Tema 8: El Problema de Programación Lineal Entera. Modelización y Resolución

Los problemas de programación lineal entera PPLE son problemas de programación lineal en los que se exige que alguna o todas las variables sean enteras.

Pueden ser:

- **Puros:** si todas las variables del modelo son enteras.
- **Mixtos:** si solo algunas de las variables del modelo son enteras.

No existe ningún algoritmo eficiente que permita resolver **cualquier** modelo de PPLE.

La tendencia es la de diseñar algoritmos específicos.

Algunas Tentativas de Resolución

- **Resolver la Relajación Lineal**

  Dado un PPLE se denomina Relajación Lineal (RL) al problema de programación lineal que resulta cuando se eliminan las condiciones de integridad de las variables.

$$S_{PPLE} \subseteq S_{RL} \longrightarrow \begin{cases} z^*_{PPLE} \geq z^*_{RL} & \text{F.obj. Min} \\ z^*_{PPLE} \leq z^*_{RL} & \text{F.obj. Max} \end{cases}$$

  Si la solución óptima de la relajación lineal es entera, dicha solución es la solución óptima del PPLE (Transporte, Asignación).

- **Redondear la Solución de la Relajación Lineal**

  Si la solución óptima de la relajación lineal de un PPLE no es entera, es posible que ninguno de los posibles redondeos proporcione la solución óptima del problema.

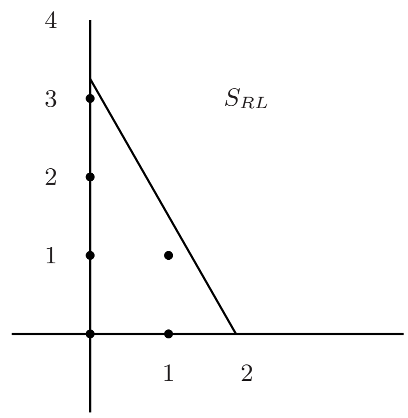
Las soluciones redondeadas pueden incluso no ser soluciones posibles.

$$S_{PPLE} = \{(0,0),\ (0,1),\ (0,2),\ (0,3),\ (1,0),\ (1,1)\}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = 21x_1 + 11x_2 \\ \text{s.a:} & 7x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ & x_1, x_2 \geq 0,\ enteras \end{array}$$

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad z^*_{PPLE} = 33$$

$$x^* = \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ 0 \end{pmatrix} \quad z^*_{RL} = 39$$



- Enumerar todas las Soluciones Posibles

  Aún en el caso en que el conjunto de soluciones posibles sea acotado, el número de soluciones posibles puede ser tan grande que incluso el ordenador más potente puede tener dificultades para resolver el problema en tiempo razonable.

  Un TSP con 101 ciudades tiene aproximadamente $9{,}33 \times 10^{157}$ soluciones posibles.

Técnicas Generales de Resolución

Algoritmos de Ramificación y Acotación (*Branch&Bound*)

Algoritmos de Planos de Corte.

Algoritmos de Ramificación y Corte (*Branch&Cut*)

Algoritmos Heurísticos.

Ejemplo 8.1: Un Problema de Inversión de Capital *(Winston, pág.- 480)*

Se están considerando cuatro posibles inversiones. La primera de ellas proporciona actualmente unos beneficios netos de 16000 euros, la segunda, 22000 euros, la tercera 12000 euros, y la cuarta 8000 euros. Cada una de las inversiones requiere cierta cantidad de dinero en efectivo: 5000, 7000, 4000 y 3000 euros, respectivamente. Si solamente se dispone de 14000 euros para invertir. ¿Qué modelo de programación lineal entera permite obtener la combinación de inversiones que proporcionará los máximos beneficios?

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & z = 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 \\
\text{s.a:} \quad & 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\
& x_j \in \{0,1\}, \;\; j = 1,2,3,4
\end{aligned}
$$

$$
x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se elige la inversión } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}
$$

Invertir en las opciones: 2, 3, y 4

Beneficios: 42000 euros.

Ejemplo 8.2: Un Problema de Coste Fijo *(Taha, pág.- 371)*

He sido abordado por tres compañías de teléfonos para que me suscriba a su servicio de larga distancia con Estados Unidos, *MaBell* cobrará una tarifa fija de 16 euros al mes, más 0.25 céntimos por minuto. *PaBell* cobrará 25 euros al mes de tarifa fija, pero reducirá el coste por minuto a 0.21 céntimos. En cuanto a *BabyBell* (compañía recién estrenada en este mundo) ofrece una tarifa fija mensual de 18 euros y un coste por minuto de 0.22 céntimos. Las compañías solamente me cobrarán la tarifa fija si realizo alguna llamada a través de su operador. Teniendo en cuenta que realizo un promedio mensual de 200 minutos en llamadas a Estados Unidos, y que puedo repartir dichas llamadas entre las tres compañías, ¿cómo debo utilizar sus servicios de forma que la factura mensual de teléfono me resulte lo más económica posible?

