

CAPÍTULO 0: PRELIMINARES

§1. ORIENTACIÓN DE ESPACIOS VECTORIALES.

Intuitivamente, en el espacio ordinario, el concepto de orientación corresponde a la posibilidad de distinguir entre mano derecha e izquierda. Son "intrínsecamente iguales" y, sin embargo, es imposible hacer coincidir exactamente una con la otra. La idea para "formalizar" ese concepto; en una teoría lineal, es sustituir las manos por sistemas de referencia. Así, en el plano (\mathbb{R}^2), los sistemas de referencia de la fig. 1 hacen el papel de la mano derecha y la mano izquierda y, además, solo hay dos manos (sistemas de referencia): la derecha y la izquierda (ver 0.2 para una demostración de este hecho en dimensión finita arbitraria).

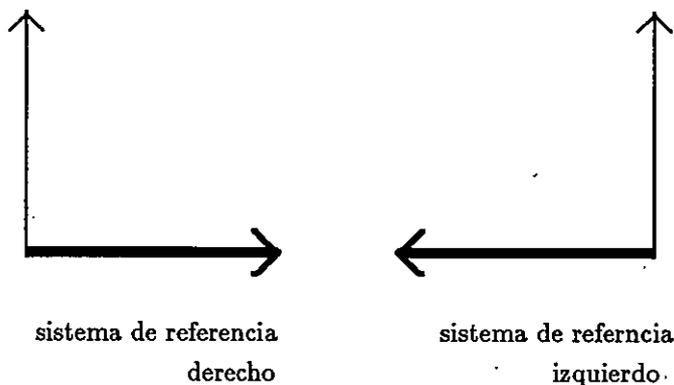


Figura 1

0.1. DEFINICIÓN. Dado un \mathbb{R} -espacio vectorial V de dimensión finita n , decimos que dos bases ordenadas $e = \{e_1, \dots, e_n\}$, $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ tienen la misma orientación si la matriz de cambio de base tiene determinante positivo (i.e.: si $f_j = \sum_{i=1}^n f_j^i e_i$, entonces $\det(f_j^i) > 0$).

0.2. Si en el conjunto \mathcal{B} de las bases ordenadas de V definimos la relación

$$e \sim f \quad \text{sii} \quad e \text{ y } f \text{ tienen la misma orientación,}$$

se ve fácilmente que \sim es una relación de equivalencia en \mathcal{B} . Como el determinante de una matriz de cambio de base es positivo o negativo (no puede ser cero), hay dos clases de equivalencia en \mathcal{B} .

En efecto: \mathcal{B}/\sim tiene al menos dos elementos: si $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \in \mathcal{B}$, entonces $e' = \{e_2, e_1, \dots, e_n\}$ no es equivalente a e .

Sean $[e]$, $[e']$ las clases de equivalencia de e y e' respectivamente. Entonces $\mathcal{B}/\sim = \{[e], [e']\}$. En efecto: sea $g \in \mathcal{B}$, si $g \sim e$, $[g] = [e]$; si g no es equivalente a e , sean G y F las matrices tales que $g = Ge$, $e = Fe'$. Entonces $g = GF e'$, pero g no es equivalente a e , y e no es equivalente a e' implican $\det G < 0$ y $\det F < 0$ respectivamente, luego $\det(GF) > 0$ y $g \sim e'$.

0.3. DEFINICIÓN. Se llama orientación de un espacio vectorial V a la elección de un elemento de \mathcal{B}/\sim .

Se llama espacio vectorial orientado (V, or) a un espacio vectorial V en el que se ha elegido una orientación $\text{or} \in \mathcal{B}/\sim$.

Diremos que una base ordenada e de (V, or) está orientada positivamente si $e \in \text{or}$, y diremos que está orientada negativamente si pertenece a la otra orientación $-\text{or}$ de V .

De acuerdo con estas definiciones, si $e \in \text{or}$, otra base ordenada f está orientada positivamente si la matriz de cambio de base F de e a f tiene determinante positivo, y negativamente orientada si $\det F < 0$.

0.4. En el caso $V = \mathbb{R}^n$, como hay una base canónica, llamaremos orientación canónica (can) de \mathbb{R}^n a aquella clase de equivalencia a la que pertenece la base canónica; denotaremos por $-\text{can}$ la otra orientación. Si no decimos lo contrario, consideraremos a \mathbb{R}^n siempre con la orientación can.

§2. GRUPOS DE TRANSFORMACIONES DE \mathbb{R}^n

Recordemos que un espacio vectorial euclídeo (V, \langle, \rangle) es un espacio vectorial V sobre el que se ha dado una forma bilineal simétrica \langle, \rangle definida positiva. En este apartado consideraremos \mathbb{R}^n con su estructura euclídea y su orientación canónicas.

Recordemos que el grupo $Gl(n, \mathbb{R})$ de isomorfismos del espacio vectorial \mathbb{R}^n es naturalmente isomorfo al grupo de matrices cuadradas $n \times n$ no singulares (i.e. de determinante no nulo o inversibles).

0.5. DEFINICIÓN: Una transformación lineal $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es una transformación ortogonal si para cualesquiera $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $\langle FX, FY \rangle = \langle X, Y \rangle$.

Obsérvese que las transformaciones ortogonales son biyectivas, puesto que si $FX = 0$, entonces $0 = \langle FX, FX \rangle = \langle X, X \rangle$, de donde $X = 0$, luego son aplicaciones lineales e inyectivas entre espacios vectoriales de la misma dimensión, por lo tanto son isomorfismos.

El conjunto de las transformaciones ortogonales forman un grupo, que se llama grupo ortogonal $O(n, \mathbb{R})$, es un subgrupo del grupo lineal $Gl(n, \mathbb{R})$, y es isomorfo al grupo de las matrices $n \times n$ ortogonales (i.e. las matrices A tales que $A^t = A^{-1}$, y que, por lo tanto, verifican $\det A = \pm 1$).

Evidentemente una transformación ortogonal conserva distancias.

Si una transformación ortogonal transforma una base ordenada en otra con la misma orientación, se dice que conserva la orientación. De la definición de orientación se deduce que una transformación ortogonal A conserva la orientación si $\det A > 0$, lo cual, de acuerdo con las propiedades de las matrices ortogonales, equivale a $\det A = 1$.

El grupo de las transformaciones ortogonales que conservan la orientación se llama grupo especial ortogonal $SO(n, \mathbb{R})$, y los elementos de ese grupo se llaman rotaciones.

0.6. DEFINICIÓN: Se llama traslación de vector c a la aplicación $T_c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $T_c(X) = X + c$.

Claramente las traslaciones constituyen un grupo abeliano isomorfo al grupo aditivo de vectores de \mathbb{R}^n . Denotaremos por T_n este grupo.

También es claro que las traslaciones conservan las distancias.

0.7. DEFINICIÓN: Se llama isometría de \mathbb{R}^n a toda aplicación $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que conserva las distancias, i.e. tal que $|FX - FY| = |X - Y|$ para todo $X, Y \in \mathbb{R}^n$.

Las isometrías de \mathbb{R}^n forman un grupo que denotaremos por Is_n .

Como ya vimos, las transformaciones ortogonales y las traslaciones son isometrías. El siguiente resultado establece que estas son básicamente todas las isometrías.

0.8. TEOREMA: Dada una isometría F , existen una traslación única $T = T_{F(0)}$ y una transformación ortogonal única $C = T^{-1} \circ F$ (i.e. $CX = FX - F(0)$) tales que $F = T \circ C$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos primero que $F(0) = 0$. Vamos a ver que en este caso F es una transformación ortogonal. En efecto, observemos primero que, por ser F una isometría,

$$(0.8.1) \quad |F(x)| = d(F(x), 0) = d(F(x), F(0)) = d(x, 0) = |x|$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por otro lado, para todo x e y de \mathbb{R}^n ,

$$\begin{aligned} \langle F(x) - F(y), F(x) - F(y) \rangle &= |F(x) - F(y)|^2 = d(F(x), F(y))^2 \\ &= d(x, y)^2 = |x - y|^2 = \langle x - y, x - y \rangle^2. \end{aligned}$$

De donde, desarrollando los productos escalares y aplicando (0.8.1), se tiene

$$(0.8.2) \quad \langle F(x), F(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Falta ver que F es lineal. Para ello, consideremos la base ortonormal canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n . De (0.8.2) resulta que $\{F(e_1), \dots, F(e_n)\}$ es también una base ortonormal, por lo tanto, para todo $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i \in \mathbb{R}^n$ se tiene, usando de nuevo (0.8.2) y la expresión de las componentes de un vector en una base ortonormal, que

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \langle F(x), F(e_i) \rangle F(e_i) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle F(e_i) = \sum_{i=1}^n x^i F(e_i),$$

de donde resulta que, para todo x e y de \mathbb{R}^n , y todo a, b de \mathbb{R}

$$\begin{aligned} F(ax + by) &= F\left(\sum_{i=1}^n (ax^i + by^i) e_i\right) = \sum_{i=1}^n (ax^i + by^i) F(e_i) \\ &= a \sum_{i=1}^n x^i F(e_i) + b \sum_{i=1}^n y^i F(e_i) = aF(x) + bF(y). \end{aligned}$$

Supongamos ahora $F(0) \neq 0$. Sea T la traslación de vector $F(0)$. Entonces T^{-1} es la traslación de vector $-F(0)$. Como el conjunto de las isometrías es un grupo con la ley composición de aplicaciones, se tiene que $T^{-1} \circ F$ es una isometría y, además, $T^{-1} \circ F(0) = F(0) - F(0) = 0$, luego $T^{-1} \circ F$ es una transformación ortogonal, de donde $F = T \circ C$, siendo $C = T^{-1} \circ F$.

Para ver que T y C son únicas, supongamos que existen una traslación T' y una rotación C' tales que $F = T' \circ C'$. Se tiene entonces que $T \circ C = T' \circ C'$, de donde $C = T^{-1} \circ T' \circ C'$, y como $C(0) = 0 = C'(0)$ por ser transformaciones ortogonales, se tiene que $T^{-1} \circ T'(0) = 0$, lo que implica que $T^{-1} \circ T' = I$ por ser $T^{-1} \circ T'$ una traslación. Resulta de aquí que $T' = T$ y que $C' = C$.

Obsérvese que, en general, $C \circ T_a \neq T_a \circ C$.

0.9. DEFINICIÓN. Un difeomorfismo (aplicación diferenciable con inversa diferenciable) f de \mathbb{R}^n se dice que conserva la orientación si para todo $p \in \mathbb{R}^n$, $df(p)$ conserva la orientación.

Como consecuencia se tiene que: Una isometría $F = T_a \circ C$ conserva la orientación si y solo si C la conserva (pues $df(p) = C$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$).

0.10. DEFINICIÓN. Dada una isometría $F = T_a \circ C$, se llama signo ($\text{sgn} F$) de F al determinante de su parte ortogonal C (que solo puede ser ± 1).

De esta definición y de lo dicho en 0.9, resulta que una isometría $F = T_a \circ C$ conserva la orientación si tiene signo positivo, y la invierte si tiene signo negativo.

0.11. EJERCICIOS.

- (a). Demuéstrase que $C \circ T_a = T_{C(a)} \circ C$.
- (b). Dadas las isometrías $F = T_a \circ A$ y $G = T_b \circ B$, encuéntrense las partes de traslación y transformación ortogonal de $F \circ G$ y $G \circ F$.
- (c). Demuéstrase que una isometría $F = T_a \circ C$ tiene una aplicación inversa F^{-1} , que también es isometría. Encuéntrense las partes de traslación y transformación ortogonal de F^{-1} .
- (d). En cada uno de los casos siguientes, decídase si F es una isometría de \mathbb{R}^3 . De ser así, encontrar su componente traslación y su componente transformación ortogonal.
- (1) $F(p) = -p$.
- (2) $F(p) = \langle p, a \rangle a$, donde $|a| = 1$.
- (3) $F(p) = (p_3 - 1, p_2 - 2, p_1 - 3)$.
- (4) $F(p) = (p_1, p_2, 1)$.
- (e)(1) Demostrar que una isometría $F = T \circ C$ transforma el plano que pasa por p y es ortogonal a q en el plano que pasa por $F(p)$ y es ortogonal a $C(q)$. (2) Si P es el plano que pasa por $(1/2, -1, 0)$ y es ortogonal a $(0, 1, 0)$, encontrar una isometría $F = T \circ C$ tal que $F(P)$ sea el plano que pasa por $(1, -2, 1)$ y es ortogonal a $(1, 0, -1)$.
- (f) Probar que si C es una transformación ortogonal, entonces

$$C(v \wedge w) = \det(C) C(v) \wedge C(w).$$

- (g) Sea a un punto de \mathbb{R}^3 de norma unidad. Demostrar que la fórmula

$$C(p) = a \wedge p + \langle p, a \rangle a$$

define una transformación ortogonal. Describir su efecto general en \mathbb{R}^3 .

§3. PRODUCTO VECTORIAL

Vamos a dar una definición de producto vectorial de $n - 1$ vectores en un espacio vectorial real euclídeo orientado de dimensión n que generaliza la definición usual de producto vectorial de dos vectores en \mathbb{R}^3 . Recordemos que, dados dos vectores X, Y de \mathbb{R}^3 , se define su producto vectorial como el vector Z de \mathbb{R}^3 perpendicular al plano determinado por X e Y , verificando la "regla de la mano derecha" y tal que $|Z| = |X||Y|\text{sen } \angle(X, Y)$. Si los vectores X e Y son linealmente dependientes, entonces su producto vectorial es 0.

Obsérvese que verificar la regla de la mano derecha en \mathbb{R}^3 equivale a decir que $\{X, Y, Z\} \in \text{can}$. Por otro lado

$$\begin{aligned} |X|^2|Y|^2 \text{sen}^2 \angle(X, Y) &= |X|^2|Y|^2(1 - \cos^2 \angle(X, Y)) = \\ &= |X|^2|Y|^2(1 - \frac{\langle X, Y \rangle^2}{|X|^2|Y|^2}) = |X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2. \end{aligned}$$

Resulta entonces natural la siguiente generalización:

0.12. DEFINICIÓN. Sea $(V; \langle, \rangle; \text{or})$ un espacio vectorial real euclídeo orientado de dimensión n . Se define el producto vectorial de $n - 1$ vectores X_1, \dots, X_{n-1} de V como el vector $Z = X_1 \wedge \dots \wedge X_{n-1}$ que verifica las propiedades:

- (a) $|Z|^2 = \det(\langle X_i, X_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n-1}$,
- (b) Si $|Z| \neq 0$, entonces $\{X_1, \dots, X_{n-1}, Z\} \in \text{or}$, y Z es ortogonal al espacio generado por $\{X_1, \dots, X_{n-1}\}$.

Resulta de esta definición que:

0.12.1. Si se cambia la orientación, el producto vectorial cambia de signo.

0.12.2. $X_1 \wedge \dots \wedge X_{n-1} = 0$ si y solo si $\{X_1, \dots, X_{n-1}\}$ son linealmente dependientes. (Esto prueba también que no hay ambigüedad en la definición 0.12).

En efecto: si $\{X_1, \dots, X_{n-1}\}$ son linealmente independientes, entonces $(\langle X_i, X_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n-1}$ es la matriz de la métrica \langle, \rangle restringida al espacio generado por $\{X_1, \dots, X_{n-1}\}$ en la base formada por esos mismos vectores, lo que exige $|Z|^2 = \det(\langle X_i, X_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n-1} \neq 0$. Recíprocamente, si $\{X_1, \dots, X_{n-1}\}$ son linealmente dependientes, existe un i tal que $X_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j X_j$, y

$$|Z|^2 = \det \begin{pmatrix} \langle X_1, X_1 \rangle & \dots & \langle X_1, X_{i-1} \rangle & \langle X_1, \sum_{j \neq i} \lambda_j X_j \rangle & \dots & \langle X_1, X_{n-1} \rangle \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \langle X_{n-1}, X_1 \rangle & \dots & \langle X_{n-1}, X_{i-1} \rangle & \langle X_{n-1}, \sum_{j \neq i} \lambda_j X_j \rangle & \dots & \langle X_{n-1}, X_{n-1} \rangle \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j \neq i} \lambda_j \det \begin{pmatrix} \langle X_1, X_1 \rangle & \dots & \langle X_1, X_{i-1} \rangle & \langle X_1, X_j \rangle & \dots & \langle X_1, X_{n-1} \rangle \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \langle X_{n-1}, X_1 \rangle & \dots & \langle X_{n-1}, X_{i-1} \rangle & \langle X_{n-1}, X_j \rangle & \dots & \langle X_{n-1}, X_{n-1} \rangle \end{pmatrix} = 0,$$

por haber dos columnas repetidas en cada sumando.

Este resultado será también una consecuencia inmediata del siguiente teorema

0.13. TEOREMA. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal positivamente orientada de $(V, \langle, \rangle, \text{or})$. Dados los vectores $X_k = \sum_{i=1}^n X_k^i e_i$, $1 \leq k \leq n-1$, se tiene que:

$$X_1 \wedge \dots \wedge X_{n-1} = (-1)^{n-1} \det \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ X_1^1 & \dots & X_1^n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ X_{n-1}^1 & \dots & X_{n-1}^n \end{pmatrix}$$

DEMOSTRACION: Veamos primero que el segundo miembro de la igualdad es independiente de la base ortonormal de or elegida. En efecto: Sea $\{f_1, \dots, f_n\} \in \text{or}$ otra base ortonormal. Entonces $f_j = \sum_{i=1}^n f_j^i e_i$, $j = 1, \dots, n$. La matriz del cambio de base $F = (f_j^i)$ será una matriz ortogonal ($F^t = F^{-1}$) con $\det F > 0$ (y, por lo tanto $\det F = 1$) por ser las bases e y f ortonormales y con la misma orientación. En las distintas bases los vectores X_k , $k = 1, \dots, n-1$, se escriben de la forma

$$X_k = \sum_{i=1}^n X_k^i e_i = \sum_{j=1}^n {}'X_k^j f_j,$$

lo que da la relación

$$X_k^i = \sum_{j=1}^n {}'X_k^j f_j^i,$$

de donde, usando que $F^t = F^{-1}$, resulta

$${}'X_k^j = \sum_{i=1}^n X_k^i f_j^i.$$

Se tiene entonces que

$$\det \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ {}'X_1^1 & \dots & {}'X_1^n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ {}'X_{n-1}^1 & \dots & {}'X_{n-1}^n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_1^i e_i & \dots & \sum_{i=1}^n f_n^i e_i \\ \sum_{i=1}^n X_1^i f_1^i & \dots & \sum_{i=1}^n X_1^i f_n^i \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n X_{n-1}^i f_1^i & \dots & \sum_{i=1}^n X_{n-1}^i f_n^i \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ X_1^1 & \dots & X_1^n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ X_{n-1}^1 & \dots & X_{n-1}^n \end{pmatrix} \det(F^t),$$

donde hemos tenido en cuenta que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes. Aplicando de nuevo que $\det(F^t) = \det(F) = 1$, se obtiene lo que queríamos demostrar.

Demostremos ahora la fórmula. Si X_1, \dots, X_{n-1} son linealmente dependientes la igualdad es evidente. Si son linealmente independientes, determinan un hiperplano. Sea $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ una base ortonormal de ese hiperplano. Sea e_n el vector unitario ortogonal al hiperplano tal que $\{e_1, \dots, e_{n-1}, e_n\} \in \text{or}$. Entonces $X_k^n = 0$ para todo k , luego

$$Z \equiv (-1)^{n-1} \det \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_{n-1} & e_n \\ X_1^1 & \dots & X_1^{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n-1}^1 & \dots & X_{n-1}^{n-1} & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} X_1^1 & \dots & X_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{n-1}^1 & \dots & X_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} e_n.$$

Resulta de aquí que la matriz de cambio de base de $\{e_1, \dots, e_n\}$ a $\{X_1, \dots, X_{n-1}, Z\}$ tiene como determinante $|Z|^2$, luego $\{X_1, \dots, X_{n-1}, Z\} \in \text{or}$. Por otro lado

$$|Z|^2 = \det \begin{pmatrix} X_1^1 & \dots & X_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{n-1}^1 & \dots & X_{n-1}^n \end{pmatrix}^2 = \det \left(\sum_{k=1}^{n-1} X_i^k X_j^k \right) = \det(\langle X_i, X_j \rangle).$$

0.14. COROLARIO. El producto vectorial es una aplicación $(n-1)$ -lineal alternada sobre V .

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia de que el determinante es una aplicación $(n-1)$ -lineal alternada.

0.15. PROPOSICIÓN. $\{X_1, \dots, X_n\}$ es una base de V positivamente orientada (con respecto a or) si y solo si $\langle X_1 \wedge \dots \wedge X_{n-1}, X_n \rangle > 0$.

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia de que este producto escalar es justamente el determinante de la matriz (X_k^i) de las componentes de los vectores X_k en una base ortonormal $\{e_i\}$ positivamente orientada. En efecto, aplicando 0.13,

$$\langle X_1 \wedge \dots \wedge X_{n-1}, X_n \rangle = (-1)^{n-1} \langle \det \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ X_1^1 & \dots & X_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{n-1}^1 & \dots & X_{n-1}^n \end{pmatrix}, X_n \rangle = (-1)^{n-1} \det \begin{pmatrix} X_1^1 & \dots & X_1^n \\ X_1^1 & \dots & X_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{n-1}^1 & \dots & X_{n-1}^n \end{pmatrix}.$$

0.16. COROLARIO. Para toda permutación $\sigma \in S_n$,

$$\langle X_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge X_{\sigma(n-1)}, X_{\sigma(n)} \rangle = \text{sign}(\sigma) \langle X_1 \wedge \dots \wedge X_{n-1}, X_n \rangle.$$

0.17. PROPOSICIÓN. $\langle X_1 \wedge \dots \wedge X_{n-1}, Y_1 \wedge \dots \wedge Y_{n-1} \rangle = \det(\langle X_i, Y_j \rangle)$.

DEMOSTRACIÓN: Si Y_1, \dots, Y_{n-1} son linealmente dependientes, entonces $Y_1 \wedge \dots \wedge Y_{n-1} = 0$. Por otra parte, si Y_1, \dots, Y_{n-1} son linealmente independientes, existe un i tal que $Y_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j Y_j$, y

$$\det(\langle X_i, Y_j \rangle) = \det \begin{pmatrix} \langle X_1, Y_1 \rangle & \dots & \langle X_1, Y_{i-1} \rangle & \langle X_1, \sum_{j \neq i} \lambda_j Y_j \rangle & \dots & \langle X_1, Y_{n-1} \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle X_{n-1}, Y_1 \rangle & \dots & \langle X_{n-1}, Y_{i-1} \rangle & \langle X_{n-1}, \sum_{j \neq i} \lambda_j Y_j \rangle & \dots & \langle X_{n-1}, Y_{n-1} \rangle \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j \neq i} \lambda_j \det \begin{pmatrix} \langle X_1, Y_1 \rangle & \dots & \langle X_1, Y_{i-1} \rangle & \langle X_1, Y_j \rangle & \dots & \langle X_1, Y_{n-1} \rangle \\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ \langle X_{n-1}, Y_1 \rangle & \dots & \langle X_{n-1}, Y_{i-1} \rangle & \langle X_{n-1}, Y_j \rangle & \dots & \langle X_{n-1}, Y_{n-1} \rangle \end{pmatrix} = 0,$$

por haber dos columnas repetidas en cada sumando. Si Y_1, \dots, Y_{n-1} son linealmente independientes, sea $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ una base ortonormal del espacio generado por $\{Y_1, \dots, Y_{n-1}\}$, y sea $e_n = e_1 \wedge \dots \wedge e_{n-1}$, entonces, aplicando 0.13 se tiene que, si $Y_j = \sum_{i=1}^{n-1} Y_j^i e_i$, $X_k = \sum_{i=1}^{n-1} X_k^i e_i$, entonces

$$\begin{aligned} & \langle X_1 \wedge \dots \wedge X_{n-1}, Y_1 \wedge \dots \wedge Y_{n-1} \rangle \\ &= (-1)^{n-1} (-1)^{n-1} \langle \det \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ X_1^1 & \dots & X_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{n-1}^1 & \dots & X_{n-1}^n \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_{n-1} & e_n \\ Y_1^1 & \dots & Y_1^{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ Y_{n-1}^1 & \dots & Y_{n-1}^{n-1} & 0 \end{pmatrix} \rangle \\ &= \det \begin{pmatrix} X_1^1 & \dots & X_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{n-1}^1 & \dots & X_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} Y_1^1 & \dots & Y_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_{n-1}^1 & \dots & Y_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} X_1^1 & \dots & X_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{n-1}^1 & \dots & X_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} Y_1^1 & \dots & Y_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_{n-1}^1 & \dots & Y_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \det \left(\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_k^i Y_j^i \right)_{1 \leq k, j \leq n-1} \right) = \det(\langle X_i, Y_j \rangle). \end{aligned}$$

0.18. PROPOSICIÓN. Sea I un intervalo abierto de \mathbb{R} , sean $X_1, \dots, X_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ aplicaciones diferenciables. Entonces

$$\frac{d}{dt}(X_1 \wedge \dots \wedge X_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} X_1 \wedge \dots \wedge \frac{d}{dt} X_i \wedge \dots \wedge X_{n-1}.$$

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia de la regla de derivación de determinantes (o de aplicaciones multilineales).

0.19. PRODUCTO VECTORIAL EN \mathbb{R}^3 . Coincide con el ya conocido.

Recordemos otra propiedad útil de este producto vectorial:

$$(X \wedge Y) \wedge Z = \langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X.$$

0.20. PRODUCTO VECTORIAL EN \mathbb{R}^2 .

En este caso el producto vectorial es de un solo vector. Dado un vector X , denotaremos su producto vectorial por JX . Si $\{e_1, e_2\} \in \text{can}$ y $X = X^1 e_1 + X^2 e_2$, JX será

$$JX = -\det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ X^1 & X^2 \end{pmatrix} = -X^2 e_1 + X^1 e_2,$$

i. e., JX es el vector perpendicular a X con la misma norma que X tal que $\{X, JX\}$ es una base positivamente orientada de \mathbb{R}^2 (si $X \neq 0$). Obsérvese que si se considera el vector X como un número complejo $X_1 + iX_2$, entonces JX es justamente el vector que resulta de multiplicar

X por el número i . (es decir, si \mathbb{R}^2 se identifica con \mathcal{C} , el producto vectorial se identifica con la multiplicación por i).

§3. ESPACIO TANGENTE A \mathbb{R}^n

\mathbb{R}^n como espacio vectorial corresponde intuitivamente al conjunto de flechas saliendo del origen 0. Dado un punto $x \in \mathbb{R}^n$, podemos considerar también el conjunto de flechas saliendo de x , y, si la intuición anterior era buena, este conjunto de flechas corresponderá a un nuevo espacio vectorial. Este es justo el espacio vectorial que definiremos como espacio tangente a \mathbb{R}^n en x .

0.20. DEFINICIÓN. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, se llama espacio tangente a \mathbb{R}^n en x al conjunto $T_x \mathbb{R}^n = \{(x, v) : v \in \mathbb{R}^n\} = x \times \mathbb{R}^n$ dotado con las operaciones

- i) $(x, v) + (x, w) = (x, v + w)$,
- ii) $a(x, v) = (x, av)$, para todo $a \in \mathbb{R}$,
- iii) $\langle (x, v), (x, w) \rangle = \langle v, w \rangle$

con las cuales es un espacio vectorial eucldeo isométrico a \mathbb{R}^n mediante la isometría canónica $(x, v) \mapsto v$.

Con frecuencia usaremos también las notaciones $v_x \equiv (x, v)$ y $\mathbb{R}_x^n \equiv T_x \mathbb{R}^n$.

0.21. DEFINICIÓN. Dado un abierto U de \mathbb{R}^n , llamaremos fibrado tangente TU de U al conjunto $TU = \cup \{T_x \mathbb{R}^n, x \in U\} \equiv U \times \mathbb{R}^n$.

0.22. Usando el concepto de espacio tangente se pueden reinterpretar los conceptos de diferencial de una función en un punto y de diferencial de una función del siguiente modo:

Sea U un abierto de \mathbb{R}^n , $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable, entonces la diferencial $dF(p)$, $p \in U$, se puede considerar como

$$dF(p) : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow T_{F(p)} \mathbb{R}^m / (p, v) \mapsto (F(p), dF(p)(v)),$$

donde la segunda $dF(p)$ en el renglón anterior tiene el significado habitual en análisis.

Del mismo modo se puede considerar dF como

$$dF : TU \rightarrow T\mathbb{R}^m / (p, v) \mapsto (F(p), dF(p)(v)).$$

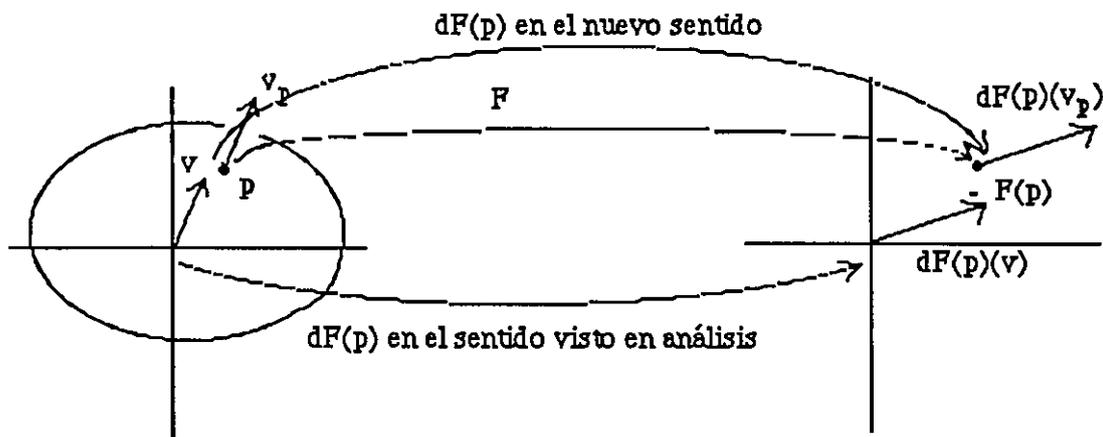


Figura 2

0.23. DEFINICIÓN. Un campo vectorial X sobre un abierto U de \mathbb{R}^n es una aplicación $X : U \rightarrow TU$ tal que a cada $p \in U$ le hace corresponder un vector $X(p) \in T_p \mathbb{R}^n$.

Si definimos $p_1 : TU \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $p_1(p, v) = p$, entonces la condición $X(p) \in T_p \mathbb{R}^n$ equivale a $p_1 \circ X = id$.

Un campo vectorial X sobre U se dice que es diferenciable de clase C^k si y solo si lo es como aplicación de U en $TU = U \times \mathbb{R}^n$.

Dado un campo vectorial X sobre U , se le asocia unívocamente una aplicación $'X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $'X = p_2 \circ X$, donde $p_2 : TU \rightarrow \mathbb{R}^n$ se define por $p_2(p, v) = v$ (y, naturalmente, toda aplicación $'X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ determina unívocamente un campo vectorial X sobre U definido por $X(p) = (p, 'X(p))$. Entonces

. Un campo vectorial X sobre U es de clase C^k sii $'X$ es una aplicación de clase C^k .

0.24. Para aplicaciones definidas entre espacios distintos todavía puede mantenerse el concepto de conservar la orientación. La interpretación que hemos dado de la diferencial de una aplicación nos obliga a hacer esta extensión del concepto para que tenga sentido hablar de un difeomorfismo, conservando la orientación.

Dados dos espacios vectoriales orientados (V, or) , (W, ro) , diremos que un isomorfismo $F : V \rightarrow W$ conserva la orientación sii cuando $\{e_1, \dots, e_n\} \in or$, entonces $\{F(e_1), \dots, F(e_n)\} \in ro$.

Para una aplicación no lineal, se dice que conserva la orientación si es un difeomorfismo tal que su diferencial en cada punto conserva la orientación.

0.16 EJERCICIOS (SOLUCION)

(a) ¿ $C \circ T_a = T_{C(a)} \circ C$?

$$C(T_a v) = C(a+v) = C(a) + C(v) = T_{C(a)}(C(v)) = T_{C(a)} \circ C(v)$$

(b) $F = T_a \circ A$ $G = T_b \circ B$ ¿ $F \circ G$? ¿ $G \circ F$?

$$F \circ G = T_a \circ A \circ T_b \circ B = T_a \circ T_{A(b)} \circ A \circ B = \underbrace{T_{a+A(b)}}_{\in \mathbb{R}^n} \circ \underbrace{A \circ B}_{O(n, \mathbb{R})}$$

(c) $F = T_a \circ C$, $F^{-1} = (T_a \circ C)^{-1} = C^{-1} \circ T_a^{-1} = C^{-1} \circ T_{-a} = \underbrace{T_{-C^{-1}(a)}}_{\text{parte lin}} \circ \underbrace{C^{-1}}_{\text{parte ant}}$ de F^{-1}

(d) (1) $F(p) = -p$ $|F(p) - F(q)| = |-p + q| = |p - q|$ isométrica
 $F(0) = 0 \Rightarrow T = 0$ y $C = F$.

(2) $F(p) = \langle p, a \rangle a$: $F(0) = 0$ y $|F(p)| = \langle p, a \rangle \leq |p|$ ($= 0$ si $p \perp a$), luego no es isométrica

(3) $F(p) = (p_3, p_2, p_1) - (1, 2, 3)$ y una traslación $T_{-u, 2, 3}$

(4) $F(p) = (p_1, p_2, 1)$ no es isométrica $|F(1, 0, 1) - F(0, 0, 0)| = |(1, 0, 1) - (0, 0, 0)| = 1 \neq |(1, 0, 1) - (0, 0, 0)| = \sqrt{2}$

(e) (1) $\Pi = \{p + \lambda v / \langle v, q \rangle = 0\}$ $\tilde{\Pi} = \{F(p) + \mu w / \langle w, C(q) \rangle = 0\}$

$$F(\Pi) = \{F(p + \lambda v) / \langle v, q \rangle = 0\} ; \quad F(p) = F(p + 0v) \in F(\Pi)$$

(2) $F(p + \lambda v) = T_a C(p + \lambda v) = T_a(C(p) + \lambda C(v)) = C(p) + \lambda C(v) + a = F(p) + \lambda C(v)$, luego

$$F(\Pi) = \{F(p) + \lambda C(v) / \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } \langle v, q \rangle = 0\} = \{F(p) + \lambda C(v) / \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } \langle C(v), C(q) \rangle = 0\}$$

$$\stackrel{?}{=} \{F(p) + \lambda w / \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } \langle w, C(q) \rangle = 0\} = \tilde{\Pi}$$

. como C es una isometría

(2) $P = \{(1/2, -1, 0) + \lambda v / \langle v, (0, 1, 0) \rangle = 0\}$ $F(p) = \{(1, -2, 1) + \mu w / \langle w, (1, 0, -1) \rangle = 0\}$

elemento C / $C(0, 1, 0) = (1, 0, -1) / \sqrt{2}$ (el $\sqrt{2}$ es para que C conserve la norma). Basta

completar f_2 a una b.s.m : $\{(0, 1, 0), (1, 0, -1) / \sqrt{2}, (1, 0, 1) / \sqrt{2}\}$, entonces $C: e_i \rightarrow f_i$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} ; \quad C(1/2, -1, 0) + F(0) = (1, -2, 1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y $F = T_{F(0)} + C$

(f) $c(v \wedge w) = \dots$

c transf. ortogonal $\Rightarrow \det c = \begin{cases} +1 & \text{si } c \text{ cons-orient.} \\ -1 & \text{si } c \text{ no-cons-orient.} \end{cases}$

si $z = v \wedge w$, $\{v, w, z\}$ posit. orientado y $|z|^2 = \begin{vmatrix} \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \\ \langle w, v \rangle & \langle w, w \rangle \end{vmatrix}$
 si $\det c = 1$: $\langle c(v), c(w), c(z) \rangle = 1$ y $|c(z)|^2 = |z|^2 = 1 \Rightarrow |c(z)| = 1$ $\Rightarrow \langle c(v), c(w) \rangle = 1$

luego $c(v) \wedge c(w) = c(z)$

si $\det c = -1$: $\{c(v), c(w), c(z)\}$ p.n. orient. $|c(z)|^2$ idem,
 luego $c(v) \wedge c(w) = -c(z)$

(g) $|a|=1 \quad a \in \mathbb{R}^3$

$c(p) = a \wedge p + \langle p, a \rangle a$

$|c(p) - c(q)|^2 = |a \wedge p - a \wedge q + \langle p, a \rangle a - \langle q, a \rangle a|^2 = |a \wedge (p-q)|^2 + |\langle p-q, a \rangle a|^2 =$

$= |p-q|^2 \sin^2 \theta + |p-q|^2 \cos^2 \theta = |p-q|^2$

$c(0) = 0 \Rightarrow$ transf. ortogonal

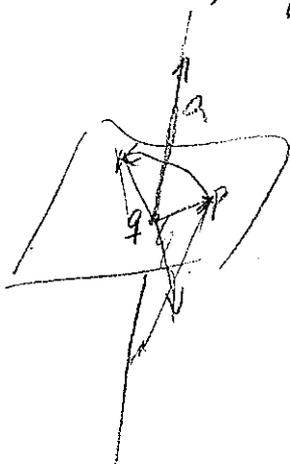
$c(a) = a$, luego $c(\lambda a) = \lambda a$, identidad

Si $q \in \langle \lambda a \rangle$ y $p-q \perp a$, entonces

$c(p) = c(p-q+q) = c(p-q) + c(q) = q + a \wedge (p-q) =$

$= q +$ rotación de ángulo $\pi/2$ de $p-q$ en la dirección de la orientación positiva dada por a , i.e.

c es una rotación de ángulo $\pi/2$ de eje a .

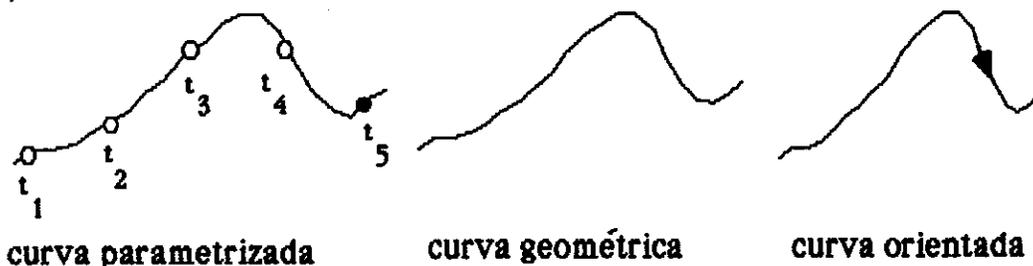


CAPITULO I: TEORIA LOCAL DE CURVAS EN \mathbb{R}^n

Lección 1ª: CONCEPTO DE CURVA. LONGITUD DE ARCO

§1. Concepto de curva.

En este capítulo vamos a estudiar las curvas desde un punto de vista físico, en concreto, desde un punto de vista dinámico. Consideraremos una curva como la trayectoria de un móvil. Una trayectoria se considera descrita cuando se da, en cada instante de tiempo, la posición del móvil. Esta idea dará lugar a la primera definición de curva, al concepto de curva parametrizada. Podemos también considerar una trayectoria como el camino recorrido por el móvil sin preocuparnos del tiempo que invierte en hacer el recorrido, ello dará lugar al concepto de curva geométrica. Por último, en ocasiones nos interesará distinguir trayectorias recorridas en sentidos opuestos, y esto dará lugar al concepto de curva orientada.



Además, en la mayor parte de este curso nos limitaremos a considerar trayectorias que se pueden recorrer "de modo continuo" (es decir, trayectorias clásicas, no admitiremos trayectorias de partículas cuánticas) e incluso sin cambios bruscos de velocidad (trayectorias suaves), lo que se impondrá por las diversas condiciones de continuidad y diferenciabilidad que se exigirán a las aplicaciones definiendo las curvas.

I.1.DEFINICION: Sea I un intervalo de la recta real, llamaremos curva parametrizada de clase C^k a una aplicación $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n / t \rightarrow c(t)$ de clase C^k .

I.2.NOTA: (a) Cuando no indiquemos nada sobre la diferenciabilidad de la curva entenderemos que dicha curva es de clase C^k con k lo suficientemente grande para que sean válidas las operaciones que se realizan.

(b) t recibe el nombre de parámetro de la curva.

(c) Si I no es abierto, decir que c es diferenciable significa que existe un intervalo abierto $I^* \supset I$ y una aplicación $c^*: I^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable tal que $c^*|_I = c$.

El concepto de regularidad, que introducimos a continuación, elimina tanto las curvas con puntos angulosos (sin vector tangente) como parametrizaciones inadecuadas de trayectorias suaves:

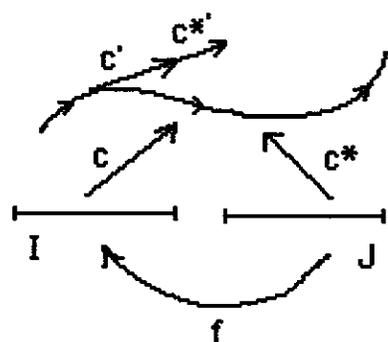
I.3.DEFINICION: Diremos que una curva parametrizada $c: I \rightarrow \mathbf{R}^n$ es regular si $c'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Al vector $c'(t)$ se le denomina vector tangente a la curva en t , o vector velocidad de la curva en t . El módulo $|c'(t)|$ lo llamaremos velocidad de la curva en t .

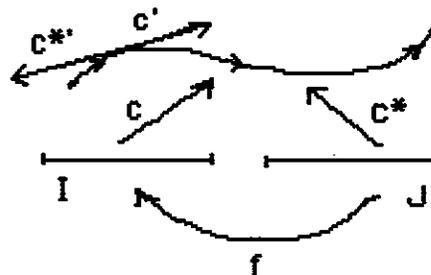
I.4.DEFINICION: Dada una curva parametrizada $c: I \rightarrow \mathbf{R}^n$, llamaremos transformación o cambio de parámetro de c a un difeomorfismo $f: J \rightarrow I$. Diremos que la curva $c^* = c \circ f: J \rightarrow \mathbf{R}^n$ es una reparametrización de c por f .

I.5. Obsérvese que si c es una curva parametrizada regular y c^* una reparametrización de c , entonces también c^* es regular.

I.6.DEFINICION: Sea $f: J \rightarrow I$ un cambio de parámetro de $c: I \rightarrow \mathbf{R}^n$. Si $f'(s) > 0$, para todo $s \in J$, diremos que f es una cambio de parámetro conservando la orientación; y se dice que $c^* = c \circ f$ es una reparametrización de c conservando la orientación. Si $f'(s) < 0$, para todo $s \in J$, diremos que f es una cambio de parámetro invirtiendo la orientación; y se dice que $c^* = c \circ f$ es una reparametrización de c invirtiendo la orientación.



Reparametrización conservando la orientación



Reparametrización invirtiendo la orientación

La terminología de la definición I.6, además de estar motivada por el hecho de que una reparametrización que conserva la orientación conserva el sentido de recorrido de la curva, es también coherente con lo que vimos en el capítulo 0. Por un lado, $f'(s) > 0$ para todo $s \in J$ es equivalente a que f es un difeomorfismo conservando la orientación; por otro, $c^*(s) = f'(s) c'(f(s))$, por lo tanto $f'(s)$ se

puede considerarse como una aplicación lineal de la recta $\{c(f(s)) + \lambda c'(f(s)), \lambda \in \mathbb{R}\} = \{c^*(s) + \mu c'^*(s), \mu \in \mathbb{R}\}$ -considerada como espacio vectorial de dimensión 1 con origen en $c^*(s) = c(f(s))$ - en sí misma y, por tanto, conserva la orientación si su determinante, que es $f'(s)$, es positivo.

I.7. La relación binaria entre curvas parametrizadas $c \sim c^*$ si c^* es una reparametrización (resp. reparametrización conservando la orientación) de c es una relación de equivalencia. Ello permite dar la

I.8.DEFINICION: Se llama curva geométrica (resp. curva orientada) de clase C^k a cada una de las clases de equivalencia en el conjunto cociente de las curvas parametrizadas de clase C^k por la relación de equivalencia "ser una reparametrización" (resp. "ser una reparametrización conservando la orientación").

I.9.DEFINICION: Se dice que una curva geométrica u orientada es regular si una de sus (curvas parametrizadas) representantes es regular. De acuerdo con I.5, si es así, todas sus representantes serán curvas parametrizadas regulares.

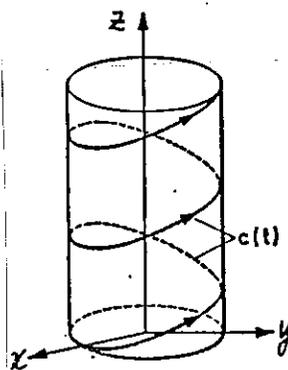
I.10. De ahora en adelante, si no se dice nada expresamente, cuando hablemos de "la curva $c:I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ", entenderemos la curva geométrica constituida por la familia de curvas equivalentes a la curva parametrizada c . De c diremos que es una parametrización de la correspondiente curva geométrica.

Por "la curva orientada $c:I \rightarrow \mathbb{R}^n$ " entenderemos el concepto análogo al anterior, pero haremos siempre mención explícita de la palabra "orientada", mientras que si empleamos solo la palabra curva, entenderemos que hablamos de una curva geométrica.

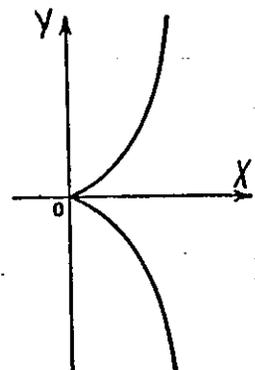
I.11.EJEMPLOS:

I.11.1. Línea recta: Dados $v, v_0 \in \mathbb{R}^n$, la recta $c(t) = v_0 + t v$ pasando por v_0 en la dirección v es una curva regular, cuyo parámetro $t \in \mathbb{R}$.

Obsérvese que $c:I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $c(t) = v_0 + t^3 v$ es una curva que tiene el mismo conjunto imagen que la anterior, pero que no es regular en $t=0$ y, por lo tanto, representa otra curva geométrica.



Helice circular



curva $c(t) = (t^2, t^3)$

I.11.2. Hélice: Es la curva representada por la parametrización $c: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3 / c(t) = (a \cos t, a \sin t, b t)$, $a^2+b^2 \neq 0$, a y b constantes reales. Para $b=0$ se trata de una circunferencia de radio a . Para $a=0$ de una recta. Evidentemente, c es regular.

I.11.3. La curva con pico $c: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2 / c(t) = (t^2, t^3)$ es una curva C^∞ , pero $c'(0) = (0,0)$, luego no es una curva regular en $t = 0$.

§2. Longitud de una curva.

Estamos acostumbrados a calcular la longitud de la trayectoria descrita por un móvil integrando su velocidad entre los instantes de tiempo que corresponden al inicio y final de la trayectoria, por lo tanto parece natural la siguiente

I.12.DEFINICION: Dada una curva $c: I \rightarrow \mathbf{R}^n$ se llama longitud de c a

$$L(c) = \int_I |c'(t)| dt,$$

cantidad que es independiente de la parametrización, pues si $f: J \rightarrow I$ es un cambio de parametro y $c^* = c \circ f$ la reparametrización correspondiente, entonces

$$\begin{aligned} \int_J |c^*(s)| ds &= \int_J |(d(c \circ f)/ds)(s)| ds = \int_J |dc/dt| |df/ds| ds \\ &= \int_{f(J)} |dc/dt| dt = \int_I |c'(t)| dt. \end{aligned}$$

Además, esta definición se puede justificar también geométricamente. La idea geométrica para definir la longitud de una curva es aproximar la curva por medio de polígonos inscritos. Nuestra intuición nos asegura que la longitud de cualquier polígono inscrito no excederá a la de la curva (dado que la línea recta es el camino más corto entre dos puntos), luego la longitud de una curva deberá ser una cota superior de las longitudes de los polígonos inscritos. Parece por tanto natural definir la longitud de una curva como el extremo superior de las longitudes de todos los polígonos inscritos posibles. Vamos a ver que para curvas de clase C^1 (y el lector puede ver inmediatamente que también para curvas de clase C^1 a trozos) tal extremo superior existe y que esta definición coincide con la I.12. Primero, formalicemos la definición:

I.13.DEFINICION: Sea $c: I=[a,b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ una curva. Se llama línea poligonal inscrita a toda curva poligonal de extremos $c(a)$ y $c(b)$ y cuyos vértices pertenecen a $c(I)$, i.e., una curva de la forma

$$\tilde{c}(t) = c(t_{i-1}) + ((t-t_{i-1})/(t_i-t_{i-1})) (c(t_i) - c(t_{i-1}))$$

para $1 \leq i \leq p$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{p-1} < t_p = b$.

Una tal poligonal viene dada por la curva c y una partición $\beta = (t_0, t_1, \dots, t_p)$ de $[a,b]$. La longitud de una tal poligonal es

$$L_{\beta,c} = \sum_{i=0}^p |c(t_i) - c(t_{i-1})|.$$

I.14. TEOREMA: Sea $c: I=[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva de clase C^1 . Se verifica que

$$L(c) = \sup \{L_{\beta,c} / \beta \in \Sigma\},$$

siendo Σ el conjunto de todas las particiones de $[a,b]$.

