir contando los máximos observables en el detector. Anotar el incremento de separación entre láminas Δs que produce la observación de 10 máximos (aproximadamente 15 cm), y utilizar esta medida para determinar λ :

$$\Delta s = 10 \frac{\lambda}{2} \quad (14)$$

Repetir varias veces la determinación de λ partiendo de separaciones iniciales distintas. Comparar con el valor teórico obtenido a partir de la frecuencia del generador (Recordemos que $c=\lambda f$,

donde c es la velocidad de la luz en el vacío, λ es la longitud de onda, y f es la frecuencia de la radiación).

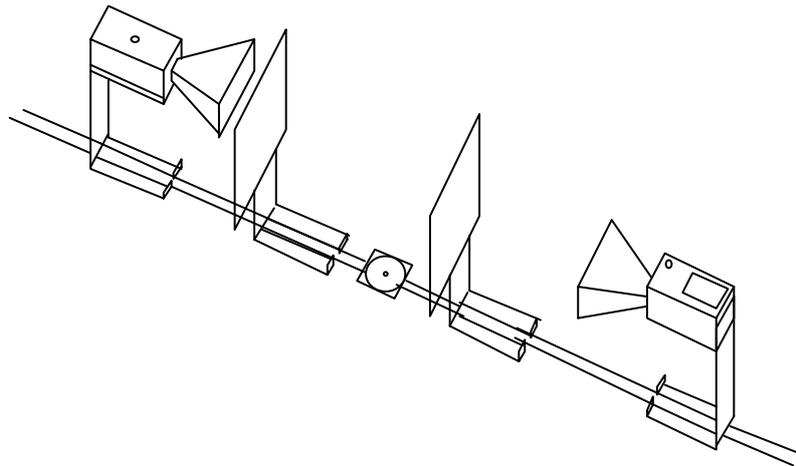


Figura 8

2.3. CARACTERÍSTICAS DE UNA REJILLA POLARIZADORA

La ecuación (6) permite justificar el comportamiento de la rejilla como un polarizador lineal de microondas. Para poder calcular los coeficientes de transmisión de cada una de las componentes, debemos saber que el diámetro de las varillas es $D=1.8\pm 0.5$ mm, y la separación entre ejes es $S=5.3\pm 0.5$ mm.

Realizar el montaje de la Figura 9 con las antenas alineadas, procurando que la distancia d entre la rejilla y cada una de las antenas (figura 9) sea como mínimo de 35 cm. Medir la señal detectada en función del ángulo ψ (ángulo formado entre el eje del polarizador y la vertical) en el intervalo $\psi \in [0^\circ, 180^\circ]$, con ambas bocinas orientadas con $\alpha=0^\circ$. Utilizar la ecuación (12) con la constante $k=1$ para representar la potencia recibida en función del ángulo girado ψ . La curva teórica asociada se calcula utilizando las ecuaciones (4) y (13), resultando:

$$P(\psi) = P(\psi = 0^\circ) \cos^4 \psi \quad (15)$$

Representar en una misma gráfica la curva experimental y la curva teórica, teniendo en cuenta que ambas curvas deben estar normalizadas a la unidad.