$x_1 =$ Minutos de larga distancia al mes con *MaBell*

$x_2 =$ Minutos de larga distancia al mes con *PaBell*

$x_3 =$ Minutos de larga distancia al mes con *BabyBell*

$$y_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } x_2 > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$y_3 = \begin{cases} 1 & \text{si } x_3 > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$x_j \leq M y_j$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & 0{,}25x_1 + 0{,}21x_2 + 0{,}22x_3 + 16y_1 + 25y_2 + 18y_3 \\
\text{s.a:} & x_1 + x_2 + x_3 = 200 \\
& x_1 \leq 200y_1 \\
& x_2 \leq 200y_2 \\
& x_3 \leq 200y_3 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\
& y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

Solución óptima: escoger *BabyBell* ($x_3 = 200$ e $y_3 = 1$)

Coste de la factura mensual: $z^* = 0{,}22 \times 200 + 18 \times 1 = 62$ euros

Ejemplo 8.3: Un Problema de Cubrimiento de Conjuntos *(Winston, pág.- 489)*

Estudios recientes de la Consellería de Medio Ambiente han puesto de manifiesto la necesidad de construir nuevas estaciones de bomberos para cubrir una determinada zona de la Comunidad Valenciana. Hay seis ciudades en las que se podrían construir dichas estaciones. Lógicamente la Consellería quiere construir el menor número de estaciones posibles. Sin embargo, debe garantizar que para cualquiera de las ciudades hay al menos una estación de bomberos a una de distancia de como máximo 15 minutos. En la siguiente tabla se dan los tiempos (en minutos) necesarios para ir de una ciudad a otra:

	C1	C2	C3	C4	C5	C6
Ciudad 1	0	10	20	30	30	20
Ciudad 2	10	0	25	35	20	10
Ciudad 3	20	25	0	15	30	20
Ciudad 4	30	35	15	0	15	25
Ciudad 5	30	20	30	15	0	14
Ciudad 6	20	10	20	25	14	0

¿Cuántas estaciones de bomberos deben abrirse? ¿Dónde?

$$
\begin{array}{lcccccccccccl}
\text{Min} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & \\
& x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & \geq 1 \\
& x_1 & + & x_2 & & & & & & & + & x_6 & \geq 1 \\
& & & & & x_3 & + & x_4 & & & & & \geq 1 \\
& & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & & & \geq 1 \\
& & & & & & & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & \geq 1 \\
& & & x_2 & & & & & + & x_5 & + & x_6 & \geq 1
\end{array}
$$

$$x_j \in \{0,1\}, \; j = 1, \ldots, 6$$

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se construye una estación en la ciudad } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Construir 2 estaciones, una en la ciudad 2 y otra en la 4

Ejemplo 8.4: Restricciones de "Una u Otra". *(Winston, pág.- 490)*

Dorian Auto está considerando la fabricación de tres tipos nuevos de vehículos: compactos, tamaño mediano, y monovolúmenes. Los recursos necesarios para su fabricación, los recursos disponibles, y los beneficios esperados, para cada tipo de vehículo, se dan en la siguiente tabla:

	Compactos	Medianos	Monovolúmenes	
Material	1500 kilos	3000 kilos	5000 kilos	6000000 kilos
Trabajo	30 horas	25 horas	40 horas	60000 horas
Beneficios	2000 euros	3000 euros	4000 euros	

La empresa quiere conocer qué tipo de vehículos debe fabricar y cuántos para maximizar los beneficios, teniendo en cuenta que, según ha detectado una comisión de expertos, un nuevo modelo solo resulta económicamente viable si se fabrican al menos 1000 unidades.

Al menos una de las restricciones,

$$a^t x \leq a_0 \qquad b^t x \leq b_0$$

debe cumplirse

$$\downarrow$$

$$a^t x - a_0 \leq M(1-y)$$

$$b^t x - b_0 \leq My$$

M constante suficientemente grande

Si $y=0$	$\longrightarrow$	$M(1-y)=M$	$\longrightarrow$	$a^t x \leq a_0$ ¿se cumple?
	$\longrightarrow$	$My=0$	$\longrightarrow$	$b^t x \leq b_0$ se cumple
Si $y=1$	$\longrightarrow$	$M(1-y)=0$	$\longrightarrow$	$a^t x \leq a_0$ se cumple
	$\longrightarrow$	$My=M$	$\longrightarrow$	$b^t x \leq b_0$ ¿se cumple?

$x_1 =$ número de compactos fabricados

$x_2 =$ número de vehículos medianos fabricados

$x_3 =$ número de monovolúmenes fabricados

"**O** *se fabrican 1000 unidades del modelo elegido,* **o** *no se fabrica ninguna*"

$$x_i \geq 1000 \quad \text{ó} \quad x_i \leq 0$$

$$1000 - x_i \leq 2400(1 - y_i)$$

$$x_i \leq 2400 y_i$$

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{Max} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & \\
\text{s.a:} & x_1 & & & & & \leq & 2400y_1 \\
 & 1000 - x_1 & & & & & \leq & 2400(1-y_1) \\
 & & & x_2 & & & \leq & 2400y_2 \\
 & & & 1000 - x_2 & & & \leq & 2400(1-y_2) \\
 & & & & & x_3 & \leq & 2400y_3 \\
 & & & & & 1000 - x_3 & \leq & 2400(1-y_3) \\
 & 1{,}5x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \leq & 6000 \\
 & 30x_1 & + & 25x_2 & + & 40x_3 & \leq & 60000
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{ enteras}$$

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$

Fabricar 2000 automóviles de tamaño medio ($y_2 = 1, x_2 = 2000$)

Beneficio máximo $=$ 6.000.000 euros