DEMOSTRACION: Veamos en primer lugar que $\sup\{L_{\beta,c} / \beta \in \Sigma\}$ existe (i.e. es

finito). Como c es C^1 , para toda partición β de $[a,b]$, $c(t_i) - c(t_{i-1}) = \int_{[t_{i-1}, t_i]} c'(t) dt$,

de donde $|c(t_i) - c(t_{i-1})| = \left| \int_{[t_{i-1}, t_i]} c'(t) dt \right| \leq \int_{[t_{i-1}, t_i]} |c'(t)| dt$, por lo tanto

$L_{\beta,c} = \sum |c(t_i) - c(t_{i-1})| \leq \sum \int_{[t_{i-1}, t_i]} |c'(t)| dt = \int_a^b |c'(t)| dt$, i.e. $\{L_{\beta,c} / \beta \in \Sigma\}$ está mayorado por $L(c)$.

Para ver que no solo está mayorado, sino que es igual, bastará con demostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe una partición β verificando $L(c) - L_{\beta,c} < \epsilon$. Veámoslo: $/\epsilon$

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} |c'(t)| dt - |c(t_i) - c(t_{i-1})| \right| &\leq & (I.1.14.1) \\ &\leq \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} |c'(t)| dt - |t_i - t_{i-1}| |c'(t_{i-1})| + |t_i - t_{i-1}| |c'(t_{i-1})| - |c(t_i) - c(t_{i-1})| \right|. \end{aligned}$$

Como c es C^1 , c' es continua sobre $[a,b]$ que es compacto, luego c' es uniformemente continua, luego existe un $\delta > 0$ tal que para todo $t, t' \in [a,b]$ con $|t-t'| < \delta$, $|c'(t) - c'(t')| < \epsilon/2(b-a)$, luego $\|c'(t) - c'(t')\| \leq |c'(t) - c'(t')| < \epsilon/2(b-a)$.

Elijamos una partición β de $[a,b]$ con $|t_i - t_{i-1}| < \delta$ para $i=1, \dots, p$, entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} |c'(t)| dt - |t_i - t_{i-1}| |c'(t_{i-1})| \right| &= \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} |c'(t)| dt - \int_{t_{i-1}}^{t_i} |c'(t_{i-1})| dt \right| \leq \\ &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| |c'(t)| - |c'(t_{i-1})| \right| dt < (\epsilon/2(b-a)) |t_i - t_{i-1}| \quad (I.14.2), \end{aligned}$$

y, por otra parte, sea $f(t) = c(t) - t c'(t_{i-1})$, entonces f es C^1 y $f'(t) = c'(t) - c'(t_{i-1})$, por tanto, sobre $[t_{i-1}, t_i]$, $|f'(t)| < \epsilon/2(b-a)$, y, por la desigualdad de los incrementos finitos, $|f(t_i) - f(t_{i-1})| < (\epsilon/2(b-a)) |t_i - t_{i-1}|$, de donde

$$|c(t_i) - c(t_{i-1}) - (t_i - t_{i-1})c'(t_{i-1})| = |f(t_i) - f(t_{i-1})| < (\epsilon/2(b-a)) |t_i - t_{i-1}| \quad (I.14.3),$$

y, de (I.14.1, 2 y 3),

$$\begin{aligned} L(c) - L_{\beta,c} &= \int_{[a,b]} |c'(t)| dt - \sum |c(t_i) - c(t_{i-1})| \leq \\ &\leq \sum \left| \int_{[t_{i-1}, t_i]} |c'(t)| dt - |c(t_i) - c(t_{i-1})| \right| < \sum 2 (t_i - t_{i-1}) \epsilon/2(b-a) = \epsilon. \quad \square \end{aligned}$$

I.15. DEFINICION: Diremos que una curva $c: I=[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ está parametrizada respecto de su longitud de arco si $|c'(t)| = 1$ para todo $t \in I$.

En este caso $L(c(t)) = t - a$ ($=t$ si $a = 0$), con lo cual el parámetro de la curva es (salvo una constante) la longitud de la curva, y de ahí la definición dada.

I.16.PROPOSICION: Toda curva parametrizada regular $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ puede ser reparametrizada respecto de su longitud de arco, con un cambio de parámetro conservando la orientación (i.e. existe un cambio de parámetro $f: J \rightarrow I$ tal que $|(c \circ f)'(s)| = 1$ y $f'(s) > 0$).

DEMOSTRACION: Buscamos una aplicación $f: J \rightarrow I$ tal que $|(c \circ f)'(s)| = 1$, y como $(c \circ f)'(s) = c'(t) f'(s)$, bastará tomar f de modo que $|c'(t)| f'(s) = 1$, i.e. $f'(s) = 1/|c'(t)|$. Para ello bastará definir $g: J \rightarrow I$ por $g(t) = \int_a^t |c'(t)| dt$, y tomar $f = g^{-1}$, pues, al ser c regular, $g'(t) = |c'(t)| > 0$ para todo t , y g es una función estrictamente creciente (y, por tanto, un difeomorfismo conservando la orientación) y lo mismo ocurre con su inversa f . \square .

De la demostración de esta proposición resulta el modo práctico de parametrizar una curva respecto de su longitud de arco. Dada la curva $c(t)$, su longitud de arco es la función $s(t) = \int_0^t |c'(t)| dt$, de aquí, despejando, se obtiene la función inversa $t = t(s)$, y la parametrización de respecto de su longitud de arco es la curva parametrizada $\tilde{c}(s) = c(t(s))$.

Lección 2ª: EL TRIÉDRO DE FRENET

§3. REFERENCIA DE FRENET

Como decía el título del capítulo, nuestro objetivo es el estudio local de las curvas, es decir, el conocimiento de la forma de una curva en un entorno de un punto de la misma. Para realizar este estudio será eficaz usar, en lugar de una referencia de \mathbb{R}^n única, referencias en cada punto de la curva que puedan variar de un punto a puntos próximos y cuya variación nos de idea de la forma de la curva (intuitivamente, que la variación de la referencia de idea de la forma de la curva corresponde al hecho de que la variación de uno de los vectores de esa referencia indica lo que la curva se separa del hiperplano generado por los demás vectores). En esta lección introducimos y estudiamos esas referencias.

I.17. DEFINICION: Sea $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada, llamaremos campo vectorial a lo largo de c a una aplicación $X: I \rightarrow T_{c(t)}\mathbb{R}^n$ tal que $X(t) \in T_{c(t)}\mathbb{R}^n$.

El vector tangente a una curva c se puede considerar ((y así lo haremos salvo que se diga otra cosa) como una campo vectorial a lo largo de c mediante la identificación $c'(t) = \{c(t), c'(t)\} \in T_{c(t)}\mathbb{R}^n$. Mientras no se diga lo contrario, los campos vectoriales se supondrán diferenciables.

I.18. DEFINICION: Sea $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada. Se llama referencia móvil a lo largo de c a un conjunto de n campos vectoriales $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$ a lo largo de c tales que para cada $t \in I$ constituyen una base ortonormal de $T_{c(t)}\mathbb{R}^n$.

I.19. DEFINICION: Una referencia móvil $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$ a lo largo de c diremos que es de Frenet si $c^{(k)}(t) \in \langle \{e_1, \dots, e_k\} \rangle$ para $1 \leq k \leq n$ (por $\langle \{V_1, \dots, V_j\} \rangle$ entendemos el espacio vectorial generado por V_1, \dots, V_j).

I.20. TEOREMA (de existencia y unicidad para referencias de Frenet 'distinguidas'): Sea $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva verificando que $\{c^{(k)}(t)\}_{k=1}^{n-1}$ es un sistema de vectores linealmente independiente para cada $t \in I$. Entonces existe una única referencia de Frenet verificando:

a) $\langle \{e_1(t), \dots, e_k(t)\} \rangle = \langle \{c'(t), \dots, c^{(k)}(t)\} \rangle$ para $1 \leq k \leq n-1$, y las bases ordenadas $\{e_1, \dots, e_k\}$, $\{c', \dots, c^{(k)}\}$ de este e.v. definen la misma orientación. ←

b) $\{e_1(t), \dots, e_n(t)\}_{i=1}^n \equiv \text{can.}$

A una tal referencia de Frenet se la llama referencia de Frenet distinguida.

DEMOSTRACION: Para $k=1$ la condición (a) implica $e_1(t) = c'(t)/|c'(t)|$ ($c'(t) \neq 0$)

por ser $\{c^{(j)}(t)\}_{j=1}^{n-1}$ l.i.). Supongamos ahora que tenemos $\{e_1(t), \dots, e_j(t)\}$ verificando la condición (a) para $k=1, \dots, j$; $j \leq n-2$. Entonces, como $\{e_i\}_{i=1}^n$ ha de ser una b.o.n., e_{j+1} ha de ser perpendicular a $\langle \{e_1, \dots, e_j\} \rangle = \langle \{c', \dots, c^{(j)}\} \rangle$ y, por la condición (a), $e_{j+1} = e_{j+1}^* / |e_{j+1}^*|$ con $e_{j+1}^* = \pm \{c^{(j+1)} - \sum_{k=1}^j \langle c^{(j+1)}, e_k \rangle e_k\}$. Elegiremos el signo de e_{j+1}^* de modo que $\{e_1, \dots, e_{j+1}\}$ defina la misma orientación que $\{c', \dots, c^{(j+1)}\}$. Ahora bien, como $\{e_1, \dots, e_j\}$ define la misma orientación que $\{c', \dots, c^{(j)}\}$, se tiene que $e_i = \sum_{k=1}^j A_i^k c^{(k)}$ con la matriz $A = (A_i^k)_{1 \leq i, k \leq j}$ de determinante positivo. Resulta de aquí que

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_j \\ e_{j+1}^* \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \text{Id} & 0 \\ \hline \mp \langle c^{(j+1)}, e_1 \rangle & \dots & \mp \langle c^{(j+1)}, e_j \rangle \\ \hline & & \pm 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_j \\ c^{(j+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ \hline & & & \\ \hline a_1 & \dots & a_j & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c' \\ \vdots \\ c^{(j)} \\ c^{(j+1)} \end{pmatrix}$$

luego el signo a elegir para e_{j+1}^* es +, i.e.

$$e_{j+1}^*(t) = c^{(j+1)}(t) - \sum_{k=1}^j \langle c^{(j+1)}(t), e_k(t) \rangle e_k(t).$$

Tenemos así definidos, por inducción, $n-1$ vectores e_1, \dots, e_{n-1} verificando (a). Que $\{e_1, \dots, e_n\}$ sea una b.o.n., junto con la condición (b), obliga a que $e_n = e_1 \wedge \dots \wedge e_{n-1}$. Hemos probado así la unicidad y existencia de la referencia de Frenet distinguida $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$. La diferenciabilidad de cada $e_j(t)$ resulta de que las operaciones realizadas para su construcción dan objetos diferenciables si parten de objetos diferenciables (así, si c es de clase c^r , todos los e_j son de clase c^{r-n+1}). \square

I.21. Existen curvas interesantes que admiten referencia de Frenet pero no única (i.e. no tienen referencia de Frenet distinguida) por no verificar la condición de que $\{c^{(k)}\}_{k=1}^{n-1}$ sean l.i. En estos casos se puede trabajar con una de

Las referencias de Frenet de las que verifican la condición (b) y la (a) solo hasta el mayor k para el que $\{c^{(k)}\}_{k=1}^k$ sean l.i. En particular, si $c(t)$ está contenida en un subespacio afín de \mathbb{R}^n de dimensión $m < n$ y $\{c^{(k)}\}_{1 \leq k \leq m}$ son l.i., se puede tomar la referencia de Frenet verificando la condición (a) hasta $k=m$ y tomando los restantes e_{m+1}, \dots, e_n constantes.

Un ejemplo de estas curvas es la recta $c(t) = V_0 + tV$, en la que trabajaremos con cualquier referencia ortonormal positivamente orientada $\{e_1(t), \dots, e_n(t)\}$ tal

$$\text{que } e_1(t) = \frac{c'(t)}{|c'(t)|} = \frac{V}{|V|}.$$

§4. Fórmulas de Frenet. Curvaturas.

Una vez que tenemos una referencia en cada punto de la curva, vamos a ver como varía esta referencia de un punto a otro. Si se tiene en cuenta que en la recta (cfr. I.21) esa referencia es constante, la variación de la referencia de Frenet nos dará una medida del modo en que la curva se separa de ser una recta y, por lo tanto, una idea de como es la curva.

I.22. PROPOSICION: Sea $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada, y $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$ una referencia móvil a lo largo de c , entonces:

$$(I.22.1) \quad c'(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) e_i(t)$$

$$(I.22.2) \quad e_i'(t) = \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(t) e_j(t) \quad \text{con } \omega_{ij}(t) = -\omega_{ji}(t).$$

Si, además, $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$ es la referencia de Frenet distinguida de c , se verifica

$$(I.22.1') \quad \alpha_1(t) = |c'(t)| \quad \alpha_i(t) = 0 \quad \text{si } i \neq 1$$

$$(I.22.2') \quad \omega_{ij}(t) = 0 \quad \text{si } j > i+1$$

DEMOSTRACION: (I.22.1) es consecuencia inmediata de ser $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$ una base de

$T_{c(t)}\mathbb{R}^n$. Además, como es ortonormal, $\langle e_i(t), e_j(t) \rangle = \delta_{ij}$ y, derivando, $\langle e_i'(t), e_j(t) \rangle + \langle e_i(t), e_j'(t) \rangle = 0$. Ahora bien, $\omega_{ij} = \langle e_i', e_j \rangle$, luego $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. Si $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$ es la referencia de Frenet distinguida, entonces $e_1(t) = c'(t)/|c'(t)|$, lo

que prueba (I.22.1'). Además, la condición $\langle [e_1, \dots, e_i] \rangle = \langle [c', \dots, c^{(i)}] \rangle$ que verifica la referencia de Frenet distinguida implica $e_i = \sum_{k=1}^i \lambda_k c^{(k)}$, de donde

$$e_i' = \sum_{k=1}^i \lambda_k' c^{(k)} + \sum_{k=1}^i \lambda_k c^{(k+1)}$$

luego $e_j'(t) \in \langle [c', \dots, c^{(i+1)}] \rangle = \langle [e_1, \dots, e_{i+1}] \rangle$, lo que prueba que si $j > i+1$,

$$\psi / \quad \omega_{ij} = \langle e_i', e_j \rangle = 0. \quad \square$$

I.23. Las ecuaciones (I.22.1,1',2,2') reciben el nombres de fórmulas de Frenet. En forma matricial (I.22.2,2') se escriben

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & 0 & \dots & 0 \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} & \dots & 0 \\ 0 & -\omega_{23} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\omega_{n-1n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

I.24. Para el caso de curvas en las que solo $\{c', \dots, c^{(\ell)}\}$ son l.i., con $\ell < n-1$, y se toma una referencia móvil de Frenet de las indicadas en I.21, las fórmulas de Frenet siguen verificándose para $1 \leq i \leq \ell$. En el caso en que c esté contenida en un subespacio afín de \mathbf{R}^n de dimensión ℓ , si se toma una referencia de Frenet de las indicadas en I.21. para este caso, se verifica además que $e'_i = 0$ si $\ell < i \leq n$, i.e. las fórmulas de Frenet son válidas para todos los índices pero con $\omega_{ij+1} = 0$ si $i > \ell$. Esta observación nos indica que los coeficientes ω_{ij+1} indican de algún modo como la curva se "curva" o "tuerce" para salirse de un subespacio afín de dimensión i . Ello nos llevará a definir las curvaturas en I.29. Pero, antes, vamos a ver como varía una referencia de Frenet distinguida frente a una isometría de \mathbf{R}^n conservando la orientación, y también que las ecuaciones de Frenet son invariantes frente a estas transformaciones.

I.25.PROPOSICION: Sea $B: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ una isometría conservando la orientación, $c: I \rightarrow \mathbf{R}^n$ una curva parametrizada, $c^* = B \circ c$. Si $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$ es una referencia móvil de c y $B = T \circ R$ es la descomposición unica de B en una traslación y una rotación, entonces $\{e_i^* = Re_i\}_{i=1}^n$ es una referencia móvil de c^* , y los coeficientes de las fórmulas de Frenet para ambas referencias coinciden: $\omega_{ij}(t) = \omega_{ij}^*(t)$, y $|c^*(t)| = |c'(t)|$.

DEMOSTRACION: Por una parte, $|c^*(t)| = |dB(c'(t))| = |Rc'(t)| = |c'(t)|$. Como R es una transformación ortogonal, es claro que $\{e_i^*\}$ es una referencia móvil de c^* . Por otra parte, $\omega_{ij}^*(t) = \langle e_i^*(t), e_j^*(t) \rangle = \langle dRe_i(t), Re_j(t) \rangle = \langle Re_i(t), Re_j(t) \rangle = \langle e_i(t), e_j(t) \rangle = \omega_{ij}(t)$. \square

I.26.PROPOSICION: Si en la proposición I.25 $\{e_i\}$ es la referencia de Frenet distinguida de c , entonces $\{e_i^*\}$ es la referencia de Frenet distinguida de c^* .

DEMOSTRACION: Obsérvese que $c^{*'} = (B \circ c)' = dBc' = Rc'$, $c^{*''} = (Rc')' = Rc''$, ..., $c^{*(k)} = Rc^{(k)}$, por lo tanto, si $\{\bar{e}_1^*, \dots, \bar{e}_n^*\}$ es la referencia de Frenet distinguida de c^* , $\bar{e}_1^* = \frac{c^{*'}}{|c^{*'}|} = \frac{Rc'}{|Rc'|} = Re_1$. Supongamos $\bar{e}_i^* = e_i^* = Re_i$ para $i=1, \dots, k-1$,

entonces

$$\bar{e}_k^* = \frac{1}{| |} \left\{ c^{*(k)} - \sum_{i=1}^{k-1} \langle c^{*(k)}, \bar{e}_i^* \rangle \bar{e}_i^* \right\} = \frac{1}{| |} \left\{ Rc^{(k)} - \sum_{i=1}^{k-1} \langle Rc^{(k)}, Re_i \rangle Re_i \right\} = Re_k = e_k^*.$$

Además $\bar{e}_n^* = \bar{e}_1^* \wedge \dots \wedge \bar{e}_{n-1}^* = e_1^* \wedge \dots \wedge e_{n-1}^* = Re_1 \wedge \dots \wedge Re_{n-1} = Re_n$ puesto que Re_n es ortogonal a Re_1, \dots, Re_{n-1} y como R conserva la orientación, $\{Re_1, \dots, Re_{n-1}, Re_n\}$ define la misma orientación que $\{e_1, \dots, e_n\} \in \underline{\text{can}}$, además de que $|Re_n|^2 = 1 = \det(\langle Re_i, Re_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n-1}$. \square

I.27. PROPOSICION: Sea $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva, $\varphi: J \rightarrow I$ un cambio de parámetro conservando la orientación, $c^* = c \circ \varphi$. Si $\{e_i(t)\}$ es una referencia móvil a lo largo de c , entonces $\{e_i^*(s) = e_i(\varphi(s))\}_{i=1}^n$ es una referencia móvil a lo largo de c^* .

Además
$$\frac{\omega_{ij}^*(s)}{|c^{*'}(s)|} = \frac{\omega_{ij}(\varphi(s))}{|c'(\varphi(s))|}$$

DEMOSTRACION: Que $\{e_i^*\}$ es una referencia móvil es evidente. Veamos la relación entre los coeficientes de las fórmulas de Frenet:

$$\frac{\omega_{ij}^*(s)}{|c^{*'}(s)|} = \frac{\langle e_i^*(s), e_j^*(s) \rangle'}{|c^*(s)|} = \frac{\langle (e_i \circ \varphi)'(s), e_j(\varphi(s)) \rangle}{|(c \circ \varphi)'(s)|} = \frac{\langle e_i(\varphi(s))\varphi'(s), e_j(\varphi(s)) \rangle}{|c'(\varphi(s))\varphi'(s)|} \quad (1)$$

$$= \frac{\langle e_i(\varphi(s)), e_j(\varphi(s)) \rangle}{|c'(\varphi(s))|} = \frac{\omega_{ij}(\varphi(s))}{|c'(\varphi(s))|},$$

donde se ha empleado en (1) que φ conserva la orientación y, por lo tanto, $\varphi' > 0$ y $\varphi'/|\varphi'| = 1$. \square

I.28. PROPOSICION: Si en la proposición I.27 $\{e_i(t)\}$ es una referencia de Frenet distinguida a lo largo de c , entonces $\{e_i^*(s)\}$ lo es a lo largo de c^* .

DEMOSTRACION: Sabemos que $\langle \{e_1^*, \dots, e_i^*\} \rangle = \langle \{e_1, \dots, e_i\} \rangle = \langle \{c', \dots, c^{(i)}\} \rangle$, bastará, para ver la condición (a) de I.20, probar que $\langle \{c', \dots, c^{(i)}\} \rangle = \langle \{c^{*'}, \dots, c^{*(i)}\} \rangle$ y que las dos bases definen la misma orientación. Para ello

veamos la forma de la matriz de cambio: de $c^* = c \circ \varphi$, derivando, resulta:

$$\begin{aligned} c^{*'} &= c' \varphi' \\ c^{*''} &= c'' \varphi'^2 + c' \varphi'' \\ c^{*'''} &= c''' \varphi'^3 + c'' 2\varphi' \varphi'' + c' \varphi' \varphi''' + c' \varphi'''' = \varphi'^3 c''' + d_1 c'' + d_2 c' \\ &\dots\dots\dots \\ c^{*(i)} &= \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} c^{(j)} + (\varphi')^i c^{(i)} \quad 1 \leq i \leq n-1. \end{aligned}$$

En forma matricial

$$(I.28.1) \quad \begin{pmatrix} c^{*'} \\ c^{*''} \\ c^{*'''} \\ \vdots \\ c^{*(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi' & & & & \\ & (\varphi')^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & (\varphi')^3 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & (\varphi')^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c' \\ c'' \\ c''' \\ \vdots \\ c^{(i)} \end{pmatrix}$$

y el determinante de la matriz de cambio es $(\varphi')^{1+2+\dots+i} > 0$ ya que φ es un difeomorfismo conservando la orientación. La condición (b) es consecuencia inmediata de que $e_i^*(s) = e_i(\varphi(s))$. □

I.29. DEFINICION: Sea $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva orientada verificando las condiciones de I.20, ω_{ij} los coeficientes de las fórmulas de Frenet respecto de una referencia de Frenet distinguida. Se define la curvatura i -ésima de c por

$$(I.29.1) \quad k_i = \frac{\omega_{ii+1}}{|c'(t)|} \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Obsérvese que las proposiciones (I.25) a (I.28) aseguran que k_i es un invariante geométrico bien definido para una curva orientada (i.e. no varía si se hace un cambio de parámetro conservando la orientación ni tampoco bajo isometrías de \mathbb{R}^n conservando la orientación).

De acuerdo con esta definición las fórmulas de Frenet se pueden escribir en

forma matricial como

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \\ \vdots \\ e_{n-1}' \\ e_n' \end{pmatrix} = |c'(t)| \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & \dots & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & \dots & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{pmatrix}$$

I.30. PROPOSICION: Sea $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva orientada verificando las condiciones de I.20, entonces $k_i > 0$ para $1 \leq i \leq n-2$.

DEMOSTRACION: Obsérvese primero que, como consecuencia de (I.28.1), si una parametrización de una curva orientada verifica las condiciones de I.20, entonces también las verifica cualquier otra parametrización. Por la definición de k_i , para ver que $k_i > 0$, bastará ver que $\omega_{ii+1} > 0$. Ahora bien, según vimos en I.20,

$$e_i = \frac{e_i^*}{|e_i^*|} = \frac{1}{|e_i^*|} \{c^{(i)} - \sum_{\ell=1}^{i-1} \langle c^{(i)}, e_\ell \rangle e_\ell\}, \quad y$$

$$e_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} b_{\ell k} c^{(k)} \quad \text{para } 1 \leq \ell \leq i-1,$$

por lo tanto $e_i = \frac{1}{|e_i^*|} \{c^{(i)} - \sum_{\ell=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{\ell} \langle c^{(i)}, e_\ell \rangle b_{\ell k} c^{(k)}\} = b_{ii} c^{(i)} + \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} c^{(k)}$,

de modo que

$$(I.30.1) \quad b_{ii} = \frac{1}{|e_i^*|} > 0.$$

Además de la misma fórmula de I.20 resulta:

$$c^{(i)} = |e_i^*| e_i + \sum_{\ell=1}^{i-1} \langle c^{(i)}, e_\ell \rangle e_\ell = \sum_{\ell=1}^i c_{i\ell} e_\ell \quad \text{con}$$

$$(I.30.2) \quad c_{ii} = |e_i^*| > 0.$$

de donde

$$\begin{aligned} \omega_{ii+1} &= \langle e_i', e_{i+1} \rangle = \langle \sum_{\ell=1}^i b'_{i\ell} c^{(\ell)} + \sum_{\ell=1}^i b_{i\ell} c^{(\ell+1)}, e_{i+1} \rangle = \\ & \text{[puesto que } e_{i+1} \text{ es perpendicular a } \langle \{c', \dots, c^{(i)} \rangle \text{]}} \\ &= \langle b_{ii} c^{(i+1)}, e_{i+1} \rangle = b_{ii} c_{i+1 i+1} > 0, \text{ por (I.30.1 y 2). } \quad \square. \end{aligned}$$

I.31. PROPOSICION: Sea $B: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ una isometría cambiando la orientación, $c: I \rightarrow \mathbf{R}^n$ una curva orientada, $c^* = B \circ c$. Entonces las curvaturas k_i^* de c^* y las k_i de c están relacionadas por: $k_i = k_i^*$ para $1 \leq i \leq n-2$, $k_{n-1} = -k_{n-1}^*$ (c verifica las condiciones de I.20).

DEMOSTRACION: Sea $B=T \circ \mu$, donde T es una translación y μ una transformación ortogonal cambiando la orientación. Sea $\bar{e}_i(t) = \mu e_i(t)$, $1 \leq i \leq n$, siendo $\{e_i\}$ la referencia de Frenet distinguida de c . Entonces, como en la demostración de I.26, se tiene que $\bar{e}_k^* = \mu e_k = \bar{e}_k \equiv e_k^*$ para $1 \leq k \leq n-1$. Por otro lado, $\{\mu e_1, \dots, \mu e_{n-1}, \mu e_n\}$ define la orientación opuesta a la de $\{e_1, \dots, e_n\}$, luego $e_n^* = -\mu e_n = e_1^* \wedge \dots \wedge e_{n-1}^*$, luego $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ es la referencia de Frenet distinguida de c^* . Resulta entonces para las curvaturas que:

para $i=1, \dots, n-2$,
$$k_i^* = \frac{\omega_{ii+1}^*}{|c^*|} = \frac{\langle e_i^*, e_{i+1}^* \rangle}{|c^*|} = \frac{\langle \mu e_i', \mu e_{i+1}' \rangle}{|\mu c'|} = \frac{\omega_{ii+1}}{|c'|} = k_i$$

para $n-1$:
$$k_{n-1}^* = \frac{\omega_{n+1n}^*}{|c^*|} = \frac{\langle e_{n-1}^*, e_n^* \rangle}{|c^*|} = \frac{\langle \mu e_{n-1}', -\mu e_n' \rangle}{|\mu c'|} = -k_{n-1}. \quad \square$$

I.32. PROPOSICION: Sea $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada verificando la condición de I.20, $\varphi: J \rightarrow I$ una parametrización cambiando la orientación, y $c^* = c \circ \varphi$. Sean k_i (k_i^*) las curvaturas de c (c^*). Entonces: $k_i^* = k_i$ para $1 \leq i \leq n-2$, /k

a) Si n es par, $k_{n-1}^* = k_{n-1}^*$ para $n/2$ par y $k_{n-1}^* = -k_{n-1}^*$ para $n/2$ impar.

b) Si n es impar, $k_{n-1}^* = k_{n-1}^*$ para $(n+1)/2$ par y $k_{n-1}^* = -k_{n-1}^*$ para $(n+1)/2$ impar.

DEMOSTRACION: Puesto que φ cambia la orientación, $\varphi' < 0$. También en este caso es válida la expresión (I.28.1). Sea $\{e_i^*(s)\}$ la referencia de Frenet distinguida de $c^*(s)$. El determinante de la matriz de cambio de $\{e_i\}_{i=1}^k$ a $\{e_i^*\}_{i=1}^k$ tiene el mismo signo que el de la matriz de cambio de $\{c^{(i)}\}_{i=1}^k$ a $\{c^{*(i)}\}_{i=1}^k$, que es la dada por (I.28.1) y es $(-1)^{1+2+\dots+k}$, por lo tanto $e_i^* = (-1)^i e_i$ $1 \leq i \leq n-1$, y $e_n^* = e_1^* \wedge \dots \wedge e_{n-1}^* = (-1)^{1+\dots+n-1} e_1 \wedge \dots \wedge e_{n-1} = (-1)^{1+\dots+n-1} e_n$. Resulta de aquí que

para $i=1, \dots, n-2$,
$$k_i^* = \frac{\langle e_i^*, e_{i+1}^* \rangle}{|c^*|} = (-1)^i (-1)^{i+1} \frac{\varphi'}{|\varphi'|} \frac{\langle e_i', e_{i+1}' \rangle}{|c'|} = (-1)^{2i} k_i = k_i;$$

para $n-1$,
$$k_{n-1}^* = \frac{\langle e_{n-1}^*, e_n^* \rangle}{|c^*|} = \frac{\varphi'}{|\varphi'|} (-1)^{n-1} (-1)^{1+\dots+n-1} k_{n-1} = (-1)^{1+\dots+n} k_{n-1},$$

de donde resultan a) y b) porque $1 + \dots + n = ((1+n)n/2)$. \square

I.33. NOTA: ¿Cómo definir las curvaturas cuando $\{c', \dots, c^{(n-1)}\}$ son l.d.?

Sea $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada tal que, en todo $t \in I$, $\{c', \dots, c^{(k)}\}$ son l.i. ($k < n-2$) y $\{c', \dots, c^{(k+1)}\}$ son l.d. Entonces podemos definir los campos vectoriales $e_1(t), \dots, e_k(t)$ a lo largo de c , unitarios y perpendiculares entre sí y cumpliendo la condición (a) de I.20. Sea v un vector unitario de $T_{c(t.)}$ \mathbb{R}^n ortogonal a $\langle \{c'(t.), \dots, c^{(k)}(t.)\} \rangle$. Podemos tomar entonces una b.o.n. $\bar{e}_{k+1}, \dots, \bar{e}_{n-1}$ de $\langle \{c'(t.), \dots, c^{(k)}(t.), v\} \rangle^\perp$ tal que $v = e_1(t.) \wedge \dots \wedge e_k(t.) \wedge \bar{e}_{k+1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{n-1}$. Definamos

$e(t) = e_1(t) \wedge \dots \wedge e_k(t) \wedge \bar{e}_{k+1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{n-1}$. Entonces

$$e(t_\bullet) = v, \text{ y } e'(t) = \sum_{i=1}^k e_i(t) \wedge \dots \wedge e_i'(t) \wedge \dots \wedge e_k(t) \wedge \bar{e}_{k+1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{n-1}$$

Pero, por la definición de los e_i , $e_i' = \omega_{ii-1} e_{i-1} + \omega_{ii+1} e_{i+1}$ si $i \leq k-1$, y para e_k ,

$e_k' = -\omega_{k-1k} e_{k-1}$, por lo tanto $e'(t) = 0$, y como $e(t_\bullet) = v$, resulta que $e(t) = v$ para todo $t \in I$.

Consideremos la función $f(t) = \langle c(t) - c(t_\bullet), v \rangle$. Se tiene que $f'(t) = \langle c'(t), v \rangle = \langle c'(t), e(t) \rangle = 0$ (pues $e(t) \perp e_1(t) = c' / |c'|$) y $f(t_\bullet) = 0$, luego $\langle c(t) - c(t_\bullet), v \rangle = 0$, luego $c(t) - c(t_\bullet)$ es perpendicular a v para todo $v \in \langle [c'(t_\bullet), \dots, c^{(k)}(t_\bullet)] \rangle^\perp$, luego $c(t)$ está en el subespacio afín $c(t_\bullet) + \langle [c'(t_\bullet), \dots, c^{(k)}(t_\bullet)] \rangle$ de dimensión k de \mathbb{R}^n . Resulta entonces natural definir:

$$k_i = \frac{\omega_{ii+1}}{|c'|} = \frac{\langle e_i', e_{i+1} \rangle}{|c'|} \quad \text{para } 1 \leq i \leq k-1$$

$$k_i = 0 \quad \text{para } i \geq k.$$

Esta definición se mantiene para curvas regulares arbitrarias tomando las expresiones anteriores en cada punto, i.e.: Si en un $t \in I$ $[c'(t), \dots, c^{(k)}(t)]$ son linealmente independientes y $[c'(t), \dots, c^{(k+1)}(t)]$ son linealmente dependientes, entonces las $k_i(t)$ se definen por las mismas expresiones que acabamos de dar.

$$e_k = \frac{1}{|c'|} \left\{ c^{(k)} - \sum_{i=1}^{k-1} \langle c^{(k)}, e_i \rangle e_i \right\}$$

$$e_k' = \left(\frac{1}{|c'|} \right)' \left\{ \dots \right\} + \frac{1}{|c'|} \left\{ \dots \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^k \alpha_i c^{(i)} = \sum_{i=1}^k \beta_i e_i \quad \Rightarrow \beta_k = 0$$

$|e_k| = 1$

Lección 3ª: CURVAS EN \mathbf{R}^2 .

S5. Interpretación geométrica de la curvatura.

Trabajaremos en este apartado con curvas regulares ($c' \neq 0$) orientadas de \mathbf{R}^2 , que, evidentemente, cumplen la condición de I.20 y poseen, por lo tanto, una referencia de Frenet distinguida $\{e_1(t), e_2(t)\}$. La curvatura k_1 la denotaremos por k .

I.34. Las ecuaciones de Frenet quedarán en la forma

$$(I.34.1) \quad \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \end{pmatrix} = |c'| \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix},$$

y $e_1 = c'/|c'|$, $e_2 = J e_1$.

Si $c(t)$ está parametrizada respecto de su longitud de arco (i.e. $|c'(t)| = 1$), entonces

$$(I.34.2) \quad e_1(t) = c'(t) \quad c''(t) = k(t)e_2(t). \quad |k(t)| = |c''(t)|.$$

La segunda ecuación (I.34.2.) da una interpretación del signo de la curvatura en términos de que e_2 esté dirigido hacia la dirección en que se curva la curva o hacia la opuesta, de modo que $k(t)$ cambia de signo cuando la curva pasa de ser cóncava a ser convexa. Se verá esto con detalle en un próximo ejemplo.

Si $c(t)$ está dada respecto de un parámetro arbitrario, entonces

$$(I.34.3) \quad k(t) = \frac{\langle c''(t), e_2(t) \rangle}{|c'(t)|^2} = \frac{\langle c'', Jc' \rangle}{|c'|^3}.$$

En efecto, de (I.34.1) resulta que $e_1' = |c'| k e_2$, y $e_1' = \left(\frac{c'}{|c'|}\right)' = \left(\frac{1}{|c'|}\right)' c' + \frac{c''}{|c'|}$,

luego $\left(\frac{1}{|c'|}\right)' c' + \frac{c''}{|c'|} = |c'| k e_2$, de donde, multiplicando escalarmente por e_2 , se obtiene (I.34.3).

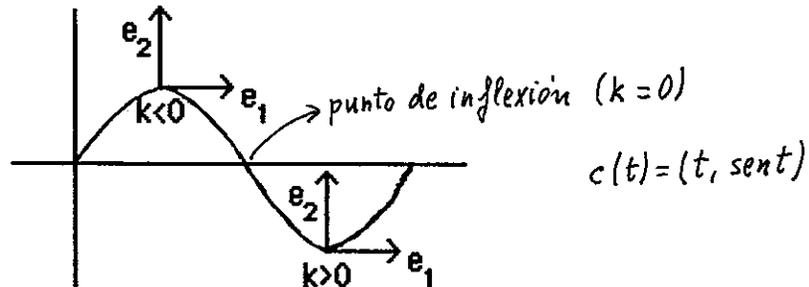
I.35. EJEMPLO: Consideremos la curva $c: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2 / c(t) = (t, \text{sen } t)$. Calculemos:

$$c'(t) = (1, \text{cos } t), \quad e_2 = J e_1 = J \frac{c'}{|c'|} = J \frac{(1, \text{cos } t)}{\sqrt{1+\text{cos}^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{cos}^2 t}} (-\text{cos } t, 1),$$

$$c''(t) = (0, -\text{sen } t), \quad \text{y aplicando (I.34.3),}$$

$$k(t) = \frac{\langle (0, -\text{sen } t), (-\text{cos } t, 1) \rangle}{(1+\text{cos}^2 t)^{3/2}} =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen} t}{(1+\cos^2 t)^{3/2}} \left\{ \begin{array}{ll} < 0 & \text{para } 0 < t < \pi \\ = 0 & \text{" } t = \pi \text{ (Punto de inflexión de la curva)} \\ > 0 & \text{" } \pi < t < 2\pi \end{array} \right\}$$



Vamos a dar ahora una interpretación más geométrica (en términos de la variación de un ángulo) de la curvatura de una curva plana:

I.36. PROPOSICION: Sea $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva orientada, v un vector fijo de \mathbb{R}^2 de norma unidad. Sea $\Theta(t)$ el ángulo de v a $e_1(t)$ medido en la dirección positiva (sentido opuesto al de las agujas del reloj), i.e. el ángulo definido por

$$(I.36.1) \quad \cos \Theta(t) = \langle e_1(t), v \rangle \quad \operatorname{sen} \Theta(t) = -\langle e_2(t), v \rangle.$$

Entonces se tiene que $\Theta'(t) = |c'(t)| k(t)$ (si $|c'| = 1$, $k(t) = \Theta'(t)$).

DEMOSTRACION: Observemos primero que para cada t , existe un entorno de t ,

tal que la función $\Theta(t) = \arccos \langle e_1(t), v \rangle = \arcsen (-\langle e_2(t), v \rangle)$ está bien definida y es diferenciable, luego tiene sentido hablar de $\Theta'(t)$. Ahora, derivando en (I.36.1), se tiene que

$$(-\operatorname{sen} \Theta(t)) \Theta'(t) = \langle |c'| k e_2(t), v \rangle = -|c'| k(t) \operatorname{sen} \Theta(t)$$

$$\cos \Theta(t) \Theta'(t) = \langle |c'| k e_1(t), v \rangle = |c'| k(t) \cos \Theta(t).$$

De ambas ecuaciones resulta la proposición. □

S6. Caracterización de la recta y la circunferencia.

Veremos más adelante que las curvaturas de una curva determinan ésta localmente salvo isometrías conservando la orientación. Vamos a dar primero este resultado en dos casos concretos viendo que determinados valores de k caracterizan completamente dos curvas muy conocidas.

I.37. PROPOSICION: Sea $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva plana. Son equivalentes:

(i) $k(t) = 0$ para todo $t \in I$,

(ii) c es una recta, es decir, existe una parametrización de c de la forma $c(t) = v_0 + (t-t_0)v$.

DEMOSTRACION: Es evidente que (ii) implica (i). Es consecuencia de I.33 que si se verifica (i) entonces $c(t)$ está contenida en una recta, pero vamos a dar aquí una demostración directa de que (i) implica (ii). Tomemos una parametrización de c con respecto a la longitud de arco. Como $k(t) = 0$, resulta de la segunda

fórmula de (I.34.2) que $c''(t) = 0$. Integrando: $0 = \int_{t_0}^t c''(t) dt = c'(t) - c'(t_0)$.

Integrando de nuevo: $\int_{t_0}^t c'(t_0) dt = \int_{t_0}^t c'(t) dt$, i.e. $c'(t_0)(t-t_0) = c(t) - c(t_0)$. \square

I.38. PROPOSICION: Sea $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular. Son equivalentes:

(i) c es un arco de circunferencia (i.e existe $p \in \mathbb{R}^2 / |c(t) - p| = r = cte > 0$ para todo $t \in I$). \mathbb{R}

(ii) $|k(t)| = 1/r = cte > 0$.

DEMOSTRACION: Puesto que ninguna de las propiedades depende de la parametrización, supondremos que c está parametrizada respecto de la longitud de arco. Veamos primero que (i) implica (ii). De $|c-p|^2 = r^2$, derivando resulta que $\langle c', c-p \rangle = 0$, luego $c-p$ es ortogonal a e_1 , luego $c-p = \epsilon |c-p| e_2 = \epsilon r e_2$, siendo $\epsilon = \pm 1$. Derivando de nuevo, $c' = \epsilon r e_2' = -\epsilon r k e_1$, luego, tomando

módulos, $1 = r|k|$, como queríamos probar. Veamos ahora que (ii) implica (i). Si $|k| = 1/r$, $k = \epsilon / r$, de donde, por (I.34.1), $e_2' = -\frac{\epsilon}{r} e_1$. Sea $p(t) = c(t) + \epsilon r e_2(t)$,

derivando $p'(t) = e_1(t) + \epsilon r (-\frac{\epsilon}{r} e_1) = 0$, luego $p(t) = p$ es un punto fijo de \mathbb{R}^2 , y $|c(t) - p| = |\epsilon r e_2(t)| = r$. c.q.d. \square

Acabamos de ver que en una circunferencia $c(t)$ el módulo de la curvatura es la inversa del radio y que su centro es $p = c(t) + \epsilon r e_2(t) = c(t) + \frac{1}{k} e_2(t)$, lo que hace natural la siguiente:

I.39. DEFINICION: Dada una curva $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, se llama radio de curvatura de c a $r = \frac{1}{|k|}$, y se llama centro de curvatura de c a $c(t) + \frac{1}{k} e_2(t)$. Se llama circunferencia osculatriz de c en t a la circunferencia con centro el centro de curvatura de c en t y radio el radio de curvatura de c en t .

Lección 4ª: CURVAS EN \mathbb{R}^3 .

S7. Curvatura y torsión.

I.40. Para una curva orientada $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ las curvaturas reciben nombres y notaciones especiales. Así, la primera curvatura $k_1(t)$ se denotará por $k(t)$ y se llamará curvatura de c , la segunda curvatura $k_2(t)$ se denotará por $\tau(t)$ y se llamará torsión de c . De acuerdo con I.30, $k(t) \geq 0$ y $\tau(t)$ puede tener cualquier signo. Además τ cambia de signo por una isometría de \mathbb{R}^n cambiando la orientación (I.31) y no cambia por un cambio de parámetro cambiando la orientación (cfr. I.32). Resulta, por tanto, que en \mathbb{R}^3 k y τ son funciones bien definidas para una curva geométrica y no solo para una curva orientada.

I.41. Si $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una referencia de Frenet distinguida de c , e_1 se llama vector tangente (unitario), e_2 vector normal y e_3 vector binormal de c . Se llama plano osculador de c al generado por $\{e_1, e_2\}$, plano normal al generado por $\{e_2, e_3\}$, y plano rectificante al generado por $\{e_1, e_3\}$.

I.42. De la definición de curvatura i -ésima resulta que, en este caso,

$$(I.42.1) \quad k(t) = \frac{\langle e_1'(t), e_2(t) \rangle}{|c'(t)|} \quad \tau(t) = \frac{\langle e_2'(t), e_3(t) \rangle}{|c'(t)|}$$

$\tau = \frac{\langle (k e_1)', e_3 \rangle}{|c'(t)|}$
 $= \frac{\langle k' e_1 + k e_1', e_3 \rangle}{|c'(t)|}$

y las ecuaciones de Frenet se escriben:

$$(I.42.2) \quad \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix} = |c'| \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \text{ i.e.}$$

$$e_1' = |c'| k e_2 \quad e_2' = |c'| (-k e_1 + \tau e_3) \quad e_3' = |c'| (-\tau e_2).$$

I.43. PROPOSICION: Sea $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización respecto de la longitud de arco s de una curva geométrica regular (i.e. $|c'(s)| = 1$). Se tiene que

$$k = |c''|, \quad \tau = \frac{\det(c', c'', c''')}{k^2} = \frac{\langle c' \wedge c'', c''' \rangle}{k^2}$$

DEMOSTRACION: Supongamos primero que c verifica las condiciones I.20. Entonces existe la referencia de Frenet distinguida $\{e_1, e_2, e_3\}$ y se tiene que

Dar esto
 con un
 cambio
 de I.44

$e_1 = c'$ y, por (I.42.2), $e'_1 = ke_2$, $c'' = e'_1 = ke_2$, de donde, como $k > 0$, tomando módulos, $k = |c''|$.

Para obtener la segunda ecuación, derivemos en $c'' = ke_2$. Resulta:

$$c''' = k'e_2 + k e'_2 = k'e_2 + k(-ke_1 + \tau e_3) = -k^2 e_1 + k'e_2 + k \tau e_3,$$

de donde,

$$\langle c' \wedge c'', c''' \rangle = \langle e_1 \wedge ke_2, -k^2 e_1 + k'e_2 + k \tau e_3 \rangle = k^2 \tau \langle e_1 \wedge e_2, e_3 \rangle = k^2 \tau.$$

Si en un punto $\{c', c''\}$ no son l.i., entonces, según definimos en I.33, $k = 0 = \tau$. Por otro lado, como c está caracterizada respecto a la longitud de arco, $\langle c'', c' \rangle = 0$, lo cual, junto con $\{c', c''\}$ l.d. implica $c'' = 0$. Además, es evidente que la expresión $\langle c' \wedge c'', c''' \rangle$ es nula en este caso, con lo que acaba la demostración de las fórmulas. \square

I.44. PROPOSICION: Sea $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización (arbitraria) de una curva geométrica regular. Se tiene que

$$k = \frac{|c' \wedge c''|}{|c'|^3} \quad \tau = \frac{\det(c', c'', c''')}{|c' \wedge c''|^2}$$

DEMOSTRACION: de $c' = |c'| e_1$, derivando (suponemos ahora que $\{c', c''\}$ son l.i.)

$$c'' = |c'| e_1 + |c'| e'_1 = \frac{\langle c', c'' \rangle}{|c'|} e_1 + |c'|^2 k e_2,$$

y, de las expresiones anteriores,

$$c' \wedge c'' = |c'|^3 k e_3, \text{ de donde, como } k > 0, k = |c' \wedge c''| / |c'|^3.$$

Derivando ahora la expresión anterior de c'' resulta,

$$\begin{aligned} c''' &= \left(\frac{\langle c', c'' \rangle}{|c'|} \right)' e_1 + \frac{\langle c', c'' \rangle}{|c'|} e'_1 + (|c'|^2 k)' e_2 + |c'|^2 k e'_2 = \\ &= \alpha e_1 + \beta e_2 + |c'|^3 k \tau e_3, \end{aligned}$$

de donde

$$\det(c', c'', c''') = \langle c' \wedge c'', c''' \rangle = |c'|^6 k^2 \tau,$$

de donde se obtiene la expresión para τ teniendo en cuenta la obtenida anteriormente para k . \square

I.45. PROPOSICION: Una curva geométrica $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es plana (i.e. está contenida en un subespacio afín de \mathbb{R}^3 de dimensión 2) si y sólo si su torsión es cero.

DEMOSTRACION: Si es plana existe un $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\langle c(t) - c(t_0), v \rangle = 0$, de donde $\langle c'(t), v \rangle = 0$, $\langle c''(t), v \rangle = 0$, $\langle c'''(t), v \rangle = 0$, luego c', c'', c''' , vectores de \mathbb{R}^3 son perpendiculares a un mismo $v \in \mathbb{R}^3$, luego están en el $\langle \{v\} \rangle^\perp$, luego $\{c', c'', c'''\}$ son l.d. y, por la expresión de τ en I.43 ó I.44, $\tau = 0$.

Recíprocamente, si $\tau = 0$, de I.44 ó I.43 se deduce que $\{c', c'', c'''\}$ son l.d. y, de I.33 resulta que c está contenida en un plano.

si $\tau = 0$, $e_3' = \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} e_2 = 0$, luego $e_3 = cte$, y $\langle c - c(t_0), e_3 \rangle \equiv \alpha |t|$ verifica $\alpha |t| = 0$ y $\alpha' |t| = \langle c'(t), e_3 \rangle + \langle c(t) - c(t_0), -\frac{1}{|t|} e_2 \rangle = 0$, luego c está en plano pasando por $c(t_0)$ y \perp a e_3 .