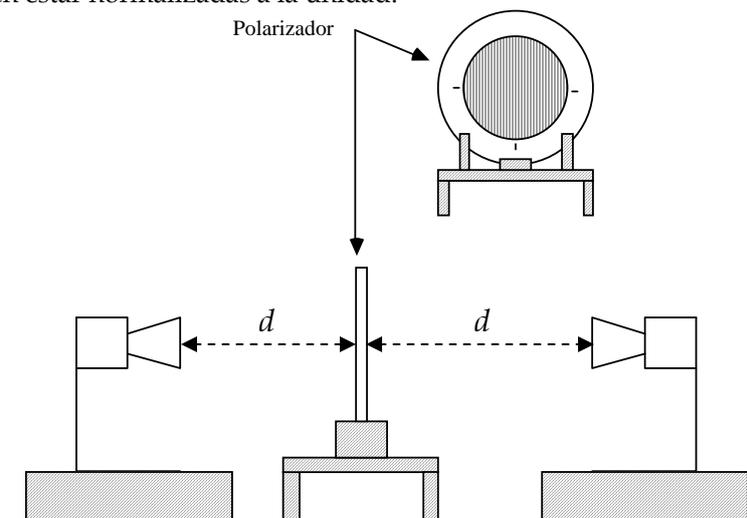


Figura 9

2.4. EFECTO DOPPLER

Realizar el montaje de la Figura 10 montando las bocinas en las guías fijas que forman un ángulo de 15° . Usar como reflector una de las láminas dieléctricas utilizadas en el apartado 2.2. Ajustar en posiciones simétricas ambas bocinas emisora y receptora respecto a la lámina reflectora. Realizar este ajuste de las posiciones sin el péndulo, buscando el máximo de señal en el detector. Situar el péndulo en el centro, el reflector a unos 6 cm para empezar, y hacerlo oscilar en dirección perpendicular al reflector y simétrica respecto a las bocinas. Es necesario mantener la simetría en el montaje para poder calcular distancias y ángulos correctamente.

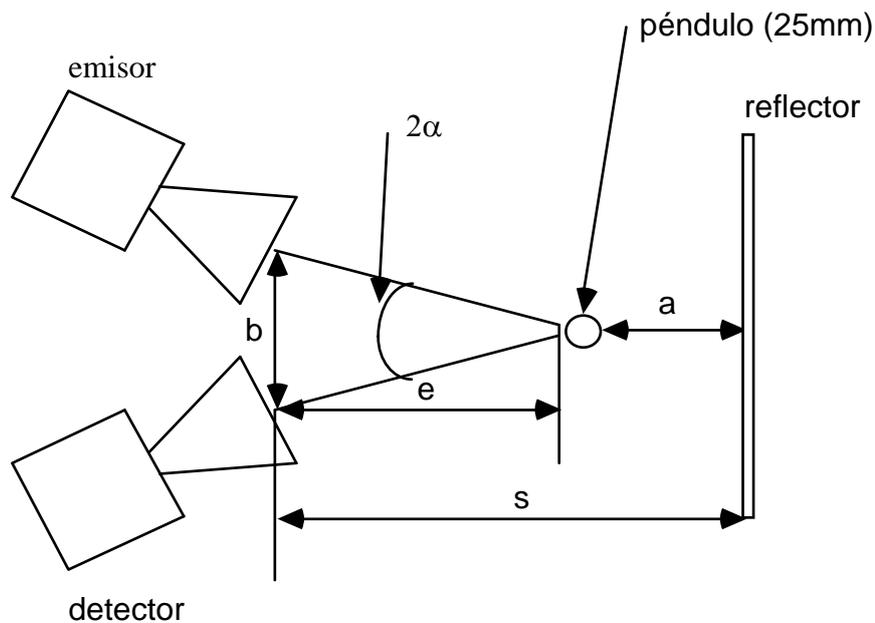


Figura 10

La observación del efecto Doppler consistirá en registrar en el osciloscopio la señal dada por el detector cuando el péndulo está oscilando; esta señal está descrita teóricamente en la ecuación (10). Es interesante destacar que las señales que se superponen en dicha ecuación (10) corresponden a la señal reflejada directamente por el reflector (señal de referencia, E_1 en la ecuación (9)), y a la señal reflejada por el péndulo (E_2 en la ecuación (9)). Para poder repetir una medida concreta es necesario que el movimiento del péndulo sea el mismo, por ello es útil iniciar siempre el movimiento en su posición tangente al reflector, con lo que aseguramos una amplitud inicial de oscilación definida.

La Figura 11 muestra una señal tipo obtenida en este experimento. Se observa un período de repetición T que coincide con el del péndulo. Dentro de un período T , la señal puede dividirse en dos mitades, siendo una la imagen especular de la otra. Los puntos de máxima elongación del movimiento oscilatorio del péndulo corresponden a los puntos de simetría, marcados con la letra P en la figura 11. Entre dos de esos puntos P se observa una señal oscilante (de período τ) cuya frecuencia viene determinada por el efecto Doppler (ecuación (11)).

Medir T y τ en el osciloscopio. En el Apéndice C se hace una breve descripción del manejo del osciloscopio para hacer las medidas. El período τ en la zona central entre dos puntos P consecutivos corresponde al paso del péndulo por su posición de equilibrio, o sea cuando la velocidad es máxima. Medir varias veces T y τ para cada experiencia. Hacer un estudio sistemático de T y τ en función de la longitud del péndulo y de la amplitud de las oscilaciones. La medida de τ puede realizarse ampliando la escala horizontal del osciloscopio (ver apéndice C). El tiempo τ permite calcular la velocidad del péndulo:

$$\tau = \frac{\lambda}{2v_m \cos \alpha} \quad (16)$$

y por otra parte, los datos α y T permitirán hacer una comprobación a partir de las ecuaciones características del péndulo.