58. Descomposición local de una curva en el espacio.

Sea $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización respecto de la longitud de arco de una curva geométrica. Podemos realizar el desarrollo de Taylor de $c(s)$ en un entorno de $s_0 \in I$ y usar después las ecuaciones de Frenet, Resulta así la siguiente expresión:

I.46. PROPOSICION: (Representación local normal para una curva espacial):

$$c(s) - c(s_0) = \left\{ (s - s_0) - \frac{(s - s_0)^3}{6} k^2(s_0) \right\} e_1(s_0) +$$

$$+ \left\{ \frac{(s - s_0)^2}{2} k(s_0) + \frac{(s - s_0)^3}{6} k'(s_0) \right\} e_2(s_0) +$$

$$+ \left\{ \frac{(s - s_0)^3}{6} k(s_0) \tau(s_0) \right\} e_3(s_0) + O((s - s_0)^3).$$

DEMOSTRACION: Calculando el desarrollo de Taylor hasta el tercer orden y usando las fórmulas de Frenet:

$$c(s) - c(s_0) = (s - s_0) c'(s_0) + \frac{1}{2} (s - s_0)^2 c''(s_0) + \frac{1}{6} (s - s_0)^3 c'''(s_0) + O((s - s_0)^3) =$$

$$= (s - s_0) e_1(s_0) + \frac{1}{2} (s - s_0)^2 k e_2(s_0) + \frac{1}{6} (s - s_0)^3 (k' e_2(s_0) + k e_2'(s_0)) + O((s - s_0)^3) =$$

(teniendo en cuenta que $e_2' = -k e_1 + \tau e_3$)

$$= \left((s - s_0) - \frac{1}{6} (s - s_0)^3 k^2 \right) e_1(s_0) + \left(\frac{1}{2} (s - s_0)^2 k + \frac{1}{6} (s - s_0)^3 k' \right) e_2(s_0) +$$

$$+ \frac{1}{6} (s - s_0)^3 k \tau e_3(s_0) + O((s - s_0)^3). \quad \square$$

I.47. Resulta inmediatamente del desarrollo anterior las siguientes expresiones aproximadas de las proyecciones de la curva sobre los planos osculador, normal y rectificante de la curva; tomando $s_0 = 0$ por simplicidad; $k \equiv k(0)$, $\tau \equiv \tau(0)$

proyección sobre el plano osculador $\pi_{os} c(s) = \left(s, \frac{s^2}{2} k \right) + O(s^2)$

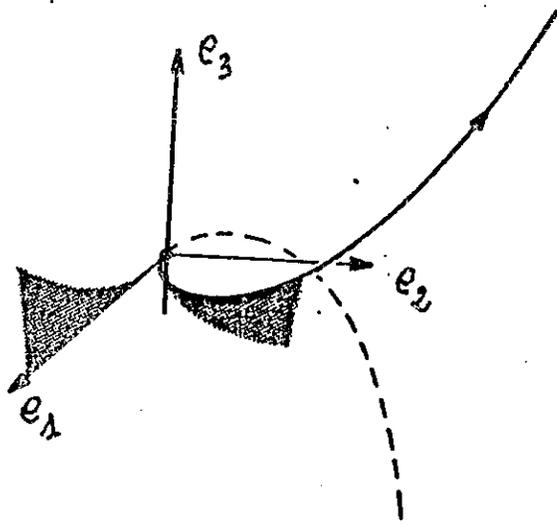
en la referencia $c(0), e_1(0), e_2(0)$

proyección sobre el plano normal $\pi_{nor} c(s) = \left(\frac{s^2}{2} k + \frac{s^3}{6} k', \frac{s^3}{6} k \tau \right) + O(s^3)$

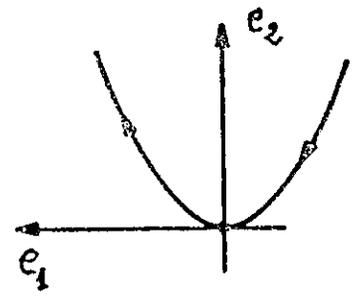
en la referencia $c(0), e_2(0), e_3(0)$

proyección sobre el plano rectificante $\pi_{rec} c(s) = \left(s - \frac{s^3}{6} k^2, \frac{s^3}{6} k \tau \right) + O(s^3)$

en la referencia $c(0), e_1(0), e_3(0)$

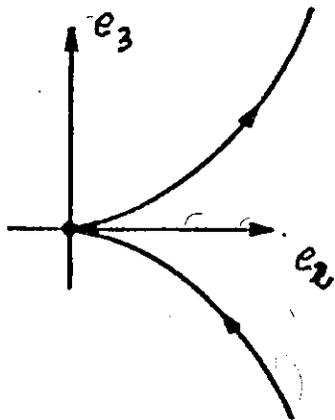


curva $c(s)$ en \mathbb{R}^3

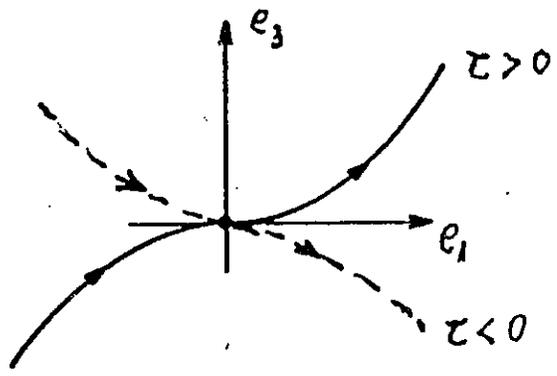


$$\pi_{0s} c(s) \approx \left(s, \frac{s^2}{2} k \right)$$

parábola, que determina la curvatura de c . A mayor k , más cerrada la parábola



$\pi_{\text{hor}} c(s) \approx \left(\frac{1}{2} k s^2, \frac{1}{6} k \tau s^3 \right)$
parábola semicúbica con un pico en el origen



$$\pi_{\text{rec}} c(s) \approx \left(s, \frac{1}{6} k \tau s^3 \right)$$

parábola cúbica

da nueva interpretación del signo de τ

Lección 5ª: DETERMINACION DE UNA CURVA POR SUS CURVATURAS

S9. Teorema de unicidad de curvas con curvatura dada.

Desde el punto de vista de la geometría euclídea (orientada) dos curvas de \mathbf{R}^n son 'iguales' si difieren solo en una isometría (conservando la orientación) de \mathbf{R}^n . Vamos a ver aquí que si dos curvas de \mathbf{R}^n tienen las mismas curvaturas son 'iguales' desde este punto de vista, i.e. que las curvaturas determinan la curva salvo una isometría.

I.48. TEOREMA: Sean $c, c^*: I \rightarrow \mathbf{R}^n$ dos curvas verificando las condiciones de I.20 y tales que $|c'(t)| = |c^{*\prime}(t)|$ y $k_i(t) = k_i^*(t)$ para $i = 1, \dots, n-1$ (respec. $k_i(t) = k_i^*(t)$ para $i = 1, \dots, n-2$, $k_{n-1}(t) = -k_{n-1}^*(t)$). Entonces existe una única isometría conservando la orientación (resp. invirtiendo la orientación) $B: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ tal que $c^* = B \circ c$.

DEMOSTRACION: Fijemos $t_0 \in I$. Evidentemente existe una única isometría $B = T \circ R$ (resp. $T \circ U$), con $R \in SO(n, \mathbf{R})$, (resp. $U \in O(n, \mathbf{R})$) de \mathbf{R}^n tal que $Bc(t_0) = c^*(t_0)$ y $Re_i(t_0) = e_i^*(t_0)$ $1 \leq i \leq n$ (resp. $Ue_i(t_0) = e_i^*(t_0)$ para $i = 1, \dots, n-1$ y $Ue_n(t_0) = -e_n^*(t_0)$); $Tx = x + a$ viene determinada por $Bc(t_0) = Rc(t_0) + a$, de donde resulta que $Bx = Rx + Bc(t_0) - Rc(t_0)$ (resp. $Bx = Ux + Bc(t_0) - Uc(t_0)$).

De la definición de k_i y las hipótesis sobre $k_i, k_i^*, |c'|$ y $|c^{*\prime}|$ resulta que $\omega_{ij}(t) = \omega_{ij}^*(t)$ (resp. $\omega_{ij}(t) = \omega_{ij}^*(t)$ salvo $\omega_{n-1n}(t) = -\omega_{n-1n}^*(t)$ y $\omega_{nn-1} = -\omega_{nn-1}^*$). Sustituyendo esto en las ecuaciones de Frenet $e_i^{*\prime}(t) = \sum \omega_{ij}^*(t) e_j^*(t)$ resulta

$$e_i^{*\prime}(t) = \sum \omega_{ij}(t) e_j^*(t) \quad (\text{resp.} \quad e_i^{*\prime}(t) = \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{ij}(t) e_j^*(t) - \omega_{in} e_n^*(t) \text{ si } i < n \\ e_n^{*\prime}(t) = -\omega_{nn-1} e_{n-1}^*(t).)$$

Pero, por otro lado, aplicando R (respec U) a las ecuaciones $e_i'(t) = \sum \omega_{ij}(t) e_j(t)$ resulta

$$(Re_i)'(t) = \sum \omega_{ij}(t) Re_j(t) \quad (\text{resp.} \quad (Ue_i)'(t) = \sum \omega_{ij}(t) Ue_j(t)).$$

Por lo tanto $e_i^{*\prime}$ y $Re_i(t)$ (resp. $e_i^{*\prime}$ y Ue_i para $1 \leq i \leq n-1$, $e_n^{*\prime}$ y $-Ue_n$) verifican el mismo sistema de ecuaciones diferenciales y las mismas condiciones iniciales $e_i^*(t_0) = Re_i(t_0)$ (resp. $Ue_i(t_0) = e_i^*(t_0)$ $1 \leq i \leq n-1$, $e_n^*(t_0) = -Ue_n(t_0)$), luego por la unicidad de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales,

$$e_i^*(t) = Re_i(t) \quad \forall t \in I, 1 \leq i \leq n \quad (\text{resp.} \quad e_i^*(t) = Ue_i(t) \quad 1 \leq i \leq n-1, e_n^*(t) = -Ue_n(t) \quad \forall t \in I).$$

En particular $Re_1(t) = e_1^*(t)$ (resp. $Ue_1(t) = e_1^*(t)$), de donde

$$Rc'(t) = R |c'(t)| e_1(t) = |c'(t)| Re_1(t) = |c'(t)| e_1^*(t) = \\ = |c^*(t)| e_1^*(t) = c^*(t), \quad (\text{resp. } Uc' = c^*),$$

integrando:

$$Bc(t) - Bc(t_0) = \int_{t_0}^t (Bc)'(t) dt = \int_{t_0}^t Rc'(t) dt = \int_{t_0}^t c^*(t) dt = c^*(t) - c^*(t_0) = \\ = c^*(t) - Bc(t_0),$$

de donde $Bc(t) = c^*(t) \quad \forall t \in I$ (y análogamente para U).

Que R conserva la orientación (U la invierte) es consecuencia del modo en que se ha definido.

La unicidad de B resulta de que si \tilde{B} es otra isometría tal que $\tilde{B} \bullet c = c^*$, con $\tilde{B} = \tilde{T} \bullet \tilde{R}$, entonces, como $\{e_i\}$ es la referencia de Frenet distinguida de c y $\{e_i^*\}$ la de c^* , por I.26, $e_i^* = \tilde{R}e_i$, y como $e_i^* = Re_i$, $1 \leq i \leq n$, resulta que $R = \tilde{R}$. Que $T = \tilde{T}$ resulta entonces de que $\tilde{B} c(t_0) = c^*(t_0) = Bc(t_0)$. Análogo razonamiento se sigue para el caso $\tilde{B} = \tilde{T} \bullet \tilde{U}$ usando I.31 en lugar de I.26. \square

S10. Teorema de existencia de curvas con curvaturas dadas.

I.49. TEOREMA: Sean $\{k_i(t)\}_{i=1}^{n-1}$ funciones diferenciables en un entorno de 0, $k_i(t) > 0$ para $i=1, \dots, n-2$. Entonces existe $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable, $0 \in I$, con $|c'(t)| = 1$ tal que $\{k_i(t)\}_{i=1}^{n-1}$ son las curvaturas de c.

DEMOSTRACION: La curva c que tenga las curvaturas k_i y su referencia de Frenet $\{e_i\}_{i=1}^n$ verifican el sistema de ecuaciones diferenciales (si $c = (c^1, \dots, c^n)$, $e_i = (e_i^1, \dots, e_i^n)$):

$$(I.49.1) \quad \begin{pmatrix} e_1^{1'} & \dots & e_1^{n'} \\ \vdots & & \vdots \\ e_n^{1'} & \dots & e_n^{n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & \dots & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & \dots & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^1 & \dots & e_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ e_n^1 & \dots & e_n^n \end{pmatrix}$$

de $(n+1)n$ en ecuaciones con $n(n+1)$ incógnitas.

Por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales existe una única solución de (I.49.1) verificando las condiciones iniciales $c^i(0) = c_0^i$, $e_i^j(0) = e_i^{0j}$. Si elegimos las condiciones iniciales de modo que $e_1^0 = (e_1^{01}, \dots, e_1^{0n}), \dots, e_n^0 = (e_n^{01}, \dots, e_n^{0n})$ sea una base ortonormal de \mathbb{R}^n y $\{e_1^0, \dots, e_n^0\} \in \text{can}$, entonces también

↓ para det A(0) > 0 si e = A · inv curvatura y como es mejor se tiene que det A(t) > 0 etc.

$\{e_1(t) = (e_1^1(t), \dots, e_1^n(t)), \dots, e_n(t) = (e_n^1(t), \dots, e_n^n(t))\} \in \underline{\text{can}}$ y es ortonormal para todo t. En efecto, escribamos la expresión matricial de (I.49.1) abreviadamente como $e'(t) = K(t) e(t)$. Como la matriz K es antisimétrica (${}^tK(t) = -K(t)$), resulta que

$$({}^t e(t) e(t))' = ({}^t e(t))' e(t) + {}^t e(t) e'(t) = {}^t e(t) {}^t K(t) e(t) + {}^t e(t) K(t) e(t) = 0,$$

luego ${}^t e(t) e(t)$ es una matriz constante, luego ${}^t e(t) e(t) = {}^t e(0) e(0) = I$ (I = matriz identidad), ya que e_1^0, \dots, e_n^0 son una b.o.n. Por lo tanto $e_1(t), \dots, e_n(t)$ es una b.o.n.

Si definimos ahora $c(t)$ como la solución de (I.49.1) con las condiciones iniciales dadas, i.e. $c(t) = (c^1(t), \dots, c^n(t))$, entonces $c(t)$ es una curva de \mathbb{R}^n que tiene las curvaturas k_i . En efecto, $c'(t) = e_1(t)$, luego (si k_1^c es la i-ésima curvatura de c), $k_1^c(t) = |e_1'(t)| = |k_1(t) e_2(t)| = k_1(t)$. Resulta también de aquí que si $\{e_i^c(t)\}$ es la referencia de Frenet de c, entonces $e_1^c(t) = e_1'(t) = k_1 e_2(t) = k_1^c e_2(t)$, de donde $e_2^c(t) = e_2(t)$. Además, $e_2'(t) = -k_1 e_1(t) + k_2 e_3(t)$ y $e_2^c'(t) = -k_1^c e_1^c(t) + k_2^c e_3^c(t)$, y como $e_2^c = e_2$, $e_1^c = e_1$, $k_1^c = k_1$, entonces $k_2 e_3(t) = k_2^c e_3^c(t)$, de donde (si $2 \leq n-1$), como $k_2 > 0$ y $k_2^c > 0$, resulta que $k_2 = k_2^c$ y $e_3 = e_3^c$. Se obtiene así por inducción que $k_1 = k_1^c, \dots, k_{n-2} = k_{n-2}^c$, $e_1 = e_1^c, \dots, e_{n-1} = e_{n-1}^c$. Para n se obtiene como antes que $k_{n-1} e_n(t) = k_{n-1}^c e_n^c(t)$. Ahora bien $\{e_1^c(t), \dots, e_n^c(t)\} \in \underline{\text{can}}$ y es ortonormal, $\{e_1(t), \dots, e_n(t)\} \in \underline{\text{can}}$ y es ortonormal, y como $e_i(t) = e_i^c(t)$ para $1 \leq i \leq n-1$, resulta que $e_n^c = e_n$. De aquí, y de la ecuación $k_{n-1} e_n(t) = k_{n-1}^c e_n^c(t)$ resulta $k_{n-1} = k_{n-1}^c$. \square

Observaciones sobre la necesidad de la condición I.20 para la unicidad de curvas con curvaturas dadas. Para el caso de no cumplirse esta condición, posibilidad de cambiar estos teoremas por otros usando los coeficientes en una referencia móvil dada (ver O'Neill, en material complementario).

PROBLEMAS DEL CAPITULO I

1.- Para la hélice $c(t) = (a \cos t, a \sin t, b t)$, $a > 0$, $b > 0$. a) Expresar las funciones coordenadas en términos de su longitud de arco. b) Determinar el vector unitario tangente en un punto general. c) Determinar la longitud de arco de una vuelta. d) Determinar su curvatura y torsión. e) Dar la ecuación de los planos osculador, normal y rectificante.

2.- Sea $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva con curvatura, torsión y derivada de la curvatura distintas de cero en todo punto. Demostrar que $c(I)$ está situada sobre una esfera si y solo si $r^2 + (r')^2 \tau^2 = \text{cte}$, donde r es la inversa de la curvatura, τ la inversa de la torsión, y $'$ denota la derivada con respecto al parámetro longitud de arco.

3.- Supongamos que las rectas normales de una curva $c(t)$ coinciden con las rectas binormales de otra curva $c^*(t) = c(t) + \lambda(t) e_2(t)$. Demostrar que a lo largo de c se verifica que $(k/(k^2 + \tau^2))$ es constante.

4.- Sea $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular. La curva c se dice de Bertrand si existe otra curva $c^*(t) = c(t) + \lambda(t) e_2(t)$ tal que las rectas normales de c y c^* coinciden en todo punto. a) Probar que toda curva plana es de Bertrand. b) Probar que si c es una curva regular con k y τ no nulas en todo punto, entonces es de Bertrand si y solo si existen constantes $a \neq 0$ y b tales que $a k + b \tau = 1$.

5.- Una curva en el espacio se llama una hélice cilíndrica si las rectas tangentes forman un ángulo constante con una dirección fija (eje de la hélice). a) Suponiendo $k \neq 0 \neq \tau$ en todo punto, demostrar que c es una hélice si y solo si k/τ es constante. b) Probar que la curva $c(t) = (a t, b t^2, t^3)$ con a y b constantes, es una hélice cilíndrica si y solo si $4b^4 = 9a^2$; ¿cual es el eje de la hélice en este caso?.

6.- Probar que si las normales principales de una curva con torsión distinta de cero en todo punto son paralelas a un plano fijado, la curva es una hélice cilíndrica (en el sentido del problema 5).

7.- Demostrar que si todas las tangentes a una curva pasan por un punto fijo, esa curva es una recta.

8.- Demostrar que si todos los planos osculadores tienen un punto en común, la curva es plana. ¿Se podría decir lo mismo en el caso de que los planos osculadores fueran paralelos a uno dado?.

9.- Demostrar que si todas las rectas normales de una curva pasan por un punto fijo, la curva es una circunferencia.

10.- Sea c^* la proyección de una hélice sobre un plano perpendicular al eje de la hélice (en el sentido del problema 5). Demostrar que e_2^* es paralelo a e_2 . Demostrar que $k^* = k \operatorname{cosec}^2 \alpha$, donde α es el ángulo entre e_1 y el eje de la hélice c .

11.- Demostrar que si todos los planos normales de una curva pasan por un punto fijo, entonces la curva está situada sobre una esfera de centro dicho punto.

12.- Probar que el lugar geométrico de los centros de curvatura de una hélice circular (sentido del problema 1) es otra hélice circular coaxial del mismo paso de rosca. ¿Cuándo están sobre el mismo cilindro?

13.- Calcular el aparato de Frenet (k, τ, e_1, e_2, e_3) de la curva

$$c(s) = ((4/5) \cos s, 1 - \sin s, -(3/5) \cos s).$$

Demuéstrese que es una circunferencia. Encuéntrese su centro y su radio.

14.- Una curva c se dice que es una curva esférica si su soporte está contenido en una esfera. Probar que una curva esférica tiene curvatura $k \geq 1/a$, siendo a el radio de su esfera.

15.- Probar que una curva c de curvatura constante k es una curva de Bertrand. Además, si la torsión de c no es constante, la curva asociada de c es el lugar geométrico de los centros de curvatura de c y tiene la misma curvatura k que c . (Suponer $k \neq 0 \neq \tau$).

16.- Probar que una hélice circular (como la del problema 1, por tanto con k y τ constantes) tiene una infinidad de curvas de Bertrand asociadas, siendo todas ellas hélices circulares con el mismo eje y paso que c .

17.- Probar que si una curva c tiene más de una curva de Bertrand asociada, tiene una infinidad de curvas de Bertrand asociadas, y este caso ocurre si y solo si c es una hélice circular.

18.- Determinar una función $f(t)$ tal que todas las normales principales de la curva

$$c(t) = (a \cos t, a \sin t, f(t))$$

sean paralelas al plano XY .

19.- Determinar la curva $c(s)$ en \mathbb{R}^2 , con longitud de arco s y curvatura:

$$a) k(s) = \text{cte}, \quad b) k(s) = 1/(s+m), \quad m = \text{cte}, \quad c) k(s) = 1/(1+s^2).$$

20.- Sea $c(s)$ una curva de longitud de arco s , curvatura $k > 0$, torsión $\tau > 0$ y referencia de Frenet e_1, e_2, e_3 . Sea $c^*(t) = \int_0^t e_3(s) ds$. (a) Probar que t es también la longitud de arco de la curva $c^*(t)$.

(b) Sea $k^*, \tau^*, e_1^*, e_2^*, e_3^*$ el aparato de Frenet de c^* . Mostrar que $k^* = \tau, \tau^* = k, e_1^* = e_3, e_2^* = -e_2, e_3^* = e_1$. (c) Mostrar que si $k = \tau$, las curvas c y c^* son congruentes.

CAPITULO II: SUPERFICIES DE \mathbf{R}^3 . FUNCIONES DIFERENCIABLES.
1ª FORMA FUNDAMENTAL.

LECCION 6ª: CONCEPTO DE SUBVARIEDAD DE \mathbf{R}^n .

S1. Concepto de superficie.

En este capítulo vamos a conocer los objetos cuya geometría queremos estudiar. Son objetos que, intuitivamente podrían obtenerse por deformaciones 'suaves' de espacios euclídeos. Además, en este curso vamos a estudiar la geometría de objetos que se pueden obtener, dentro de \mathbf{R}^3 , por deformación suave de un plano (i.e. de \mathbf{R}^2). Por "dentro de \mathbf{R}^3 " entendemos que la figura que resulta de la deformación todavía puede representarse como una figura de \mathbf{R}^3 : el resultado podría ser plasmado por un escultor. En lugar de limitarnos a definir superficies de \mathbf{R}^3 , definiremos algo más general, k -subvariedades de \mathbf{R}^n , porque cuesta el mismo trabajo dar esta definición, y porque así ahorraremos tiempo y esfuerzo a la hora de definir el concepto de aplicación diferenciable. Además, no se pierde intuición con esta generalización.

II.1.DEFINICION: Un subconjunto M de \mathbf{R}^n se dice que es una subvariedad de clase C^r y dimensión k ($k \leq n$) (abreviadamente k -subvariedad) si existe una familia $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de abiertos U_α de \mathbf{R}^k y aplicaciones $x_\alpha: U_\alpha \rightarrow M \subset \mathbf{R}^n$ verificando:

a) $x_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha$ es un abierto de M con la topología inducida por la de \mathbf{R}^n y $x_\alpha: U_\alpha \rightarrow x_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha \subset M$ es un homeomorfismo.

b) $x_\alpha \in C^r(U_\alpha, \mathbf{R}^n)$ y para todo $u \in U_\alpha$, $dx_\alpha(u): T_u \mathbf{R}^k \rightarrow T_{x_\alpha(u)} \mathbf{R}^n$ es inyectiva.

c) $\cup \{V_\alpha; \alpha \in A\} = M$.

Cuando $k=2$, $n=3$, se dice que M es una superficie de \mathbf{R}^3 .

A la aplicación x_α y al par (U_α, x_α) se les llama sistema de coordenadas o parametrización de M en $p \in x_\alpha(U_\alpha)$.

El par $(V_\alpha, x_\alpha^{-1})$ se llama carta de M en $p \in V_\alpha$, y la familia $\{(V_\alpha, x_\alpha^{-1})\}_{\alpha \in A}$ se llama atlas de M . En ocasiones llamaremos con estos mismos nombres a (U_α, x_α) y $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$.

La condición a) de la definición corresponde a la idea de que, a trozos, una superficie se obtiene deformando (sin romper) un trozo de un plano. La condición b) corresponde a la suavidad de la deformación: como veremos más adelante, esta condición permite que exista un plano tangente y, por lo tanto, impide que

haya "aristas".

Vamos a ver ahora un lema de análisis que será útil para probar la diferenciabilidad del cambio de sistemas de coordenadas en un entorno de un punto.

II.2.LEMA: (de extensión local de una aplicación con diferencial inyectiva): Sea U un abierto de \mathbb{R}^k , $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ una aplicación de clase C^r y $u \in U$ tal que $df(u)$ es inyectiva, entonces existe un abierto $U^* \subset U$ de \mathbb{R}^k conteniendo a u , un abierto W de \mathbb{R}^m conteniendo a 0 y una aplicación $f^*: U^* \times W \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ de clase C^r y difeomorfismo sobre su imagen, tales que $f^*(x,0) = f(x)$ para todo $x \in U^*$.

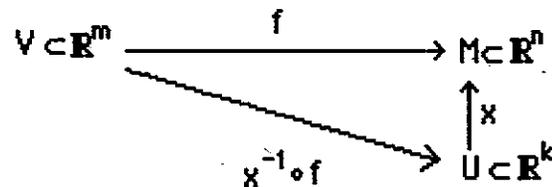
DEMOSTRACION: Como $df(u)$ es inyectiva, $df(u)(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{R}^{m+k}$ tiene dimensión k y su complementario ortogonal $df(u)(\mathbb{R}^k)^\perp$ tiene dimensión m . Sea $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base ortonormal de $df(u)(\mathbb{R}^k)^\perp$, y definamos la aplicación $f^*: U \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ por $f^*(x, y^1, \dots, y^m) = f(x) + y^1 v_1 + \dots + y^m v_m$. Sea $\{e_1, \dots, e_{k+m}\}$ la base canónica de \mathbb{R}^{m+k} , se tiene que

$$df^*(u,0)e_i = (\partial f^* / \partial x^i)(u,0) = (\partial f / \partial x^i)(u) = df(u)e_i, \text{ para } i=1, \dots, k, \text{ y}$$

$$df^*(u,0)e_j = (\partial f^* / \partial y^{j-k})(u,0) = v_{j-k}, \text{ para } j = k+1, \dots, k+m,$$

y, como $\{df(u)e_i\}$ es una base de $df(u)(\mathbb{R}^k)$ y $\{v_{j-k}\}$ una base de $df(u)(\mathbb{R}^k)^\perp$, resulta que $df^*(u,0)$ transforma una base en otra base, luego es un isomorfismo y, por el teorema de la función inversa, existe un abierto V conteniendo a $(u,0)$ tal que f^* restringido a V es un difeomorfismo sobre su imagen, pero entonces, por la definición de la topología producto, existe un abierto U^* conteniendo a u y un abierto W conteniendo a 0 tales que $(u,0) \in U^* \times W \subset V$, y f^* restringido a $U^* \times W$ es un difeomorfismo. \square

II.3.PROPOSICION: Sea V un abierto de \mathbb{R}^m , M una k -subvariedad de \mathbb{R}^n de clase C^s ($s \geq r$), $f: V \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^r (como aplicación entre abiertos de \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n). Entonces, para todo sistema de coordenadas (U,x) en M , $x^{-1} \circ f$ es de clase C^r en $(x^{-1} \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}\{x(U)\}$.



DEMOSTRACION: Vamos a ver la diferenciabilidad en cada punto. Sea $y \in f^{-1}(x(U))$, $p=f(y)$, $u \in U/x(u)=p$. Como x es un sistema de coordenadas, $dx(u)$ es inyectiva, y, por II.2, existen abiertos $U^* \subset U$ conteniendo u y $W \subset \mathbb{R}^{n-k}$ conteniendo 0 y un difeomorfismo $x^*: U^* \times W \rightarrow x^*(U^* \times W) = V^*$ tal que $x^*(v,0) = x(v)$ para todo $v \in U^*$. Entonces $f^{-1}(V^* \cap x(U^*)) = W^*$ es un abierto de V conteniendo a y , la

$$x(U^*)$$

restricción de $x^{*-1} \circ f$ a W^* es de clase C^r por ser composición de aplicaciones de clase C^r , y, si $z \in W^*$, $f(z) \in X(U^*)$, por tanto, existe $v^* \in U^*$ tal que $x(v^*) = f(z)$, y como $x(v^*) = x^*(v^*, 0)$, $x^{*-1} \circ f(z) = (v^*, 0) = (x^{-1}(f(z)), 0)$, luego $x^{-1} \circ f|_{W^*} = \pi_1 \circ x^{*-1} \circ f|_{W^*}$, donde π_1 es la proyección de \mathbf{R}^n sobre \mathbf{R}^k , por lo tanto $x^{-1} \circ f$ es diferenciable en p . \square

II.4. COROLARIO: Sean (U_1, x_1) , (U_2, x_2) dos sistemas de coordenadas de M (de clase C^r) en p , $x_i(U_i) = V_i$. Entonces la aplicación de cambio de coordenadas $x_2^{-1} \circ x_1: x_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \rightarrow x_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$ y su inversa son de clase C^r .

DEMOSTRACION: Basta tomar en II.3 $f=x_1$, $V=U_1$, $x=x_2$. \square

II.5 EJEMPLOS:

- a) Todo abierto de \mathbf{R}^n es una n -subvariedad.
- b) La esfera $S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n / x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$. Podemos considerar los sistemas de coordenadas $(U, x_{i\pm})$, donde

$$U = \{(u_1, \dots, u_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1} / u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2 < 1\} \text{ y}$$

$$x_{i\pm}: U \rightarrow \{(x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1} / x_i > 0\} \text{ están definidas por}$$

$$x_{i\pm}(u_1, \dots, u_{n-1}) = (u_1, \dots, u_{i-1}, \pm \sqrt{1 - (u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2)}, u_i, \dots, u_{n-1}).$$

Se comprueba facilmente que estos sistemas de coordenadas verifican las condiciones de la definición de $(n-1)$ -subvariedad.

Vamos a ver ahora algunos modos sencillos de dar subvariedades.

II.6. PROPOSICION: Sea U un abierto de \mathbf{R}^k , $f: U \rightarrow \mathbf{R}^{n-k}$ de clase C^r . Entonces $M = \{(u^1, \dots, u^k, f(u^1, \dots, u^k)) / (u^1, \dots, u^k) \in U\}$ es una k -subvariedad de \mathbf{R}^n de clase C^r .

DEMOSTRACION: Basta definir $x: U \rightarrow \mathbf{R}^n$ por

$$x(u^1, \dots, u^k) = (u^1, \dots, u^k, f(u^1, \dots, u^k)),$$

que es una aplicación inyectiva y continua, y con inversa continua por ser la restricción a un subespacio de una aplicación proyección. Además $x(U) = M$ y dx viene representada en todo punto por una matriz que contiene una submatriz identidad $k \times k$, por lo tanto es de rango k , i.e., inyectiva. \square

II.7. PROPOSICION: Sea $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n-k}$ una aplicación de clase C^r y a un valor regular de f (i.e. $df(p)$ es suprayectiva para todo $p \in f^{-1}(a)$), entonces $f^{-1}(a)$ es una k -subvariedad de \mathbf{R}^n de clase C^r .

DEMOSTRACION: Supondremos $a = 0$ (si $a \neq 0$, tomamos $F = f-a$, que verifica

$F^{-1}(0) = f^{-1}(a)$ y $dF(p) = df(p)$ para todo $p \in f^{-1}(a)$). Para cada $p \in f^{-1}(0)$, $df(p)$ es suprayectiva, por lo tanto la matriz de $df(p)$ tendrá una submatriz $(\partial f^j / \partial x^{i(l)})$ $1 \leq j, l \leq n-k$, de determinante distinto de 0. Si suponemos (por comodidad de notación y sin pérdida de generalidad) que $(i(1), \dots, i(n-k)) = (k+1, \dots, n)$, y si $p = (x_0^1, \dots, x_0^k, x_0^{k+1}, \dots, x_0^n)$, entonces, por el teorema de la función implícita, existe un abierto W de \mathbf{R}^n conteniendo a p , un abierto U_p de \mathbf{R}^k conteniendo a (x_0^1, \dots, x_0^k) y una aplicación $g: U_p \rightarrow \mathbf{R}^{n-k}$ de clase C^r tal que para todo $(x^1, \dots, x^k) \in U_p$ se tiene que $f(x^1, \dots, x^k, g(x^1, \dots, x^k)) = 0$, $g(x_0^1, \dots, x_0^k) = (x_0^{k+1}, \dots, x_0^n)$ y $W \cap f^{-1}(0) = \{(u, g(u)) / u \in U_p\}$. Definamos ahora $x_p: U_p \rightarrow M = f^{-1}(0) \subset \mathbf{R}^n$ por $x_p(x^1, \dots, x^k) = (x^1, \dots, x^k, g(x^1, \dots, x^k))$. La familia $\{(U_p, x_p)\}_{p \in M}$ verifica las condiciones de la definición II.1, ya que $\{x_p(U_p)\}_{p \in M}$ recubre M , $x_p(U_p) = f^{-1}(0) \cap W$ es un abierto de $f^{-1}(0)$, y los sistemas de coordenadas de esta familia son del tipo de los de la proposición anterior. \square

II.8. Aplicando la proposición anterior es claro que la esfera $S^{n-1} = f^{-1}(1)$, con $f = x_1^2 + \dots + x_n^2$, es una $(n-1)$ -subvariedad de \mathbf{R}^n .

S2. Aplicaciones diferenciables entre superficies.

En un espacio vectorial real de dimensión n hay coordenadas y el cálculo diferencial se hace con ellas. En una k -subvariedad se pierde la estructura de espacio vectorial, pero sigue habiendo k coordenadas localmente y el cálculo diferencial (que es un cálculo local) puede hacerse con ellas. De ahí la primera definición que daremos de aplicación diferenciable.

II.9. DEFINICION: Sea M_1 una k -subvariedad de \mathbf{R}^m y M_2 una l -subvariedad de \mathbf{R}^n . Una aplicación $f: M_1 \rightarrow M_2$ diremos que es diferenciable de clase C^r en $p \in M_1$ si es continua en p y existen sistemas de coordenadas (U_1, x_1) en p , (U_2, x_2) en $f(p)$, tales que la aplicación $x_2^{-1} \circ f \circ x_1$ es diferenciable de clase C^r en $x_1^{-1}(p)$.

Obsérvese que es el hecho de ser f continua en p lo que permite que $x_2^{-1} \circ f \circ x_1$ esté definida en un abierto y tenga sentido hablar de diferenciability.

La definición resulta independiente de los sistemas de coordenadas usados. En efecto, si $(U_1^*, x_1^*), (U_2^*, x_2^*)$ son otros sistemas de coordenadas en p y $f(p)$ respectivamente, entonces, por la continuidad de f en p , existe un abierto V^* de \mathbf{R}^k contenido en U_1^* y conteniendo a $x_1^{*-1}(p)$ sobre el que $x_2^{*-1} \circ f \circ x_1^* = (x_2^{*-1} \circ x_2) \circ (x_2^{-1} \circ f \circ x_1) \circ (x_1^{-1} \circ x_1^*)$, con lo cual, $x_2^{*-1} \circ f \circ x_1^*$ es diferenciable en $x_1^{*-1}(p)$ si $x_2^{-1} \circ f \circ x_1$ es diferenciable en $x_1^{-1}(p)$.

Si V es un abierto de M_1 , $f: V \rightarrow M_2$ se dice de clase C^r en V si lo es en cada punto $p \in V$. Para ver que f es C^r en V , bastará probar que para sistemas de coordenadas como antes, con $x_1(U_1) \subset V$, $(x_2^{-1} \circ f \circ x_1)^{-1}(U_2) = x_1^{-1} \circ f^{-1}(x_2(U_2))$ es un abierto de \mathbf{R}^k y que $x_2^{-1} \circ f \circ x_1$ es de clase C^r sobre este abierto. (para $f = x_2 \circ x_1^{-1} \circ f \circ x_1 \circ x_2^{-1}$ es continua automáticamente)

Cuando M_1 y M_2 son abiertos de \mathbf{R}^k y \mathbf{R}^l , f es diferenciable en $p \in M_1$ en el sentido de II.9 si lo es en el sentido usual, como se ve tomando como sistemas de coordenadas las respectivas aplicaciones identidad.

Para aplicaciones $f: M \rightarrow \mathbf{R}^l$, la definición II.9 dice que f es de clase C^r en $p \in M$ si f es continua en p y $f \circ x: U \rightarrow \mathbf{R}^l$ es de clase C^r en $x^{-1}(p)$ para un sistema de coordenadas (U, x) en p . Para una aplicación $f: A \text{ abto } \subset \mathbf{R}^k \rightarrow M$, f es de clase C^r en $p \in A$ si existe un sistema de coordenadas (U, x) en $f(p)$ tal que $x^{-1} \circ f$ es de clase C^r en p .

Vamos a ver ahora algunos casos en los que es posible ver que una aplicación entre k -subvariedades es de clase C^r sin necesidad de usar coordenadas.

II.10. PROPOSICION: Sea A un abierto de \mathbf{R}^m , M una k -subvariedad (de clase C^s , $s \geq r$) de \mathbf{R}^m contenida en A . Si $f: A \rightarrow \mathbf{R}^n$ es una aplicación de clase C^r en el sentido usual, entonces $f|_M: M \rightarrow \mathbf{R}^n$ es una aplicación de clase C^r en el sentido de II.9.

DEMOSTRACION: Basta tomar, para cada $p \in M$, un sistema de coordenadas (U, x) en p y observar que $f \circ x$ es diferenciable por ser composición de aplicaciones diferenciables y que $f|_M$ es continua por ser la restricción de una aplicación continua a un subespacio topológico. \square

II.11. PROPOSICION: Sea A un abierto de \mathbf{R}^m , $f: A \rightarrow \mathbf{R}^n$ de clase C^r y M una k -subvariedad de \mathbf{R}^n de clase C^s ($s \geq r$) tal que $f(A) \subset M$. Entonces $f: A \rightarrow M$ es de clase C^r en el sentido de II.9.

DEMOSTRACION: Que $f: A \rightarrow M$ es continua es consecuencia del teorema de topología con el mismo enunciado (cambiando "de clase C^r " por "continua"). Por otra parte, para cada $p \in A$, sea (U, x) un sistema de coordenadas de M en $f(p)$. Entonces, por II.3, $x^{-1} \circ f$ es de clase C^r en $f^{-1}(x(U))$, luego f es de clase C^r en p . \square

II.12. NOTA: De II.11 resulta que la definición II.9 es equivalente a la siguiente: " $f: M_1 \rightarrow M_2$ es de clase C^r en $p \in M_1$ si existe un sistema de coordenadas (U, x) en p tal que $f \circ x: U \rightarrow M_2 \subset \mathbf{R}^n$ es de clase C^r en $x^{-1}(p)$ ". En efecto, si $f: M_1 \rightarrow M_2$ es de clase C^r en este sentido, entonces, por II.11, f es C^r

en el sentido de II.9. Recíprocamente, si f es de clase C^r en p en el sentido de II.9, entonces $f \circ x_1: U_1 \rightarrow M_2$ viene dada por $x_2 \circ (x_2^{-1} \circ f \circ x_1)$, donde $x_2^{-1} \circ f \circ x_1$ es de clase C^r en $x_1^{-1}(p)$ por II.9, y x_2 es C^r en $x_2^{-1}(p)$ por ser un sistema de coordenadas, luego $f \circ x_1$ es C^r en $x_1^{-1}(p)$, i.e. f es C^r en el sentido de esta nota.

II.13.PROPOSICION: Sea A un abierto de \mathbf{R}^m , M_1 y M_2 subvariedades de dimensiones k y l de \mathbf{R}^m y \mathbf{R}^n de clases C^s y C^t ($t \geq s$) respectivamente, tales que $M_1 \subset A$, y $f: A \rightarrow \mathbf{R}^n$ de clase C^r tal que $f(M_1) \subset M_2$. Entonces $f|_{M_1}: M_1 \rightarrow M_2$ es de clase C^r .

DEMOSTRACION: Por II.9, $f|_{M_1}: M_1 \rightarrow \mathbf{R}^n$ es de clase C^r y, por la nota II.12, esto es equivalente a que $f|_{M_1}: M_1 \rightarrow M_2$ sea de clase C^r . \square

En la categoría de las subvariedades diferenciables y aplicaciones diferenciables, las aplicaciones que dejan invariantes las propiedades diferenciales se llaman y se definen como en \mathbf{R}^n .

II.14.DEFINICION: Sean M_1, M_2 k -subvariedades de \mathbf{R}^m y \mathbf{R}^n respectivamente y de clase C^s ($s \geq r$). Una aplicación $f: M_1 \rightarrow M_2$ se dice que es un C^r -difeomorfismo (difeomorfismo de clase C^r) si es una aplicación biyectiva de clase C^r con inversa de clase C^r .

II.15. Según esta definición, la aplicación $x: U \rightarrow x(U) \subset M$ de un sistema de coordenadas de una k -subvariedad M es un difeomorfismo sobre su imagen, ya que x y x^{-1} son continuas por ser x homeomorfismo, x es diferenciable (como se ve aplicando II.11), y x^{-1} es diferenciable, como se ve tomando para $x(U)$ el sistema de coordenadas (U, x) , pues entonces $x^{-1} \circ x: U \rightarrow U$ es la identidad, que es diferenciable, y por lo tanto, x^{-1} es diferenciable en el sentido de II.9 (o, equivalentemente, de II.12).

Esta observación justifica que se hable ordinariamente de una k -subvariedad diferenciable de \mathbf{R}^n como de un subespacio topológico de \mathbf{R}^n que es localmente difeomorfo a \mathbf{R}^k .

APENDICE A LA LECCION 6^aOtra definicion de k-subvariedad de \mathbf{R}^n .

II.A.6.1. DEFINICION: Un subconjunto M de \mathbf{R}^n se dice que es una k-subvariedad de \mathbf{R}^n de clase C^r si para todo $p_0 \in M$ existe un entorno V de p_0 en \mathbf{R}^n y una aplicación $f: V \rightarrow \mathbf{R}^{n-k}$ de clase C^r sobre V tal que $df(p)$ es suprayectiva para todo $p \in V \cap M$ y $M \cap V = \{p \in V / f(p) = 0\}$.

II.A.6.2. PROPOSICION: Las definiciones II.1 y II.A.6.1. son equivalentes.

DEMOSTRACION: Supongamos primero que M es una k-subvariedad en el sentido II.1. Sea $p_0 \in M$ y (U, x) un sistema de coordenadas de M tal que $p_0 = x(u_0) \in x(U)$. Por el lema II.2 existe un abierto U^* de \mathbf{R}^k y un abierto W de \mathbf{R}^{n-k} tales que $(u_0, 0) \in U^* \times W$ y una aplicación $x^*: U^* \times W \rightarrow V' = x^*(U^* \times W)$ abto de \mathbf{R}^n que es un difeomorfismo y verifica $x^*(u, 0) = x(u)$ para todo $u \in U^*$. Además, como $x(U)$ es un abierto de M , existe un abierto G de \mathbf{R}^n tal que $x(U) = G \cap M$. Como x^* es homeomorfismo, podemos tomar los abiertos U^*, W de modo que $x^*(U^* \times W) \subset G$ y siga verificándose $(u_0, 0) \in U^* \times W$. Con esta elección U^* y W se cumple además que $x^*(U^* \times W) \cap M \subset G \cap M = x(U)$.

Definamos ahora $f': V' \rightarrow U^* \times W$ por $f' = x^{*-1}$. Evidentemente f' es un difeomorfismo y verifica $f'(x(u)) = f'(x^*(u, 0)) = (u, 0)$ para todo $u \in U^*$. Sea ahora $f = \pi \circ f'$, siendo $\pi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n-k}$ la proyección sobre las últimas $n-k$ componentes. Entonces se verifica que: para todo $p \in V' \cap M = x^*(U^* \times W) \cap M \subset x(U)$, $f(p) = f(x(u)) = \pi f'(x(u)) = \pi(u, 0) = 0$; y, recíprocamente, si $p \in V'$ y $f(p) = 0$, i.e. $\pi \circ f'(p) = 0$, entonces $f'(p) = (u, 0)$ con $u \in U^*$, y como $f'(x(u)) = (u, 0)$ y f' es biyectiva, $p = x(u) \in x(U) \cap V' \subset M \cap V'$.

De lo anterior resulta que si M es una k-subvariedad en el sentido II.1, lo es en el de II.A.6.1.

Recíprocamente. Supongamos ahora que M es una k-subvariedad en el sentido de II.A.6.1. Entonces los mismos argumentos de la demostración II.7 prueban que M es una k-subvariedad en el sentido II.1.

Lección 7ª: DIFERENCIAL DE UNA APLICACION ENTRE SUPERFICIES.

53. Espacio tangente a una subvariedad de \mathbf{R}^n

En todo ente apartado M será una k -subvariedad de \mathbf{R}^n de clase C^r .

II.16.DEFINICION: Llamaremos curva diferenciable de clase C^r en M a una aplicación $c: I \rightarrow M$ de clase C^r (I =intervalo abierto).

II.17.DEFINICION: Sea $p \in M$, un vector $X \in T_p \mathbf{R}^n$ se dice que es un vector tangente a M en p si existe una curva de clase C^r $c: I \rightarrow M$, $0 \in I$, tal que $c(0)=p$ y $c'(0)=X$. Al conjunto $T_p M$ de los vectores tangentes a M en p se le llama espacio tangente a M en p .

II.18.PROPOSICION: Sea (U,x) un sistema de coordenadas en $p \in M$, $u \in U$ tal que $x(u)=p$. Entonces $T_p M = dx(u)(T_u \mathbf{R}^k)$.

DEMOSTRACION: Veremos en primer lugar que $dx(u)(T_u \mathbf{R}^k) \subset T_p M$. Sea $X^* \in T_u \mathbf{R}^k$, la curva $c^*: I \rightarrow U$ / $c^*(t) = u + tX^*$ verifica $c^*(0) = u$ y $c^{*\prime}(0) = X^*$, por lo tanto $dx(u)(X^*) = dx(u)(c^{*\prime}(0)) = (d(x \circ c^*)/dt)(0) = (dc/dt)(0)$ con $c(t) = x \circ c^*(t)$, $c(0) = x(c^*(0)) = x(u) = p$, luego $dx(u)(X^*) = c'(0) \in T_p M$. Para probar la inclusión contraria, consideremos $X \in T_p M$, entonces existe una curva c en M con $c(0)=p$, $c'(0)=X$. Definamos $c^* = x^{-1} \circ c$, que verifica $c^*(0) = x^{-1} \circ c(0) = x^{-1}(p) = u$. Por II.9(penúltimo párrafo), si c es diferenciable, c^* es diferenciable. Sea $X^* = c^{*\prime}(0) \in T_u \mathbf{R}^k$. Se tiene entonces, aplicando la regla de la cadena, que $dx(u)X^* = dx(u)(d(x^{-1} \circ c)/dt)(0) = (d(x \circ x^{-1} \circ c)/dt)(0) = (dc/dt)(0) = X$, luego $X \in dx(u)T_u \mathbf{R}^k$, lo que prueba la inclusión recíproca. \square .

II.19.COROLARIO: (a) $T_p M$ es un subespacio vectorial de dimensión k de $T_p \mathbf{R}^n$. / φ
En los siguientes apartados (U,x) es un sistema de coordenadas de M .

(b) $\{(\partial x / \partial u^1)(u), \dots, (\partial x / \partial u^k)(u)\}$ es una base de $T_{x(u)} M$, para todo $u \in U$.

(c) Si $X^* \in T_u \mathbf{R}^k$, $dx(u)X^* = X \in T_{x(u)} M$ y $X^* = (X^1, \dots, X^k)$, entonces $X = \sum_{i=1}^k X^i (\partial x / \partial u^i)(u)$ (i.e. las coordenadas de X en la base de $T_{x(u)} M$ inducida por el sistema de coordenadas x son las mismas que las del vector del que es imagen por $dx(u)$).

(c) Si $c: I \rightarrow M$ es una curva en M , $x^{-1} \circ c(t) = (u^1(t), \dots, u^k(t))$, entonces $c'(t) = \sum_{i=1}^k u^i'(t) (\partial x / \partial u^i)(x^{-1} \circ c(t))$.

DEMOSTRACION: a) es una consecuencia de que $dx(u)$ es una aplicación lineal inyectiva y de II.18.

SUPERFICIES DE \mathbf{R}^3

b) También como consecuencia de que $dx(u)$ es lineal inyectiva se tiene que si $\{e_i\}_{1 \leq i \leq k}$ es la base canónica de $T_u \mathbf{R}^k = \mathbf{R}^k$, entonces $\{dx(u)(e_i) = (\partial x / \partial u^i)(u)\}_{1 \leq i \leq k}$ es una base de $dx(u)(T_u \mathbf{R}^k) = T_x(u)M$.

(c) $X = dx(u)X^* = dx(u)(\sum_{i=1}^k X_i^i e_i) = \sum_{i=1}^k X_i^i dx(u)e_i = \sum_{i=1}^k X_i^i (\partial x / \partial u^i)(u)$.

(d) $c'(t) = (d(x \circ x^{-1} \circ c) / dt)(t) = dx(x^{-1} \circ c(t)) (d(x^{-1} \circ c) / dt)(t)$, pero $(d(x^{-1} \circ c) / dt)(t) = (u^1(t), \dots, u^k(t))$ y, aplicando c), se obtiene d). □

II.20. PROPOSICION: Sean $(U_1, x_1), (U_2, x_2)$ sistemas de coordenadas de M en p . Si $X \in T_p M$ tiene las expresiones $X = \sum_{i=1}^k X_1^i \partial x_1 / \partial u_1^i = \sum_{j=1}^k X_2^j \partial x_2 / \partial u_2^j$, entonces,

$$\begin{pmatrix} X_2^1 \\ \dots \\ X_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial u_2^1 / \partial u_1^1 & \dots & \partial u_2^1 / \partial u_1^k \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial u_2^k / \partial u_1^1 & \dots & \partial u_2^k / \partial u_1^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1^1 \\ \dots \\ X_1^k \end{pmatrix}$$

$X_2^i = \frac{du_2^i}{du_1^k}(X_1^k)$
 $X_2^k = \frac{du_2^k}{du_1^k}(X_1^k)$
 $\frac{du_2^i}{(x_2)^k} = \frac{\partial u_2^i}{\partial u_1^k} \frac{du_1^k}{(x_1)^k}$
 $X_2^i = \sum \frac{\partial u_2^i}{\partial u_1^k} X_1^k$

*no cambiar
de coordenadas*

donde $\partial u_2^i / \partial u_1^j = \partial(x_2^{-1} \circ x_1)^i / \partial u_1^j$ (i.e. $u_2^i(u_1) = (x_2^{-1} \circ x_1)(u_1)^i$), o, lo que es lo mismo, si $X = dx_1(u_1)X_1^* = dx_2(u_2)X_2^*$ (lo que, de acuerdo con II.19c) equivale a $X_1^* = (X_1^1, \dots, X_1^k), X_2^* = (X_2^1, \dots, X_2^k)$, entonces $X_2^* = d(x_2^{-1} \circ x_1)(u_1)X_1^*$.

DEMOSTRACION: Aplicando la regla de la cadena, se tiene que $dx_1(u_1)X_1^* = d(x_2 \circ x_2^{-1} \circ x_1)(u_1)X_1^* = dx_2(u_2) \circ d(x_2^{-1} \circ x_1)(u_1)X_1^*$, siendo $x_2(u_2) = x_1(u_1) = p$. Comparando esta igualdad con $dx_1(u_1)X_1^* = dx_2(u_2)X_2^*$, como $dx_2(u_2)$ es inyectiva, resulta $X_2^* = d(x_2^{-1} \circ x_1)(u_1)X_1^*$. □

S4. Diferencial de una aplicación entre subvariedades.

En este apartado todas las subvariedades consideradas serán de clase C^r con $r \geq 1$. Lo mismo para las aplicaciones diferenciables.

II.21. DEFINICION: Sean M_1 y M_2 una k -subvariedad y una l -subvariedad de \mathbf{R}^m y \mathbf{R}^n respectivamente, $f: M_1 \rightarrow M_2$ diferenciable en p , (U, x) un sistema de coordenadas de M_1 en p . Se define $df(p): T_p M_1 \rightarrow T_p M_2$ por $df(p)X = d(f \circ x)(u)X^*$, donde $x(u) = p$ y $X^* \in T_u \mathbf{R}^k$ es tal que $dx(u)X^* = X$ (i.e. $df(p) = d(f \circ x)(u) \cdot (dx(u))^{-1}$).

Esta definición es independiente del sistema de coordenadas. En efecto, si (V, y) es otro sistema de coordenadas en p , $v \in V / y(v) = p$, $dy(v)Y^* = X$, con $Y^* \in T_v \mathbf{R}^k$, entonces $d(f \circ y)(v)Y^* = d(f \circ x \circ x^{-1} \circ y)(v)Y^* = d(f \circ x)(u) \cdot d(x^{-1} \circ y)(v)Y^* = d(f \circ x)(u)X^*$, donde, en la última igualdad, hemos aplicado II.20.

*No tiene que
equivale a
lo que viene
después*

II.22. Obsérvese también que $df(p)$ está bien definida, i.e., que si $X \in T_p M_1$,

entonces $df(p)X \in T_{f(p)}M_2$. En efecto: si $X \in T_pM_1$, existe una curva $c: I \rightarrow M_1$ tal que $c(0)=p$, $c'(0)=X$ y (como vimos en la demostración de II.18) $X^* = c^*(0)$ con $dx(u)X^* = X$ y $c^* = x^{-1} \circ c$, de modo que, aplicando la definición II.21,

$$(II.22.1) \quad df(p)X = d(f \circ x)(u) c^*(0) = d(f \circ x)(u)(x^{-1} \circ c)'(0) = \\ = (d(f \circ x \circ x^{-1} \circ c)/dt)(0) = (d(f \circ c)/dt)(0) ,$$

pero $f \circ c$ es una curva de M_2 con $f \circ c(0) = f(p)$, luego su vector tangente es un vector de $T_{f(p)}M_2$ c.q.d..

Lo que acabamos de ver es, también, una nueva demostración de que $df(p)$ es independiente del sistema de coordenadas elegido, y se puede tomar como definición alternativa de $df(p)$. Además, la fórmula (II.22.1) da un método para calcular $df(p)$ que es en muchas ocasiones más práctico que el usar la definición II.21 que necesita coordenadas.

II.23. NOTA: $df(p)$ es una aplicación lineal, como se puede observar en la definición II.21, donde aparece como composición de dos aplicaciones lineales: $d(f \circ x)(u)$ y $dx(u)^{-1}$.

II.24. PROPOSICION: Si $f: M_1 \rightarrow M_2$ es diferenciable en $p \in M_1$, $X \in T_pM_1$, las componentes de $Y=df(p)X$ en un sistema de coordenadas (U_2, x_2) de M_2 en $f(p)$ vienen dadas en función de las componentes de X en un sistema de coordenadas (U_1, x_1) de M_1 en p por

$$\begin{pmatrix} Y^1 \\ \dots \\ Y^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial u_2^1 / \partial u_1^1 & \dots & \partial u_2^1 / \partial u_1^k \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial u_2^l / \partial u_1^1 & \dots & \partial u_2^l / \partial u_1^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^1 \\ \dots \\ X^k \end{pmatrix}$$

donde $u_2^i(u_1) = (x_2^{-1} \circ f \circ x_1)^i(u_1)$; o, lo que es lo mismo, si $x_1(u_1) = p$, $X = dx_1(u_1)X^*$ y $x_2(u_2)=p$, $Y = dx_2(u_2)Y^*$, entonces $Y^* = d(x_2^{-1} \circ f \circ x_1)(u_1)X^*$.

DEMOSTRACION: $Y^* = (dx_2(u_2))^{-1} \cdot df(p)X = dx_2(u_2)^{-1} \cdot d(f \circ x_1)(u_1)X^* =$
 $= dx_2(u_2)^{-1} \cdot d(x_2 \circ x_2^{-1} \circ f \circ x_1)(u_1)X^* =$
 $= dx_2(u_2)^{-1} \cdot dx_2(u_2) \cdot d(x_2^{-1} \circ f \circ x_1)(u_1)X^* = d(x_2^{-1} \circ f \circ x_1)(u_1)X^* . \quad \square$

continúa esto solo

II.24'. COROLARIO: $df(p) = dx_2(u_2) \cdot d(x_2^{-1} \circ f \circ x_1)(u_1) \cdot dx_1(u_1)^{-1}$
 $df(p) = d(f \circ x_1)(u_1) \circ dx_1(u_1)^{-1} = d(x_2 \circ x_2^{-1} \circ f \circ x_1)(u_1) = d(x_2(u_2)) \cdot d(x_2^{-1} \circ f \circ x_1)(u_1) \circ dx_1(u_1)^{-1}$

II.24''. PROPOSICION: Sea M una k -subvariedad de \mathbf{R}^n conexa, $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ diferenciable tal que $df(q) = 0$ para todo $q \in M$. Entonces f es constante en M .

DEMOSTRACION: Sea (U, x) un sistema de coordenadas con U conexo. Sea $u \in U$. Por II.21, $df(x(u)) = 0$ si y solo si $d(f \circ x)(u) = 0$ y, como U es conexo, $f \circ x$ es constante

sobre U , luego f es constante sobre $x(U)$. Como para todo $q \in M$ existe un sistema de coordenadas (U, x) en q con U conexo, resulta que para todo q de M existe un abierto $V = x(U) \subset M$ conteniendo a q tal que $f|_V$ es constante.

Sea q_0 un punto de M , $a = f(q_0)$. Sea $Q = \{p \in M / f(p) = a\} = f^{-1}(a)$. Como f es continua, Q es cerrado. Por otra parte, para todo q de Q existe un abierto V conteniendo a q tal que $f|_V = f(q) = a$, i.e. $V \subset Q$, luego Q es abierto, y como $q_0 \in Q$ y M es conexa, $Q = M$.

Vamos ahora a ver la versión en subvariedades de dos teoremas clásicos para las funciones diferenciables entre espacios euclídeos.

II.25. TEOREMA (de la función inversa para subvariedades): Sean M_1, M_2 , k -subvariedades de \mathbf{R}^m y \mathbf{R}^n respectivamente, p un punto de M_1 ; sea $f: M_1 \rightarrow M_2$ una aplicación diferenciable en un entorno de p con $df(p)$ un isomorfismo. Entonces existe un abierto V de M_1 conteniendo a p tal que $f(V)$ es un abierto de M_2 y $f: V \rightarrow f(V)$ es un difeomorfismo.

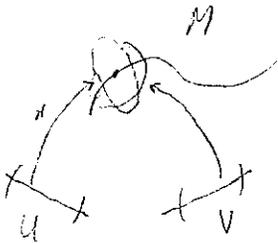
DEMOSTRACION: Sea (U_1, x_1) un sistema de coordenadas en p tal que $x_1(U_1)$ está contenido en el entorno de p en el que f es diferenciable. Sea (U_2, x_2) un sistema de coordenadas de M_2 en $f(p)$. Entonces $x_2^{-1} \circ f \circ x_1: x_1^{-1} \circ f^{-1} \circ x_2(U_2) \subset U_1 \rightarrow U_2$ es una aplicación diferenciable entre abiertos de \mathbf{R}^k con $d(x_2^{-1} \circ f \circ x_1)(u_1) = dx_2(u_2)^{-1} \circ df(p) \circ dx_1(u_1)$ (por II.24'), que es un isomorfismo por ser composición de isomorfismos. Por tanto, por el teorema de la función inversa para transformaciones en \mathbf{R}^k , existe un entorno abierto U de u_1 en $x_1^{-1} \circ f^{-1} \circ x_2(U_2) \subset U_1$ tal que $x_2^{-1} \circ f \circ x_1(U) \subset U_2$ es un abierto de \mathbf{R}^k y $x_2^{-1} \circ f \circ x_1: U \rightarrow x_2^{-1} \circ f \circ x_1(U)$ es un difeomorfismo. Si tomamos $V = x_1(U)$, se tiene que $f(V) = x_2(x_2^{-1} \circ f \circ x_1(U))$ que es un abierto de M_2 por ser la imagen por x_2 de un abierto de \mathbf{R}^k contenido en U_2 y ser x_2 un homeomorfismo sobre su imagen. Además $f: V \rightarrow f(V)$ es composición de homeomorfismos ($f = x_2 \circ (x_2^{-1} \circ f \circ x_1) \circ x_1^{-1}$), por lo tanto un homeomorfismo; f es diferenciable por serlo $x_2^{-1} \circ f \circ x_1$ (definición II.9), y, como $x_2^{-1} \circ f \circ x_1$ es un difeomorfismo, $x_1^{-1} \circ f^{-1} \circ x_2$ es diferenciable, por lo tanto f^{-1} es diferenciable, y f es un difeomorfismo. \square

II.26. PROPOSICION (Regla de la cadena en subvariedades): Sean M_1, M_2, M_3 subvariedades diferenciables de dimensiones k_1, k_2, k_3 de $\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^l$ respectivamente. Sea $p \in M_1$, $f: M_1 \rightarrow M_2$ diferenciable en p y $g: M_2 \rightarrow M_3$ diferenciable en $f(p)$. Entonces $g \circ f$ es diferenciable en p y $d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p)$.
DEMOSTRACION: $g \circ f$ es continua en p por serlo f en p y g en $f(p)$. Por ser f

diferenciable en p , existen sistemas de coordenadas (U_1, x_1) en p y (U_2, x_2) en $f(p)$ tales que $x_2^{-1} \circ f \circ x_1$ es diferenciable en $x_1^{-1}(p)$ y, como g es diferenciable en $f(p)$, existe un sistema de coordenadas (U_3, x_3) en $g(f(p))$ tal que $x_3^{-1} \circ g \circ x_2$ es diferenciable en $x_2^{-1}(f(p))$. Por la continuidad de f y g existe un abierto $V_2 \subset x_2^{-1}(x_2(U_2)) \cap g^{-1}(x_3(U_3)) \subset U_2$ conteniendo $x_2^{-1}(f(p))$ y un abierto $V_1 \subset x_1^{-1}(x_1(U_1) \ll f^{-1}(V_2)) \subset U_1$ tal que $p \in x_1(V_1)$ y $x_3^{-1} \circ g \circ f \circ x_1$ es una aplicación definida sobre V_1 que se puede escribir como $x_3^{-1} \circ g \circ f \circ x_1 = (x_3^{-1} \circ g \circ x_2) \circ (x_2^{-1} \circ f \circ x_1)$ y, por lo tanto, diferenciable en p . Además, si $x_1(u_1) = p$, $x_2(u_2) = f(p)$ y $x_3(u_3) = g(f(p))$, entonces $d(g \circ f)(p)X = d(g \circ f \circ x_1)(u_1)(dx_1(u_1)^{-1}X) = d(g \circ x_2 \circ x_2^{-1} \circ f \circ x_1)(u_1)(dx_1(u_1)^{-1}X) = d(g \circ x_2)(u_2) \cdot d(x_2^{-1} \circ f \circ x_1)(u_1)(dx_1(u_1)^{-1}X) =$ [por II.24] $= d(g \circ x_2)(u_2)(dx_2(u_2)^{-1}d(f \circ x_1)(u_1)dx_1(u_1)^{-1}X) =$ [por II.21] $= dg(f(p))(df(p)X)$. \square

TEOREMA: Sea M una k -subvariedad de \mathbb{R}^m , U un abierto de \mathbb{R}^k , y $x: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable e inyectiva tal que $x(U) \subset M$ y que $dx(u): \mathbb{R}^k \rightarrow T_x(u)M$ es inyectiva $\forall u \in U$. Entonces (U, x) es un sistema de coordenadas de M .

DEMOSTRACION:



Puesto que $x: U \rightarrow M$, $T_x(u) \subset T_x(u)M$, y como $dx(u)$ es inyectiva, $dx(u): T_x(u)\mathbb{R}^k = T_x(u)M$. Por el teorema de extensión $\exists u \in U \ni u \rightarrow u \in \mathbb{R}^k$ y $x(u) = x(u)$.
~~Como M es superficie, \exists abto V de M y G_u de $\mathbb{R}^m / G_u \cap M = V_u$. Como x_u es continua, $x_u^{-1}(V_u) \subset U$. x_u es biyectiva de U_u sobre $x_u(U_u \cap \{0\})$, con inversa continua por ser la restricción de x_u a $x_u(U_u \cap \{0\})$, si probamos que $x_u(U_u \cap \{0\})$ es un abto de M . Ahora bien, como $x_u(U_u \cap \{0\}) \subset G_u$, $x_u^{-1}(x_u(U_u \cap \{0\})) =$~~

Como x continua, $U_u = x^{-1}(y(V)) \ni U$ es un abto, $dy^{-1} \circ dx$ isomorfismo, luego $y^{-1} \circ x$ difeomorfismo local, y es biyectiva, luego es un difeomorfismo, y como y es un homeomorfismo, $x(U_u) = y(y^{-1} \circ x(U_u))$ es un abierto, y $x = y \circ (y^{-1} \circ x)$ es un homeomorfismo $\forall u \in U$.

APENDICE A LA LECCION 7

El espacio tangente con la definición II.A.6.1.

II.A.7.1 "Sea M una k -subvariedad de \mathbf{R}^n , $p \in M$, V un abierto contenido a p y $f: V \rightarrow \mathbf{R}^{n-k}$ cumpliendo las propiedades de II.A.6.1. Entonces $T_p M = \text{Ker } df(p)$ ".

En efecto: Dados V y f , construyamos U_p abierto de \mathbf{R}^k y $x_p: U_p \rightarrow V \cap M = f^{-1}(0) \subset M \subset \mathbf{R}^n$ como en la demostración de II.7. Sea $u \in U_p$ tal que $x_p(u) = p$. Entonces

$$T_p M = dx_p(u)(T_u \mathbf{R}^k) \cong \langle \{ (1, 0, \dots, 0, \frac{\partial g}{\partial u^1}(u)), \dots, (0, \dots, 0, 1, \frac{\partial g}{\partial u^k}(u)) \} \rangle,$$

siendo $x_p(u^1, \dots, u^k) = (u^1, \dots, u^k, g(u^1, \dots, u^k))$.

Por otro lado, $\dim \text{ker } df(p) = k$, ya que $df(p)$ es suprayectiva. Como, por la construcción de x_p , $f(u^1, \dots, u^k, g(u^1, \dots, u^k)) = 0$ para $(u^1, \dots, u^k) \in U$, se tiene que, para $1 \leq i \leq k$,

$$\begin{aligned} df(p) \left((0, \dots, 1, \dots, 0, \frac{\partial g}{\partial u^i}(u)) \right) &= \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) + \sum_{j=k+1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) \frac{\partial g^j}{\partial u^i}(u) = \\ &= \frac{\partial}{\partial u^i} f(u^1, \dots, u^k, g(u^1, \dots, u^k)) \Big|_u = 0, \end{aligned}$$

luego los vectores $\{ (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \frac{\partial g}{\partial u^i}(u)) \}$ son también una base de $\text{Ker } df(p)$.

Por lo tanto $T_p M = \text{ker } df(p)$, c.q.d.

Como hoy no puedo hablar, voy a adelantar una historia en comics que tenía previsto contar más adelante.

Primero contaré la historia, luego enseñaré los comics.

La historia comienza el día 22 de noviembre (ayer, Santa Cecilia, patrona de los músicos) del año 1º de la 3ª época (ya he dicho que esto es un adelanto, de la 1ª y 2ª época hablaré en otras ocasiones), a las 8 de la mañana, en Planiburgo, la ciudad de Planilandia.

Por aquellos días los planiburgueses tenían ya dos rutas tradicionales de excursiones que consistían en salir de la ciudad en una dirección fija sin variar el rumbo y volver a la ciudad por el lado opuesto al lado por el que habían salido: la ruta A o ruta roja, descubierta en la 1ª época (una excursión de 3 semanas) y la ruta B o ruta verde, descubierta en la 2ª época (una excursión de dos semanas).

Pero el día 22 de noviembre, a las 8 de la mañana, un habitante de Planiburgo, de nombre Un y de apellido Cuadrado, junto con dos amigos, intentó una tercera ruta, la ruta C (de Cuadrado, el nombre del primero en recorrer ese camino) o incolora (porque en esta ocasión no se llevaron ningún tipo de pintura para marcar el camino).

En esta ocasión, al contrario de lo que ocurrió cuando se iniciaron las excursiones que dieron lugar a los descubrimientos de las rutas A y B, la aventura no produjo ninguna expectación, nadie madrugó para ver partir a los aventureros.

Las cosas extrañas comenzaron a ocurrir cuatro semanas después, cuando Un Cuadrado y sus amigos estaban ya cerca de la ciudad, volviendo por el lado opuesto del que habían partido, como

era habitual en ese tipo de excursiones. Volvían caminando por su derecha cuando un granjero que conducía por la izquierda estuvo a punto de atropellarlos con su tractor. Se produjo un altercado entre el granjero y los excursionistas, porque el granjero sostenía que el también circulaba por la derecha.

Pasado el incidente del granjero los aventureros llegaron a Planiburgo, que estaba entonces en fiestas, las cuales eran anunciadas por grandes carteles a la entrada de la ciudad. Y aquí vino la segunda sorpresa para Un Cuadrado y sus amigos : los carteles (escritos con letras de puntos y rayas, y no como las nuestras, que no son legibles en Planilandia, lo cual conviene decir corrigiendo un error del copista de la historia, que incluso se atreve a copiar letras de ese tipo como tomadas de la historia original, pero es a todas luces evidente que un planilandés no podría darse cuenta de la geometría ni de la topología de una "a" sino después de haber dado una vuelta completa alrededor de la letra(*), lo cual haría imposible para él la lectura de un texto aún corto escrito con nuestro alfabeto) estaban escritos al revés, y todo el mundo se empeñaba en decir que la derecha era izquierda y la izquierda derecha.

Puesto que todo el mundo estaba en contra de ellos, Un Cuadrado y sus amigos no pudieron aguantar mucho tiempo en Planiburgo, y decidieron repetir la excursión. A la vuelta todo seguía igual que antes de la primera excursión. Habían desaparecido las diferencias de criterio sobre derecha e izquierda entre los amigos excursionistas y los demás habitantes de la ciudad. Posteriores excursiones confirmaron el siguiente fenómeno empírico: "Una excursión por la

ruta C produce una enfermedad caracterizada por confundir la derecha con la izquierda, y esta enfermedad se cura realizando otra vez esa excursión".

Años más tarde, el 23.XI.89, unos geómetras dieron una interpretación del fenómeno. Se encuentra en los comics que veremos a continuación. Algunos están en inglés (idioma original en el que está escrita la historia), por lo que el nombre del protagonista (Un Cuadrado) aparece como A Square.

Pero antes de ver los comics, podemos pensar un poco...(solo un poco, que nadie se asuste). Recordemos algo de lo que hemos aprendido hasta ahora. ¿A qué nos suena lo de derecha e izquierda en geometría?. Cuando hablamos de orientación en espacios vectoriales dijimos que tratábamos de formalizar un concepto que reflejara la igualdad y diferencia que hay entre la mano derecha y la mano izquierda : para hacerlas coincidir hay que hacer una transformación cambiando la orientación. Es posible hablar de esta transformación en un espacio vectorial porque es posible definir una orientación (de las dos únicas posibles) sobre él. Es la posibilidad de orientar un espacio vectorial (en particular un plano) lo que permite hablar de modo preciso de derecha e izquierda en él.

Pero Planilandia, que es una superficie, no es un plano (pues en un plano no es posible salir de un punto manteniendo una dirección fija y volver al mismo punto), entonces, ¿es posible hablar en una superficie arbitraria de orientación, y de derecha e izquierda por lo tanto?. Si el relato de Planilandia es verídico, parece que al

menos en Planilandia no es posible. Veamos (¡por fin!) los comics.

Hemos visto en los comics dos modelos distintos de Planilandia. En uno (el cilindro) se puede hablar de derecha e izquierda, en el otro (la cinta de Möbius) no. ¿Como podemos buscar un criterio general que distinga un tipo de superficies de las otras?.

Si pensamos en orientar una superficie, la primera idea es que, puesto que en cada punto de la superficie tenemos un plano tangente, que podemos orientar, podríamos orientar una superficie dando una orientación arbitraria sobre cada plano tangente. Pero, por ser la orientación arbitraria en cada punto, la orientación en un punto de la superficie no dice nada sobre lo que ocurre con la orientación en otro punto, y el ejemplo de la Planilandia-Cinta de Möbius nos indica las consecuencias funesta que puede tener el pensar que una elección de orientaciones arbitrarias sobre cada plano tangente define una orientación sobre toda la superficie.

(Sigue con los apuntes).

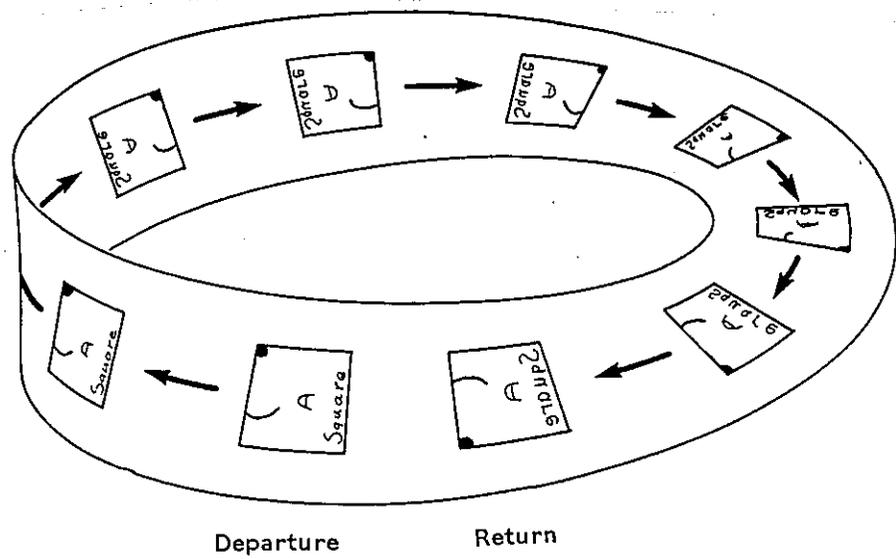
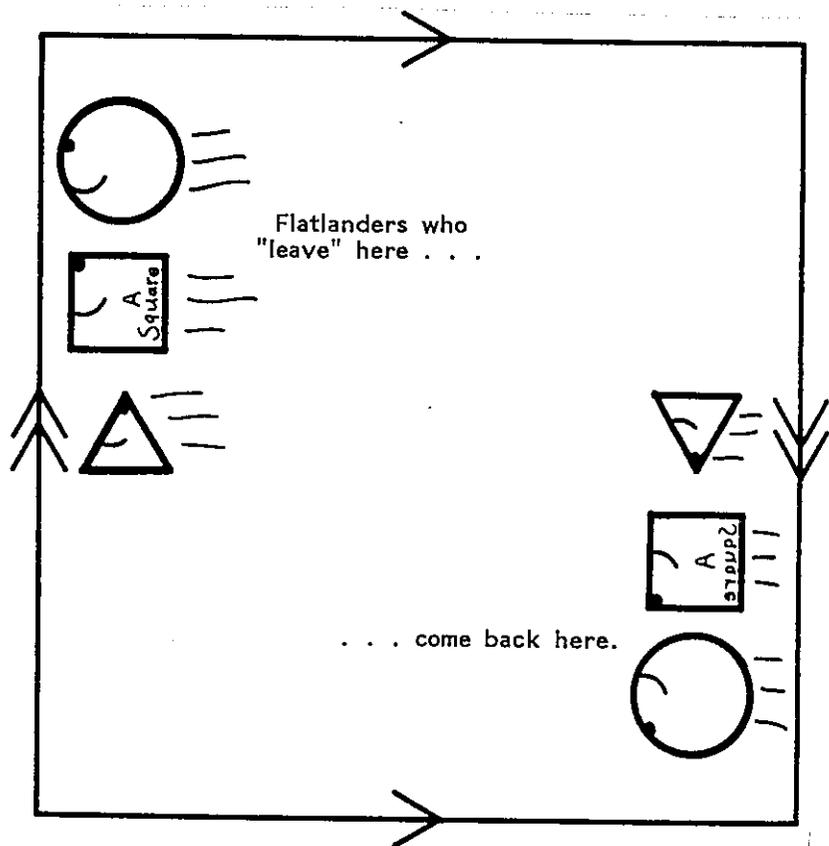
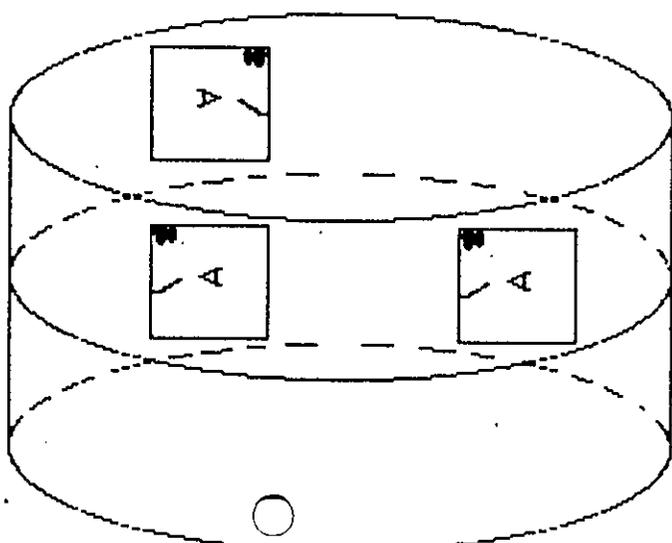
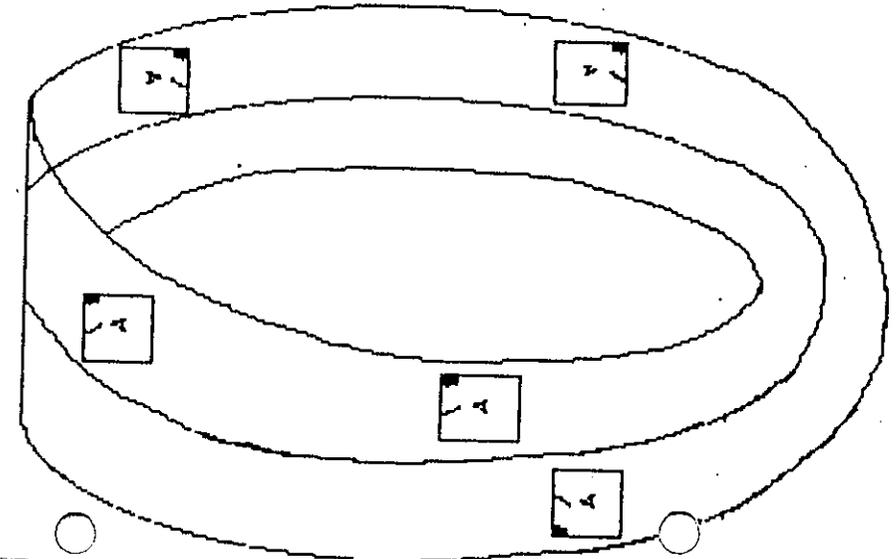


Figure 4.2: When A Square travels around a Möbius strip he comes back as his mirror image.



Lección 8ª: ORIENTACION DE SUBVARIIDADES.

§5. Subvariedades orientables.

En esta lección vamos a definir el concepto de orientación sobre las subvariedades. Lo que conocemos del capítulo Preliminares nos permite definir la orientación en cada espacio tangente, pero esta sería una definición solo puntual que no diría nada sobre la variedad como un todo. Los sistemas de coordenadas nos permitirán una aproximación local (más que puntual) al concepto de orientación en una subvariedad. En efecto, un sistema de coordenadas (U, x) define una base ordenada en el espacio tangente de cada punto del abierto $x(U)$. La familia de estas bases ordenadas define una orientación en cada uno de los espacios tangentes en $x(U)$, y tenemos ya un modo local de definir la orientación.

Para tener una orientación sobre toda la subvariedad M deberemos tomar una familia de sistemas de coordenadas recubriendo M ; entonces, para un punto en la intersección de los dominios de dos sistemas de coordenadas, el espacio tangente en ese punto tiene una orientación inducida por cada una de las cartas, y para que la definición sea buena, es necesario que los dos sistemas de coordenadas induzcan la misma orientación sobre el espacio tangente. Ello es equivalente a que la diferencial de la aplicación cambio de coordenadas tenga determinante positivo, porque, si (U, x) , (V, y) son las dos cartas mencionadas, y denotamos $x_i = \partial x / \partial u^i$, $y_j = \partial y / \partial v^j$, entonces, por la regla de la cadena II.26, $y_j = \partial(x \circ x^{-1} \circ y) / \partial v^j = \sum_i \partial x / \partial u^i \partial(x^{-1} \circ y)_i / \partial v^j$, i.e., en forma matricial, $(y_j) = {}^t(d(x^{-1} \circ y)) (x_i)$, con lo cual las bases $\{x_i\}$, $\{y_j\}$ definen la misma orientación sii $\det {}^t(d(x^{-1} \circ y)) = \det d(x^{-1} \circ y) > 0$.

Por lo tanto, la posibilidad de orientar una subvariedad pasa por la existencia sobre ella de una familia de sistemas de coordenadas tal que el determinante de la diferencial de los cambios de sistemas de coordenadas sea positivo. Por ello damos la siguiente definición:

II. 27. DEFINICION: Sea M una k -subvariedad de clase C^r de \mathbb{R}^n . Diremos que M es orientable si existe una familia de sistemas de coordenadas $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ recubriendo M tales que para todo $\alpha, \beta \in A$ con $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, se tenga que $\det d(x_\alpha^{-1} \circ x_\beta)(u) > 0$ para todo $u \in x_\beta^{-1}(x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta))$.

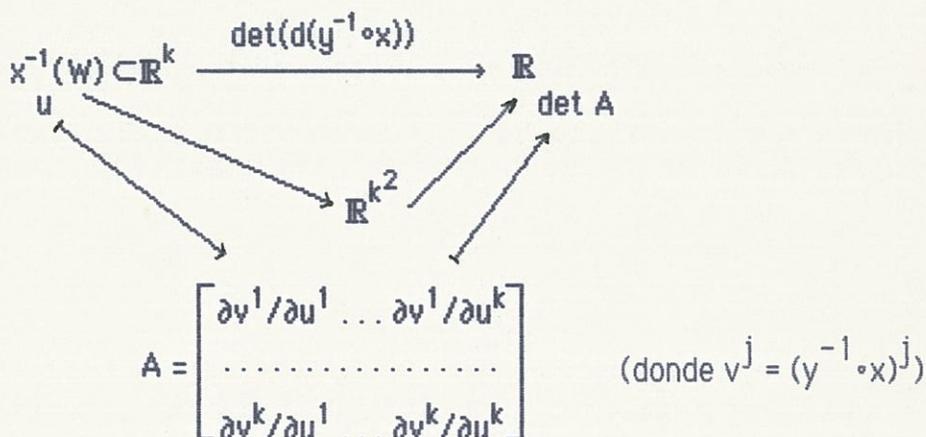
Si M es orientable, llamaremos orientación sobre M a la elección de una tal familia de sistemas de coordenadas. M con una orientación se dice que es una subvariedad orientada.

II.28. Resulta evidente de la definición que toda subvariedad que puede ser recubierta por un solo sistema de coordenadas es orientable. Por ejemplo, el

grafo de una función diferenciable de \mathbb{R}^k en \mathbb{R}^n lo es.

II.29. PROPOSICION: Sea M una k -subvariedad de \mathbb{R}^n que admite un recubrimiento por dos sistemas de coordenadas (U, x) , (V, y) tales que $x(U) \cap y(V)$ es conexo. Entonces M es orientable.

DEMOSTRACION: Sea $W = x(U) \cap y(V)$. Consideremos la aplicación $\det d(y^{-1} \circ x)$ de $x^{-1}(W)$ en \mathbb{R} dada por $u \rightarrow \det d(y^{-1} \circ x)(u)$, que es continua por ser conmutativo el diagrama



y ser continuas las aplicaciones de la parte inferior del diagrama. Como W es conexo y x es un homeomorfismo, $x^{-1}(W)$ es conexo. Por otra parte

(II.29.1) $\det d(y^{-1} \circ x)(u) \neq 0$ para todo $u \in x^{-1}(W)$,

por ser el determinante de la matriz de un cambio de base. Sea $u_0 \in x^{-1}(W)$, entonces puede ocurrir:

- (a) $\det d(y^{-1} \circ x)(u_0) > 0$ ó
- (b) $\det d(y^{-1} \circ x)(u_0) < 0$.

Como $\det d(y^{-1} \circ x)$ es una función continua y $x^{-1}(W)$ es conexo, si es positiva en un punto, por (II.29.1), es positiva en $x^{-1}(W)$, y si es negativa en un punto, lo es en todo $x^{-1}(W)$. Por tanto, si se da el caso (a), es claro que la subvariedad es orientable. Si se da el caso (b), consideremos el difeomorfismo $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ dado por $f(u^1, u^2, \dots, u^k) = (u^2, u^1, \dots, u^k)$, y sea $U^* = f^{-1}(U) = f(U)$ (porque $f^{-1} = f$), y $x^* = x \circ f$. Se tiene entonces que (U^*, x^*) es un nuevo sistema de coordenadas de M , $x^*(U^*) = x \circ f(U^*) = x(U)$, y

$$\begin{aligned}
 \partial(y^{-1} \circ x^*) / \partial u^{*j} &= \partial(y^{-1} \circ x \circ f) / \partial u^{*j} = \sum_i (\partial(y^{-1} \circ x) / \partial u^i) (\partial u^i / \partial u^{*j}) = \\
 &= \partial(y^{-1} \circ x) / \partial u^1 \text{ si } j=2; \partial(y^{-1} \circ x) / \partial u^2 \text{ si } j=1; \partial(y^{-1} \circ x) / \partial u^j \text{ si } j \geq 3,
 \end{aligned}$$

es decir
$$d(y^{-1} \circ x^*) = \begin{pmatrix} \partial v^1 / \partial u^2 & \partial v^1 / \partial u^1 & \dots & \partial v^1 / \partial u^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial v^k / \partial u^2 & \partial v^k / \partial u^1 & \dots & \partial v^k / \partial u^k \end{pmatrix}$$

Mejor:
 $d(y^{-1} \circ x^*) = d(y^{-1} \circ x \circ f) =$
 $= d(y^{-1} \circ x) \circ df$, luego
 $\det(y^{-1} \circ x^*) = \det(d(y^{-1} \circ x) \circ df) =$
 $\det df \cdot \det(d(y^{-1} \circ x))$,
 porque $\det df = -1$

de donde resulta que $\det d(y^{-1} \circ x^*) = -\det d(y^{-1} \circ x) > 0$ sobre $x^{-1}(W)$, por lo tanto $\{(U^*, x^*), (V, y)\}$ verifica las condiciones de II.27 y M es orientable.

S6. Campo vectorial normal e hipersuperficies orientables.

II.30.DEFINICION: Un campo vectorial sobre una k -subvariedad M de \mathbb{R}^n es una aplicación diferenciable $Z: M \rightarrow T\mathbb{R}^n$ tal que $Z(p) \in T_p\mathbb{R}^n$. Se dice que Z es un campo vectorial tangente si $Z(p) \in T_pM$, y se dice que es un campo vectorial normal si $Z(p)$ pertenece al subespacio de $T_p\mathbb{R}^n$ ortogonal a T_pM .

II.31.DEFINICION: Se llama hipersuperficie de \mathbb{R}^n a una subvariedad de dimensión $n-1$.

II.32. PROPOSICION: Sobre una hipersuperficie M de \mathbb{R}^n existe localmente un campo vectorial normal N unitario (i.e. con $|N| = 1$). Es decir, para cada punto $p \in M$ hay un abierto V de M conteniendo a p tal que existe un campo vectorial normal unitario N sobre V .

DEMOSTRACION: Sea $p \in M$, (U, x) un sistema de coordenadas en p . definamos

$$N(q) = \frac{x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}}{|x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}|} (u) \quad (\text{donde } x(u) = q; x_i = \frac{\partial x}{\partial u^i}) \quad \text{para todo } q \in x(U).$$

*Recordar
 $x_1, x_2 \neq 0$ así
 $\{x_1, x_2\}$ l. i. p. i.
 dx invertida
 (para $x_i = dx_i$)*

Entonces N es un campo vectorial definido sobre $x(U)$, abierto conteniendo a p , diferenciable por serlo $N \circ x$ (cfr. II.9, último párrafo, y II.12), y unitario normal por las propiedades del producto vectorial. □

Para el caso de hipersuperficies dadas como conjuntos de nivel (i.e., dadas en la forma indicada en II.7) se tiene el siguiente resultado.

II.33.PROPOSICION: Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable y a un valor regular de f . Entonces existe un vector normal unitario sobre la hipersuperficie $M = f^{-1}(a)$.

DEMOSTRACION: Basta definir, para cada $p \in M$,

$$(II.33.1) \quad N(p) = (\text{grad } f)(p) / |(\text{grad } f)(p)|.$$

N es una aplicación bien definida sobre M porque, al ser a un valor regular de f , $df(p) \neq 0$ para $p \in M = f^{-1}(a)$ y, por lo tanto, $(\text{grad } f)(p) \neq 0$. Vamos a comprobar que N es un campo vectorial normal unitario. Que es unitario es evidente por la definición. Veamos que es normal: si X es un vector de T_pM y $c: I \rightarrow M$ una curva tal que $c(0) = p$ y $c'(0) = X$, entonces

$= \frac{df_{oc}(0)}{dt} = 1$ porque $ct(t) \in f^{-1}(a)$, luego $f(ct) = a$ cte

$$\langle (\text{grad } f)(p), X \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) X^i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i(p)(X) = df(p)(X) = 0, \text{ (por II.A.7.1)}$$

Por lo tanto $(\text{grad } f)(p)$ es ortogonal a $T_p M$, y lo mismo ocurre con $N(p)$.

Por otro lado, como f y sus derivadas son aplicaciones continuas, $\text{grad } f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua, luego $W = \mathbb{R}^n - (\text{grad } f)^{-1}(0)$ es un abierto (conteniendo a M evidentemente), y $(\text{grad } f)/|\text{grad } f|$ es una aplicación diferenciable sobre W , de donde, por II.10, resulta que es diferenciable sobre M .

II.34. TEOREMA: Una hipersuperficie M de \mathbb{R}^n es orientable sii existe un campo vectorial normal unitario sobre M .

DEMOSTRACION: Si M es orientable, existe una familia $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de sistemas de coordenadas recubriendo M tales que si $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, para todo $u_\alpha \in x_\alpha^{-1}(x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta))$ se verifica que $\det d(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)(u_\alpha) > 0$. Definimos N sobre cada abierto $x_\beta(U_\beta)$ por

$$N(x_\beta(u_\beta)) = \frac{x_{\beta 1} \wedge \dots \wedge x_{\beta n-1}}{|x_{\beta 1} \wedge \dots \wedge x_{\beta n-1}|}(u_\beta) \quad (\text{donde } x_{\beta i} = \frac{\partial x_\beta}{\partial u_\beta^i}),$$

lo que define N globalmente sobre M . En efecto, si $p \in M$ es tal que $p = x_\alpha(u_\alpha) = x_\beta(u_\beta)$, entonces

$$N(x_\alpha(u_\alpha)) = \frac{x_{\alpha 1} \wedge \dots \wedge x_{\alpha n-1}}{|x_{\alpha 1} \wedge \dots \wedge x_{\alpha n-1}|}(u_\alpha) = \frac{(x_\beta \circ x_\beta^{-1} \circ x_\alpha^{-1}) \wedge \dots \wedge (x_\beta \circ x_\beta^{-1} \circ x_\alpha^{-1})}{|(x_\beta \circ x_\beta^{-1} \circ x_\alpha^{-1}) \wedge \dots \wedge (x_\beta \circ x_\beta^{-1} \circ x_\alpha^{-1})|}(u_\alpha) =$$

$$= \frac{\sum_{i_1} x_{\beta i_1} \frac{\partial u_\beta^{i_1}}{\partial u_\alpha^1} \wedge \dots \wedge \sum_{i_{n-1}} x_{\beta i_{n-1}} \frac{\partial u_\beta^{i_{n-1}}}{\partial u_\alpha^{n-1}}}{| \dots |} = \frac{\sum_{\sigma \in S_{n-1}} \text{sgn } \sigma \frac{\partial u_\beta^{\sigma(1)}}{\partial u_\alpha^1} \dots \frac{\partial u_\beta^{\sigma(n-1)}}{\partial u_\alpha^{n-1}}}{| \dots |} \frac{x_{\beta 1} \wedge \dots \wedge x_{\beta n-1}}{| \dots |} =$$

$$= \frac{\det d(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)(u_\alpha)}{| \dots |} \frac{x_{\beta 1} \wedge \dots \wedge x_{\beta n-1}}{| \dots |}(u_\beta) = \frac{x_{\beta 1} \wedge \dots \wedge x_{\beta n-1}}{| \dots |}(u_\beta),$$

donde se ha usado la antisimetría y la linealidad del producto vectorial en la igualdad de la segunda línea, y el hecho de que $\det d(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)(u_\alpha) > 0$ en la igualdad de la tercera línea.

Veamos ahora el recíproco. Supongamos que existe un campo vectorial normal unitario N sobre M . Sea $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ una familia de sistemas de

coordenadas recubriendo M de modo que U_α sea conexo para todo $\alpha \in A$. Sea $p = x_\alpha(u_\alpha) \in x_\alpha(U_\alpha)$. Entonces, como $N(p)$ y $((x_{\alpha 1} \wedge \dots \wedge x_{\alpha n-1}) / |x_{\alpha 1} \wedge \dots \wedge x_{\alpha n-1}|)(u_\alpha)$ son unitarios y ortogonales a $T_p M$, se tiene que son iguales salvo el signo. Por lo tanto la aplicación $f_\alpha: x_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_\alpha(p) = \langle ((x_{\alpha 1} \wedge \dots \wedge x_{\alpha n-1}) / |x_{\alpha 1} \wedge \dots \wedge x_{\alpha n-1}|)(u_\alpha), N(p) \rangle$$

toma los valores ± 1 . Como f_α es continua y $x_\alpha(U_\alpha)$ es conexo, f_α toma solo el valor 1 ó el -1 sobre $x_\alpha(U_\alpha)$. Consideremos los dos casos separadamente para construir un nuevo sistema de coordenadas recubriendo M y verificando las condiciones de la definición de orientabilidad:

a) Si $f_\alpha = 1$, tomamos el sistema de coordenadas (U_α, x_α) .

b) Si $f_\alpha = -1$, tomamos el sistema de coordenadas (U^*_α, x^*_α) definido a partir de (U_α, x_α) como se hizo en II.29. En estas coordenadas se verificará que $((x^*_{\alpha 1} \wedge \dots \wedge x^*_{\alpha n-1}) / |x^*_{\alpha 1} \wedge \dots \wedge x^*_{\alpha n-1}|)(u^*_\alpha) = N(p)$ (siendo $x^*_\alpha(u^*_\alpha) = x_\alpha(u_\alpha) = p$).

Vamos a ver ahora que la familia de coordenadas $\{(U'_\alpha, x'_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ obtenida de $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ por el proceso indicado en a) y b) verifica las condiciones de la definición de orientabilidad. Sean (U'_α, x'_α) , (U'_β, x'_β) coordenadas cuyas imágenes en M tienen intersección no vacía y sea $p \in x'_\alpha(U'_\alpha) \cap x'_\beta(U'_\beta)$, entonces, teniendo en cuenta los cálculos realizados en la demostración de la implicación en sentido contrario, resulta

$$\begin{aligned} N(p) &= ((x'_{\alpha 1} \wedge \dots \wedge x'_{\alpha n-1}) / |x'_{\alpha 1} \wedge \dots \wedge x'_{\alpha n-1}|)(u'_\alpha) = \\ &= ((x'_{\beta 1} \wedge \dots \wedge x'_{\beta n-1}) / |x'_{\beta 1} \wedge \dots \wedge x'_{\beta n-1}|)(u'_\beta) = \\ &= \frac{\det d(x'^{-1}_\alpha \circ x'_\beta)}{\left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right|} \frac{x'_{\alpha 1} \wedge \dots \wedge x'_{\alpha n}}{\left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right|} = \frac{\det d(x'^{-1}_\alpha \circ x'_\beta)}{\left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right|} N(p), \end{aligned}$$

luego $\det d(x'^{-1}_\alpha \circ x'_\beta) > 0$.

□

II.35.NOTA: Observese que en la demostración de la segunda implicación del teorema anterior solo se ha usado la continuidad de la función f_α , para lo cual basta la continuidad del campo vectorial unitario normal N que, por otra parte, como consecuencia de su expresión local, resulta ser diferenciable (si M es al menos de clase C^2). Por lo tanto, el teorema II.34 bastaría enunciarlo para campos vectoriales normales unitarios continuos. Pero un enunciado así es más general solo aparentemente, pues, según acabamos de indicar, un tal campo continuo es, además, diferenciable.

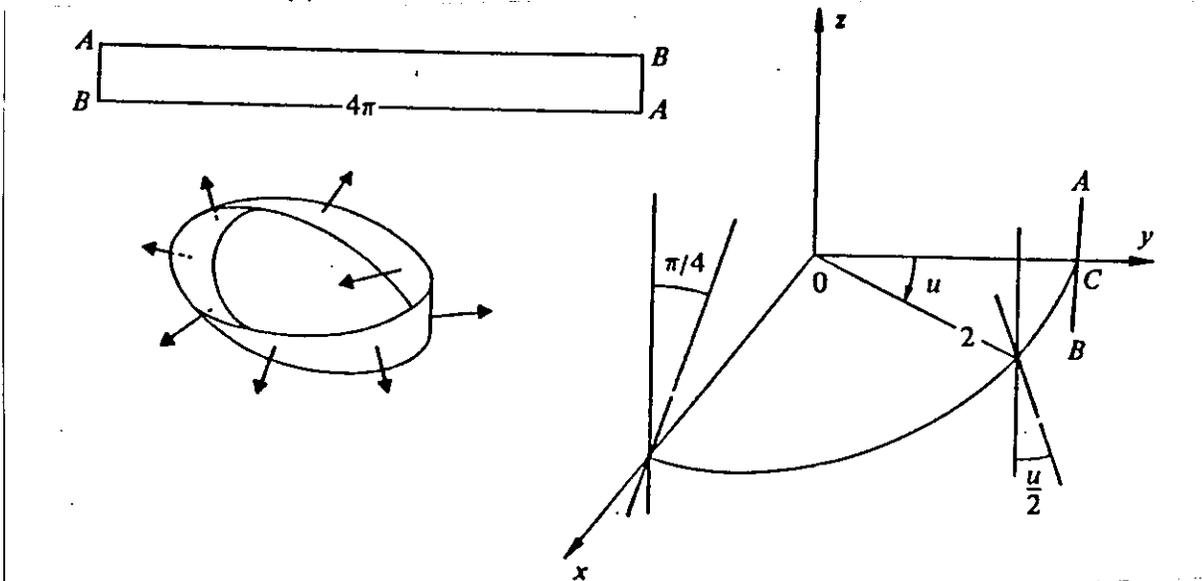
II.36.COROLARIO: Si a es un valor regular de $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, la hipersuperficie $M =$

SUPERFICIES DE \mathbb{R}^3

$f^{-1}(a)$ es orientable.