Como ampliación de las medidas propuestas, es interesante recordar las ecuaciones del péndulo para el caso más general, y para el caso de pequeñas oscilaciones (movimiento armónico simple). Las medidas de la velocidad en diferentes puntos de la trayectoria realizadas en esta práctica permiten validar las ecuaciones del movimiento del péndulo en sus diferentes aproximaciones. Nótese que hay que hacer las medidas de distancias necesarias para determinar el ángulo α .

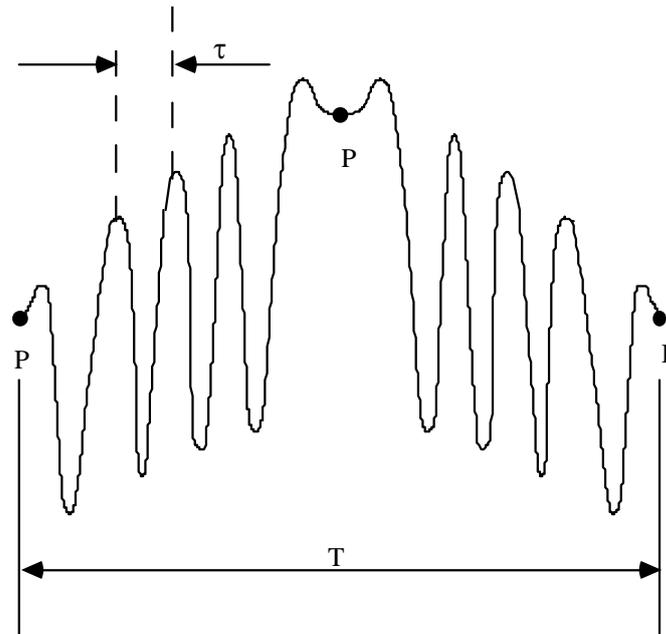


Figura 11

BIBLIOGRAFÍA

- P. Lorrain y D.R. Corson, Campos y ondas electromagnéticos, Selecciones Científicas, 1979, Apdo. 12.1-12.3.
- J.R.Reitz, F.J.Milford y R.W.Christy, "Fundamentos de la Teoría Electromagnética", Fondo Educativo Interamericano. 1984.
- R.K.Wangsness, Campos electromagnéticos, Limusa, 1983, Cap. 25 y apdo. 28-2.
- T. Larsen, "A survey of the theory of wire grids", IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-10, pp. 191-201; May 1962.
- M^a A. Hernandez, J.L. Palau, M.A. Mora y M.V. Andrés, "Experiencia de microondas para la observación del efecto Doppler", Rev. Española de Física, Vol. 5, N^o 1, pp. 38-41, 1991.
- P.F. Combes, J. Graffenil y J.F. Santereau, "Microwave Components, Devices and Active Circuits", John Wiley & Sons, 1978.

APÉNDICE A: EMISOR Y DETECTOR DE MICROONDAS

El emisor de microondas usado en esta práctica es un diodo Gunn que se alimenta con 9 V de tensión continua (ver Figura A.1). En nuestro caso utilizaremos un alimentador estándar, que consta de un conector cilíndrico que se adapta a la base situada en la caja del diodo Gunn. Este alimentador se acopla a la parte interior de la bocina, excitando el modo fundamental de la guía rectangular correspondiente.

El detector de microondas (ver Figura A.2) funciona con dos pilas de 9 V que se ubican en su interior. El interruptor de conexión fija también la escala del amperímetro que se utiliza para medir la señal detectada. Los valores del fondo de escala disponibles son: 30, 10, 3 y 1.

El detector dispone de un control fino para incrementar la ganancia de un amplificador instalado internamente. La posición de dicho control debe mantenerse fija a lo largo de una serie de medidas dada, para que los valores medidos guarden la proporción con la señal detectada. El detector dispone, así mismo, de una salida auxiliar utilizable por un osciloscopio o un voltímetro (es recomendable conectar el polímetro a esta salida para realizar las medidas más cómodamente), y de una entrada auxiliar para el posible empleo de una sonda exterior.

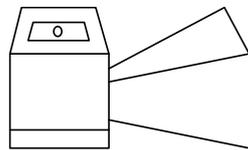


Figura A.1.

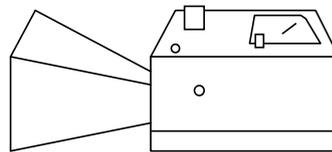


Figura A.2.