NOTA: Una superficie orientable en \mathbb{R}^3 es la imagen inversa de un valor regular de alguna función diferenciable.
Una superficie compacta regular en \mathbb{R}^3 es orientable (Samelson, Proc. A.M.S. 22 (1964), 301-302).

No 94 **II.38. EJEMPLO** de superficie no orientable: **La cinta de Möbius**. Se obtiene por rotación de un segmento abierto AB en el plano YZ dado por $\{(0,y,z) / y = 2, |z| < 1\}$ a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4, z = 0$, al tiempo que el segmento AB gira alrededor de su punto medio C en el plano determinado por C y el eje Z con una velocidad angular la mitad de la de rotación de C alrededor del eje Z. De este modo, cuando C completa una vuelta, el segmento AB ha vuelto a su posición inicial, pero invertido.



Intuitivamente es evidente que la cinta de Möbius M no es orientable, pues si lo fuera tendría un campo vectorial normal unitario N diferenciable. Tomando ese campo normal a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4, z = 0$, después de una vuelta volveríamos al punto de partida con N convertido en -N.

Vamos a ver ahora la prueba analítica de que M no es orientable. Tomemos sobre M los sistemas de coordenadas $(U,x), (U,x^*)$ con $U =]0, 2\pi[* - 1, 1[$,

$$x(u,v) = \left((2 - v \sin \frac{u}{2}) \cos u, (2 - v \sin \frac{u}{2}) \sin u, v \cos \frac{u}{2} \right),$$

$$x^*(u^*,v^*) = \left((2 - v^* \sin \frac{u^* + \pi}{2}) \cos u^*, (2 - v^* \sin \frac{u^* + \pi}{2}) \sin u^*, v^* \cos \frac{u^* + \pi}{2} \right) \quad \text{¿ - ?}$$

que verifican $x(U) \cup x^*(U) = M$. Además $x(U) \cap x^*(U)$ no es conexo, pero se puede poner como unión de dos componentes conexas $W_1 = \{x(u,v) / (\pi/2) < u < 2\pi\}$, $W_2 = \{x(u,v) / 0 < u < \pi/2\}$. Los cambios de coordenadas vienen dados por (II.38.1) $u^* = u - (\pi/2), v^* = v$ sobre W_1 ; $u^* = u + (3\pi/2), v^* = -v$ sobre W_2 , donde $(u^*,v^*) = x^{*-1} \circ x(u,v)$. Resulta de aquí que

$$(II.38.2) \det d(x^{*-1} \circ x) = 1 > 0 \text{ en } W_1 \text{ y } \det d(x^{*-1} \circ x) = -1 < 0 \text{ en } W_2.$$

Si M fuese orientable, existiría un campo vectorial normal unitario N sobre M. Como $x(U)$ es conexo N tendría, en $x(U)$, una expresión en coordenadas de la forma

$$N(x(u,v)) = \epsilon \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|} (u,v) \text{ para todo } (u,v) \in U, \text{ siendo } \epsilon = \pm 1, x_u = \frac{\partial x}{\partial u}.$$

Por lo tanto, usando las fórmulas (II.38.1,2), y repitiendo el cálculo de la primera parte de la demostración de II.35, resulta

$$N(x(u,v)) = \epsilon \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|} (u,v) = \epsilon \frac{x_{u^*}^* \wedge x_{v^*}^*}{|x_{u^*}^* \wedge x_{v^*}^*|} (u^*,v^*) \text{ para } (u^*,v^*) \in x^{*-1}(W_1); \text{ y}$$

$$N(x(u,v)) = \epsilon \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|} (u,v) = -\epsilon \frac{x_{u^*}^* \wedge x_{v^*}^*}{|x_{u^*}^* \wedge x_{v^*}^*|} (u^*,v^*) \text{ para } (u^*,v^*) \in x^{*-1}(W_2);$$

expresiones que no pueden darse simultáneamente para N sobre $x^*(U)$, porque U es conexo, $f(u^*,v^*) = \langle N \circ x^*, (x_{u^*}^* \wedge x_{v^*}^*) / |x_{u^*}^* \wedge x_{v^*}^*| \rangle (u^*,v^*)$ es una función continua sobre U que no se anula en ningún punto de U y, si se verificasen las expresiones anteriores, se tendría que $f = \epsilon$ sobre $x^{*-1}(W_1)$ y $f = -\epsilon$ sobre $x^{*-1}(W_2)$, lo cual es absurdo. \square

En esta lección M representará una superficie de \mathbf{R}^3 de clase C^r .

§7. Primera forma fundamental. Elemento de arco y ángulo entre dos curvas.

II.38.DEFINICION: Sea p un punto de M . Se llama primera forma fundamental de f en p a la forma cuadrática I_p definida sobre T_pM asociada al producto escalar \langle, \rangle inducido sobre T_pM por el producto escalar \langle, \rangle canónico de $T_p\mathbf{R}^3 \equiv \mathbf{R}^3$; i.e.

$$I_p: T_pM \rightarrow \mathbf{R} / I_p(X) = \langle X, X \rangle.$$

II.39.NOTA: Si (U, x) es un sistema de coordenadas en p , en la base asociada $\{x_1, x_2\}$ de T_pM , I_p tiene una expresión matricial cuyos coeficientes son los mismos de la métrica \langle, \rangle en ese sistema de coordenadas, i.e., si $X = \sum_i X^i x_i \in T_pM$, entonces

$$I_p(X) = \langle \sum_i X^i x_i, \sum_j X^j x_j \rangle = \sum_{i,j} X^i X^j \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} X^i X^j.$$

Los $g_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$ se llaman coeficientes de la primera forma fundamental en p . También se emplea la notación $g_{11} = E$, $g_{12} = F$, $g_{22} = G$.

El producto escalar es $\leftrightarrow g_{ij}$

II.40.NOTA: Obsérvese que si X es un campo vectorial tangente sobre M (cfr. II.30) y (U, x) es un sistema de coordenadas de M , entonces

$$(II.41.1) \quad X(x(u)) = \sum_i X^i(u) x_i(u),$$

siendo X^i funciones diferenciables sobre U . En efecto, X es diferenciable sii lo son las funciones X^i en cada sistema de coordenadas. Es evidente que si las funciones X^i son diferenciables, también lo es la función $X \cdot x$ y, por lo tanto (cfr. II.12), X es diferenciable. Recíprocamente, si X es diferenciable, entonces lo es $X \cdot x$ y, multiplicando escalarmente los dos miembros de (II.41.1) por x_j ,

$$(II.41.2) \quad \langle X \cdot x, x_j \rangle(u) = \sum_i X^i(u) g_{ij}(u).$$

Si (g^{ij}) es la matriz inversa de (g_{ij}) , resulta de (II.41.2) que

$$\sum_j \langle X \cdot x, x_j \rangle(u) g^{jk}(u) = \sum_{i,j} X^i(u) g_{ij}(u) g^{jk}(u),$$

de donde resulta

$$X^k(u) = \sum_j \langle X \cdot x, x_j \rangle(u) g^{jk}(u),$$

luego X^k es una función diferenciable.

Si x_i son los vectores básicos asociados a un sistema de coordenadas (U, x) , entonces $x_i \cdot x^{-1}$ son campos vectoriales tangentes sobre $x(U)$.

II.41.NOTA: A menudo abreviaremos la notación denotando $x_i \cdot x^{-1}$ por x_i , las

funciones $X^i \circ x^{-1}$ por X^i , las funciones $g_{ij} \circ x^{-1}$ y $g^{ij} \circ x^{-1}$ por g_{ij} y g^{ij} respectivamente, y si X es un campo vectorial, se escribirá a menudo X por $X \circ x$. De este modo nos evitaremos escribir composiciones de funciones en las fórmulas, y una expresión podrá interpretarse en cada caso, según convenga, como dependiendo de los puntos de la superficie M o dependiendo de los puntos del abierto U utilizado para el sistema de coordenadas.

Puesto que la primera forma fundamental está definida sobre el espacio tangente en cada punto de la superficie, tiene sentido definir su acción sobre campos vectoriales tangentes de la siguiente forma:

$$I(X)(p) = I_p(X(p)) \text{ para cada } p \in M.$$

En un sistema de coordenadas (U, x) en el que $X = \sum_i X^i x_i$, se escribirá

$$I(X) = \sum_{i,j} g_{ij} X^i X^j.$$

(Obsérvese que, de acuerdo con los convenios de notación indicados anteriormente, $X = \sum_i X^i x_i$ puede significar $X \circ x = \sum_i X^i x_i$ ó $X = \sum_i X^i \circ x^{-1} x_i \circ x^{-1}$,

y $I(X) = \sum_{i,j} g_{ij} X^i X^j$ puede significar $I(X) \circ x = \sum_{i,j} g_{ij} X^i X^j$

ó $I(X) = \sum_{i,j} g_{ij} \circ x^{-1} X^i \circ x^{-1} X^j \circ x^{-1}$).

II.42.NOTA: De modo análogo a como se definió el concepto de vector tangente a lo largo de una curva en \mathbf{R}^3 , se define un campo vectorial tangente a lo largo de una curva $c: I \rightarrow M$ como una aplicación diferenciable $X: I \rightarrow T\mathbf{R}^3$ tal que $X(t) \in T_{c(t)}M$. En un sistema de coordenadas (U, x) tal que $c(I) \subset x(U)$, se escribe $X(t) = \sum_i X^i(t) x_i(c(t))$. Se demuestra, como en II.41, que $X(t)$ es diferenciable si $X^i(t)$ son diferenciables. Para estos campos vectoriales se define $I(X)(t) = I_{c(t)}(X(t)) = \sum_{i,j} g_{ij}(t) X^i(t) X^j(t)$, donde $g_{ij}(t)$ es una forma abreviada de escribir $g_{ij}(c(t))$.

Obsérvese que si $c: I \rightarrow M$ es una curva diferenciable, entonces su vector tangente $c'(t)$ es un campo vectorial tangente a lo largo de c .

II.43.NOTA: Si $c: I \rightarrow M$ es una curva diferenciable y (U, x) un sistema de coordenadas tal que $c(I) \subset x(U)$, entonces sabemos (cfr. II.19.d)) que si $x^{-1}(c(t)) = (u^1(t), u^2(t))$, entonces $c'(t) = \sum_i u^i'(t) x_i$, con lo cual $\|c'(t)\|^2 = \langle c'(t), c'(t) \rangle = \sum_{i,j} g_{ij}(t) u^i'(t) u^j'(t)$, y la longitud de la curva c entre los puntos $c(t_0)$ y $c(t)$ ($t_0, t \in I$) es

$$s(t) = \int_{t_0}^t |c'(t)| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{|(c'(t))|} dt = \int_{t_0}^t \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} u^i' u^j'} dt, \text{ de donde}$$

SUPERFICIES DE \mathbf{R}^3

$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum_{i,j} g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}$, que en los libros clásicos suele escribirse como

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j.$$

II.44.NOTA: Si $\alpha, \beta : I \rightarrow M$ son dos curvas cortándose en un punto $p = \alpha(t) = \beta(t)$, podemos calcular el coseno del ángulo θ formado por las dos curvas en p en términos de los coeficientes de la primera fórmula fundamental mediante la expresión

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t), \beta'(t) \rangle}{|\alpha'(t)| |\beta'(t)|} = \frac{\sum_{i,j} g_{ij} u^{i'} \bar{u}^{j'}}{\sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} u^{i'} u^{j'}} \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} \bar{u}^{i'} \bar{u}^{j'}}} (t),$$

donde $x^{-1} \cdot \alpha = (u^1, u^2)$, $x^{-1} \cdot \beta = (\bar{u}^1, \bar{u}^2)$.

II.45. Dado un sistema de coordenadas (U, x) , se llama curva u^1 -paramétrica a cada una de las curvas $c : I \rightarrow M$ de la forma $c(t) = x(t, u^2_0)$, con $I \times \{u^2_0\} \subset U$. Análoga definición se tiene para las curvas u^2 -paramétricas.

II.46. Si β_{12} es el ángulo formado por las curvas paramétricas en un punto, entonces

$$\cos \beta_{12} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}}}.$$

Se dice que un sistema de coordenadas es ortogonal si las curvas paramétricas son ortogonales, lo que, por la fórmula anterior, equivale a que $g_{12} = 0$.

5.8. Área de una superficie.

II.47.DEFINICION: Sea $R \subset M$ tal que existe una parametrización (U, x) de M tal que $R \subset x(U)$. Se llama área de R al número positivo

$$\int_{x^{-1}(R)} |x_1 \wedge x_2| du^1 du^2 = \int_{x^{-1}(R)} \sqrt{g} du^1 du^2 \quad (\text{siendo } g = \det(g_{ij}))$$

cuando esta integral existe (aunque sea como integral impropia).

Esta definición es independiente del sistema de coordenadas elegido tal que $R \subset x(U)$. En efecto, si (V, y) es otro sistema de coordenadas cumpliendo la misma condición, entonces

$$\int_{y^{-1}(R)} |y_1 \wedge y_2| dv^1 dv^2 = \int_{y^{-1}(R)} |x_1 \wedge x_2| |\det d(x^{-1} \circ y)| dv^1 dv^2 =$$

$$\int_{x^{-1} \circ y \circ y^{-1}(R)} |x_1 \wedge x_2| du^1 du^2 = \int_{x^{-1}(R)} |x_1 \wedge x_2| du^1 du^2,$$

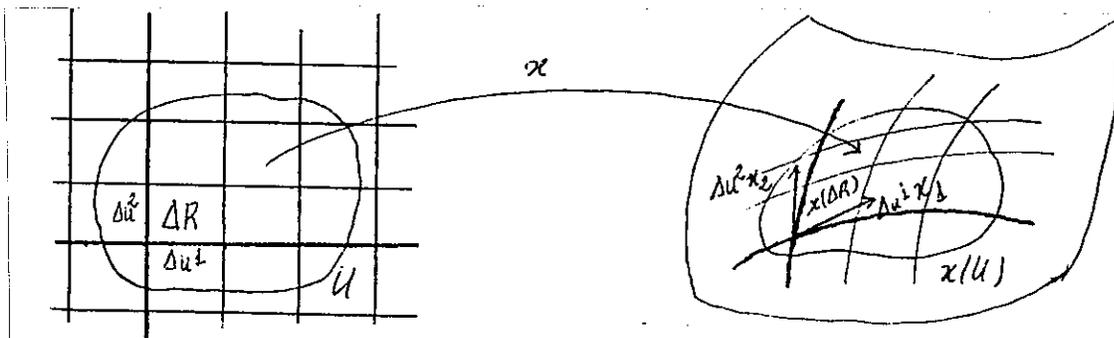
donde hemos empleado la regla del cambio de variable para una integral en la igualdad que pasa de un renglón a otro.

II.48. JUSTIFICACION INTUITIVA DE LA DEFINICION DE AREA: Consideremos un sistema de coordenadas $x: U \rightarrow M$. Sea ΔR un pequeño rectángulo en U de lados $\Delta u^1, \Delta u^2$. $x(\Delta R)$ es una región de $x(U)$ cuyo borde está constituido por cuatro segmentos de curvas coordenadas. El segmento de recta de $x(u^1, u^2)$ a $x(u^1, u^2) + \Delta u^1 x_1$ es una aproximación lineal del segmento de curva coordenada entre $x(u^1, u^2)$ y $x(u^1 + \Delta u^1, u^2)$ (en efecto, empleando el desarrollo de Taylor, $x(u^1 + \Delta u^1, u^2) = x(u^1, u^2) + \Delta u^1 x_1 + O(\Delta u^1)$, y, también, dada la curva $c(t) = x(u^1 + t, u^2)$, la longitud de $c(t)$ entre $t=0$ y $t=\Delta u^1$ viene aproximada, tomando el desarrollo de Taylor de g_{11} , por

$$\psi_0 \quad s(\Delta u^1) = \int_0^{\Delta u^1} \sqrt{g_{11}} du^1 = \sqrt{g_{11}}(u) \Delta u^1 + O(\Delta u^1) = |\Delta u^1 x_1| + O(\Delta u^1) \quad \varphi$$

Análogamente se aproxima el segmento de curva coordenada entre $x(u)$ y $x(u^1, u^2 + \Delta u^2)$ por el segmento de recta entre $x(u)$ y $x(u) + \Delta u^2 x_2$. Parece natural también que el área de la región $x(\Delta R)$ quede aproximada por el paralelogramo de $T_x(u)M$ con un vértice en $x(u)$ y lados determinados por los segmentos de recta anteriores. Pero, según vimos en los Preliminares, el área de un tal paralelogramo viene dada por $|\Delta u^1 x_1 \wedge \Delta u^2 x_2| = \Delta u^1 \Delta u^2 \sqrt{g}$. El área de la superficie vendrá aproximada por el límite de las áreas de estos paralelogramos cuando $\Delta u^i \rightarrow 0$, lo que corresponde intuitivamente a la definición dada en II.48.

Para una formalización y tratamiento riguroso de esta justificación intuitiva puede consultarse [Do Carmo].



S9. Superficies de revolución.

II.49. DEFINICION: Sea L una 1-variedad de \mathbb{R}^3 conexa contenida en un plano Π y sea \underline{r} una recta contenida en el mismo plano Π verificando una de las siguientes condiciones:

- a) $L \cap \underline{r} = \emptyset$ ó b) $L \cap \underline{r} \neq \emptyset$ y
- i) L y \underline{r} se cortan a lo sumo en dos puntos.
 - ii) L es simétrica respecto al eje \underline{r} . /c
 - iii) en los puntos de intersección la recta tangente a L es perpendicular a \underline{r} .

Se llama "*superficie de revolución*" de '*generatriz*' L y '*eje de rotación*' \underline{r} al lugar geométrico de los puntos de \mathbb{R}^3 obtenidos por rotación de L alrededor de \underline{r} .

II.50. NOTA: Intuitivamente es claro que las condiciones i) y iii) son superfluas. La condición ii) se exige para que la superficie no se corte a sí misma, pues en tal caso no sería superficie en los puntos de corte.

II.51. TEOREMA: Una superficie de revolución es una superficie (en el sentido de II.1).

DEMOSTRACION: Consideremos (haciendo una rotación de ejes si es necesario) la generatriz L contenida en el plano XZ y como eje Z de coordenadas el eje de rotación \underline{r} . Sea M la superficie de revolución de eje rotación \underline{r} y generatriz L . Estudiaremos los casos a) y b) de II.39 por separado.

Caso a): $L \cap \underline{r} = \emptyset$. Sea $\{(I_\alpha, c_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ una familia de sistemas de coordenadas de L recubriendo L . Consideremos, para cada $\alpha \in A$,

$$U_{\alpha_1} = I_\alpha \times]0, 2\pi[, \quad U_{\alpha_2} = I_\alpha \times]-\pi, \pi[, \quad \text{y } x_{\alpha_i}: U_{\alpha_i} \rightarrow M \text{ definidas por}$$

$$x_{\alpha_i}(u, v) = (x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u)), \quad i = 1, 2, \text{ siendo } c_\alpha(t) = (x(t), 0, z(t)).$$

Evidentemente la familia $\{x_{\alpha_i}(U_{\alpha_i})\}_{\alpha \in A, i = 1, 2}$ recubre M . Vamos a ver que cada $(U_{\alpha_i}, x_{\alpha_i})$ es un sistema de coordenadas. Denotemos por $]a, b[$ el intervalo $]0, 2\pi[$ ó el $]-\pi, \pi[$ (según $i = 1, 2$). Veamos que se verifica cada una de las condiciones de la definición de sistema de coordenadas:

• $x_{\alpha_i}(U_{\alpha_i})$ es un abierto de M . En efecto: $c_\alpha(I_\alpha)$ es un abierto de L ; por lo tanto, para cada $p = x_{\alpha_i}(u_p^1, u_p^2) = (x(u_p^1) \cos u_p^2, x(u_p^1) \sin u_p^2, z(u_p^1)) \in x_{\alpha_i}(I_\alpha \times]a, b[) = x_{\alpha_i}(U_{\alpha_i})$ existe una bola abierta B de centro $c_\alpha(u_p^1) = (x(u_p^1), 0, z(u_p^1))$ y radio ϵ tal que su intersección con L está contenida en $c_\alpha(I_\alpha)$.

Supongamos primero que $p \notin L \cup \underline{r}$. Entonces, si $\eta = d(p, \Pi)$ y $r = \min\{\eta, \epsilon\}$, vamos a ver que $B(p, r) \cap M \subset x_{\alpha_i}(U_{\alpha_i})$. En efecto: $p = x_{\alpha_i}(u_p^1, u_p^2) = R_{u_p^2} c_\alpha(u_p^1)$;

sea $q \in M - x_{\alpha_i}(U_{\alpha_i})$, entonces $q \in L$ si $i=1$ (ó $q \in R_{\pi}L$ si $i=2$) ó $q = R_{u_q^2} \ell$ con $\ell = (x_{\ell}, 0, z_{\ell}) \in L - c_{\alpha}(I_{\alpha}) \subset L - B(c_{\alpha}(u_p^1), r)$. Si $q \in L \subset \Pi$, es evidente que $q \notin B(p, r) \cap M$.

Si $q = R_{u_q^2} \ell$, entonces $d(q, p) = d(R_{u_q^2} \ell, R_{u_p^2} c_{\alpha}(u_p^1)) =$
 $= d((x_{\ell} \cos u_q^2, x_{\ell} \sin u_q^2, z_{\ell}), (x_p \cos u_p^2, x_p \sin u_p^2, z_p)) =$
 $= (x_{\ell}^2 + x_p^2 - 2x_{\ell} x_p \cos(u_q^2 - u_p^2) + (z_{\ell} - z_p)^2)^{1/2} \geq (x_{\ell}^2 + x_p^2 - 2x_{\ell} x_p + (z_{\ell} - z_p)^2)^{1/2} =$
 $= d((x_{\ell}, 0, z_{\ell}), (x_p, 0, z_p)) = d((\ell, c_{\alpha}(u_p^1))) \geq r,$

luego $q \notin B(p, r) \cap M$.

Si $p \in L$, basta tomar $\eta = d(p, \underline{r})$ y repetir el argumento anterior para ver que $B(p, r) \cap M \subset x_{\alpha_i}(U_{\alpha_i})$.

- x_{α_i} es continua, como se deduce de su expresión en coordenadas. Es inyectiva por serlo c_{α} . La aplicación inversa $x_{\alpha_i}^{-1}$ es también continua porque localmente viene dada por las expresiones $u^1 = c_{\alpha}^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z)$, $u^2 = \arctg \frac{y}{x}$ ó $u^2 = \arccot \frac{x}{y}$, que son continuas donde están definidas.

- La matriz de dx_{α_i} viene dada por

$$\begin{pmatrix} x' \cos u^2 & -x \sin u^2 \\ x' \sin u^2 & x \cos u^2 \\ z' & 0 \end{pmatrix}, \text{ siendo } c_{\alpha}(u^1) = (x(u^1), 0, z(u^1)) \text{ y } x' = \frac{dx}{du^1}, z' = \frac{dz}{du^1},$$

y los tres determinantes de las submatrices 2×2 son

$$x x', \quad -x z' \sin u^2, \quad x z' \cos u^2,$$

que solo se anulan simultáneamente para $x(u^1) = 0$, lo que no ocurre por estar en el caso a), ó para $x' = 0 = z'$, lo que tampoco ocurre por ser (I_{α}, c_{α}) un sistema de coordenadas. Luego dx_{α_i} es inyectiva.

Caso b) $L \cap \underline{r} \neq \emptyset$. Para cada $p \in L - \underline{r}$, sea (I_{α}, c_{α}) un sistema de coordenadas de L en p (i.e. $p \in c_{\alpha}(I_{\alpha})$). Sea J_p un abierto contenido en I_{α} tal que $p \in c_{\alpha}(J_p)$ y $c_{\alpha}(J_p) \cap \underline{r} = \emptyset$. La familia de sistemas de coordenadas $\{(J_p, c_p = c_{\alpha}|_{J_p})\}_{p \in L - \underline{r}}$ recubre $L - \underline{r}$ y, a partir de ella se obtiene, como en el caso a), una familia de sistemas de coordenadas $\{(U_{p_i}, x_{p_i})\}_{p \in L - \underline{r}, i=1,2}$ que recubren $M - \underline{r}$. Sea ahora $p \in M \cap \underline{r} = L \cap \underline{r}$. Sea (I_p, c_p) un sistema de coordenadas de L en p . Como $c_p: I_p \rightarrow L \subset \mathbb{R}^3$ es una curva regular, existe un difeomorfismo $\varphi: J_p \rightarrow I_p$ tal que $\tilde{c}_p = c_p \circ \varphi$ verifica $|\tilde{c}'_p(s)| = 1$ (i.e. \tilde{c}_p es una reparametrización de c respecto de la longitud de arco) y $\tilde{c}_p(0) = p$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $]-\varepsilon, \varepsilon[\subset J_p$ y $b_p = \tilde{c}|_{]-\varepsilon, \varepsilon[}$. Así la curva $b_p(s) = (x(s), 0, z(s))$ verifica $z(s) = z(-s)$, $x(-s) = -x(s)$. Además, como L es perpendicular a \underline{r} en p , se verifica $b'_p(0) = (x'(0), 0, z'(0)) = (\pm 1, 0, 0)$. Entonces, por

el teorema de la función inversa, como $x'(0) = \pm 1$, existe un entorno $I =]-\tilde{\eta}, \tilde{\eta}[$ de 0 en \mathbf{R} que la función $f: I \rightarrow \mathbf{R}/ f(t) = x(t)$ es un difeomorfismo sobre su imagen. Como $b_p(I)$ es un abierto de L que contiene a p , existe $\bar{\delta} > 0$ tal que $B(p, \bar{\delta}) \cap L \subset b_p(I)$. ($B(p, \bar{\delta})$ es la bola abierta de \mathbf{R}^3 de centro p y radio $\bar{\delta}$). Sea δ tal que $b_p(\delta) = S(p, \delta) \cap b_p(I)$. Consideremos el abierto $U = B(0, x(\delta))$, bola abierta de \mathbf{R}^2 , y $x^*: U \rightarrow M/ x^*(u^1, u^2) = (u^1, u^2, z(f^{-1}(\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2})))$. Veamos que (U, x^*) es un sistema de coordenadas.

- . $x^*(U)$ es un abierto de M , pues $x^*(U) = M \cap B(p, \bar{\delta})$.
- . A partir de la expresión de x^* (es como el grafo de una aplicación continua) es inmediato que x^* es continua, inyectiva, con inversa continua y con diferencial inyectiva.

II.52. DEFINICION: Sea M una superficie de revolución. Las curvas de la superficie que se obtienen por rotación de un punto se llaman *paralelos* y las que se obtienen por intersección de la superficie con un plano conteniendo al eje de rotación se llaman *meridianos*. Obsérvese que cualquier meridiano se puede considerar como generatriz de M .

II.53. PROPOSICION: Sea (U, x) una parametrización de una superficie de revolución de la forma $x(u^1, u^2) = (f(u^1) \cos u^2, f(u^1) \sin u^2, g(u^1))$ (donde $(f, 0, g)$ es una parametrización de la 1-variedad generatriz L). Entonces los coeficientes de la primera forma fundamental en este sistema de coordenadas son

$$g_{11} = f'^2 + g'^2 \quad g_{12} = 0 \quad g_{22} = f^2.$$

DEMOSTRACION: Calculemos:

$$x_1 = (f' \cos u^2, f' \sin u^2, g'), \quad x_2 = (-f \sin u^2, f \cos u^2, 0),$$

$$g_{11} = \langle x_1, x_1 \rangle = f'^2 + g'^2, \quad g_{12} = \langle x_1, x_2 \rangle = 0 \quad g_{22} = f^2.$$

II.54. NOTA: Obsérvese que en la parametrización de II.43 los paralelos son las curvas coordenadas u^2 , y los meridianos las curvas coordenadas u^1 , y que $g_{12} = 0$, i.e., en estos sistemas de coordenadas las curvas coordenadas son ortogonales.

II.55. EJERCICIO: Si la 1-variedad generatriz L es orientable y M es una superficie de revolución de eje \underline{r} , con $L \cap \underline{r} = \emptyset$, entonces M es orientable. ?

§10. Superficies regladas

Una superficie reglada es la que se obtiene por el movimiento de una recta que se apoya sobre una curva. Con más precisión:

II.56: Sea $c: I \rightarrow \mathbf{R}^3$ una curva geométrica regular (en el sentido del capítulo I).
 Sea $w: I \rightarrow \mathbf{R}^3$ una función diferenciable tal que $w(u) \neq 0 \quad \forall u \in I$. Se llama superficie reglada de directriz c al conjunto imagen de la aplicación

6/ (II.57.1) $x: I \times J \rightarrow \mathbf{R}^3 / x(u,v) = c(u) + v w(u),$

Siendo J un intervalo abierto de \mathbf{R} (con frecuencia $J = \mathbf{R}$).

Para cada $u = u_0 \in I$, el conjunto $\{x(u_0, v) \mid v \in J\}$ es una recta o segmento abierto de recta. Cada una de estas rectas se llama generatriz de la superficie.

Al estudiar ejemplos o tipos concretos de superficies regladas veremos que estos ejemplos son superficies en el sentido de la definición II.1. en "casi todos sus puntos". Para esos puntos en los que una superficie reglada es superficie tiene sentido hablar de plano tangente, y ello permite dar la definición del primer tipo de estas superficies.

II.57. DEFINICION: Una superficie reglada M se dice desarrollable si en los puntos en los que (II.57.1) define un sistema de coordenadas de un abierto $U \subset I \times J$ sobre un subconjunto de M se verifica que su plano tangente (o, lo que es lo mismo, su vector normal) es constante a lo largo de cada generatriz.

En los puntos de M en los que está definido el concepto de desarrollable, decir que el vector normal N es constante a lo largo de cada generatriz es equivalente a decir que es constante a lo largo de las curvas v -coordenadas, i.e. ser desarrollable equivale a $\partial N / \partial v = 0$.

II.58. PROPOSICION: Una superficie reglada M dada por (II.57.1) es una superficie reglada desarrollable sii en los puntos en los que (II.57.1) define un sistema de coordenadas se verifica

$$\langle c' \wedge w, w' \rangle = 0$$

DEMOSTRACION: Por ser $\langle N, N \rangle = 1$, derivando $\langle N_v, N \rangle = 0$ ($N_v \equiv \partial N / \partial v$), luego N_v es tangente a M . Por otra parte, derivando en (II.46.1) se tiene

$$x_u = c'(u) + v w'(u), \quad x_v = w(u), \quad x_{uv} = w', \quad x_{vv} = 0.$$

Como $(N \cdot x)_v(u,v) \in T_{x(u,v)} M$, N_v es cero sii es perpendicular a los dos vectores de la base de $T_{x(u,v)} M$, x_u y x_v . Ahora bien:

$$0 = \frac{\partial}{\partial v} \langle N, x_u \rangle = \langle N_v, x_u \rangle + \langle N, x_{uv} \rangle = \langle N_v, x_u \rangle + \langle N, w' \rangle$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial v} \langle N, x_v \rangle = \langle N_v, x_v \rangle + \langle N, x_{vv} \rangle = \langle N_v, x_v \rangle.$$

Luego $N_v = 0$ sii $\langle N, w' \rangle = 0$ sii $\langle x_u \wedge x_v, w' \rangle = \langle c' + v w' \wedge w, w' \rangle = \langle c' \wedge w, w' \rangle = 0$ c.q.d.

II.59. DEFINICION: Sea $c: I \rightarrow \mathbf{R}^3$ una curva (geométrica) regular. Se llama superficie desarrollable tangencial de dicha curva a la superficie reglada dada

por $x: I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3 / x(u,v) = c(u) + v c'(u)$.

Evidentemente la desarrollable tangencial de una curva es una superficie reglada desarrollable, puesto que $\langle c' \wedge w, w' \rangle = \langle c' \wedge c', c'' \rangle = 0$.

II.60. NOTA: Para que la superficie desarrollable tangencial de una curva c sea una superficie de la cual $x(u,v) = c(u) + v c'(u)$ sea un sistema de coordenadas es necesario que c tenga curvatura no nula en todo punto. En efecto, que x sea un sistema de coordenadas implica que dx sea inyectiva, lo

que equivale a $x_u \wedge x_v = (c' + v c'') \wedge c' = v c'' \wedge c' \neq 0$, lo que equivale a $k = \frac{|c' \wedge c''|}{|c'|^3}$

$\neq 0$ (recuérdese (cfr cap I) que esto también equivale a que se cumplan las condiciones del teorema de existencia y unicidad de referencia de Frenet distinguida, o a que c' y c'' sean linealmente independientes).

Obsérvese también que, por el mismo motivo del párrafo anterior, en los puntos de la curva $c(u)$ (puntos $v=0$) $x(u,v)$ no es un sistema de coordenadas de la desarrollable tangencial. Se dice que los puntos de la curva c son puntos singulares de su desarrollable tangencial. Por ejemplo, si c es una circunferencia, su desarrollable tangencial es todo el plano en que está contenida menos el interior del disco que determina c , y este conjunto en los puntos de c no es ni siquiera una superficie.

II.61. DEFINICION: Sea $c: I \rightarrow \mathbf{R}^3$ una curva regular plana, X un vector fijo de \mathbf{R}^3 no paralelo al plano que contiene a $c(I)$. Se llama cilindro de curva directriz c y generatriz X a la superficie reglada dada por $x(u,v) = c(u) + vX$, $(u,v) \in I \times \mathbf{R}$.

Evidentemente un cilindro es una superficie reglada desarrollable, pues $\langle c' \wedge w, w' \rangle = \langle c' \wedge w, 0 \rangle = 0$.

II.62. PROPOSICION: Si $c(I)$ es una 1-variedad y la restricción $c|_{I_i}$ de c a subintervalos $I_i \subset I$ da sistemas de coordenadas de $c(I)$ recubriendo $c(I)$, entonces el cilindro $M = \{ x(u,v) = c(u) + vX, (u,v) \in I \times \mathbf{R} \}$ es una superficie en el sentido de II.1 y $x|_{I_i \times \mathbf{R}}$ son sistemas de coordenadas de esta superficie.

DEMOSTRACION: Sean $I_i, \cup I_i = I$, los subintervalos de I tales que $(I_i, c|_{I_i})$ es un sistema de coordenadas de $c(I)$. Vamos a ver que $M, \{(I_i \times \mathbf{R}, x_i \equiv x|_{I_i \times \mathbf{R}})\}$ cumplen las condiciones de la definición de superficie II.1.:

• $x|_{I_i \times \mathbf{R}}$ es biyectiva y continua por serlo c $\{c(u_1) + v_1X - (c(u_2) + v_2X) = 0$
 $\iff c(u_1) - c(u_2) + (v_1 - v_2)X = 0 \iff c(u_1) - c(u_2) = 0$ y $v_1 - v_2 = 0$, ya que $c(u_1) - c(u_2)$ está en el plano que contiene a $c(I)$ y X no).

• x_i^{-1} es continua. En efecto, tenemos $|X| = 1$ y el plano \overline{XY} como plano conteniendo a $c(I)$, se tiene entonces que, si $c(u) = (x^1(u), x^2(u), 0)$, entonces $x(u,v) = (x^1 + vX^1, x^2 + vX^2, vX^3)$, siendo $X = (X^1, X^2, X^3)$, de donde resulta que, si $x(u,v) = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, entonces $v = \frac{\xi^3}{X^3}$, $c(u) = (\xi^1 - vX^1, \xi^2 - vX^2, 0)$, luego $x^{-1}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = (c^{-1}(\xi^1 - \xi^3 \frac{X^1}{X^3}, \xi^2 - \xi^3 \frac{X^2}{X^3}, 0), \frac{\xi^3}{X^3})$, que es continua.

• $x(I_i \times \mathbf{R})$ es un abierto de $M = x(I \times \mathbf{R})$. En efecto, consideremos la aplicación $f: x(I \times \mathbf{R}) \rightarrow c(I)$ / $f(x(u,v)) = f(c(u) + vX) = c(u)$, que es la restricción a M de la aplicación \tilde{f} proyección sobre Π en la dirección de X : $\tilde{f}(p) = p + \frac{\langle p - p_0, N \rangle}{\langle X, N \rangle} X$ ($p_0 \in \Pi$, $N \perp \Pi$, Π plano conteniendo $c(I)$), que es continua, luego f es continua.

Como $c(I_i)$ es un abierto de $c(I)$, $f^{-1}(c(I_i))$ es un abierto de M , pero $f^{-1}(c(I_i)) = \{c(u) + vX / u \in I_i\} = x(I_i \times \mathbf{R})$.

• x es diferenciable por serlo c .

• dx es inyectiva. En efecto, dx inyectiva equivale a que $x_u \wedge x_v \neq 0$, pero $x_u \wedge x_v = c' \wedge X \neq 0$ ya que c' está en el plano que contiene a $c(I)$ y X no.

II.63. DEFINICION: Sea $c: I \rightarrow \mathbf{R}^3$ una curva regular plana ($c(I) \subset$ plano Π) y sea $p \in \mathbf{R}^3 - \Pi$. Llamaremos cono de vértice p y curva directriz c a la superficie reglada $x(u,v) = c(u) + v(c(u) - p) = (1+v)c(u) - vp$ ($(u,v) \in I \times \mathbf{R}$).

Evidentemente se trata de una superficie reglada desarrollable, pues $\langle c' \wedge w, w' \rangle = \langle c' \wedge (c-p), c' \rangle = 0$.

II.64. PROPOSICION: Sea M un cono de vértice p y curva directriz $c: I \rightarrow \mathbf{R}^3$. Si $c(I)$ es una 1-variedad y la restricción $c|_{I_i}$ de c a subintervalos $I_i \subset I$ da sistemas de coordenadas de $c(I)$ tales que $\cup c(I_i) = c(I)$, entonces $M - \{p\}$ es una superficie en el sentido de II.1 y $x|_{I_i \times (\mathbf{R} - \{-1\})}$ son sistemas de coordenadas de esta superficie.

DEMOSTRACION: Evidentemente $U_i x(I_i \times (\mathbf{R} - \{-1\})) = x(I \times (\mathbf{R} - \{-1\})) = M - \{p\}$. Veamos que cada $(I_i \times (\mathbf{R} - \{-1\}), x)$ cumple las condiciones de la definición II.1.:

• $x|_{I_i \times (\mathbf{R} - \{-1\})}$ es biyectiva y continua por serlo $c(c(u_1) + v_1(c(u_1) - p) = c(u_2) + v_2(c(u_2) - p) \rightarrow (c(u_1) - c(u_2) = v_2(c(u_2) - p) - v_1(c(u_1) - p) = v_2(c(u_2) - c(u_1)) - (v_1 - v_2)(c(u_1) - p)$, y como $c(u_1) - c(u_2) \in \Pi$ y $c(u_1) - p \notin \Pi$, $v_1 - v_2 = 0$, y esto implica, como

SUPERFICIES DE \mathbf{R}^3

$v \neq -1$, que $c(u_1) = c(u_2)$, y $u_1 = u_2$).

. x^{-1} es continua. En efecto, tomando c contenida en el plano XY y $p = (x_0, y_0, z_0)$, $x(u, v) = (1+v)(x^1(u), x^2(u), 0) - v(x_0, y_0, z_0) = ((1+v)x^1 - vx_0, (1+v)x^2 - vy_0, -vz_0)$, de

donde $x^{-1}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = (c^{-1}((\xi^1 - \frac{\xi^3}{z_0} x_0) / (1+v), (\xi^2 - \xi^3 \frac{y_0}{z_0}) / (1+v)), \frac{-\xi^3}{z_0})$

(donde $v = \frac{-\xi^3}{z_0}$) que es continua.

. $x(I_i \times \mathbf{R} - \{-1\})$ es un abierto de $M - \{p\}$. En efecto, consideremos la aplicación $f: M - \{p\} \rightarrow c(I)$ dada por $f(c(u) + v(c(u) - p)) = c(u)$, que es la restricción a M de

$\tilde{f}: \mathbf{R}^3 - \Pi' \rightarrow \Pi$ dada por $\tilde{f}(q) = p + \frac{\langle p_0 - p, N \rangle}{\langle q - p, N \rangle} (q - p)$ ($p_0 \in \Pi, N \perp \Pi$), siendo Π' el plano

paralelo a Π pasando por p , luego f es continua. Como $c(I_i)$ es un abierto de $c(I)$,

$f^{-1}(c(I_i)) = x(I_i \times \mathbf{R} - \{-1\})$ es un abierto de $M - \{p\}$.

. x es diferenciable por serlo c .

. dx es inyectiva. En efecto, $x_u \wedge x_v = (1+v) c' \wedge (c-p) \neq 0$, puesto que $c' \in \Pi$ y $(c-p) \notin \Pi$.

II.65. NOTA: Observemos que la superficie reglada representada por $x(u, v) = c(u) + v w(u)$ ($u, v \in I \times \mathbf{R}$) es la misma que la representada por

$x^*(u, v) = c(u) + v \frac{w}{|w|}(u)$ ($u, v \in I \times \mathbf{R}$); i.e. $x^*(I \times \mathbf{R}) = x(I \times \mathbf{R}) = M$, y las dos tienen

la misma curva directriz y las mismas rectas generatrices. Además, si (U, x) es un sistema de coordenadas para un subconjunto de M que es superficie, entonces $(f^{-1}(U), x^*)$ es un sistema de coordenadas del mismo subconjunto,

siendo $f: I \times \mathbf{R} \rightarrow I \times \mathbf{R} / (u, v) \mapsto (u, \frac{v}{|w|})$, ya que $x^* = x \circ f$ y f es diferenciable con

inversa $f^{-1}: (u, v) \mapsto (u, |w| v)$ diferenciable.

Por lo tanto, a partir de ahora consideraremos superficies regladas en las que $|w| = 1$.

II.66. DEFINICION: Una superficie reglada $x(u, v) = c(u) + vw(u)$ (con $|w(u)| = 1$) diremos que es no cilíndrica si para todo $u \in I$, $w'(u) \neq 0$ (por oposición a lo que ocurre en los cilindros de la definición II.62).

II.67. DEFINICION: Sea M una superficie reglada no cilíndrica. Se llama *línea de estricción* de M a una curva regular sobre M tal que, en cada punto, su vector tangente es perpendicular a $w'(u)$.

Si consideramos, por ejemplo, la superficie desarrollable tangencial de una curva c , una línea de estricción de dicha superficie sería la propia curva c .

II.68. DEFINICION: Dadas dos aplicaciones $x: I \times J \rightarrow \mathbf{R}^3 / x(u,v) = c(u) + v w(u)$, $x^*: I^* \times J^* \rightarrow \mathbf{R}^3 / x^*(u^*,v^*) = c^*(u^*) + v^* w^*(u^*)$ representan la misma superficie reglada con curvas directrices distintas si existe un difeomorfismo $\varphi: I \rightarrow I^*$ tal que $w^*(\varphi(u)) = w(u)$ y las rectas $c^*(\varphi(u)) + v^* w^*(\varphi(u))$ y $c(u) + v w(u)$ coinciden para cada $u \in I$.

★69. PROPOSICION: Si $x(u,v) = c(u) + vw(u)$ es una superficie reglada no cilíndrica, su línea de estricción es la curva $\beta(u) = c(u) + v(u) w(u)$, donde $v(u) = - \frac{\langle c'(u), w'(u) \rangle}{\langle w'(u), w'(u) \rangle}$. Además, la línea de estricción no depende de la elección de la directriz para la superficie reglada.

DEMOSTRACION: Si existe una línea de estricción, ha de ser una curva de $x(u,v)$ y, por lo tanto, localmente ha de escribirse como $\beta(u) = c(u) + v(u) w(u)$, con $v(u)$ diferenciable si β lo es. Para que una tal curva β sea línea de estricción ha de verificarse que $\langle \beta', w' \rangle = 0$, i.e. $\langle c' + v' w + v w', w' \rangle = 0$, pero como $|w|=1$, $\langle w, w' \rangle = 0$, luego $\langle \beta', w' \rangle = 0$ equivale a $\langle c', w' \rangle = -v \langle w', w' \rangle$, i.e. $v = - \frac{\langle c', w' \rangle}{\langle w', w' \rangle}$. Por otro lado v definida de esta forma es diferenciable y hace de β una línea de estricción, con lo que queda probada la primera parte de la proposición.

Sea ahora $x^*(u^*,v^*) = c^*(u^*) + v^*w^*(u^*)$ una parametrización de la misma superficie reglada con curva directriz $c^*(u^*)$. De acuerdo con la primera parte de la proposición su curva directriz será $\beta^*(u^*) = c^*(u^*) - \frac{\langle c^{*'}, w^{*'} \rangle}{\langle w^{*'}, w^{*'} \rangle} w^*(u^*)$.

Sea $\varphi: I \rightarrow I^*$ el difeomorfismo tal que $w^* \circ \varphi(u) = w(u)$ y las rectas $c^* \circ \varphi(u) + v^* w^* \circ \varphi(u)$ y $c(u) + v w(u)$ coinciden. Sea $f = \varphi^{-1}$. La coincidencia de las rectas anteriores define una aplicación $(u,v) \mapsto v^*(u,v)$ tal que $c^* \circ \varphi(u) + v^*(u,v) w^* \circ \varphi(u) = c(u) + v w(u)$. Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} \beta^*(\varphi(u)) &= c^* \circ \varphi(u) - \frac{\langle (c^* \circ \varphi)' f', (w^* \circ \varphi)' f' \rangle}{\langle (w^* \circ \varphi)' f', (w^* \circ \varphi)' f' \rangle} w^* \circ \varphi(u) = \\ &= c(u) + v w(u) - v^*(u,v) w^* \circ \varphi(u) - \frac{\langle c' + v w' - \frac{\partial v^*}{\partial u} (w^* \circ \varphi) - v^* (w^* \circ \varphi)', (w^* \circ \varphi)' \rangle}{\langle (w \circ \varphi)', (w^* \circ \varphi)' \rangle} (w^* \circ \varphi) \\ &= | \text{como } \langle w, w' \rangle = 0 | = \\ &= c(u) + v w(u) - v^* w(u) - \frac{\langle c', w' \rangle}{\langle w', w' \rangle} w - v \frac{\langle w', w' \rangle}{\langle w', w' \rangle} w + v^* \frac{\langle w', w' \rangle}{\langle w', w' \rangle} w = \beta(u), \end{aligned}$$

lo que prueba la segunda parte de la proposición. □

Vamos a dar ahora una interpretación geométrica de la línea de estricción.

II.70. NOTA: Dada una superficie reglada no cilíndrica $x(u,v) = c(u) + vw(u)$, $|w| = 1$, sea L_u la generatriz pasando por $c(u)$. Como $w' \neq 0$, para ϵ suficientemente pequeño, $L_{u+\epsilon}$ no es paralela a L_u . Al no ser L_u y $L_{u+\epsilon}$ paralelas, existirá un punto $p(\epsilon)$ de L_u y otro de $L_{u+\epsilon}$ únicos tales que la distancia entre ellos sea la distancia entre L_u y $L_{u+\epsilon}$. Vamos a ver que cuando $\epsilon \rightarrow 0$, $p(\epsilon) \rightarrow \beta(u)$ (punto de la línea de estricción en L_u). En efecto:

Consideremos primero el caso general de dos rectas de \mathbf{R}^3 , $a+tX$, $b+tY$, $|X| = |Y| = 1$, $X \neq Y$. Sean $a + t_0X$, $b + t_1Y$ los puntos donde se alcanza la mínima distancia entre las dos rectas. Entonces el vector que une los dos puntos es perpendicular a los vectores directores de las rectas, i.e.

$$\langle b + t_1Y - (a + t_0X), X \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle b + t_1Y - (a + t_0X), Y \rangle = 0, \text{ de donde}$$

$$t_0 = \frac{\langle b-a, X \rangle |Y|^2 - \langle b-a, Y \rangle \langle Y, X \rangle}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

Consideremos ahora el caso en que las rectas son $L_u = c(u) + vw(u)$ y $L_{u+\epsilon} = c(u+\epsilon) + v w(u+\epsilon)$. Entonces, por la discusión hecha antes para el caso general, $p(\epsilon) = c(u) + v(\epsilon) w(u)$, con

$$v(\epsilon) = \frac{\langle c(u) - c(u+\epsilon), w(u) \rangle - \langle c(u) - c(u+\epsilon), w(u+\epsilon) \rangle \langle w(u), w(u+\epsilon) \rangle}{\langle w(u), w(u+\epsilon) \rangle^2 - 1}$$

Tomando límites cuando $\epsilon \rightarrow 0$, aplicando la regla de l'Hôpital dos veces, queda:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} v(\epsilon) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{[-\langle c'(u+\epsilon), w(u) \rangle - \{(-\langle c'(u+\epsilon), w(u+\epsilon) \rangle + \langle c(u) - c(u+\epsilon), w'(u+\epsilon) \rangle) \langle w(u), w(u+\epsilon) \rangle + \langle c(u) - c(u+\epsilon), w(u+\epsilon) \rangle \langle w(u), w'(u+\epsilon) \rangle]}{2 \langle w(u), w(u+\epsilon) \rangle \langle w(u), w'(u+\epsilon) \rangle} \right\} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{-\langle c''(u+\epsilon), w(u) \rangle - \{(-\langle c'', w \rangle - \langle c', w' \rangle - \langle c', w' \rangle + 0) \cdot 1 + 0 + \langle (-\langle c', w \rangle + 0) \langle w, w' \rangle + 0\}}{2 \langle w, w' \rangle \langle w, w' \rangle + 2 \cdot 1 \cdot \langle w, w'' \rangle} \right] = \\ &= \langle c', w' \rangle / \langle w, w'' \rangle, \end{aligned}$$

y como $|w| = 1$ implica $\langle w, w' \rangle = 0$ y $\langle w, w'' \rangle + \langle w', w' \rangle = 0$, resulta que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} v(\epsilon) = - \frac{\langle c'(u), w'(u) \rangle}{\langle w'(u), w'(u) \rangle} = v(u),$$

de donde $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} p(\epsilon) = \beta(u)$. □

La próxima proposición dice que los puntos singulares de una superficie reglada no cilíndrica (i.e., los puntos donde dx no es inyectiva) se distribuyen a lo largo de su línea de estricción:

II.71. PROPOSICION: Si M es una superficie reglada no cilíndrica se puede parametrizar de la forma $x(u,v) = \beta(u) + v w(u)$, donde $\beta(u)$ es la línea de estricción de M , y los puntos singulares de la parametrización, si existen, están contenidos en la línea de estricción.

DEMOSTRACION: Dada una parametrización $x^*(u,v) = c(u) + v^* w(u)$ de M , $x(u,v) = \beta(u) + v w(u)$ verifica las condiciones de II.69 con $\varphi = \text{id}$, lo que prueba la primera aseercción de la proposición. Veamos ahora como son los puntos singulares de x . Son aquellos en lo que $|x_u \wedge x_v| = 0$, pero $x_u \wedge x_v = (\beta' + v w') \wedge w = \beta' \wedge w + v w' \wedge w$. Ahora bien, $\langle w', w \rangle = 0$, y $\langle \beta', w' \rangle = 0$, luego $\beta' \wedge w = \lambda w'$ y $|x_u \wedge x_v|^2 = |\lambda w' + v w' \wedge w|^2 = |\lambda|^2 |w'|^2 + |v|^2 |w' \wedge w|^2 = 0$ sii $\lambda = 0 = v$, ya que $w' \neq 0$ por ser M no cilíndrica y, por tanto, $w' \wedge w \neq 0$. Por lo tanto $|x_u \wedge x_v| = 0$ implica $v = 0$, i.e., los puntos en los que $x_u \wedge x_v = 0$ están en β . \square

II.72. NOTA: A lo largo de la demostración anterior hemos visto que para que un punto de la línea de estricción sea un punto singular es necesario y suficiente que $\lambda = 0$, siendo $\beta' \wedge w = \lambda w'$. De esta última expresión podemos calcular $\lambda = \frac{\langle \beta' \wedge w, w' \rangle}{\langle w', w' \rangle}$, de modo que $\lambda = 0$ sii $\langle \beta' \wedge w, w' \rangle = 0$ (que es la condición -cfr.II.59- para que una superficie reglada sea desarrollable).

El parámetro $\lambda(u)$ anterior se llama parámetro de distribución de la superficie reglada x . \square

II.73. COROLARIO: En una superficie reglada desarrollable no cilíndrica la línea de estricción β es el conjunto de los puntos singulares de la parametrización $x(u,v) = \beta(u) + v w(u)$. \square

Veamos ahora algunos ejemplos de superficies regladas no desarrollables.

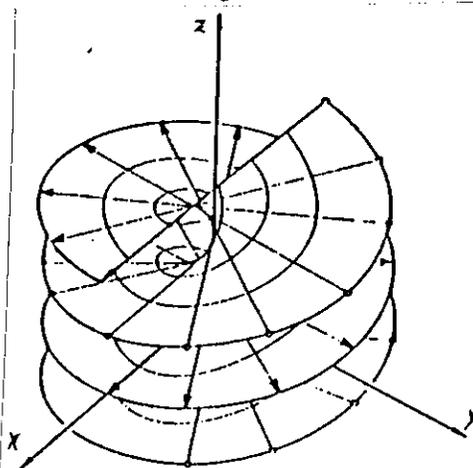
II.74. LA CINTA DE MÖBIUS (cfr.II.38) es una superficie reglada, como se ve considerando la parametrización

$$x(u,v) = (2 \sin u, 2 \cos u, 0) + v \left(-\sin \frac{u}{2} \sin u, -\sin \frac{u}{2} \cos u, \cos \frac{u}{2} \right),$$

y no es desarrollable porque

$$\langle c' \wedge w, w' \rangle = 2 \neq 0.$$

II.75. EL HELICOIDE es la superficie reglada M lugar geométrico de las rectas que pasan por la hélice $(\cos u, \sin u, a u)$ y cortan al eje Z perpendicularmente. Se puede parametrizar por la aplicación



SUPERFICIES DE \mathbb{R}^3

$x: \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ dada por $x(u,v) = (0, 0, au) + v(\cos u, \sin u, 0) = (v \cos u, v \sin u, au)$. M es una superficie en todos sus puntos, ya que (\mathbb{R}^2, x) es un sistema de coordenadas recubriendo M . En efecto: $x(\mathbb{R}^2)$ es un abierto de M por ser todo M ; x es inyectiva, pues si $(v' \cos u', v' \sin u', au') = (v \cos u, v \sin u, au)$, entonces $u = u'$ y $v = v'$; x es continua evidentemente y, localmente, su inversa se puede expresar por

$$x^{-1}(x^1, x^2, x^3) = \left(\frac{x^3}{a}, \frac{x^1}{\sin \frac{x^3}{a}} \right) \text{ ó } x^{-1}(x^1, x^2, x^3) = \left(\frac{x^3}{a}, \frac{x^2}{\sin \frac{x^3}{a}} \right),$$

$x = v \cos \frac{z}{a}$
 $y = v \sin \frac{z}{a}$
 $\frac{y}{x} = \tan \frac{z}{a}$
 $y - x \tan \frac{z}{a} = 0$
 $(\tan \frac{z}{a}) x - \frac{y}{\cos \frac{z}{a}} = 0$
 $x - y \cos \frac{z}{a} = 0$
 / cos

lo que indica que x^{-1} también es continua. Luego $x: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ es un homeomorfismo. Además $x_u \wedge x_v = (-v \sin u, v \cos u, a) \wedge (\cos u, \sin u, 0) = (-a \sin u, a \cos u, -v) \neq 0$ para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, luego dx es inyectiva en todo punto.

Además, en el helicoides $w'(u) = (-\sin u, \cos u, 0) \neq 0$, i.e., el helicoides es una superficie reglada no cilíndrica y, $-\langle c', w' \rangle = 0$, i.e. $(0, 0, au)$ es su línea de estricción. Entonces, como $x(u,v)$ es un sistema de coordenadas (lo que implica que x es no singular) para todo $u,v \in \mathbb{R}^2$, de II.73 se sigue que M no es desarrollable. Esto se puede ver también mediante el cálculo directo: $\langle c' \wedge w, w' \rangle = (0, 0, au) \wedge (\cos u, \sin u, 0), (-\sin u, \cos u, 0) = a \neq 0$.

II.76. Vamos a dar ahora una aproximación a una clasificación de las superficies desarrollables no cilíndricas. Usando como curva directriz la línea de extricción, se pueden parametrizar en la forma $x(u,v) = \beta(u) + v w(u)$.

a) Si $\beta'(u) = 0 \quad \forall u \in I$ la línea de estricción es un punto y la superficie es un cono de vértice ese punto.

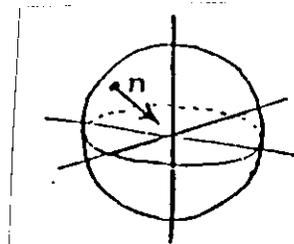
b) Si $\beta'(u) \neq 0 \quad \forall u \in I$, como $\langle \beta' \wedge w, w' \rangle = 0$ por ser desarrollable y w y β' son ortogonales a w' entonces β' es paralelo a w , i.e., $w = \frac{\beta'}{|\beta'|}$, con lo cual x es la desarrollable tangencial de β .

S11. Superficies cuádricas.

Son aquellas que vienen definidas por una ecuación de la forma $f(x,y,z) = 0$ (i.e. $M = f^{-1}(0)$, donde $f(x^1, x^2, x^3) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i x^j + \sum_i b_i x^i + c$).

Básicamente las superficies cuádricas se reducen a alguno de los tipos siguientes (ver Geometría 2ª).

ESFERA: Ecuación implícita: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Se puede considerar como una superficie de revolución.

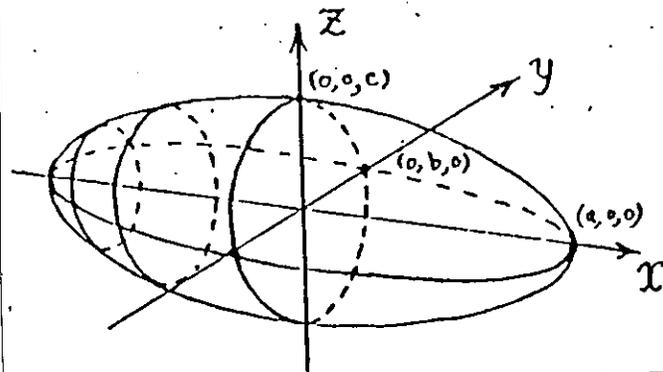


ELIPSOIDE: Esta superficie tiene la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Los planos perpendiculares a los ejes cortan a la superficie en una familia de elipses semejantes.

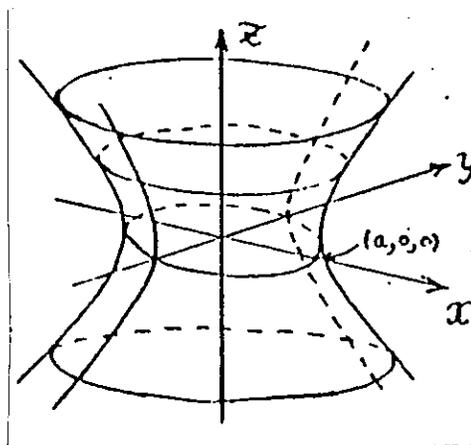
Si $a = b$ los planos perpendiculares al eje Z cortan a la superficie en circunferencias y el elipsoide es entonces una superficie de revolución (elipsoide de revolución) alrededor del eje Z .



HIPERBOLOIDE ELIPTICO DE UNA HOJA

Tiene la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Las secciones de la superficie con planos perpendiculares al eje Z son elipses, y como los planos perpendiculares a los ejes X e Y son hipérbolas. Cuando $a = b$ se puede obtener por revolución de una hipérbola alrededor del eje Z (hiperboloide de revolución).



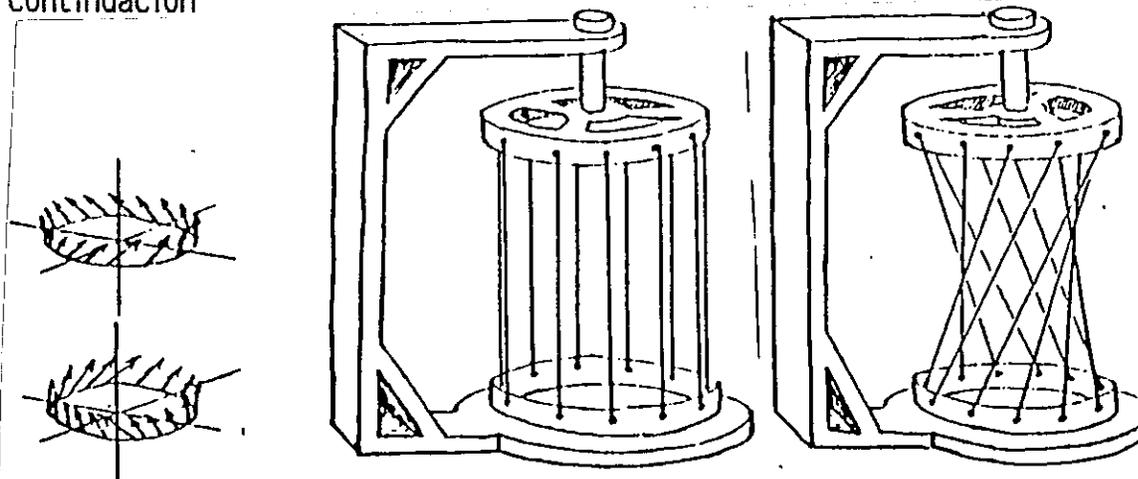
Es una superficie reglada. Más, doblemente reglada. Puede ser parametrizada por:

$$x(u, v) = (a \cos u, b \sin u, 0) + v(-a \sin u, b \cos u, c) \quad \text{ó por}$$

$$x(u, v) = (a \cos u, b \sin u, 0) + v(a \sin u, -b \cos u, c).$$

En ambos casos las rectas generatrices pasan por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$, y

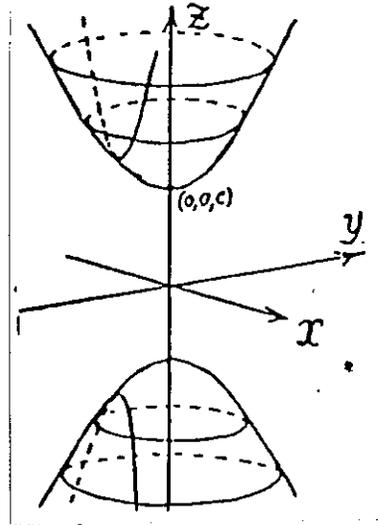
son perpendiculares al radio vector en cada punto, pero tienen direcciones diferentes. Para un hiperboloide de revolución es posible demostrar visualmente que se trata de una superficie reglada mediante el aparato de la figura a continuación



HIPERBOLOIDE ELIPTICO DE DOS HOJAS.

La ecuación es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

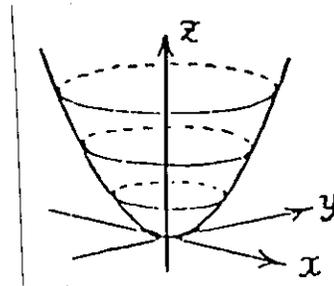
Los planos perpendiculares al eje Z cortan a la superficie (cuando la cortan) en elipses, y los perpendiculares a los ejes X e Y en hipérbolas. Sin embargo la superficie tiene un aspecto muy diferente al del hiperboloide elíptico de una hoja. Una vez más, cuando $a = b$ se trata de una superficie de revolución.



PARABOLOIDE ELIPTICO

La ecuación es $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

Los planos perpendiculares al eje Z cortan a la superficie en elipses semejantes. Los planos perpendiculares a los otros ejes la cortan en parábolas. Cuando $a = b$ tenemos un paraboloides de revolución.



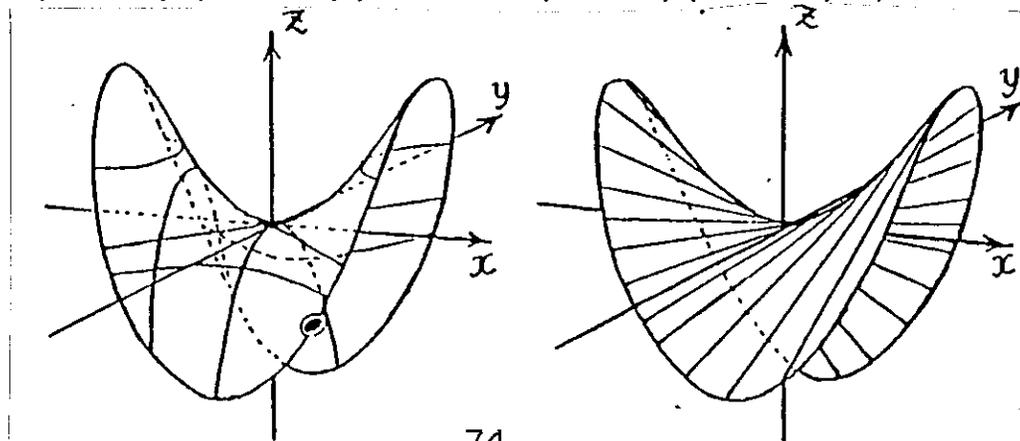
PARABOLOIDE HIPERBOLICO

La ecuación es $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

Los planos perpendiculares al eje Y cortan a la superficie en parábolas, y los perpendiculares al eje X la cortan en parábolas apuntando hacia el lado opuesto. Los planos perpendiculares al eje Z cortan a la superficie en hipérbolas con el eje en una dirección cuando el plano está por encima del plano XY, y con el eje en dirección perpendicular cuando el plano está por debajo del plano XY. El plano XY corta a la superficie en dos rectas que se cortan en el origen.

Esta superficie es doblemente reglada. Puede parametrizarse como

$x(u,v) = (au, 0, u^2) + v(a, b, 2u)$ ó $x(u,v) = (au, 0, u^2) + v(a, -b, 2u)$.



PROBLEMAS DEL CAPITULO II

1.- Demostrar que la esfera es una superficie a) usando coordenadas esféricas b) usando la proyección estereográfica.

2.- Demostrar que el cilindro $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2 = r^2\}$ es una superficie a) usando proyecciones sobre los planos coordenados, b) usando coordenadas cilíndricas, c) usando el teorema de la función implícita.

3.- Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} / f(x,y,z) = z^2$. ¿Es $f^{-1}(0)$ una superficie regular?. Comentar la respuesta.

4.- Sean dos puntos $p(t)$ y $q(t)$ que se mueven con la misma velocidad, $p(t)$ partiendo de $(0,0,0)$ se mueve sobre el eje Z y $q(t)$ partiendo de $(a,0,0)$, $a \neq 0$, se mueve paralelamente al eje Y. La recta que une ambos puntos en sus diferentes posiciones genera una superficie S. Demostrar que S es una superficie regular. ¿Qué tipo de superficie es?.

5.- Demostrar que si todas las rectas normales a una superficie conexa pasan por un punto fijo, entonces la superficie está contenida en una esfera y calcular $dh(p)(w)$, $w \in T_pM$.

7.- Sea $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera unidad de centro el origen, y sea $R_{z,\theta} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la rotación de ángulo θ alrededor del eje Z. Ver que $R_{z,\theta}$ restringida a S^2 es una aplicación diferenciable de S^2 en sí misma y calcular $(dR_{z,\theta})(p)$ en un punto arbitrario p de S^2 .

8.- Mostrar que la ecuación del plano tangente de una superficie que es el grafo de una función diferenciable $z=f(x,y)$ en el punto $p_0 = (x_0, y_0)$ viene dado por $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0)$. Mostrar, con ello, que el plano tangente es (en un sentido que hay que precisar) el grafo de la diferencial $df(p)$.

9.- Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, y sea $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(p) = |p-p_0|$, donde $p \in S$, $p_0 \in \mathbb{R}^3$, $p_0 \notin S$. (a) Probar que f es diferenciable. (b) Probar que $df(p) = 0$ sii la recta uniendo p con p_0 es normal a S en p.

10.- Sea $x(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ una parametrización de la esfera unidad S^2 . Sea P el plano $x = z \cot \alpha$, $0 < \alpha < \pi$, y β el ángulo agudo que la curva $P \cap S^2$ forma con el semimeridiano $\phi = \phi_0$.

SUPERFICIES DE \mathbb{R}^3

Calcular $\cos \beta$.

11.- Dada la superficie parametrizada

$x(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log \cos v + u)$, $-\pi/2 < v < \pi/2$,
mostrar que las dos curvas $x(u_1, v)$, $x(u_2, v)$ determinan segmentos de longitudes iguales sobre todas las curvas $x(u, cte)$.

12.- Mostrar que $x(u, v) = (u \operatorname{sen} \alpha \cos v, u \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} v, u \cos \alpha)$ $0 < u < \infty$, $0 < v < 2\pi$, $\alpha = cte$, es una parametrización del cono con 2α como ángulo del vértice. En el correspondiente entorno coordenado, demostrar que la curva $x(c \exp(v \operatorname{sen} \alpha \cot \beta), v)$ $c = cte$, $\beta = cte$, corta a las generatrices del cono (curvas $v = cte$) bajo el ángulo $cte \beta$.

13.- Supongamos que las curvas paramétricas sobre una superficie M son ortogonales. Probar que la ecuación diferencial de las curvas de M bisecando los ángulos de las líneas paramétricas es $E(du)^2 - G(dv)^2 = 0$.

14.- a) Las curvas coordenadas de una parametrización $x(u, v)$ se dice que constituyen una red de Tchebyshef si las longitudes de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero formado por ellas son iguales. Mostrar que una condición necesaria y suficiente para esto es $(\partial E / \partial v) = (\partial G / \partial u) = 0$. b) Probar que cuando las curvas coordenadas constituyen una red de Tchebyshef es posible parametrizar el entorno coordenado de tal manera que los nuevos coeficientes de la primera forma fundamental sean $E=1$, $F=\cos \theta$, $G=1$, donde θ es el ángulo que forman las curvas coordenadas.

15.- Sea M una superficie orientable y sean $\{U_\alpha\}$ y $\{V_\beta\}$ dos familias de entornos coordenados que recubren M y satisfacen (cada familia) la condición de que los cambios de coordenadas tienen jacobiano positivo. Decimos que $\{U_\alpha\}$ y $\{V_\beta\}$ determinan la misma orientación de M si la unión de las dos familias satisface de nuevo esta condición. Probar que una superficie orientable y conexa solo puede tener dos orientaciones distintas.

16.- Sea $f: M_1 \rightarrow M_2$ un difeomorfismo de superficies. (a) Mostrar que M_1 es orientable sii M_2 lo es (i.e. la orientabilidad se conserva por difeomorfismos). (b) Sean M_1 y M_2 orientables y orientadas. Probar que el difeomorfismo f induce una orientación en M_2 . Usar la aplicación antípoda de la esfera (la que a un punto le hace corresponder su opuesto o antípoda) para mostrar que esta orientación puede ser distinta de la inicial (así, la orientación misma puede no conservarse por

difeomorfismos; notar, sin embargo, que si M_1 y M_2 son conexas, undifeomorfismo o conserva o invierte la orientación).

17.-Calcular el área del toro obtenido por revolución de una circunferencia de radio a alrededor de un eje en el plano de esta circunferencia a una distancia b de su centro ($b > a$).

18.-Calcular el área de la trompeta: superficie obtenida por revolución de la curva $(u, c e^{-u/c}, 0)$ alrededor del eje x . (c es una constante).

19.-Sea $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular. Se llama tubo regular de radio r alrededor de c a la superficie parametrizada $x(s, v) = c(s) + r (e_2(s) \cos v + e_3(s) \sin v)$. Cuando $x(s, v)$ es una superficie regular, probar que su área es igual a $2\pi r$ veces la longitud de c .

20.-Mostrar que sobre una superficie M con parámetros u, v las trayectorias ortogonales de las curvas a $du + b dv = 0$ vienen dadas por $(E b - F a) du + (F b - G a) dv = 0$.

21.-Sea θ el ángulo en el punto (u, v) entre las dos direcciones dadas por la ecuación $a (du)^2 + 2 b du dv + c (dv)^2 = 0$. Probar que

$$\operatorname{tg} \theta = 2(\sqrt{(EG-F^2)} \sqrt{(b^2-ac)}) / (E c - 2 F b + G a).$$

22.-Dar una expresión de la primera forma fundamental cuando una superficie viene dada por $z=g(x, y)$ y cuando viene dada por $f(x, y, z) = 0$.

23.- Demostrar que si todas las rectas normales a una superficie M cortan a una recta fija r , y los planos ortogonales a r y los que contienen a r cortan a M en 1-variedades conexas, entonces M está incluida en una superficie de revolución.

24.- La superficie $x(u, v) = (u^2 + 2 u v, u + v, u^3 + 3 u^2 v)$, ¿es reglada?, ¿cuando es desarrollable?

25.- Dada la superficie $x(u, v) = (a \cos v + a u \sin v, a \sin v - a u \cos v, b u)$. (a) Ver que es una superficie reglada no desarrollable. (b) Calcular la línea de estricción. (c) Ver que las generatrices cortan a la línea de estricción bajo un ángulo constante.

26.- Demostrar que la superficie $z = a x y$, $a \neq 0$, es una superficie reglada. Hallar la línea de estricción.

→ una aproximación por una matriz simétrica.

Se puede diagonalizar.

Si $\det \Pi > 0$, diagonalizada es $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, con $a, b > 0$, y $a(x^1)^2 + b(x^2)^2 > 0$, no hay direcciones asintóticas (vectores isotropos)

Si $\det \Pi = 0$, diag es $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $a > 0 \Rightarrow (0, x^2)$ es la única dir. asintótica (a menos que $a=0$, pto llano)

Si $\det \Pi < 0$, diag es $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$, $a, b > 0$, $\Rightarrow a(x^1)^2 - b(x^2)^2 = 0$, son las direcciones asintóticas (las soluciones de esta ecuación)

$$a - b \left(\frac{x^2}{x^1}\right)^2 = 0 \quad \frac{x^2}{x^1} = \pm \sqrt{\frac{a}{b}} \quad \begin{matrix} \nearrow (1, \sqrt{a/b}) \\ \searrow (1, -\sqrt{a/b}) \end{matrix} \quad m_{1,2} = 1 - \frac{a}{b}$$

$$z(p) = (p, z^*(p)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

$$dz = \begin{pmatrix} dp \\ dz^* \end{pmatrix}$$

$$dz = \begin{pmatrix} id & 0 \\ 0 & dz^* \end{pmatrix}$$

i.e. $d z = id \oplus \frac{d z^*}{\psi}$
 $T_p M \xrightarrow{\psi} T_{z^*(p)} \mathbb{R}^3 \cong T_p \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} T_p M &\rightarrow T_p M \\ T_p M &\rightarrow T_p M. \end{aligned}$$

$$X \in T_p M \Rightarrow dz(p)(X) \equiv dz^*(p)(X) = \psi dz^*(p)(X)$$

$$z \circ c(t) = p, c'(t) = X \quad dz(p)X = \frac{d}{dt} (z \circ c)(t) \equiv \psi \frac{d}{dt} (z^* \circ c)(t) \in T_p \mathbb{R}^3$$

$$D_v f = df(p) v = \frac{d}{dt} (f \circ c(t))$$

c.v. d.
c.v. p.

$$D_x z = dz(p) X \quad \boxed{D_x \tilde{z} = D_x z} \quad \text{uu ul uu uu}$$

(III.2.1)
(III.2.1)

Def. Gauss y Weing. $L_p: T_p M \rightarrow T_p M \mid L_p X = -D_x N = -\frac{dN(p)X}{\|N\|}$

$$\langle -dN(p)X, N \rangle = - \langle \frac{dN \circ c}{dt}(0), N \circ c(0) \rangle \stackrel{1}{=} \frac{d}{dt} \langle N \circ c, N \circ c \rangle = 0.$$

$$\tilde{N}: M \rightarrow T_p \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\| \cdot \|^{-1}} \mathbb{R}^3$$

$$\tilde{N} = \psi$$

$$\tilde{N}: M \rightarrow S^2$$

$$d\tilde{N}(p): T_p M \rightarrow T_p S^2 \cong T_p M$$

$(\tilde{N}(p), X) \rightarrow (p, X)$

$$N: M \rightarrow T\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^3$$

$$\psi(p, X) = X$$

$\Pi \quad N \quad L_p X = -D_x N = dN(p)X = 0. \quad \text{i.e. } L_p = 0. \quad \forall p \in M.$

$S^2(r) \quad N(p) = \frac{p}{|p|} = \frac{p}{r} \quad L_p = -dN(p) = \left(-\frac{\Sigma d}{r} \right)$

\hookrightarrow linear ^{obvious} antiderivatives

$(u, x) \quad x, y \in T_p M \quad x = \sum x^i x_i \quad y = \sum y^j x_j \quad u_0 \in U \quad |x|_{u_0} = |y|_{u_0} = p$

$L_p X = -dN(p)X = -d(N \circ x)|_{u_0} (dx|_{u_0}^{-1} X) = - \left(\frac{\partial N \circ x}{\partial u^i} (u_0) X^i + \frac{\partial (N \circ x)}{\partial x^i} (u_0) X^i \right) =$
 $= - \sum N_i(u_0) X^i$

$L_p Y = - \sum N_i(u_0) Y^i$

$\langle L_p X, Y \rangle = - \sum_{i,j} X^i Y^j \langle N_i, x_j \rangle = + \sum X^i Y^j \langle N_i, x_j \rangle$

$\langle L_p Y, X \rangle = - \sum X^j Y^i \langle N_i, x_j \rangle = + \sum X^j Y^i \langle N_i, x_j \rangle = \langle L_p X, Y \rangle$

$0 = \frac{\partial}{\partial u^i} \langle N_i, x_j \rangle = \langle N_{ji}, x_j \rangle + \langle N_i, x_{ij} \rangle$

$M \quad f|_M$

$N \quad df(N) : f|_M \xrightarrow{N^{\sharp}} T\mathbb{R}^3$

$f(p) \mapsto df(p)(N(p)).$

Example for helix

ipso ni hay modo propio de problema

$L_p^{df} (df(p)X) = - (D_{df(p)X} N^{\sharp}) (f(p)) = - \frac{d}{dt} (N^{\sharp} \circ c) \Big|_{t=0} =$

$= - \frac{d}{dt} (df(c(t)) N(c(t))) \Big|_{t=0} \stackrel{f = \text{id}}{\downarrow} = - \frac{d}{dt} (R(N(c(t)))) \Big|_{t=0}$
 $f = \text{id} \quad T \circ R$
 \downarrow refer to value of $df = R$

$= -R(N(c))' = -R D_x N = df(p) L_p X$

$\Pi_{f(p)}(X) = \langle L_p X, X \rangle$

CAPITULO III: GEOMETRIA LOCAL EXTRINSECA DE UNA SUPERFICIE DE \mathbf{R}^3

Lección 11ª: APLICACION DE WEINGARTEN

S1. Preliminares

El estudio local de las curvas realizado en el capítulo I se basaba en la obtención de fórmulas que daban la variación de una referencia canónica asociada a la curva. En el caso de una superficie no hay una referencia canónica (depende del sistema de coordenadas), pero sí hay localmente un campo vectorial bien definido (salvo el signo): el vector unitario normal. Será la variación de este vector la herramienta que usaremos para el estudio de la forma local de la superficie. Esta variación vendrá dada por un endomorfismo lineal en cada espacio tangente que llamaremos "aplicación de Weingarten" u "operador de forma". Como en el caso de las curvas, se justificará que este operador realmente mide la forma de la superficie al demostrar que dos superficies congruentes tienen los mismos "operadores de forma". Consecuencia de ello será que los invariantes algebraicos (determinante, traza, ...) de los operadores de forma tendrán un significado geométrico en la superficie.

Para dar una formalización a la expresión "variación del campo vectorial unitario normal" necesitamos primero hacer algunas consideraciones:

En II.30. introdujimos el concepto de campo vectorial a lo largo de una superficie. Un tal campo vectorial resulta ser una aplicación entre subvariedades de \mathbf{R}^3 y $T\mathbf{R}^3 \cong \mathbf{R}^6$, por lo tanto tiene sentido hablar de su diferencial y, por analogía con el caso de las aplicaciones entre espacios euclídeos, de la derivada direccional:

III.1.NOTA: Dado un campo vectorial $Z: U \rightarrow T\mathbf{R}^3$ sobre un abierto U de una superficie M , de acuerdo con II.30, se puede considerar Z de la forma $Z(p) = (p, Z^*(p))$, siendo $Z^*: U \rightarrow \mathbf{R}^3$ una aplicación diferenciable, y $dZ = I \oplus dZ^*$, con lo cual dZ y dZ^* llevan la misma información sobre el campo Z . De ahora en adelante por dZ entenderemos dZ^* .

Por otro lado, la identificación natural de $T_{Z^*(p)} \mathbf{R}^3$ con $T_p \mathbf{R}^3$ mediante la aplicación $\varphi: T_{Z^*(p)} \mathbf{R}^3 \rightarrow T_p \mathbf{R}^3 / \varphi((Z^*(p), Y)) = (p, Y)$ permite considerar $dZ^*(p)$ como aplicación de $T_p M$ en $T_p \mathbf{R}^3$.

Seguiremos a partir de ahora los dos convenios anteriores, i.e, dado un campo vectorial Z sobre un abierto U de M , identificaremos $dZ(p)(X)$ con

$\varphi(dZ^*(p)X) \quad \forall X \in T_p M, \forall p \in U.$

III.2. NOTA: Dado un campo vectorial Z sobre M , de la nota anterior y de (II.22.1) resulta que $\forall p \in M, \forall X \in T_p M$ y una curva $c: I \rightarrow M$ tal que $c(0) = p, c'(0) = X$, se tiene:

(III.2.1.)
$$dZ(p)X = \frac{d}{dt}(Z \circ c)(0) \quad (\text{considerado como vector de } T_p \mathbb{R}^3).$$

Recordemos que para $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^m$, la derivada direccional $D_v f$ de f en la dirección del vector v en el punto p verifica

$$D_v f = df(p)v = \left. \frac{d}{dt}(f \circ c(t)) \right|_{t=0}$$

siendo $c: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ una curva de \mathbb{R}^m tal que $c(0) = p, c'(0) = v$. Por tanto, resulta natural ahora dar la siguiente definición:

III.3. DEFINICION: Sea U un abierto de la superficie $M, p \in U, X \in T_p M, Z$ un campo vectorial sobre U . La derivada direccional de Z en la dirección de X es el vector

$$D_X Z = dZ(p)X \in T_p \mathbb{R}^3.$$

III.4. PROPOSICION: Si Z es la restricción a un abierto U de M de un campo vectorial \tilde{Z} definido sobre un abierto V de $\mathbb{R}^3, U \subset V$, entonces $D_X \tilde{Z} = D_X Z$.

DEMOSTRACION: Es consecuencia de (III.2.1.).

S2. Aplicaciones de Gauss y Weingarten

III.5. DEFINICION: Sea M una superficie de $\mathbb{R}^3, p \in M, U$ un abierto de M conteniendo p tal que existe un campo vectorial unitario N sobre U . Se llama "aplicación de Weingarten" u "operador forma" de M en p asociado a la orientación N a la aplicación lineal $L_p: T_p M \rightarrow T_p M$ dada por $L_p X = -D_X N = -dN(p)X$.

Esta aplicación está bien definida. En efecto: sea $c: I \rightarrow M$ tal que $c(0) = p, c'(0) = X$. Entonces, por (III.2.1), $L_p X = -D_X N = -dN(p)X = -(d(N \circ c)/dt)(0)$, de donde

$\langle L_p X, N(p) \rangle = \langle -(N \circ c)', N(p) \rangle = -\frac{1}{2} \langle N \circ c, N \circ c \rangle'(0) = 0$, luego $L_p X \in T_p M$.

III.6. NOTA: Puesto que N es unitario, la aplicación $\tilde{N}: M \rightarrow S^2$ dada por $\tilde{N}(p) = N(p)$ (siendo $\varphi: T_p \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el isomorfismo canónico $\varphi(p, Y) = Y$) está bien definida, y se llama "aplicación de Gauss". Resulta entonces de III.5. que salvo el isomorfismo canónico $\psi: T_{\tilde{N}(p)} S^2 \rightarrow T_p M / \psi(\tilde{N}(p), X) = (p, X)$, la aplicación de Weingarten es la diferencial de la aplicación de Gauss cambiada de signo.

falta $\tilde{N} \rightarrow$

$\lambda)$ (más correcto)
 $\tilde{N} = \psi \circ N$, con
 $\psi: T_p \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p M$
 $\psi(p, Y) = Y$, y
 $\psi: T_p \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p \mathbb{R}^3$
 \cong canónica

III.7. NOTA: Antes de seguir adelante, vamos a calcular el "operador de forma" para dos casos sencillos, lo que nos permitirá entender algo de como este operador mide de alguna manera la forma o aspecto local que tiene una superficie.

Consideremos en primer lugar un plano. En este caso existe un vector unitario normal N constante sobre la superficie, resulta entonces que para todo punto p del plano M $L_p X = -D_X N = -dN(p)X = 0 \quad \forall X \in T_p M$, i.e. $L_p = 0 \quad \forall p \in M$. Se ve también esto considerando que L_p es la diferencial de la aplicación de Gauss (cambiada de signo) y que la imagen de esta aplicación para el plano es un punto de S^2 .

Sea ahora M una esfera de radio r . Entonces, para todo $p \in M$, $N(p) = p/|p| = p/r$, de donde resulta que $L_p = -dN(p) = -\frac{1}{r} \text{Id}$.

Resulta de los dos ejemplos anteriores que, intuitivamente, lo que el operador de forma en $p \in M$ aparta de ser nulo es lo que la superficie M se aparta de ser un plano (incluso se separa de su plano tangente) en un entorno de p , y lo que L_p se aparta de ser un múltiplo de la identidad es lo que M se aparta de ser una esfera en un entorno de p .

III.8. PROPOSICION: L_p es una aplicación lineal autoadjunta.

DEMOSTRACION: La linealidad es consecuencia de que es la diferencial de una aplicación. Veamos que es autoadjunta. Sean (U, x) un sistema de coordenadas en p . (i.e. $p \in x(U)$); $X, Y \in T_p M$, $X = \sum X^i x_i$, $Y = \sum Y^j x_j$; $u_0 \in U$ tal que $x(u_0) = p$. Entonces

$$\begin{aligned} L_p X &= -dN(p)X = -d(N \circ x)(u_0)(dx(u_0)^{-1}X) = -\left(\frac{\partial(N \circ x)}{\partial u^1}(u_0) X^1 + \frac{\partial(N \circ x)}{\partial u^2}(u_0) X^2 \right) \\ &= -\sum_{i=1}^2 N_i(u_0) X^i \end{aligned}$$

y, análogamente, $L_p Y = \sum_{j=1}^2 N_j(u_0) Y^j$. Resulta de aquí que

$$\begin{aligned} \text{(III.8.1.)} \quad \langle L_p X, Y \rangle &= -\left\langle \sum N_i X^i, \sum Y^j x_j \right\rangle = -\sum_{i,j} X^i Y^j \langle N_i, x_j \rangle, \text{ y} \\ \langle L_p Y, X \rangle &= -\sum_{i,j} X^i Y^j \langle N_j, x_i \rangle. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$0 = \frac{\partial}{\partial u^j} \langle N, x_i \rangle = \langle N_j, x_i \rangle + \langle N, x_{ij} \rangle$ y $0 = \frac{\partial}{\partial u^i} \langle N, x_j \rangle = \langle N_i, x_j \rangle + \langle N, x_{ji} \rangle$, pero como $x_{ij} = x_{ji}$, resulta que $-\langle N, x_{ij} \rangle = \langle N_j, x_i \rangle = \langle N_i, x_j \rangle$ lo cual, sustituido en (III.8.1) da $\langle L_p X, Y \rangle = \langle L_p Y, X \rangle$, c.q.d.

III.9. PROPOSICION: La aplicación de Weingarten es invariante por isometrías de \mathbf{R}^3 , i.e. si $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ es una congruencia, M una superficie, L la aplicación de Weingarten de M asociada a un campo vectorial normal unitario N y L^f la de $f(M)$ asociada a $df(N) \equiv N^f$, entonces $L^f_{f(p)} \circ df(p) = df(p) \circ L_p$.

DEMOSTRACION: Observemos primero que, por ser f una isometría de \mathbf{R}^3 , $f(M)$ es una superficie y $df(N)$ es un campo vectorial normal unitario por serlo N .

Para calcular L^f , observemos primero que para todo $r \in \mathbf{R}^3$ $df(r) = R$ es una transformación ortogonal independiente del punto $r \in \mathbf{R}^3$ en que se calcule df . Por lo tanto, si c es una curva de M tal que $c(0) = p$ y $c'(0) = X$, $X \in T_p M$, entonces

$$\begin{aligned} L^f_{f(p)}(df(p)X) &= - (D_{df(p)X} N^f)(f(p)) = - \frac{d}{dt} (N^f \circ f \circ c) \Big|_{t=0} = \\ &= - \frac{d}{dt} (df(c(t)) N(c(t))) \Big|_{t=0} \stackrel{df(c(t))=R}{=} - \frac{d}{dt} (R(N(c(t)))) \Big|_{t=0} = \\ &= - R \frac{d}{dt} (N \circ c(t)) \Big|_{t=0} = - R D_X N = +df(p)L_p X \quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

III.10. DEFINICION: La segunda forma fundamental de una superficie M en un punto $p \in M$ es la forma cuadrática II_p asociada al operador de forma L_p y al producto escalar en $T_p M$, i.e. $II_p(X) = \langle L_p X, X \rangle$. Asociada a esta forma cuadrática se tiene una forma bilineal simétrica, que denotaremos también por II_p y que -por ser L_p autoadjunto- verifica $II_p(X, Y) = \langle L_p X, Y \rangle$.

Análogamente se puede definir $III_p(X) = \langle L_p^2 X, X \rangle$, $IV_p(X) = \langle L_p^3 X, X \rangle, \dots$, pero nosotros no las usaremos.

II.11. PROPOSICION: La segunda forma fundamental es invariante bajo congruencias de \mathbf{R}^3 .

DEMOSTRACION: $II_{f(p)}(df(p)X) = \langle L^f_{f(p)} df(p)X, df(p)X \rangle_{f(p)} = \langle df(p) L_p X, df(p)X \rangle = \langle L_p X, X \rangle = II_p(X)$. □

Consecuencia de II.9 y II.11 es que L_p y II_p son realmente operadores geométricos y que sus invariantes algebraicos serán invariantes geométricos. Estudiaremos estos en la próxima lección.

Obsérvese también que es clara, a partir de su definición, la dependencia de L_p y de II_p de la elección de N (lo que equivale a una elección local de orientación) y que cambian de signo al cambiar el signo de N (i.e. al cambiar de orientación de la superficie).

Lección 12ª: CURVATURAS DE UNA SUPERFICIE

S3. Invariantes algebraicos del operador de forma.

Comenzaremos dando nombres a los invariantes algebraicos de L y Π . En el siguiente apartado veremos su interpretación geométrica, lo que justificará el nombre dado.

III.12. DEFINICIONES: Sea M una superficie de \mathbb{R}^3 , $p \in M$:

- a) Se llama curvatura de Gauss de M en p a $K(p) = \det L_p$.
- b) Se llama curvatura media de M en p a $H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} L_p$.
- c) Se llaman curvaturas principales de M en p a los valores propios de L_p .
- d) Se llaman vectores principales de M en p los vectores propios de L_p .
A las direcciones que corresponden a los vectores principales se las llama direcciones principales.
- e) Un punto $p \in M$ se dice que es un punto umbilical si toda dirección de $T_p M$ es principal, i.e. si $L_p = \lambda \operatorname{Id}$ o, equivalentemente, $\Pi_p = \lambda I_p$.
- f) Una curva c de M se llama línea de curvatura si su vector tangente en cada punto es un vector principal.

III.13. NOTA: Puesto que, según III.9, L_p es invariante bajo isometrías de \mathbb{R}^3 , está claro que los invariantes algebraicos de L_p mencionados en III.12 son invariantes bajo isometrías.

III.14. NOTA: Obsérvese que, por ser L_p autoadjunto, existen siempre dos direcciones principales independientes (diagonalización de una matriz simétrica) ortogonales (si $L_p v_i = \lambda_i v_i$ con $i = 1, 2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $(\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle = \langle L_p v_1, v_2 \rangle - \langle v_1, L_p v_2 \rangle = 0$, lo que implica $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$; si $L_p = \lambda \operatorname{Id}$, entonces es posible elegir una base de vectores propios de modo que estos sean ortogonales).

S4. Curvatura normal. Interpretación geométrica de los invariantes algebraicos.

En este apartado daremos una interpretación geométrica de los invariantes definidos en el apartado anterior en términos de las curvaturas de determinadas curvas sobre la superficie. Daremos primero una definición encaminada a esta interpretación:

III.15. DEFINICION: Dado $X \in T_p M$, llamaremos curvatura normal de M en p en la dirección de X a $k_N(X) = \Pi_p \left(\frac{X}{|X|} \right) = \Pi_p(X) / I_p(X)$.

Dada una curva $c: I \rightarrow M$ con $c(t_0) = p$, se llama curvatura normal de c en p a $k_N(c'(t_0)) = II_p(c'(t_0))/I_p(c'(t_0))$, i.e. a la curvatura normal de M en p en la dirección de $c'(t_0)$.

III.16. NOTA: Obsérvese que la curvatura normal $k_N(X)$ solo depende de la dirección de X . En efecto, por ser II_p y I_p formas cuadráticas se tiene que $II_p(\lambda X) = \lambda^2 II_p(X)$, $I_p(\lambda X) = \lambda^2 I_p(X)$ de donde

$$k_N(\lambda X) = \frac{II_p(\lambda X)}{I_p(\lambda X)} = \frac{\lambda^2 II_p(X)}{\lambda^2 I_p(X)} = \frac{II_p(X)}{I_p(X)} = k_N(X).$$

III.17. PROPOSICION: Sea $c: I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ una curva de M parametrizada respecto de su longitud de arco. Sea $k(t)$ la curvatura de c en $c(t)$, y $k_N(t) = k_N(c'(t))$. Entonces $k_N(t) = k(t) \langle e_2(t), N(t) \rangle$, i.e. la curvatura normal de c en $c(t)$ es la proyección del vector curvatura $\vec{k}(t) = k(t) e_2(t)$ de $c(t)$ sobre la dirección normal a la superficie $N(t) = N(c(t))$.

DEMOSTRACION: ~~Por estar~~ ^{Tomemos} c parametrizada respecto a la longitud de arco, $k_N(t) = II_{c(t)}(c'(t))$, luego $k_N(t) = \langle L_{c(t)} c'(t), c'(t) \rangle = - \langle D_c N, c' \rangle = - \langle \frac{dN(t)}{dt}, c'(t) \rangle = - \left(\frac{d}{dt} \langle N(t), c'(t) \rangle - \langle N(t), c''(t) \rangle \right) = \langle N(t), k e_2(t) \rangle$ c.q.d.

III.18. COROLARIO (Teorema de Meusnier): Sea $\Theta(t)$ ($\varphi(t)$) el ángulo entre el plano tangente a la superficie en $c(t)$ y el plano rectificante (plano osculador) de c en $c(t)$. Entonces

$$k_N(t) = k(t) \cos \Theta(t) = k(t) \sin \varphi(t).$$

III.19. NOTA (Interpretación geométrica de la curvatura normal): Si $e_2(t)$ es paralelo a $N(t)$, entonces

$$k_N(t) = \pm k(t) \text{ (el signo depende únicamente de la orientación elegida),}$$

expresión que nos permite interpretar geométricamente la curvatura normal de un vector $X \in T_p M$ como la curvatura de una curva tangente a X de la siguiente manera:

Sea Π el plano pasando por p generado por los vectores X y $N(p)$. La intersección $M \cap \Pi$ es, en un entorno de p , una 1-variedad cuyo espacio tangente en p está generado por X . En efecto, sea $f(x, y, z) = 0$ la ecuación en implícitas de Π y $g(x, y, z) = 0$ la ecuación de M en implícitas en un entorno de p (cfr. II.A.6.1). En un entorno de p ; $M \cap \Pi = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) = (f, g)^{-1}(0)$ y $d(f, g) = df \oplus dg$, con lo cual $d(f, g)$ tiene rango 2 en un entorno de $p^{(1)}$ y, por lo

tanto (cfr. III.A.6.1), $M \cap \Pi$ es una 1-variedad en un entorno de p y su espacio tangente en p es $\text{Ker}(d(f,g)(p)) = \text{ker}(df(p) \oplus dg(p)) = \text{ker}df(p) \cap \text{ker}dg(p) = \Pi \cap T_p M$, y, como $X \in \Pi \cap T_p M$, X es tangente en p a la 1-variedad $M \cap \Pi$. Sea c una parametrización de esa variedad, entonces $c: I \rightarrow M$ es una curva de M . Evidentemente (si c es una curva y φ un cambio de parámetro de c , $c \circ \varphi$ sigue siendo un sistema de coordenadas de $\Pi \cap M$) podemos tomar c de modo que $c(0) = p$, $c'(0) = X/|X|$, $|c'(t)| = 1$. Para esta curva, intersección de Π y M , se tiene que $k_N(X) = k_N(c'(0)) = \langle k e_2(0), N(0) \rangle = \pm |k|(c(0))$ ya que $e_2(0) \in \Pi$, plano generado por X y N y $\langle e_2(0), X \rangle = \langle e_2(0), c'(0) \rangle = 0$, luego $e_2(0) = \pm N(0)$.

Resumiendo lo anterior: la curvatura normal de un vector $X \in T_p M$ (o, mejor, la curvatura normal en la dirección de un vector $X \in T_p M$) es la curvatura en p de la curva intersección de M con el plano normal a M en p (i.e. plano pasando por p y conteniendo a $N(p)$ que contiene a X). Una tal curva se llama sección normal de M en p en la dirección de X .