APÉNDICE B: CÁLCULO DEL DIAGRAMA DE RADIACIÓN DE UNA ANTENA DE BOCINA

La teoría de difracción por aberturas establece que el campo radiado por una antena de abertura es la transformada de Fourier del campo en la abertura:

$$\vec{E}_{radiación} = \int_A \vec{E}_{abertura} e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (B-1)$$

donde $k_x = k \sin\theta \cos\phi$, $k_y = k \sin\theta \sin\phi$, siendo $k = (2\pi)/\lambda$; la integral se realiza en la superficie de la antena (A).

Asumiremos que el campo en la apertura de la bocina es de la forma (ver figura 1):

$$\vec{E}_{abertura} = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \vec{u}_y \quad ; \quad -a/2 \leq x \leq a/2 \quad (B-2)$$

Para el diagrama de radiación en el plano H (plano $y=0$), el ángulo azimutal vale $\phi=0^\circ$, por lo que $k_x = k \sin\theta$ y $k_y=0$. En este caso, sustituyendo (B-2) en (B-1), y realizando la transformada de Fourier del campo en la abertura, encontramos que el campo de radiación en el plano H es:

$$\vec{E}_{radiación}(\theta, \phi = 0^\circ) = \frac{2E_0 a b}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)}{1 - \left(\frac{2a \sin\theta}{\lambda}\right)^2} \vec{u}_y$$

El cuadrado de esta expresión nos proporciona la expresión del diagrama de radiación en el plano H en potencia:

$$P(\theta, \phi = 0^\circ) = P_0 \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}\right)}{1 - \left(\frac{2a \sin \theta}{\lambda}\right)^2} \right)^2$$

donde $P_0 = ((2 E_0 ab) / \pi)^2$ representa la potencia radiada en la dirección normal a la antena ($\theta = 0^\circ$).

Para el diagrama de radiación en el plano E (plano $x=0$) procederemos de la misma forma. En este caso el ángulo azimutal vale $\phi = 90^\circ$, por lo que $k_x = 0$ y $k_y = k \sin \theta$. Sustituyendo (B-2) en (B-1), y realizando la transformada de Fourier del campo en la abertura, encontramos que el campo de radiación en el plano E viene dado por:

$$\vec{E}_{\text{radiación}}(\theta, \phi = 90^\circ) = \frac{2 E_0 a b}{\pi} \frac{\sin\left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}\right)} \vec{u}_y$$

El cuadrado de esta expresión nos proporciona la expresión del diagrama de radiación en el plano E en potencia:

$$P(\theta, \phi = 90^\circ) = P_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}} \right)^2$$

donde $P_0 = ((2 E_0 ab) / \pi)^2$ representa la potencia radiada en la dirección normal a la antena ($\theta = 0^\circ$).

APÉNDICE C: MANEJO DEL OSCILOSCOPIO DIGITAL

Para visualizar la señal de interferencia en el osciloscopio seguiremos los siguientes pasos:

- Antes de conectar el cable coaxial del detector de microondas, pulsar el botón "CH1 Menu" hasta visualizar la señal de barrido. Centrarla en la pantalla utilizando el cursor 1 de posición vertical del canal 1. Asegurarse de que el parámetro "Acoplamiento" está en modo CA. Si no es así, pulsar el botón correspondiente hasta seleccionar dicho modo.
- Conectar el cable coaxial de la señal del detector a la entrada del canal 1. Poner el péndulo a oscilar y ajustar las escalas vertical (VOLTS/DIV) y horizontal (SEC/DIV) hasta obtener una señal óptima en la que aparezcan varios periodos como los indicados en la figura 11.
- Una vez ajustadas las escalas, volver a dejar oscilar el péndulo y pulsar el botón "SINGLE/SEQ", que permite congelar un barrido en la pantalla.
- Para medir T y τ utilizaremos los cursores de medida de tiempos. Para ello, pulsar el botón "CURSOR" y seleccionar en el parámetro "Tipo" el modo "Tiempo". Aparecerán en pantalla dos líneas verticales, que se pueden desplazar con los cursores (cursor 1 y 2). En el menú podemos leer el valor de la distancia temporal entre los dos cursores ("Diferencia"). Si llevamos los cursores a los puntos P extremos de la figura 11, mediremos T, y si lo hacemos entre dos crestas mediremos τ .
- Para volver al modo de barrido normal se pulsará el botón "RUN/STOP".