Puesto que ya tenemos una interpretación geométrica de la curvatura normal, para interpretar geoméricamente los invariantes definidos en III.12 bastará relacionar estos con la curvatura normal. Es lo que hacemos a continuación:

III.20. PROPOSICION: Las curvaturas principales de una superficie M en un punto $p \in M$ son las curvaturas normales máxima y mínima en dicho punto.

DEMOSTRACION: Sean e_1, e_2 dos vectores principales ortogonales unitarios (cfr. III.14) de M en p de curvaturas principales k_1, k_2 respectivamente, $k_1 \geq k_2$. Sea $X \in T_p M$, $|X| = 1$, $\theta = \angle(X, e_1)$, entonces $X = (\cos \theta) e_1 + (\sin \theta) e_2$ 0 \neq
 $II_p(X) = \langle L_p X, X \rangle = \langle \cos \theta L_p e_1 + \sin \theta L_p e_2, \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \rangle = (\cos^2 \theta) k_1 + (\sin^2 \theta) k_2$, i.e. $k_N(X) = II_p(X) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$. Por lo tanto, puesto que $k_1 \geq k_2$, el valor máximo de k_N corresponde a $\theta = 0$ (i.e. $X = e_1$) y el mínimo a $\theta = \pi/2$ (i.e. $X = e_2$). □

III.21. COROLARIO (Fórmula de Euler): $k_N(X) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$.

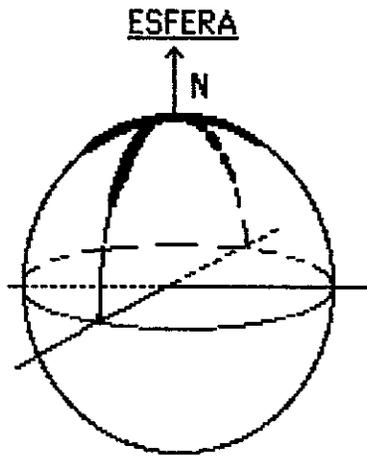
(1) Demostración de esta afirmación: $N \perp T_p M$ implica $dg(p)N = W \neq 0$, y $N \in \Pi$ implica $df(p)N = 0$. Tomemos $Y \in T_p \mathbb{R}^3 / Y \perp \langle X, N(p) \rangle$. Entonces $Y \in T_p M$, luego $dg(p)(Y) = 0$, $Y \perp \Pi$, luego $df(p)Y = Z \neq 0$. $d(f,g)(p)Y = (df(p)Y, dg(p)Y) = (Z, 0)$ y $d(f,g)(p)N = (df(p)N, dg(p)N) = (0, W)$, luego $\{d(f,g)(p)Y, d(f,g)(p)N\}$ es una base de \mathbb{R}^2 , luego $d(f,g)(p)$ es suprayectiva, luego existe un menor 2×2 de $\begin{pmatrix} \partial f / \partial x & \partial f / \partial y & \partial f / \partial z \\ \partial g / \partial x & \partial g / \partial y & \partial g / \partial z \end{pmatrix}$ distinto de cero en p y, por continuidad, será distinto de cero en un entorno de p , lo que prueba la afirmación.

III.22. NOTA: Obsérvese que si k_1 y k_2 son las curvaturas principales de M en un punto p , resulta de la definición las siguientes expresiones para las curvaturas media y de Gauss.

$$(III.22.1) \quad H(p) = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) \quad (III.22.2) \quad K(p) = k_1 k_2.$$

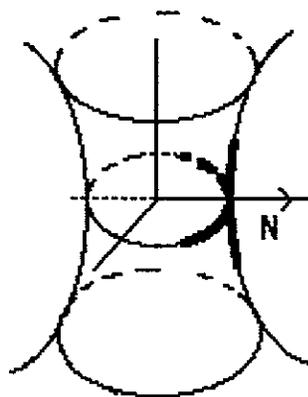
La primera fórmula da un por qué del nombre de curvatura media para H . Vamos a ver que la segunda da también una comprensión intuitiva del significado de las expresiones "curvatura de Gauss negativa, positiva o cero", de modo que solo con ver una superficie se puede saber el signo de su curvatura de Gauss. En efecto, puesto que $K = k_1 \cdot k_2$, resulta que "la curvatura de Gauss es positiva si todas las secciones normales se curvan en el mismo sentido y negativa en caso contrario". Mostramos a continuación ejemplos para el posible signo de K tomados de las superficies que conocemos hasta ahora:

HIPERBOLOIDE ELIPTICO
DE UNA HOJA



$K > 0$

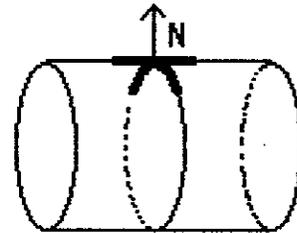
las secciones normales se curvan todas en la dirección opuesta a N .



$K < 0$

las curvaturas normales de las curvas señaladas tienen distinto signo.

CILINDRO



$K = 0$

la recta tiene curvatura normal cero y las demás direcciones curvatura normal positiva (o negativa, según la orientación tomada)

Vamos a ver ahora como calcular L y II usando coordenadas para poder aplicar después esta técnica al cálculo en algunos ejemplos:

III.23. PROPOSICION: Sea (U, x) un sistema de coordenadas de M en p , $X \in T_p M$, $X = \sum_{i=1}^2 X^i x_i$, entonces $II_p(X) = \sum_{i,j=1}^2 L_{ij} X^i X^j$, siendo $L_{ij} = - \langle N_i, x_j \rangle = \langle N, x_{ij} \rangle$ y, además $L_p X = \sum_{i,j=1}^2 L_i^j X^i x_j$, donde $L_i^j = \sum_{k=1}^2 L_{ik} g^{kj}$, y (g^{kj}) es la matriz inversa de (g_{ij}) .

DEMOSTRACION: Observemos en primer lugar que, si $x(u) = p$, vimos en la demostración de III.8 que para todo $Y \in T_p M$, $Y = \sum_j Y^j x_j$ se tiene que $\langle L_p X, Y \rangle =$

$= - \sum_{i,j} X^i Y^j \langle N_i, X_j \rangle$, de donde $II_p(X) = \langle L_p X, X \rangle = \sum_{i,j=1}^2 L_{ij} X^i X^j$, con $L_{ij} = - \langle N_i, X_j \rangle = \langle N, X_{ij} \rangle$ (esta última igualdad la vimos también en la demostración de III.8).

Escribamos ahora $L_p X = \sum_{i,j=1}^2 L_i^j X^i X_j$. Puesto que $\langle L_p X, Y \rangle = \sum_{i,j} L_{ij} X^i Y^j$, resulta que $\sum_{i,j} L_{ij} X^i Y^j = \langle \sum_{i,j} L_i^j X^i X_j, \sum_k Y^k X_k \rangle = \sum_{i,j,k} L_i^j X^i Y^k g_{jk}$, para todo $X, Y \in T_p M$.

Tomemos $X = x_i, Y = x_j$, se tiene entonces que $X^k = \delta_i^k, Y^k = \delta_j^k$, por lo tanto la igualdad anterior se transforma en $L_{ij} = \sum_k L_i^k g_{kj}$, de donde, multiplicando por la matriz inversa de (g_{kj}) , $\sum_{j=1}^2 L_{ij} g^{jk} = L_i^k$. □

L_{ij}
"
 $\sum L_{rs} \delta_i^r \delta_j^s$
 $\sum L_r^s \delta_i^r \delta_j^s$
"
 $L_i^s g_{sj}$

III.24. EJEMPLOS:

a) **ESFERA:** Ya vimos en III.7 que, para la esfera de radio r , $L_p = -\frac{1}{r} Id$, por lo tanto todas las direcciones de la esfera son principales con curvatura principal $-\frac{1}{r}$, y esto en todos los puntos de la esfera. La curvatura media en cada punto es $H = -\frac{1}{r}$ y la curvatura de Gauss $K = \frac{1}{r^2}$.

b) **TORO:** Utilizaremos el sistema de coordenadas

$x(u,v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u); a > r > 0$
 $x_1 \equiv x_u = r (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)$
 $x_2 \equiv x_v = (a + r \cos u) (-\sin v, \cos v, 0)$

$g_{11} = \langle x_u, x_u \rangle = r^2, \quad g_{12} = \langle x_u, x_v \rangle = 0, \quad g_{22} = \langle x_v, x_v \rangle = (a + r \cos u)^2,$

$N = \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|} = \frac{1}{|I|} \begin{vmatrix} & i & j & k \\ -\sin u \cos v & -\sin u \sin v & \cos u & \\ -(a+r \cos u) \sin v & (a+r \cos u) \cos v & 0 & \end{vmatrix} =$
 $= (-\cos u \cos v, -\sin v \cos u, -\sin u),$

$x_{11} = x_{uu} = r (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u), \quad L_{11} = \langle N, x_{11} \rangle = r$
 $x_{12} = x_{uv} = r (\sin u \sin v, -\sin u \cos v, 0), \quad L_{12} = \langle N, x_{12} \rangle = 0$
 $x_{22} = x_{vv} = (a+r \cos u) (\cos v, -\sin v, 0), \quad L_{22} = \langle N, x_{22} \rangle = (a + r \cos u) \cos u$

Dado un vector $X = X^1 x_1 + X^2 x_2$ tangente al toro en un punto $x(u,v)$ con $|X| = 1$ (i.e. con $\sum_{i,j} g_{ij} X^i X^j = 1$), se tiene que

$k_N(X) = \sum_{ij} L_{ij} X^i X^j = r (X^1)^2 + a \cos u (X^2)^2 + r \cos^2 u (X^2)^2$

y teniendo en cuenta que $\sum_{i,j} g_{ij} X^i X^j = r^2(X^1)^2 + (a+r \cos u)^2 (X^2)^2 = 1$, resulta:

$$k_N(X) = \frac{1}{r} - \frac{a^2}{r} (X^2)^2 - 2a \cos u (X^2)^2 - r \cos^2 u (X^2)^2 + a \cos u (X^2)^2 + r \cos^2 u (X^2)^2 =$$

$$= \frac{1}{r} - \left(\frac{a^2}{r} + a \cos u\right) (X^2)^2, \text{ donde } a > r \text{ implica } \frac{a^2}{r} + a \cos u > 0.$$

De esta expresión resulta que k_N es máxima cuando $X^2 = 0$ (i.e. $X = x_u$) y mínima cuando $|X^2|$ es máximo (que corresponde a $X^1 = 0$, i.e. $X = x_v$, por la condición $\sum_{i,j} g_{ij} X^i X^j = 1$), resulta así $k_{Nmax} = \frac{1}{r}$ y $k_{Nmin} = \frac{\cos u}{a+r \cos u}$.

Por otro lado

$$L_{x(u,v)} x_u = -D_{x_u} N = -\frac{\partial}{\partial u} (N \cdot x)(u,v) = -(\sin u \cos v, \sin u \sin v, -\cos u) = \frac{1}{r} x_u$$

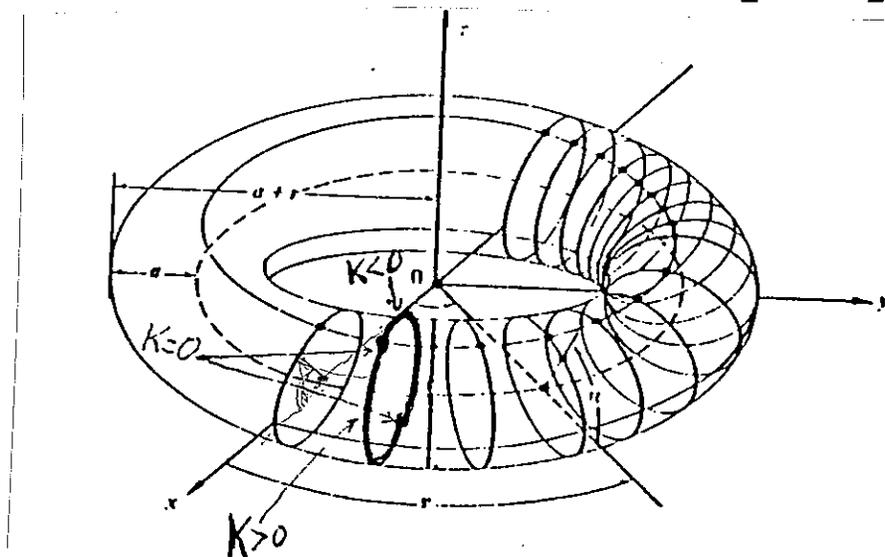
$$L_{x(u,v)} x_v = -D_{x_v} N = -\frac{\partial}{\partial u} (N \cdot x)(u,v) = -(\cos u \sin v, -\cos u \cos v, 0) = \frac{\cos u}{a+r \cos u} x_v,$$

i.e. las direcciones que corresponden a k_{Nmax} y k_{Nmin} son justamente las principales, y k_{Nmax} y k_{Nmin} son las curvaturas principales. Todo esto está de acuerdo con III.20.

Obsérvese que el que x_u, x_v sean direcciones principales resulta también de que $g_{12} = 0 = L_{12}$ y, por lo tanto, la matriz (L_i^j) —que es la matriz de L_p en la base $\{x_u, x_v\}$ — es diagonal.

Del cálculo anterior de $k_1 = k_{max}$ y $k_2 = k_{min}$, resulta para la curvatura de Gauss del toro:

$$K(x(u,v)) = k_1 \cdot k_2 = \frac{\cos u}{a+r \cos u} \cdot \frac{1}{r} = \begin{cases} > 0 & \text{si } \cos u > 0: -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \\ = 0 & \text{si } \cos u = 0: u = \pm \frac{\pi}{2} \\ < 0 & \text{si } \cos u < 0: \frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$



Lección 13ª: CLASIFICACION DE LOS PUNTOS DE UNA SUPERFICIE.

55. Puntos elíptico, hiperbólico y parabólico.

En primer lugar, vamos a definir un nuevo invariante algebraico:

III.25. DEFINICION: Un vector $X \in T_p M$ se dice que es un vector asintótico si $II_p(X) = 0$, i.e., si la curvatura normal de M en p en la dirección de X es cero. La dirección determinada por X se dice que es una dirección asintótica.

Una dirección asintótica es, por lo tanto, una dirección tal que la curva sección normal correspondiente tiene curvatura cero.

Se llama curva asintótica una curva sobre la superficie cuyos vectores tangentes son asintóticos.

Antes de definir los distintos tipos de puntos en una superficie genérica, vamos a ver como son en un toro:

III.25. Consideremos el toro $x(u,v) = ((a+r \cos u) \cos v, (a+r \cos u) \sin v, r \sin u)$, $a > r > 0$. De acuerdo con III.24 y la fórmula de Euler III.21, la curvatura normal en la dirección que forma un ángulo θ con x_u viene dada por

$$k_N(\theta) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta = \frac{1}{r} \cos^2 \theta + \frac{\cos u}{a+r \cos u} \sin^2 \theta.$$

De esta expresión resulta que las direcciones asintóticas (aquellos valores de θ para los que $k_N(\theta) = 0$) vienen dadas por $(a+r \cos u) \cos^2 \theta + r \cos u \sin^2 \theta = 0$, i.e.

$a \cos^2 \theta + r \cos u = 0$, i.e. $\cos^2 \theta = -\frac{r \cos u}{a}$. Por lo tanto, cuando $\cos u < 0$ (que, según III.24, era cuando $K < 0$) hay dos direcciones asintóticas, una si $\cos u = 0$ ($K = 0$) y ninguna si $\cos u > 0$ ($K > 0$). Estos son todos los casos que pueden plantearse en una superficie.

III.27. DEFINICION: Un punto $p \in M$ se dice que es: elíptico si $K(p) > 0$, parabólico si $K(p) = 0$, e hiperbólico si $K(p) < 0$.

Obsérvese que

$$K(p) = \det L_p = \det (L_i^j) = \det (\sum_k g^{jk} L_{ik}) = \det (L_{ik}) \det (g^{jk}) = \frac{\det II_p}{\det I_p}.$$

Como $\det (I_p) > 0$, el signo de $K(p)$ y el de $\det II_p$ es el mismo, por lo que las definiciones anteriores pueden darse con $\det II_p$ en lugar de con $K(p)$. Resulta también de esto que:

II_p es definida (positiva o negativa) en los puntos elípticos, por lo que los puntos elípticos son aquellos en los que no existen direcciones asintóticas.

Π_p es degenerada en los puntos parabólicos y en ellos existe al menos una dirección asintótica.

Π_p tiene determinante negativo en los puntos hiperbólicos, por lo tanto no es degenerada y un punto es hiperbólico si admite dos direcciones asintóticas distintas.

S6. Interpretación geométrica.

Veremos primero un lema técnico auxiliar:

III.28. LEMA: Sea M una superficie, $p \in M$, $\{X_1, X_2\}$ una base de $T_p M$, (U, x) un sistema de coordenadas en p y N_p el vector unitario normal en p asociado a (U, x) . Entonces existe un entorno abierto U_\bullet de $u_\bullet = x^{-1}(p)$ en U , un abierto V_\bullet de \mathbb{R}^2 con $0 \in V_\bullet$ y un difeomorfismo $\varphi: V_\bullet \rightarrow U_\bullet$ verificando $\varphi(0) = u_\bullet$ tales que $(V_\bullet, y = x \circ \varphi)$ es un sistema de coordenadas de M en p para el cual

$$y(v) - y(0) = v^1 X_1 + v^2 X_2 + r(v) N_p \quad \text{para todo } v = (v^1, v^2) \in V_\bullet,$$

siendo $r: V_\bullet \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación C^k si la superficie M es de clase C^k que verifica $(\partial r / \partial v^i)(0) = 0$.

En particular, si $X_1 = x_1(u_\bullet)$ y $X_2 = x_2(u_\bullet)$, entonces $\frac{\partial^2 r}{\partial v^i \partial v^j}(0) = L_{ij}^x(u_\bullet) = L_{ij}^y(0)$,

siendo L_{ij}^x (resp. L_{ij}^y) los coeficientes de la segunda forma fundamental en el sistema de coordenadas (U, x) (resp. (V_\bullet, y)). Es decir, M viene aproximada hasta el segundo orden por L_{ij} en ese sistema de coordenadas.

DEMOSTRACION: Como $\{X_1, X_2, N_p\}$ es una base de \mathbb{R}_p^3 y $x(u)$ es diferenciable, existen funciones diferenciables $\tilde{v}^1, \tilde{v}^2, q: U \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$(III.28.1) \quad x(u) - x(u_\bullet) = \tilde{v}^1(u) X_1 + \tilde{v}^2(u) X_2 + q(u) N_p \quad \forall u \in U,$$

de donde resulta que

$$(III.28.2) \quad \frac{\partial x}{\partial u^k}(u_\bullet) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \tilde{v}^i}{\partial u^k}(u_\bullet) X_i + \frac{\partial q}{\partial u^k}(u_\bullet) N_p,$$

y, como $x_k(u_\bullet)$ es ortogonal a N_p ,

$$(III.28.3) \quad \frac{\partial q}{\partial u^k}(u_\bullet) = 0,$$

luego $\left(\frac{\partial \tilde{v}^i}{\partial u^k}(u_\bullet) \right)$ es una matriz de cambio de la base $\{X_1, X_2\}$ a la base

$\{x_1(u_\bullet), x_2(u_\bullet)\}$, por lo tanto $\det \left(\frac{\partial \tilde{v}^i}{\partial u^k}(u_\bullet) \right) \neq 0$. Además, de (III.28.1) resulta que $\tilde{v}^i(u_\bullet) = 0 = q(u_\bullet)$. Luego, por el teorema de la función inversa, existe un entorno U_\bullet de u_\bullet y un entorno V_\bullet de 0 tales que la aplicación $\varphi^{-1}: U_\bullet \rightarrow V_\bullet / \varphi^{-1}(u) = (\tilde{v}^1(u), \tilde{v}^2(u))$ es un difeomorfismo. Definamos $r: V_\bullet \rightarrow \mathbb{R}$ por $r = q \circ \varphi$, entonces

$$y(v) - y(0) = x \circ \varphi(v) - x \circ \varphi(0) = \tilde{v}^1(\varphi(v)) X_1 + \tilde{v}^2(\varphi(v)) X_2 + q(\varphi(v)) N_p,$$

y como, por la definición de φ^{-1} , $\tilde{v}^i = \pi_i \circ \varphi^{-1}$, ($\pi_i =$ proyección sobre la coordenada i -ésima de \mathbb{R}^2),

$$(III.28.4) \quad y(v) - y(0) = v^1 X_1 + v^2 X_2 + r(v) N_p.$$

Si $X_i = x_i(u_\bullet)$, entonces, de (III.28.2 y 3) resulta que

$$(III.28.5) \quad \frac{\partial \tilde{v}^i}{\partial u^k}(u_\bullet) = \delta_k^i,$$

luego $L_{ij}^y(0) = \langle y_{ij}(0), N_p \rangle = | \text{por (III.28.4)} | =$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial^2 r}{\partial v^i \partial v^j}(0) = \frac{\partial}{\partial v^i} \left(\frac{\partial (q \circ \varphi)}{\partial v^j} \right) (0) = \frac{\partial}{\partial v^i} \left(\sum_k \frac{\partial q}{\partial u^k} \frac{\partial u^k}{\partial v^j} \right) (0) = \\ &= \sum_{\ell, k} \frac{\partial^2 q}{\partial u^k \partial u^\ell}(u_\bullet) \frac{\partial u^\ell}{\partial v^i} \frac{\partial u^k}{\partial v^j}(0) + \sum_k \frac{\partial q}{\partial u^k}(u_\bullet) \frac{\partial^2 u^k}{\partial v^i \partial v^j}(0), \end{aligned}$$

de donde, usando (III.28.3 y 5), y teniendo en cuenta que la matriz $\left(\frac{\partial u^k}{\partial v^j}(0) \right)$ es

la inversa de $\left(\frac{\partial \tilde{v}^i}{\partial u^k}(u_\bullet) \right)$, resulta que

$$(III.28.6) \quad L_{ij}^y(0) = \frac{\partial^2 q}{\partial u^i \partial u^j}(u_\bullet) = \frac{\partial^2 r}{\partial v^i \partial v^j}(0).$$

Por otro lado, $L_{ij}^x(u_\bullet) = \langle x_{ij}(u_\bullet), N_p \rangle = | \text{por (III.28.1)} | = \frac{\partial^2 q}{\partial u^i \partial u^j}(u_\bullet)$, que comparando con (III.28.6), prueba lo que queríamos.

Por otra parte, $r = q \circ \varphi$ implica $\frac{\partial r}{\partial v^i}(0) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial q}{\partial u^j}(u_\bullet) \frac{\partial u^j}{\partial v^i}(0) = 0$ por (III.28.3).

III.29. COROLARIO: Dada una base $\{X_1, X_2\}$ de $T_p M$, existe un sistema de coordenadas (V, y) de M centrado en p y tal que $\frac{\partial y}{\partial v^i}(0) = X_i$.

Estamos ahora en condiciones de dar la interpretación geométrica anunciada.

III.30. Dada una superficie M y $p \in M$, desplazemos el plano tangente $T_p M$ a M en p en la dirección del vector normal unitario y en sentido tal que corte a la superficie. La intersección de dicho plano desplazado con la superficie determina una curva. Vamos a calcular su ecuación aproximada para "desplazamientos infinitesimales". Sea (U, x) un sistema de coordenadas de M con $x(u_\bullet) = p$, y sea $\{x_1, x_2\}$ la base canónica del espacio tangente en cada punto asociada a (U, x) . Sea (V, y) el sistema de coordenadas dado en III.28 para el caso en que $X_i = x_i(u_\bullet)$. El plano tangente se puede escribir como $T_p M = \{x(u_\bullet) + \alpha^1 x_1(u_\bullet) + \alpha^2 x_2(u_\bullet), \alpha^i \in \mathbb{R}\}$ y, en un entorno de p , M viene dada por los puntos de la forma $y(0) + v^1 x_1(u_\bullet) + v^2 x_2(u_\bullet) + r(v) N_p$. La traslación de $T_p M$ en la dirección de N_p una distancia λ es $\tau_{\lambda N} T_p M = \{x(u_\bullet) + \alpha^1 x_1(u_\bullet) + \alpha^2 x_2(u_\bullet) + \lambda N_p, \alpha^i \in \mathbb{R}\}$, y, como $x(u_\bullet) = y(0)$, la intersección de $\tau_{\lambda N} T_p M$ con un entorno de M en p será:

$$\{p + v^1 x_1(u_\bullet) + v^2 x_2(u_\bullet) + r(v) N_p \mid r(v) = \lambda\}$$

$\frac{\partial r}{\partial v^i}(0) = x_i(u_\bullet)$
 $p + v^1 x_1(u_\bullet) + v^2 x_2(u_\bullet) + r(v) N_p = -v^1(v) N_p + x(u_\bullet)$

Aproximado r por el desarrollo de Taylor hasta el segundo orden, teniendo en cuenta que $r(0) = 0$, $\frac{\partial r}{\partial v^i}(0) = 0$ y $\frac{\partial^2 r}{\partial v^i \partial v^j}(0) = L_{ij}(u_\bullet)$, resulta:

$$r(v) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 L_{ij}(u_\bullet) v^i v^j + o(|v|^2)$$

$\frac{\partial}{\partial v^i} \left(\sum \frac{\partial x}{\partial u^k} \frac{\partial u^k}{\partial v^i} \right) = \sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^k \partial u^l} \frac{\partial u^l}{\partial v^i} \frac{\partial u^k}{\partial v^i} + \sum \frac{\partial x}{\partial u^k} \frac{\partial^2 u^k}{\partial v^i \partial v^i}$

Por lo tanto, la intersección $M \cap \tau_{\lambda N} T_p M$ en un entorno de p viene aproximada por

$$x(u_\bullet) + v^1 x_1(u_\bullet) + v^2 x_2(u_\bullet) + \lambda N_p \text{ con } \sum_{i,j} L_{ij}(u_\bullet) v^i v^j = 2\lambda$$

$\langle \cdot, N_p \rangle = \sum \epsilon_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial v^i} \frac{\partial u^l}{\partial v^i}$

que es una curva cónica contenida en el plano que pasa por el punto $x(u_\bullet) + \lambda N_p$ y tiene por vector director N_p .

Vamos a estudiar ahora la forma de esta cónica, y como solo nos interesa su forma y no su tamaño, tomaremos $2\lambda = \pm 1$. Además consideraremos la cónica contenida en $T_p M$, plano paralelo a $\tau_{\lambda N} T_p M$. Esta es la cónica de la siguiente definición:

III.31. DEFINICION: Llamaremos indicatriz de Dupin en el punto p de M

al subconjunto de $T_p M$ formado por los vectores $X = \sum X^i x_i \in T_p M$ tales que $\sum_{i,j} L_{ij} X^i X^j = \pm 1$, i.e. $\{X \in T_p M / II_p(X) = \pm 1\}$.

III.32. PROPOSICION: La indicatriz de Dupin en un punto $p \in M$ es una elipse sii p es elíptico, es una hipérbola sii p es hiperbólico y es dos rectas paralelas sii p es parabólico y $II_p \neq 0$.

DEMOSTRACION: Sea $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de $T_p M$ constituida por vectores principales. Sean k_i las correspondientes curvaturas principales, i.e. $L_p e_i = k_i e_i$. Supongamos (sin pérdida de generalidad) que $k_1 \geq k_2$. Sea $X \in T_p M$, $X = \sum X^i e_i$, entonces $II_p(X) = k_1(X^1)^2 + k_2(X^2)^2$, con lo cual, la ecuación de la indicatriz de Dupin es (en la base $\{e_1, e_2\}$):

$$(III.32.1) \quad k_1(X^1)^2 + k_2(X^2)^2 = \pm 1.$$

Como $K(p) = k_1 k_2$, se tiene que:

a) Si $K(p) > 0$, entonces k_1 y k_2 tienen el mismo signo, y la indicatriz de Dupin es una elipse (tomando $+1$ si $k_i > 0$ y -1 si $k_i < 0$). Recíprocamente, la ecuación (III.32.1) representa una elipse sii k_1 y k_2 tienen el mismo signo y, por lo tanto, sii $K(p) > 0$.

b) Si $K(p) = 0$, entonces $k_1 = 0$ ó $k_2 = 0$ (y no se da simultáneamente $k_1 = 0 = k_2$ si suponemos $II_p \neq 0$); si $k_1 = 0$, (III.32.1) se reduce a $X^2 = \pm \sqrt{-1/k_2}$ que son dos rectas paralelas al eje e_1 ; si $k_2 = 0$, (III.32.1) se reduce a $X^1 = \pm \sqrt{-1/k_1}$. Recíprocamente, la ecuación (III.32.1) representa dos rectas sii $k_1 = 0$ ó $k_2 = 0$ (y uno de los k_i es $\neq 0$).

c) Si $K(p) < 0$, entonces $k_1 > 0$ y $k_2 < 0$, y la indicatriz de Dupin es las dos hipérbolas

$$k_1(X^1)^2 + k_2(X^2)^2 = 1, \quad k_1(X^1)^2 + k_2(X^2)^2 = -1.$$

Cada una de ellas resulta de la aproximación de la curva intersección de la superficie con el plano que se obtiene por desplazamiento del plano tangente en cada una de las dos direcciones posibles.

III. 33. NOTA: En III.32 hemos caracterizado por su indicatriz de Dupin los puntos parabólicos en los que $II_p \neq 0$. Los puntos en los que $II_p = 0$ (equivalentemente $L_p = 0$) se llaman puntos planos. En un punto plano todas las curvaturas normales son nulas y, por lo tanto, toda dirección es principal, luego todo punto plano es umbilical.

III.34. NOTA: Obsérvese que en la demostración de III.32 queda implícito que en los puntos elípticos e hiperbólicos los ejes de la elipse y la hipérbola respectivamente, son los ejes dados por las direcciones principales e_1, e_2 .

También esa demostración nos permite justificar el nombre de dirección asintótica. En efecto:

● En un punto elíptico II_p es definida positiva y, por tanto, no posee vectores isótropos, que son los que dan las direcciones asintóticas. Este hecho se corresponde con el de que la elipse no tiene asíntotas.

● En un punto hiperbólico, como $\det II_p < 0$, II_p tiene dos direcciones isótropas, y también una hipérbola tiene dos asíntotas. Además, en este caso, las direcciones asintóticas en p (direcciones isótropas de II_p) coinciden con las asíntotas de la indicatriz de Dupin. En efecto: sean $k_1 = a^2 > 0$, $k_2 = -b^2 < 0$ las curvaturas principales en un punto hiperbólico. La ecuación de la indicatriz de Dupin es

$$(III.34.1) \quad a^2 (X^1)^2 - b^2 (X^2)^2 = 1$$

que tiene por asíntotas las rectas de ecuaciones

$$a X^1 + b X^2 = 0 \quad a X^1 - b X^2 = 0$$

(en efecto, de la ecuación de la hipérbola (III.34.1) resulta $X^1 = \sqrt{(1+b^2(X^2)^2)}/a^2$

y, de aquí, que la recta tangente a la hipérbola en el punto (X^1, X^2) tiene por vector director $(\pm (a/2\sqrt{1+b^2(X^2)^2}), 2 \frac{b^2 X^2}{a^2}, 1)$ y, tomando límites

cuando $X^2 \rightarrow \infty$, da como vector director de la asíntota $(\pm b/a, 1)$ de donde salen las ecuaciones de las asíntotas), y las direcciones asintóticas en p son aquellas en las que

$$II_p(X) = 0 \text{ i.e. } k_1(X^1)^2 + k_2(X^2)^2 = 0, \text{ i.e. } a^2(X^1)^2 - b^2(X^2)^2 = 0 \text{ i.e. } a X^1 \pm b X^2 = 0.$$

● En un punto parabólico las direcciones asintóticas vienen dadas por la ecuación:

$$II_p(X) = 0 \iff k_1 (X^i)^2 = 0 \text{ (} k_1 \text{ la curvatura principal} \neq 0 \text{)} \iff X^i = 0,$$

que es la asíntota de la indicatriz de Dupin en un punto parabólico, pues la asíntota de una recta es cualquier recta paralela a ella.

S7. Puntos umbilicales.

III.35. NOTA: La definición de punto umbilical se dió en III.12. e). Resulta de III.7 que todos los puntos de la esfera son umbilicales. En este apartado vamos a ver que, salvo el plano, la esfera es esencialmente la única superficie verificando esta propiedad.

III.36. PROPOSICION: Si todos los puntos de una superficie conexa M son umbilicales, entonces M está contenida en una esfera o en un plano.

DEMOSTRACION: Supongamos primero que M es orientable. Sea N un campo vectorial normal unitario definido sobre toda M . Sea II_p la segunda forma fundamental en cada $p \in M$ asociada a N . Como todo punto de M es umbilical,

se tiene que $\forall p \exists k(p) \in \mathbb{R}$ tal que $II_p = k(p) I_p$. Sea $k: M \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación dada por $p \mapsto k(p)$. Para cada sistema de coordenadas (U, x) de M , $k(x(u)) = II_{x(u)}(x_1)/I_{x(u)}(x_1) = L_{11}/g_{11}$, que es una función diferenciable sobre U , luego k es una función diferenciable sobre M . Vamos a calcular $dk(p)$ para cada $p \in M$. Dado $p \in M$, sea (U, x) un sistema de coordenadas de M en p (i.e. $p \in x(U)$). Por definición de k se tiene que $dN(p) = -k(p) \text{Id}$, de donde $\partial(N \circ x)/\partial u^i = -k x_i$, derivando de nuevo: $N_{ij} = -(\partial(k \circ x)/\partial u^j) x_i - k x_{ij}$ y, como $x_{ij} = x_{ji}$, $N_{ij} = N_{ji}$, resulta que $\frac{\partial(k \circ x)}{\partial u^j} x_i = \frac{\partial(k \circ x)}{\partial u^i} x_j$ para todo i, j , en particular $\frac{\partial(k \circ x)}{\partial u^1} x_2 = \frac{\partial(k \circ x)}{\partial u^2} x_1$, de donde $0 = \frac{\partial(k \circ x)}{\partial u^1} = \frac{\partial(k \circ x)}{\partial u^2}$ por lo tanto $dk(p) = 0 \quad \forall p \in M$. Como M es conexo, esto implica que k es constante sobre M .

Si $k=0$, como $N_i = -k x_i = 0$, $dN = 0$, luego N es constante sobre M (por ser M conexa), luego M está contenida en un plano de vector director N (en efecto: fijemos $p_0 \in M$, entonces $\forall p \in M, \langle p-p_0, N \rangle = 0$, pues la función $f(p) = \langle p-p_0, N \rangle$ vale 0 en p_0 y su diferencial es 0 pues, si $c(t)$ es una curva de M con $c(0) = p_0$, entonces $df(p_0)(c'(0)) = \frac{d}{dt} \langle c(t)-p_0, N \rangle = \langle c'(0), N(p_0) \rangle + \langle c(t)-p_0, N' \rangle = 0$).

Si $k \neq 0$, tomemos N de modo que $k > 0$, entonces $\forall p \in M, p_0 = p + \frac{1}{k} N$ es fijo. En efecto, sea $F: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $F(p) = p + \frac{1}{k} N$, entonces $dF(p)(c'(0)) = c' + \frac{1}{k} N' = c' + \frac{1}{k} (-kc') = 0$, luego $F(M) = p_0$. Además $|p-p_0| = |\frac{1}{k} N| = \frac{1}{k}$, luego M está contenida en una esfera de centro p_0 y radio $\frac{1}{k}$.

Si no sabemos que M sea orientable, podemos aplicar el razonamiento anterior a cada abierto de M de la forma $x(U)$, donde (U, x) es un sistema de coordenadas de M con U conexo. Se tiene entonces que cada una de tales $x(U)$ es un trozo de un plano o de una esfera.

Sean $p, q \in M$. Como M es conexa (y localmente arco-conexa), existe una curva continua $c: [0,1] \rightarrow M$ tal que $c(0) = p, c(1) = q$. $\forall t \in [0,1]$ existe un sistema de coordenadas (U_t, x_t) (con U_t conexo) en $c(t)$ tal que $x_t(U_t)$ está contenido en un plano ó una esfera P_t . $\{x_t(U_t)\}_{t \in [0,1]}$ es un recubrimiento abierto de $c(I)$, que es compacto, luego podemos tomar una subfamilia finita ordenada $\{x_{t_i}(U_{t_i})\}_{i=0}^n$ de $\{x_t(U_t)\}_{t \in [0,1]}$ tal que $t_0 = 0, t_n = 1$ y $x_{t_i}(U_{t_i}) \cap x_{t_{i+1}}(U_{t_{i+1}}) \neq \emptyset$. Como $x_{t_i}(U_{t_i})$ son abiertos de M , se tiene que $x_{t_i}(U_{t_i}) \cap x_{t_{i+1}}(U_{t_{i+1}}) = W_i$ es un abierto de M . Puede ocurrir:

- Que $P_{t_i} \cap P_{t_{i+1}} \neq \emptyset$: absurdo, pues $P_{t_i} \cap P_{t_{i+1}} \supset W_i \neq \emptyset$.

• Que P_{t_i} sea una esfera y $P_{t_{i+1}}$ un plano, y $P_{t_i} \cap P_{t_{i+1}} \neq \emptyset$. Entonces $P_{t_i} \cap P_{t_{i+1}}$ es un punto ó una circunferencia, lo que es un absurdo porque un punto o una circunferencia no pueden contener a un abierto W_i de M .

• Que $P_{t_i} \cap P_{t_{i+1}} \neq \emptyset$, P_{t_i} un plano y $P_{t_{i+1}}$ una esfera. Se reduce al caso anterior.

• Que $P_{t_i} \cap P_{t_{i+1}} \neq \emptyset$ y ambos P sean esferas pero distintas. Entonces su intersección es una circunferencia, que no puede contener un abierto de M . Absurdo.

• Que $P_{t_i} \cap P_{t_{i+1}} \neq \emptyset$ y ambos P sean planos pero distintos, entonces $P_{t_i} \cap P_{t_{i+1}}$ es una recta, que no puede contener un abierto de M . Absurdo.

• Que $P_{t_i} = P_{t_{i+1}}$ sea un plano. Entonces, por la casuística anterior, P_{t_1}, \dots, P_{t_n} han de ser el mismo plano, lo que implica que si $p \in M$ tiene un entorno $x_p(U_p)$ contenido en un plano, todo punto q de M está contenido en el mismo plano.

• Que $P_{t_i} = P_{t_{i+1}}$ sea una esfera. Entonces, por la casuística anterior, P_{t_1}, \dots, P_{t_n} han de ser la misma esfera, lo cual, análogamente al caso anterior, implica que M está contenida en una esfera.

S8. Algunas fórmulas para el cálculo.

III.37. NOTA: Vamos a completar ahora las fórmulas para el cálculo en coordenadas que vimos en III.23

Para la curvatura de Gauss, recordemos que vimos en III.27 que

$$(III.37.1) \quad K(p) = \det II_p / \det I_p$$

Para la curvatura media:

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{tr } L_p = \frac{1}{2} \text{tr} \{(L_{jk})(g^{kj})\} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik} g^{ki} = \frac{1}{2} (L_{11} g^{11} + 2 L_{12} g^{12} + L_{22} g^{22}),$$

y, si $g = \det(g_{ij})$, entonces $g^{11} = \frac{1}{g} g_{22}$, $g^{12} = -\frac{1}{g} g_{12}$, $g^{22} = \frac{1}{g} g_{11}$, de donde

$$(III.37.2) \quad H(p) = \frac{1}{2} \frac{L_{11}g_{22} - 2L_{12}g_{12} + L_{22}g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

Para calcular las curvaturas principales, como son los valores propios de L , son las soluciones de la ecuación:

$$\det \begin{pmatrix} L_1^1 - k & L_1^2 \\ L_2^1 & L_2^2 - k \end{pmatrix} = 0, \text{ i.e. } L_1^1 L_2^2 - k(L_1^1 + L_2^2) + k^2 - L_1^2 L_2^1 = 0, \text{ i.e.}$$

$$(III.37.3) \quad k^2 - 2Hk + K = 0 \quad \text{y} \quad k = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

Para un abierto de M sobre el que se ha dado una orientación (una elección de un campo vectorial normal unitario), las fórmulas (III.37.1 y 2) dicen que H y K son funciones continuas sobre un tal abierto (incluso diferenciables). Si llamamos k_1 a la curvatura principal máxima en cada punto y k_2 a la mínima, las fórmulas (III.37.3) dicen que $k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$ y $k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$ son diferenciables sobre el mismo tipo de abierto.

Vamos a dar ahora una ecuación para determinar las direcciones principales: Y es un vector principal sii existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $LY = \lambda Y$. Si $Y = \sum Y^i x_i$, esto equivale a

$$\sum_i L_i^j Y^i = \lambda Y^j, \text{ i.e. } \sum_{i,k} L_{ik} g^{kj} Y^i = \lambda Y^j, \text{ i.e. } \sum_{i,k,j} L_{ik} Y^i g^{kj} g_{j\ell} = \sum_j \lambda Y^j g_{j\ell}, \text{ i.e.}$$

$$\sum_i L_{i\ell} Y^i = \lambda \sum_j Y^j g_{j\ell}, \text{ para } \ell = 1, 2, \text{ de donde } \frac{L_{11}Y^1 + L_{21}Y^2}{g_{11}Y^1 + g_{21}Y^2} = \frac{L_{12}Y^1 + L_{22}Y^2}{g_{12}Y^1 + g_{22}Y^2}, \text{ i.e.}$$

$$L_{11}g_{12}(Y^1)^2 + L_{21}g_{22}(Y^2)^2 + (L_{11}g_{22} + L_{21}g_{12})Y^1Y^2 - L_{12}g_{11}(Y^1)^2 - L_{22}g_{21}(Y^2)^2 - (L_{12}g_{21} + L_{22}g_{11})Y^1Y^2 = 0,$$

de donde resulta que $Y = Y^1 x_1 + Y^2 x_2$ es dirección principal sii es solución de la ecuación:

$$(III.37.4) \quad \begin{vmatrix} (Y^2)^2 & -Y^1Y^2 & (Y^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ L_{11} & L_{12} & L_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Lección 14ª: LA SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL DE LAS SUPERFICIES DE REVOLUCION Y DE LAS SUPERFICIES REGLADAS.

S9. Superficies de revolución.

III.38. Sea M una superficie de revolución, p un punto de M que no esté en el eje de revolución, x un sistema de coordenadas en un entorno de ese punto de la forma (cfr. II.41):

$$x(u,v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)) \quad v \in]a,b[, \quad u \in]0, 2\pi[\text{ ó } u \in]-\pi, \pi[.$$

En uno de estos sistemas de coordenadas los coeficientes de la 1ª y 2ª forma fundamental son:

$$\begin{aligned} g_{11} &= f^2 & g_{12} &= 0 & g_{22} &= (f')^2 + (g')^2 \\ L_{11} &= \frac{f g'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} & L_{12} &= 0 & L_{22} &= \frac{f' g'' - g' f''}{\sqrt{f'^2 + g'^2}}. \end{aligned}$$

Como $g_{12} = 0$, también $g^{12} = 0$, y como $L_{12} = 0$, $L_1^2 = \sum_k L_{1k} g^{k2} = L_{11} g^{12} = L_{12} g^{22} = 0$, y $L_2^1 = 0$. Luego L_p viene representada, en la base $\{x_1, x_2\}$, por una matriz diagonal, luego x_1 y x_2 son las direcciones principales y las curvas coordenadas (los meridianos $u = \text{cte}$ y los paralelos $v = \text{cte}$) son las líneas de curvatura, siendo las curvaturas principales:

$$k_{\text{mer}} = \frac{II(x_2)}{I(x_2)} = \frac{L_{22}}{g_{22}} = \frac{f' g'' - g' f''}{(f'^2 + g'^2)^{3/2}}, \quad k_{\text{par}} = \frac{II(x_1)}{I(x_1)} = \frac{L_{11}}{g_{11}} = \frac{g'}{f \sqrt{f'^2 + g'^2}},$$

la curvatura de Gauss $K = k_{\text{mer}} k_{\text{par}} = \frac{g' (f' g'' - g' f'')}{f (f'^2 + g'^2)^2}$,

y la curvatura media $H = \frac{1}{2} (k_{\text{mer}} + k_{\text{par}}) = \frac{1}{2} \frac{f (f' g'' - g' f'') + g' (f'^2 + g'^2)}{f (f'^2 + g'^2)^{3/2}}$

Veamos ahora como quedan las fórmulas en algunos casos particulares:

a) Si $f(v) = v$ (i.e. la curva generatriz c de la superficie viene parametrizada por $c(v) = (v, 0, g(v))$):

$$k_{\text{mer}} = \frac{g''}{(1+g'^2)^{3/2}}, \quad k_{\text{par}} = \frac{g'}{f \sqrt{1+g'^2}}, \quad K = \frac{g' g''}{(1+g'^2)^2}, \quad H = \frac{g'' v + g' (1+g'^2)}{2 v (1+g'^2)^{3/2}},$$

b) Si $g(v) = v$ (i.e. la curva generatriz viene parametrizada por $c(v) = (f(v), 0, v)$)

$$k_{mer} = \frac{-f''}{(1+f'^2)^{3/2}}, \quad k_{par} = \frac{1}{f\sqrt{1+f'^2}}, \quad K = \frac{-f''}{f(1+f'^2)^2}, \quad H = \frac{-ff'' + (1+f'^2)}{f(1+f'^2)^{3/2}}.$$

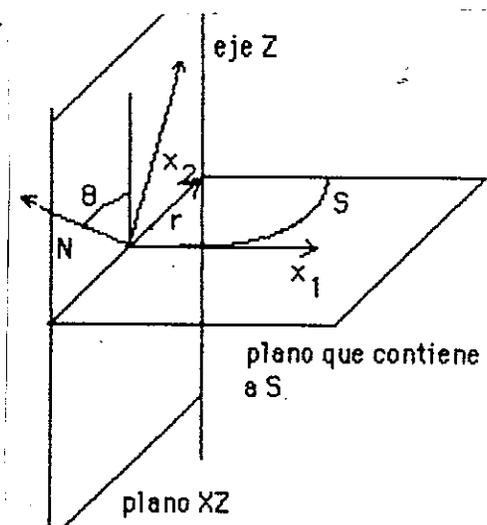
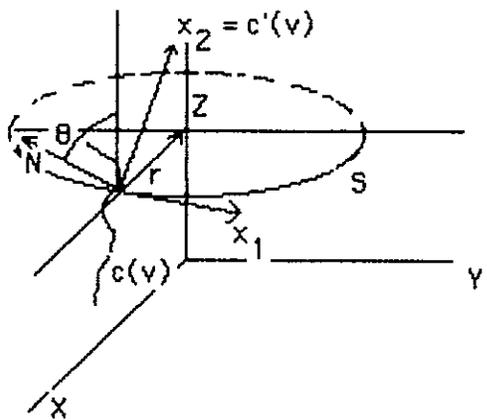
c) Si $f'^2 + g'^2 = 1$ (i.e la curva generatriz viene parametrizada por su longitud de arco), entonces $f'f'' + g'g'' = 0$ y, usando estas dos igualdades, resulta:

$$k_{mer} = f'g'' - g'f'', \quad k_{par} = \frac{g'}{f}, \quad K = \frac{g'g''f' - g'^2f''}{f} = \frac{-f'f''f' - g'^2f''}{f} = \frac{-f''}{f}.$$

III.39. En el apartado anterior hemos obtenido las líneas de curvatura de las superficies de revolución por aplicación de las fórmulas vistas en III.24. Vamos ahora a obtenerlas de nuevo usando directamente las definiciones, de modo más geométrico.

Sea $c(v)$ la curva generatriz de la superficie, contenida en el plano XZ (con más precisión, $c(v)$ es una parametrización de la 1-variedad generatriz de la superficie de modo que su imagen no corte al eje de rotación Z). En el punto $c(v)$ el plano tangente a la superficie está generado por el vector $x_1(0,v)$ tangente a la circunferencia S obtenida por la rotación de $c(v)$ y por el vector $x_2(0,v) = c'(v)$ tangente a la curva c . Como $x_1(0,v)$ es tangente a la circunferencia S , es perpendicular al radio \vec{r} de la misma, y como S está en un plano perpendicular al eje Z, x_1 también es perpendicular a ese eje, luego $x_1(0,v)$ es perpendicular al plano XZ. El vector normal a la superficie en $c(v)$, $N \cdot c(v)$, es perpendicular a $x_1(0,v)$, luego está contenido en el plano XZ y, por lo tanto, también su derivada, luego $\langle (N \cdot c)'(v), x_1(0,v) \rangle = 0$. Por otro lado, $\langle (N \cdot c), c' \rangle = 0$ y $\langle (N \cdot c)', N \cdot c \rangle = 0$, luego $(N \cdot c)'$ está en la dirección de c' , luego c es una línea de curvatura.

El mismo razonamiento del párrafo anterior vale para todos los meridianos, tomando en lugar del plano XZ el plano que contiene al meridiano y al eje Z. Por lo tanto, todos los meridianos son líneas de curvatura.



Consideremos ahora un paralelo $\alpha(u) = x(u, v_0)$. A lo largo del paralelo el vector normal $N \cdot \alpha(u)$ forma un ángulo constante con el eje Z, luego su tercera

componente $\cos\theta$ es constante, luego la tercera componente de $\frac{\partial}{\partial u}(N \cdot x)(u, v_0) = (N \cdot \alpha)'(u)$ es nula, luego $(N \cdot \alpha)'$ está en un plano perpendicular al eje Z. También, como vimos, $\alpha'(u) = x_1(u, v_0)$ es perpendicular al eje Z. Como, además, tanto x_1 como $(N \cdot \alpha)'$ son perpendiculares a N, se tiene que $(N \cdot \alpha)'$ y $x_1 = \alpha'$ están en la misma dirección, luego α es una línea de curvatura, i.e: los paralelos son líneas de curvatura. (Si N está en la dirección del eje Z, entonces $(N \cdot \alpha)' = 0$, y se concluye lo mismo).

Para los puntos en el eje de rotación, sea $c(t)$ una curva pasando por un tal punto $c(t_0)$. Entonces, por la condición II.39.b.iii) de la definición de superficie de revolución, $c'(t_0)$ es perpendicular al eje Z, por tanto el vector unitario normal $N \cdot c(t_0)$ estará en la dirección del eje Z. Como todo vector tangente a la superficie en $c(t_0)$ es tangente a un meridiano, podemos tomar $c(t)$ como un meridiano. Entonces por el primer párrafo, $(N \cdot c)'(t) = k(t) c'(t) \forall t \neq t_0$, por lo tanto, por continuidad, $(N \cdot c)'(t_0) = k(t_0) c'(t_0)$. Resulta entonces que en un punto de la superficie que está en el eje de rotación toda dirección es principal y, por lo tanto, un tal punto es umbilical.

S10. Superficies regladas.

III.40. Veremos primero algunos resultados cualitativos: Las rectas generatrices de una superficie reglada tienen curvatura cero y, por lo tanto, curvatura normal cero, luego son curvas asintóticas. Como por cada punto de la superficie reglada pasa una recta generatriz, en cada punto hay al menos una dirección asintótica, luego no hay puntos elípticos en una superficie reglada, luego la curvatura de Gauss es no positiva ($K \leq 0$) en todo punto de la superficie.

Además, $K(p) = 0$ sii la dirección de la recta generatriz en p es una dirección principal (pues, por ser esta dirección de curvatura normal 0, solo puede ser $K(p) = k_1 k_2 = 0$ si la curvatura normal máxima o mínima es 0, y, como la dirección de una recta generatriz tiene curvatura normal cero, corresponde a esa curvatura normal máxima o mínima). Sea $x(u, v) = c(u) + v w(u)$ una parametrización de la superficie reglada. Por la afirmación anterior, $K(x(u, v)) = 0$ para todo (u, v) equivale a que $L_{x(u, v)} w = 0$, y como $w = x_v \equiv x_2$, la ecuación anterior equivale a $\partial(N \cdot x) / \partial v = 0$ que, por II.47, es la condición necesaria para /5 que la superficie reglada sea desarrollable. Por lo tanto:

"Una superficie reglada tiene curvatura de Gauss cero en todo punto sii es desarrollable".

III.41. Ahora vamos a calcular las curvaturas de una superficie reglada usando coordenadas. Supongamos que estamos en un dominio sobre el que la

GEOMETRIA LOCAL EXTRINSECA

parametrización canónica

$$x(u,v) = c(u) + v w(u)$$

es un sistema de coordenadas. Para estas coordenadas:

$$x_1 = c' + v w' \quad x_2 = w \quad g_{11} = \langle c' + v w', c' + v w' \rangle \quad g_{12} = \langle c' + v w', w \rangle \quad g_{22} = \langle w, w \rangle,$$

$$\det I = |x_1 \wedge x_2|^2 = |(c' \wedge w) + v(w' \wedge w)|^2, \quad N = \frac{c' \wedge w + v w' \wedge w}{|c' \wedge w + v w' \wedge w|},$$

$$x_{11} = c'' + v w'', \quad x_{12} = w', \quad x_{22} = 0,$$

$$L_{11} = \langle x_{11}, N \rangle = \frac{\langle c'' + v w'', (c' + v w') \wedge w \rangle}{|(c' + v w') \wedge w|}, \quad L_{12} = \frac{\langle w', c' \wedge w \rangle}{|c' \wedge w + v w' \wedge w|}, \quad L_{22} = 0$$

(corresponde la anulación de L_{22} al hecho de que x_2 es dirección asintótica),

$$K = \frac{\det II}{\det I} = \frac{-L_{12}^2}{|(c' + v w') \wedge w|^2} = \frac{-\langle c' \wedge w, w' \rangle^2}{|(c' + v w') \wedge w|^4} \leq 0 \quad (\text{y } K = 0 \text{ si } \langle c' \wedge w, w' \rangle = 0$$

si es desarrollable -por II. 48-)

III.42. Para el caso de una superficie reglada no cilíndrica, tomemos una parametrización de la misma usando como curva directriz la línea de estricción (cfr. II.61) β :

$$x(u,v) = \beta(u) + v w(u), \quad \text{con } |w(u)| = 1, \quad w'(u) \neq 0 \quad \forall u.$$

En esta situación, $\langle \beta', w' \rangle = 0$ y $\langle w, w' \rangle = 0$, por lo tanto $\beta' \wedge w$ está en la dirección de w' , de donde

$$(*) \quad \beta' \wedge w = \langle \beta' \wedge w, \frac{w'}{|w'|} \rangle \frac{w'}{|w'|}, \quad \text{luego}$$

(**) $\langle \beta' \wedge w, w' \wedge w \rangle = \langle \lambda w', w' \wedge w \rangle = 0$, siendo λ el coeficiente dado por la fórmula anterior. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \det I &= \langle (\beta' + v w') \wedge w, (\beta' + v w') \wedge w \rangle = \\ &= \langle \beta' \wedge w, \beta' \wedge w \rangle + 2v \langle w' \wedge w, \beta' \wedge w \rangle + v^2 \langle w' \wedge w, w' \wedge w \rangle \stackrel{\text{por } (**)}{=} \\ &= \langle \beta' \wedge w, \beta' \wedge w \rangle + v^2 \langle w' \wedge w, w' \wedge w \rangle \stackrel{\text{por } (*)}{=} \\ &= \frac{1}{|w'|^2} \langle \beta' \wedge w, w' \rangle^2 + v^2 (|w'|^2 |w|^2 - \langle w, w' \rangle^2) = (\text{como } |w| = 1) = \\ &= \frac{1}{|w'|^2} (\langle \beta' \wedge w, w' \rangle^2 + v^2 |w'|^4). \end{aligned}$$

Si denotamos por $p = \langle \beta' \wedge w, w' \rangle$, sustituyendo en la expresión de K de III.41 resulta

$$K = \frac{-p^2}{(\det I)^2} = \frac{-p^2 |w'|^4}{(p^2 + v^2 |w'|^4)^2}.$$

Según esta expresión de K , para cada valor de u fijo (es decir, a lo largo de cada generatriz), cuando $v \rightarrow \infty$ (es decir, cuando el punto tiende al infinito de la

recta), la curvatura de Gauss K tiende a 0. (Esto se ve bien en el helicoides como escalera o rampa de caracol: la pendiente es más suave -la superficie es más plana- cuanto más lejos se está del eje del helicoides que es su línea de estricción).

III.43. La curvatura de Gauss de la cinta de Möbius. Tomamos el sistema de coordenadas: $x(u,v) = (2 \operatorname{sen} u, 2 \operatorname{cos} u, 0) + v (-\operatorname{sen} \frac{u}{2} \operatorname{sen} u, -\operatorname{sen} \frac{u}{2} \operatorname{cos} u, \operatorname{cos} \frac{u}{2})$.

$|w(u)| = 1$, $w'(u) = (-\frac{1}{2} \operatorname{cos} \frac{u}{2} \operatorname{sen} u - \operatorname{sen} \frac{u}{2} \operatorname{cos} u, -\frac{1}{2} \operatorname{cos} \frac{u}{2} \operatorname{cos} u + \operatorname{sen} \frac{u}{2} \operatorname{sen} u, -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{u}{2})$,
 $c'(u) = 2 (\operatorname{cos} u, -\operatorname{sen} u, 0)$,

$$\langle c' \wedge w, w' \rangle = \begin{vmatrix} 2 \operatorname{cos} u & -2 \operatorname{sen} u & 0 \\ -\operatorname{sen} \frac{u}{2} \operatorname{sen} u & -\operatorname{sen} \frac{u}{2} \operatorname{cos} u & \operatorname{cos} \frac{u}{2} \\ -\frac{1}{2} \operatorname{cos} \frac{u}{2} \operatorname{sen} u - \operatorname{sen} \frac{u}{2} \operatorname{cos} u & -\frac{1}{2} \operatorname{cos} \frac{u}{2} \operatorname{cos} u + \operatorname{sen} \frac{u}{2} \operatorname{sen} u & -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{u}{2} \end{vmatrix} = 1,$$

$$(c'+vw') \wedge w = (-\frac{v}{2} \operatorname{cos} u - 2 \operatorname{sen} u \operatorname{cos} \frac{u}{2} + \frac{v}{2} \operatorname{sen}^2 u, \frac{v}{2} \operatorname{sen} u + \frac{v}{2} \operatorname{sen} u \operatorname{cos} u - 2 \operatorname{cos} u \operatorname{cos} \frac{u}{2}, v \operatorname{sen}^2 \frac{u}{2} - 2 \operatorname{sen} \frac{u}{2})$$

$|(c'+vw') \wedge w|^2 = \frac{v^2}{4} + (2 - v \operatorname{sen} \frac{u}{2})^2$, y aplicando la fórmula de III.41. para K :

$$K(x(u,v)) = \frac{-1}{(\frac{v^2}{4} + (2 - v \operatorname{sen} \frac{u}{2})^2)^2} < 0$$

III.44. Helicoides recto: Consideremos el sistema de coordenadas (cfr.II.76)
 $x(u,v) = (0,0, au) + v (\operatorname{cos} u, \operatorname{sen} u, 0)$

Como vimos en II.76 se trata de una superficie reglada no cilíndrica con línea de estricción $\beta(u) = (0, 0, au)$. Podemos entonces aplicar las fórmulas de III.42 para la curvatura de Gauss:

$$K = \frac{-\langle \beta' \wedge w, w' \rangle^2 |w'|^4}{(\langle \beta' \wedge w, w' \rangle^2 + v^2 |w'|^4)^2} = \frac{-\langle (0,0,a), (\operatorname{cos} u, \operatorname{sen} u, 0) \wedge (-\operatorname{sen} u, \operatorname{cos} u, 0) \rangle^2 \cdot 1}{(\langle \quad , \quad \wedge \quad \rangle^2 + v^2)^2} = \frac{-a^2}{(a^2+v^2)^2}$$

Para calcular la curvatura media, aplicamos las fórmulas de III.41; teniendo en cuenta que $\langle \beta', w' \rangle = 0$, $g_{11} = \langle \beta' + v w' \beta + v w' \rangle = |\beta'|^2 + v^2 |w'|^2 = a^2 + v^2$,

GEOMETRIA LOCAL EXTRINSECA

○ $g_{22} = \langle w, w \rangle = 1$, $g_{12} = \langle \beta' + v w', w' \rangle = 0$, y como $\beta'' = 0$, $w'' = -w$, resulta que

$$L_{11} = \frac{\langle \beta'' + v w'', (\beta' + v w') \wedge w \rangle}{|(\beta' + v w') \wedge w|} = 0, \quad L_{22} = 0, \quad L_{12} = \frac{\langle \beta' \wedge w, w' \rangle}{|(\beta' + v w') \wedge w|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + v^2}}$$

De que $L_{11} = 0$ se sigue que las curvas coordenadas $v = \text{cte}$ (hélices del helicoide) son curvas asintóticas y de que $g_{12} = 0$ se sigue que cortan ortogonalmente a las rectas generatrices ($u = \text{cte}$).

Para la curvatura media resulta de los cálculos anteriores y de (III.37.2) que

$$H = \frac{1}{2} \frac{g_{11}L_{22} - 2g_{12}L_{12} + g_{22}L_{11}}{\det I} = 0$$

○

○

○

Lección 15ª: SUPERFICIES MINIMALES.

S11. Concepto de superficie minimal.

III.45. DEFINICION: Una superficie se dice que es minimal si su curvatura media es nula en todo punto. A continuación damos unas definiciones que nos proporcionarán una interpretación geométrica.

III.46. DEFINICION: Sea U un abierto de \mathbf{R}^2 y $x: U \rightarrow \mathbf{R}^3$ una aplicación tal que $x(U)$ es una superficie de \mathbf{R}^3 con (U, x) como sistema de coordenadas. Sea D un disco abierto de \mathbf{R}^2 cuya clausura \bar{D} está contenida en U . Entonces $x(D)$ es una superficie con sistema de coordenadas (D, x) . Sea ∂D la frontera de D . Sea $h: \bar{D} \rightarrow \mathbf{R}$ una aplicación diferenciable tal que $h|_{\partial D} = 0$. Se llama variación normal de $x(\bar{D})$ determinada por h a la aplicación

$$\varphi: \bar{D} \times]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbf{R}^3 / \varphi(u, v, t) = x(u, v) + t h(u, v) N \circ x(u, v),$$

donde N es el vector unitario normal a $x(U)$ determinado por (U, x) y $\epsilon > 0$ es lo suficientemente pequeño para que para cada $t \in]-\epsilon, \epsilon[$ la aplicación $x^t: D \rightarrow \mathbf{R}^3 / x^t(u, v) = \varphi(u, v, t)$ defina un sistema de coordenadas de una superficie $x^t(D)$. λs

III.47. TEOREMA: Sean U, x, D como III.46. Entonces $x(D)$ es una superficie minimal sii $A'(0) = 0$ para cualquier variación normal φ de $x(\bar{D})$, siendo $A(t)$ el área de $x^t(\bar{D})$.

DEMOSTRACION: Denotaremos $u^1 \equiv u, u^2 \equiv v$. Para calcular I^t (la primera forma fundamental de $x^t(D)$)

$$x_1^t = x_1 + t h_1 N + t h N_1, \quad x_2^t = x_2 + t h_2 N + t h N_2, \quad (h_i \equiv \frac{\partial h}{\partial u^i})$$

$$g_{11}^t = g_{11} + t^2 h_1^2 + t^2 h^2 |N_1|^2 + 2 t h \langle N_1, x_1 \rangle;$$

$$g_{22}^t = g_{22} + t^2 h_2^2 + t^2 h^2 |N_2|^2 + 2 t h \langle N_2, x_2 \rangle;$$

$$g_{12}^t = g_{12} + t^2 h_1 h_2 + t^2 h^2 \langle N_1, N_2 \rangle + t h (\langle x_1, N_2 \rangle + \langle x_2, N_1 \rangle),$$

y como $L_{ii} = -\langle N_i, x_i \rangle \quad L_{12} = -\langle N_2, x_1 \rangle = -\langle N_1, x_2 \rangle$, resulta que

$$\begin{aligned} \det I^t &= g_{11} g_{22} - 2 g_{11} L_{22} h t - 2 g_{22} L_{11} h t - g_{12}^2 + 4 g_{12} L_{12} h t + O(t^2) = \\ &= \det I - 2 h t (g_{11} L_{22} + g_{22} L_{11} - 2 g_{12} L_{12}) + O(t^2) = \\ &= |(III.37.2)| = \det I - 2 t h 2 H \det I + O(t^2), \end{aligned}$$

de donde resulta que

$$A(t) = \int_D \sqrt{\det I^t} \, du \, dv = \int_D \sqrt{\det I} \sqrt{1 - 4tH + O(t^2)} \, du \, dv, \text{ de donde}$$

$$A'(t) = \int_D \sqrt{\det I} \frac{1}{2\sqrt{1 - 4tH + O(t^2)}} (-4hH + O(t)) \, du \, dv, \text{ y, para } t = 0,$$

$$(III.47.1) \quad A'(0) = \int_D -2hH \sqrt{\det I} \, du \, dv.$$

De esta fórmula resulta que si $H = 0$, entonces $A'(0) = 0$. Recíprocamente, si $A'(0) = 0$ para toda variación normal de $x(\bar{D})$, supongamos que existe $p \in x(D)$ con $H(p) \neq 0$, $p = x(u_0)$. Entonces existe un disco abierto $D(u_0, r) \subset D$ tal que $H \cdot x|_{D(u_0, r)} \neq 0$ y tendrá el mismo signo que $H(p)$. Consideremos entonces una función C^∞ $h: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h|_{D-D(u_0, r)} = 0$ y $h(u_0) = H(p)$ y tal que $h|_{D(u_0, r)}$ tenga el mismo signo que $H(p)$ (basta tomar h una función meseta con $\text{sop } h \subset D(u_0, r)$ y $h(u_0) = H(p)$). $h: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ determina una variación normal para la cual se verifica que $A'(0) = -2 \int_D hH \sqrt{\det I} \, du \, dv < 0$, en contra de que $A'(0) = 0$, luego $H(p) = 0 \quad \forall p \in x(D)$.

III.48. NOTA: El teorema anterior dice que cualquier región acotada $x(\bar{D})$ de una superficie minimal es un punto crítico de la función área definida sobre el espacio de las variaciones normales de $x(\bar{D})$. Hay que hacer notar, sin embargo, que dicho punto crítico puede no ser un mínimo.

S 12. Ejemplos de superficies minimales.

III.49. EL HELICOIDE: Vimos en III. 44 que $H = 0$, luego se trata de una superficie minimal.

III.50. LA CATENOIDE: Es la superficie obtenida por revolución de una catenaria con ecuación del tipo $x = a \text{ch } \frac{z}{a}$ alrededor del eje Z . Una parametrización de esta superficie es:

$$x(u, v) = (a \text{ch } \frac{v}{a} \cos u, a \text{ch } \frac{v}{a} \sin u, v) \quad -\infty < v < \infty, \quad 0 < u < 2\pi \quad \text{ó} \quad -\pi < u < \pi.$$

y aplicando las fórmulas dadas en III. 38, se obtiene

$$k_{\text{mer}} = \frac{-1}{a \text{ch}^2 \frac{z}{a}}, \quad k_{\text{par}} = \frac{1}{a \text{ch}^2 \frac{z}{a}},$$

de donde resulta que $H = \frac{1}{2}(k_{mer} + k_{par}) = 0$, luego es una superficie minimal.

III.51. PROPOSICION: Toda superficie de revolución minimal generada por una 1-variedad que nunca es perpendicular al eje de rotación es localmente una catenoide.

DEMOSTRACION: Sea $c(v) = (f(v), 0, g(v))$ una parametrización de una porción de la curva generatriz que da lugar a una parametrización canónica de la superficie de revolución (cfr. demostración de II.41). Si existe un v_0 tal que $g'(v_0) = 0$, entonces $c'(v_0)$ es perpendicular al eje Z (eje de rotación). Luego $g'(v) \neq 0 \forall v$, luego para todo v existe un entorno de v sobre el cual $v \mapsto g(v) = s$ es un difeomorfismo y, en ese entorno, se puede parametrizar c por $s \mapsto c(s) = (f(g^{-1}(s)), 0, s)$. Sea $\varphi = f \circ g^{-1}$. Aplicando las fórmulas de III.38 a esa parametrización, resulta

$$K_{mer} = \frac{-\varphi''}{(1+\varphi'^2)^{3/2}} \quad K_{par} = \frac{1}{\varphi\sqrt{1+\varphi'^2}}$$

de modo que la minimalidad implica, para cada uno de esos entornos,

$$0 = K_{mer} + K_{par} = \frac{-\varphi\varphi'' + 1 + \varphi'^2}{\varphi(1+\varphi'^2)^{3/2}}, \quad \text{i.e.} \quad \varphi\varphi'' - \varphi'^2 - 1 = 0.$$

Las soluciones de esa ecuación diferencial son $\varphi(s) = a \operatorname{ch} \frac{s+b}{a}$, a y b constantes, de modo que en cada uno de los entornos considerados la curva generatriz es $c(s) = (a \operatorname{ch} \frac{s+b}{a}, s)$, que es una catenaria y da, por rotación, una catenoide.

III.52.; PROPOSICION: Sea $x(u,v) = c(u) + vw(u)$ una superficie reglada no cilíndrica y minimal (en los puntos en que es superficie) con parámetro de distribución $\langle c' \wedge w, w' \rangle$ no nulo en todo punto. Entonces $x(u,v)$ es parte de un helicoide.

DEMOSTRACION: Sea β la línea de estricción de $x(u,v)$ y parametricemos la superficie reglada usando β como curva directriz:

$$x(u,v) = \beta(u) + v w(u) \quad \text{con } |w| = 1 \quad \text{y } |w'| = 1$$

(la condición $|w'| = 1$ se puede conseguir reparametrizando de nuevo la curva $w(u)$ -que es una curva regular al ser $w' \neq 0$ por ser la superficie reglada no cilíndrica- respecto de su longitud de arco s , $u = u(s)$, y tomando s como nuevo

parámetro u). De las fórmulas dadas en III.41 resulta que $H = \frac{1}{2} \frac{L_{11} - 2g_{12}L_{12}}{\sqrt{g}}$,

siendo, $g = \det I$, y que

$$H = 0 \quad \text{sii} \quad \langle \beta'' + vw'', (\beta' + uw') \wedge w \rangle - 2 \langle w', \beta' \wedge w \rangle \langle \beta', w \rangle = 0 \quad \forall (u,v), \quad \text{i.e.}$$

$\langle \beta', \beta' \wedge w \rangle - 2 \langle w', \beta' \wedge w \rangle \langle \beta', w \rangle + v (\langle w'', \beta' \wedge w \rangle + \langle \beta'', w' \wedge w \rangle) + v^2 \langle w'', w' \wedge w \rangle = 0$,
lo que equivale a que sean 0 los coeficientes de v :

$$\langle \beta', \beta' \wedge w \rangle - 2 \langle w', \beta' \wedge w \rangle \langle \beta', w \rangle = 0 \quad (1)$$

$$\langle w'', \beta' \wedge w \rangle + \langle \beta'', w' \wedge w \rangle = 0 \quad (2)$$

$$\langle w'', w' \wedge w \rangle = 0 \quad (3)$$

Ahora bien, de $|w|=1$ resulta que $\langle w'', w' \rangle = 0$, luego (3) implica que $w'' = \langle w'', w \rangle w$.

De $|w|=1$ resulta $\langle w, w' \rangle = 0$ y $\langle w', w' \rangle + \langle w, w'' \rangle = 0$, luego $\langle w, w'' \rangle = -1$, luego

$$w'' = -w \quad (4)$$

Sea $\{e_i\}_{i=1}^3$ la referencia de Frenet de w , entonces $w'' = k e_2$ que, comparado con (4), da $k = 1$, $e_2 = -w$ y $e_3 = e_1 \wedge e_2 = w' \wedge (-w)$, de donde $-te_2 = -w'' \wedge w - w' \wedge w' = 0$, luego $w(u)$ es una curva plana de curvatura $k = 1$, i.e. es una circunferencia de radio 1. Tomando el origen de \mathbb{R}^3 en el centro de esa circunferencia y el plano XY como el plano en que está la circunferencia, $w(u)$ se puede escribir como $w(u) = (\cos u, \sin u, 0)$.

Por otro lado, de (4) y (2) resulta que $\langle \beta'', w' \wedge w \rangle = 0$, luego β'' está en el plano generado por w y w' , que es el que hemos tomado como plano XY , por lo tanto β es de la forma $\beta(u) = (\beta_1(u), \beta_2(u), au+b)$ (a, b ctes).

De que el parámetro de distribución no se anule, $\langle \beta' \wedge w, w' \rangle \neq 0$ resulta que $\beta' \wedge w \neq 0$, y como w' es perpendicular a β' y a w , $\beta' \wedge w$ está en la dirección de w' , luego (1) es equivalente a

$$\langle w', \beta' \wedge w \rangle (\langle \beta'', w' \rangle - 2 \langle \beta', w \rangle) = 0, \text{ siendo } \langle \beta' \wedge w, w' \rangle \neq 0, \text{ luego equivalente a}$$

$$\langle \beta'', w' \rangle - 2 \langle \beta', w \rangle = 0, \quad (1')$$

pero $\langle \beta', w' \rangle = 0$ implica $\langle \beta'', w' \rangle + \langle \beta', w'' \rangle = 0$ y, por (4), $\langle \beta'', w' \rangle = \langle \beta', w \rangle$, que, comparado con (1'), da $\langle \beta', w \rangle = 0$, lo que, sustituido en las expresiones de β y w da:

$$\langle \beta', w \rangle = 0 \text{ sii } \beta_1' \cos u + \beta_2' \sin u = 0 \quad \forall u$$

$$\langle \beta', w' \rangle = 0 \text{ sii } -\beta_1' \sin u + \beta_2' \cos u = 0 \quad \forall u,$$

ecuaciones que implican $\beta_1' = 0 = \beta_2'$, i.e. β_1 y β_2 son constantes, por lo tanto

$$x(u, v) = (\beta_1 + v \cos u, \beta_2 + v \sin u, au + b).$$

Una traslación de vector $(-\beta_1, -\beta_2, -b)$ transforma esta ecuación en la ecuación canónica del helicoido. \square

PROBLEMAS DEL CAPITULO III

1.- Clasificar los puntos de la superficie $x(u,v) = (u, v^2, u^2+v^3)$.

2.- Caracterizar los puntos parabólicos de la superficie $x(t,u) = (f(t) \cos u, f(t) \sin u, t)$, siendo $f(t) > 0$.

3.- Determinar la curvatura normal de la curva $x(t^2, t)$ en $t = 1$ sobre la superficie $x(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$.

4.- Demostrar que la suma de las curvaturas normales una superficie M en dos direcciones ortogonales en un punto p de M es igual $2H(p)$.

5.- Demostrar que $H(p) = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} k_N(\vartheta) d\vartheta$, siendo ϑ el ángulo que forma la dirección dada con una dirección principal en p y $k_N(\vartheta)$ la curvatura normal en la dirección dada.

6.- Sea M una superficie con $K < 0$. ¿Hay puntos umbilicales en M ? ¿Y si $K \leq 0$?

7.- Sea p un punto no plano de una superficie M . Probar que $H(p) = 0$ sii existen dos direcciones asintóticas ortogonales en p .

8.- Sea C una curva regular sobre una superficie M con curvatura de Gauss $K > 0$. Si k_1, k_2 son las curvaturas principales de M en un punto p , demostrar que la curvatura k de C en p satisface $k \geq \min\{|k_1|, |k_2|\}$.

9.- Dada la superficie $x(u,v) = (u - (u^3/3) + u v^2, v - (v^3/3) + u^2 v, u^2 - v^2)$, hallar las líneas de curvatura, las asintóticas, las curvaturas principales, H y K .

10.- Sea C una línea asintótica (de curvatura no nula en todo punto) de una superficie M . Demostrar que $|\tau| = \sqrt{-K}$, siendo τ la torsión de C en un punto p y K la curvatura de Gauss de M en p .

11.- Sea M una superficie dada por la gráfica de una función $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$. Expresar los coeficientes de la primera y segunda forma fundamentales, la curvatura de Gauss, la curvatura media y las curvaturas principales en términos de f y sus derivadas.

12.- Sea C una curva intersección de dos superficies M_1 y M_2 , y sea θ el ángulo entre M_1 y M_2 en cualquier punto p de C . Supóngase que C es una línea de curvatura de M_1 . (a) Mostrar que θ es constante si y solo si C es también línea de curvatura de M_2 . (b) Mostrar que si una línea de curvatura C de una superficie M está en un plano Π o sobre una esfera Σ , entonces la superficie M forma, a lo largo de C , un ángulo constante con Π o con Σ .

13.- ¿Puede una línea de curvatura ser curva asintótica?

14.- Calcular las curvaturas de Gauss y media en el punto $(0,0,0)$ del hiperboloide $z = axy$.

paraboloides hiperbolicos

15.- Probar que todas las curvas asintóticas de la superficie

$$x(u,v) = (u, v, (u^2/4) - v^2)$$

son líneas rectas.

16.- Supongamos que el plano osculador de una línea de curvatura $C \subset M$ forma un ángulo constante con el plano tangente de M a lo largo de C . Demostrar que C es una curva plana.

17.- Si la superficie M_1 corta a otra M_2 a lo largo de una curva regular C , demostrar que la curvatura k de C en $p \in C$ viene dada por $k^2 \sin^2 \theta = k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 \cos \theta$, donde k_1 y k_2 son las curvaturas normales de M_1 y M_2 respectivamente, y θ es el ángulo que forman M_1 y M_2 en p .

18.- Sean k_1, \dots, k_m las curvaturas normales en p formando ángulos $\pi/2(m+1), \dots, m\pi/2(m+1)$ con una dirección principal. Probar que $k_1 + \dots + k_m = mH$, donde H es la curvatura media en p .

19.- Sea $C \subset M$ una curva regular en M . Sea $p \in C$ y $c(s)$ una parametrización de C por la longitud de arco tal que $c(0) = p$. Elijamos en $T_p M$ una base ortonormal positiva $\{t, h\}$ tal que $t = c'(0)$. La torsión geodésica τ_g de C en p se define por $\tau_g = \langle (dN/ds)(0), h \rangle$. Demostrar que: **a)** $\tau_g = (k_1 - k_2) \cos \phi \sin \phi$, donde ϕ es el ángulo que forman la dirección principal correspondiente al valor propio k_1 y t . **b)** Si τ es la torsión de C , n el vector normal principal de C y $\cos \theta = \langle N, n \rangle$, entonces $d\theta/ds = \tau + \tau_g$. **c)** Las líneas de curvatura de M están caracterizadas por tener torsión geodésica idénticamente cero.

20.- Mostrar que la superficie dada por el único sistema de coordenadas $x(u,v) =$

$(u, v, \log \cos v - \log \cos u)$ es una superficie minimal con curvatura de Gauss $K = -(\sec^2 u \sec^2 v)/w^4$, donde $w^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 u + \operatorname{tg}^2 v$.

21.- Determinar las curvas asintóticas de la catenoide

$$x(u,v) = (\operatorname{ch} v \cos u, \operatorname{ch} v \operatorname{sen} u, v). \quad (\text{Sol: } u+v = \text{cte}, u-v = \text{cte}).$$

22.- Sea M una superficie dada en la forma $M = \{p \in \mathbf{R}^3 / F(p) = 0\}$, siendo $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$. Expresar los coeficientes de la segunda forma fundamental, la curvatura media y la curvatura de Gauss en términos de F y sus derivadas.

23.- Obtener las curvas asintóticas del hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
 (Sol.: $x+z = k(1+y)$, $x-z = (1/k)(1-y)$) (Sugerencia: mostrar que el hiperboloide contiene dos familias de rectas que son curvas asintóticas).

24.- Sea M el elipsoide (conjunto de puntos de \mathbf{R}^3 que verifican $((x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2)=1)$. Calcular su curvatura de Gauss y determinar sus puntos umbilicales.

25.- Sea M una superficie con vector unitario normal N globalmente definido. Se define la función soporte h de M por $h(p) = -\langle p, N(p) \rangle$. (a) Mostrar que $|h(p)| =$ distancia de O a $T_p M$, y que $h(p) > 0$ si y solo si $N(p)$ está dirigido hacia la cara de $T_p M$ que contiene O . (b) Para el elipsoide $F^{-1}(0)$, donde $F(x,y,z) = (1/2)((x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) - 1)$, mostrar que $h(x,y,z) = -1/|Z|$, siendo $Z = (F_x, F_y, F_z)$. Concluir que $K = h^4/(a^2 b^2 c^2)$, y localizar los puntos de curvatura máxima y mínima. (c) Para los hiperboloides elípticos de una y dos hojas $((x^2/a^2) + (y^2/b^2) - (z^2/c^2) = \pm 1$ respectivamente), mostrar que $K = \mp h^4/(a^2 b^2 c^2)$ respectivamente.

26.- Sea M una superficie con vector unitario normal globalmente definido N . Entonces $\{p + \alpha N(p) / p \in M\}$ se llama superficie paralela M' de M . (a) Probar que si M es compacta, M' es una superficie para α suficientemente pequeño. (b) Las curvaturas principales de M' son $k_i/(1 - \alpha k_i)$, y las curvaturas gaussiana y media de M' son $K' = K/(1 - 2\alpha H + \alpha^2 K)$, $H' = (H - \alpha K)/(1 - 2\alpha H + \alpha^2 K)$. (c) Si M tiene curvatura de Gauss constante $K > 0$, entonces alguna superficie paralela tiene curvatura media constante, y si M tiene curvatura media constante $H \neq 0$, entonces una superficie paralela tiene curvatura gaussiana constante (Bonnet). (d) Si M tiene curvatura media $H = 0$, y M no es parte de un plano, entonces el área de M' es más pequeña que el área de M (Steiner).

- 27.- Expresar la curvatura de Gauss K de la silla de mono $z = x^3 - 3xy^2$ en términos de $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. ¿Es minimal esta superficie?



Calculos de III. 43

CIII. 42.1

$$\begin{array}{l}
 + \left[\begin{array}{ccc|c}
 2 \cos u & -2 \sin u & 0 & \\
 -\sin \frac{u}{2} \cos u & -\sin \frac{u}{2} \cos u & \cos \frac{u}{2} & \\
 \frac{1}{2} \cos \frac{u}{2} \cos u - \sin \frac{u}{2} \cos u & \frac{1}{2} \cos \frac{u}{2} \cos u + \sin \frac{u}{2} \cos u & \frac{1}{2} \sin \frac{u}{2} &
 \end{array} \right] = \left(2 \cos u \left(\frac{1}{2} \sin^2 \frac{u}{2} \cos u + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{u}{2} \cos u - \sin \frac{u}{2} \sin u \right) + \right. \\
 \left. + 2 \sin u \left(\frac{1}{2} \sin^2 \frac{u}{2} \cos u + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{u}{2} \cos u + \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} \cos u \right) \right) =
 \end{array}$$

$$= 2 \cos u \left(\frac{1}{2} \cos u - \frac{1}{2} \sin^2 u \right) + 2 \sin u \left(\frac{1}{2} \cos u + \frac{1}{2} \sin u \cos u \right) =$$

$$= \cos^2 u - \cos u \sin^2 u + \sin^2 u + \sin^2 u \cos u = 1$$

Handwritten notes:
~~Handwritten scribbles~~
~~Handwritten scribbles~~

$$\begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{ccc|c}
 2 \cos u - \frac{1}{2} \cos \frac{u}{2} \sin u - \frac{1}{2} \sin \frac{u}{2} \cos u & -2 \sin u - \frac{1}{2} \cos \frac{u}{2} \cos u + \frac{1}{2} \sin \frac{u}{2} \sin u & -\frac{1}{2} \sin \frac{u}{2} & \\
 -\sin \frac{u}{2} \sin u & -\sin \frac{u}{2} \cos u & \cos \frac{u}{2} &
 \end{array} \right] =
 \end{array}$$

$$\left(-2 \sin u \cos \frac{u}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \frac{u}{2} \cos u + \frac{1}{2} \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} \sin u - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{u}{2} \cos u \right)$$

$$- \left(2 \cos u \cos \frac{u}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \frac{u}{2} \sin u - \frac{1}{2} \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} \cos u - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{u}{2} \sin u \right)$$

$$\left(-2 \cos^2 u \sin \frac{u}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} \sin u \cos u + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{u}{2} \cos^2 u - 2 \sin^2 u \sin \frac{u}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} \sin u \cos u + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{u}{2} \sin^2 u \right) =$$

$$\left(-\frac{1}{2} \cos u - 2 \sin u \cos \frac{u}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 u, \frac{1}{2} \sin u + \frac{1}{2} \sin u \cos u - 2 \cos u \cos \frac{u}{2}, \frac{1}{2} \sin^2 \frac{u}{2} - 2 \sin \frac{u}{2} \right)$$

$$\frac{v^2}{4} \cos^2 u + 4 \sin^2 u \cos^2 \frac{u}{2} + \frac{v^2}{4} \sin^4 u + 2v \cos u \sin u \cos \frac{u}{2} - \frac{v^2}{2} \cos u \sin^2 u - 2v \sin^3 u \cos \frac{u}{2}$$

$$+ \frac{v^2}{4} \sin^2 u + \frac{v^2}{4} \sin^2 u \cos^2 u + 4 \cos^2 u \cos^2 \frac{u}{2} + \frac{v^2}{2} \sin^2 u \cos u - 2v \sin u \cos u \cos \frac{u}{2}$$

$$- 2v \sin u \cos^2 u \cos \frac{u}{2} + v^2 \sin^4 \frac{u}{2} + 4 \sin^2 \frac{u}{2} - 4v \sin^3 \frac{u}{2} =$$

$$= \frac{v^2}{4} + 4 \cos^2 \frac{u}{2} - 2v \sin u \cos \frac{u}{2} + \frac{v^2}{4} \sin^2 u + v^2 \sin^4 \frac{u}{2} + 4 \sin^2 \frac{u}{2} - 4v \sin^3 \frac{u}{2} =$$

$$= \frac{v^2}{4} + 4 \cos^2 \frac{u}{2} - 2v \sin \frac{u}{2} \cos^2 \frac{u}{2} + \frac{v^2}{4} 4 \sin^2 \frac{u}{2} \cos^2 \frac{u}{2} + v^2 \sin^4 \frac{u}{2} + 4 \sin^2 \frac{u}{2} - 4v \sin^3 \frac{u}{2} =$$

$$= \frac{v^2}{4} + v^2 \sin^2 \frac{u}{2} - 4v \sin \frac{u}{2} + 4 \sin^2 \frac{u}{2} = \left(\frac{v^2}{4} + \left(2 - v \sin \frac{u}{2} \right)^2 \right)^2 ?$$

brutal

$$v=0 \quad \frac{1}{16}$$

$$v=1 \quad \frac{-1}{\left(\frac{1}{4} + \left(2 - \sin \frac{u}{2} \right)^2 \right)^2} = -8$$

$$\left(\frac{1}{4} + 4 \sin^2 \frac{u}{2} - 4 \sin \frac{u}{2} \right)^2$$

CAPITULO IV: GEOMETRIA LOCAL INTRINSECA DE UNA SUPERFICIE DE \mathbb{R}^3

Lección 16ª: ISOMETRIAS ENTRE SUPERFICIES.

§1. Definición de distancia intrínseca.

IV.1. DEFINICION: Una aplicación continua $c:[a,b] \rightarrow M$ de un intervalo en una superficie se dice que es una curva diferenciable a trozos si existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = b$ de $[a,b]$ tal que $c|_{]t_i, t_{i+1}[}$ ($0 \leq i \leq k$) es diferenciable. Se define la longitud de una tal curva c por:

$$L(c) = \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} |c'(t)| dt.$$

IV.2 PROPOSICION: Sea M una superficie conexa. Dos puntos cualesquiera de M pueden unirse por una curva diferenciable a trozos.

DEMOSTRACION: Toda superficie es localmente arco-conexa, luego, si M es conexa, entonces M es arco-conexa. Por tanto, dados $p, q \in M$, existe una curva $c:[a, b] \rightarrow M$ continua tal que $c(a) = p$, $c(b) = q$. Para cada $t \in [a, b]$ existe un sistema de coordenadas (U_t, x_t) en $c(t)$ tal que U_t es un conjunto convexo en \mathbb{R}^2 (en efecto, para que U_t sea convexo basta, dado (U, x_t) con $x_t(0) = c(t)$, tomar U_t como una bola abierta de centro 0 contenida en U). La familia $\{c^{-1}(x_t(U_t))\}_{t \in [a, b]}$ es un recubrimiento abierto del espacio métrico compacto $[a, b]$; Sea δ el número de Lebesgue del recubrimiento, y sea n tal que $(b-a)/n < \delta$. Consideremos una partición de $[a, b]$ en los subintervalos $[t_0, t_1], \dots, [t_{n+1}, t_n]$ con $t_0 = a$, $t_i = t_{i-1} + \frac{b-a}{n}$, $t_n = b$. Sea $x_i(U_i)$ un abierto de la familia $\{x_t(U_t)\}_{t \in [a, b]}$ tal que $c[t_{i-1}, t_i] \subset x_i(U_i)$. Como U_i es convexo, existe una recta $\tilde{\alpha}_i(t)$ en \mathbb{R}^2 , $\tilde{\alpha}_i: [t_{i-1}, t_i] \rightarrow U_i$ tal que $\tilde{\alpha}_i(t_{i-1}) = x_i^{-1} \circ c(t_{i-1})$, $\tilde{\alpha}_i(t_i) = x_i^{-1} \circ c(t_i)$. Definamos $\alpha: [a, b] \rightarrow M$ por $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}(t) = x_i \circ \tilde{\alpha}_i(t)$. Entonces α es una curva continua que sobre cada intervalo $]t_{i-1}, t_i[$ es diferenciable y $\alpha(a) = x_1 \circ \tilde{\alpha}_1(a) = c(a) = p$ y $\alpha(b) = x_n \circ \tilde{\alpha}_n(b) = c(b) = q$.

IV.3 DEFINICION: Dada una superficie conexa M de \mathbb{R}^3 , se llama distancia (intrínseca) de M a la aplicación $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$ / $d(p, q) = \inf \{L(c) / c: I \rightarrow M$ curva diferenciable a trozos uniendo p con $q\}$.

IV.4. NOTAS: a) La distancia intrínseca será, en general, mayor que la distancia euclídea.

b) Al definir la distancia se ha puesto el ínfimo y no el mínimo

- porque este puede no alcanzarse, como lo muestra el ejemplo del plano agujereado.

§2. Isometrías entre superficies.

La geometría euclídea se basa en el concepto de isometría, y las propiedades geométricas en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 son las que se conservan por isometrías. En las superficies, la geometría intrínseca será el estudio de las propiedades que se conservan por aplicaciones que conservan la distancia intrínseca. Estas aplicaciones serán las isometrías entre superficies, que comenzaremos definiendo indirectamente:

- **IV.5. DEFINICION:** Una isometría entre dos superficies M y M' de \mathbb{R}^3 es una aplicación $f: M \rightarrow M'$ diferenciable y biyectiva que conserva el producto escalar de los vectores tangentes, i.e: para todo $p \in M$ y para todo $Y, X \in T_p M$, $\langle X, Y \rangle = \langle df(p)X, df(p)Y \rangle$.

IV.6. NOTA: Obsérvese que si f es una isometría, $df(p)X = 0 \iff X = 0$, i.e, $df(p)$ es un isomorfismo, luego, por el teorema de la función inversa, f es un difeomorfismo local y, por ser f biyectiva, f es un difeomorfismo de M sobre M' .

IV.7. PROPOSICION: Una isometría $f: M \rightarrow M'$ conserva la distancia intrínseca.

- **DEMOSTRACION:** Sean $p, q \in M$, y $C(p, q) = \{\text{curvas diferenciables a trozos en } M \text{ uniendo } p \text{ y } q\}$. Sea $C(f(p), f(q)) = \{\text{curvas diferenciables a trozos en } M' \text{ uniendo } f(p) \text{ y } f(q)\}$. Sea \sim la aplicación $\sim: C(p, q) \rightarrow C(f(p), f(q))$ dada por $c \mapsto \tilde{c} = f \circ c$, la cual tiene una inversa $\tilde{c} \mapsto c = f^{-1} \circ \tilde{c}$, luego \sim es una biyección. Sea d la distancia en

M y d' la distancia en M' . Dada $c \in C(p, q)$, $L(c) = \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} |c'(t)| dt = \sum_{i=0}^k$

$\rightarrow \int_{t_i}^{t_{i+1}} |(f \circ c)'(t)| dt = L(f \circ c)$, por ser f una isometría. Resulta de todo esto que:

$$d'(f(p), f(q)) = \inf\{L(\tilde{c}) / \tilde{c} \in C(f(p), f(q))\} = \inf\{L(f \circ c), c \in C(p, q)\} = \inf\{L(c), c \in C(p, q)\} = d(p, q). \quad \blacksquare$$

Más adelante (cfr. IV.75) veremos que un difeomorfismo que conserva la distancia intrínseca es una isometría, lo cual, junto con IV.7, dice que la definición IV.5 coincide con la que sería natural.

- **IV.8. DEFINICION:** Una isometría local de superficies es una aplicación

diferenciable $f: M \rightarrow M'$ que conserva el producto escalar de los vectores tangentes. (A veces también emplearemos el nombre de isometría local para indicar una isometría (local o global) definida solo sobre un abierto de M con valores en un abierto de M').

Como en el caso de una isometría global, una isometría local es un difeomorfismo local.

IV.9. PROPOSICION: $f: M \rightarrow M'$ es una isometría local sii para todo $p \in M$ existen sistemas de coordenadas (U, x) en p , (U, x') en $f(p)$ tales que $x' = f \circ x$ (i.e. $f = x' \circ x^{-1}$) y $g_{ij} = g'_{ij}$ siendo g_{ij} (resp. g'_{ij}) los coeficientes de la 1ª forma fundamental de M (resp. M') en el sistema de coordenadas (U, x) (resp. (U, x')).

DEMOSTRACION: Si f es una isometría local es un difeomorfismo local. Por tanto, para todo $p \in M$ existe un sistema de coordenadas (U, x) de M en p tal que $f: x(U) \rightarrow f(x(U)) \subset M'$ es un difeomorfismo, de donde resulta que $(U, f \circ x)$ es un sistema de coordenadas de M' en $f(p)$. Por ser f una isometría local se tiene que, para cada $u \in U$, si $x' = f \circ x$,

$$g'_{ij}(u) = \langle x'_i, x'_j \rangle(u) = \left\langle \frac{\partial(f \circ x)}{\partial u^i}(u), \frac{\partial(f \circ x)}{\partial u^j}(u) \right\rangle = \langle df(x(u))x_i, df(x(u))x_j \rangle = \langle x_i, x_j \rangle = g_{ij}$$

Recíprocamente, si existen $(U, x), (U, x')$ con $x' = f \circ x$ y $g_{ij} = g'_{ij}$, entonces:

$$\begin{aligned} \langle df(X), df(Y) \rangle &= \left\langle df\left(\sum_i X^i x_i\right), df\left(\sum_j Y^j x_j\right) \right\rangle = \sum_{i,j} X^i Y^j \langle df(x_i), df(x_j) \rangle = \sum_{i,j} X^i Y^j g'_{ij} \\ &= \sum_{i,j} X^i Y^j g_{ij} = \sum_{i,j} X^i Y^j \langle x_i, x_j \rangle = \langle X, Y \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

§3. Ejemplo de superficies localmente isométricas.

IV.10. EJEMPLO: Consideremos la parametrización de la catenoide

$$(IV.10.1) x(u, v) = (a \operatorname{ch} \frac{v}{a} \cos u, a \operatorname{ch} \frac{v}{a} \operatorname{sen} u, v), \quad v \in \mathbb{R}, u \in]0, 2\pi[$$

y la del helicoide:

$$(IV.10.2) x'(u', v') = (v' \cos u', v' \operatorname{sen} u', a u'), \quad v' \in \mathbb{R}, u' \in]0, 2\pi[.$$

Realicemos el siguiente cambio de coordenadas sobre el helicoide : $u' = u, v' = a \operatorname{sh} \frac{v}{a}$ (i.e. definimos sobre el helicoide un nuevo sistema de coordenadas $\tilde{x}(u, v) = x'(u'(u), v'(v))$). Resulta así para el helicoide:

$$(IV.10.3) \tilde{x}(u, v) = (a \operatorname{sh} \frac{v}{a} \cos u, a \operatorname{sh} \frac{v}{a} \operatorname{sen} u, au), \quad v \in \mathbb{R}, u \in]0, 2\pi[.$$

Con respecto a los sistemas de coordenadas (IV.10.1) y (IV.10.3) resulta que:

$$g_{11} = a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{v}{a} = \tilde{g}_{11}, \quad g_{12} = 0 = \tilde{g}_{12}, \quad g_{22} = \operatorname{ch}^2 \frac{v}{a} = \tilde{g}_{22} \quad (\text{tomando } u^1 \equiv u, u^2 \equiv v).$$

Obsérvese que, sin embargo, el helicoide y la catenoide no son globalmente isométricos por no ser homeomorfos.

NOTA: se puede ver que son isométricas no solo estas superficies, sino la familia:

$$x^t(u, v) = \cos t (\operatorname{sh} v \cos u, -\operatorname{sh} v \operatorname{sen} u, u) + \operatorname{sen} t (\operatorname{ch} v \cos u, \operatorname{ch} v \operatorname{sen} u, v), \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

Lección 17ª: LA DERIVADA COVARIANTE.

§4. Definición y propiedades de la derivada covariante.

En el estudio de la geometría extrínseca introdujimos conceptos geométricos locales con el auxilio del cálculo de derivadas. Aquí vamos a operar de modo análogo, pero para ello necesitamos, en primer lugar, un cálculo de derivadas intrínseco. Para intuir como puede ser este cálculo diferencial intrínseco, podemos pensar del siguiente modo: un habitante bidimensional de la superficie puede tener una idea, como aproximación de lo no lineal, de los objetos lineales tangentes a la superficie (de modo análogo a como un terrestre puede pensar que un trozo del planeta Tierra es plano), pero es incapaz de observar cualquier cosa, aunque sea lineal, que se salga del plano tangente al punto de la superficie desde el que observa ese habitante. Esta consideración nos lleva a:

- 1) derivar solo campos vectoriales tangentes a la superficie;
- 2) como la derivada direccional de un campo tangente no tiene por qué ser tangente, tomaremos como su derivada solo su componente tangencial (que sería la única parte "observable" de la derivada). Esta será la que llamaremos derivada covariante.

Naturalmente, después de dar la definición siguiendo la intuición anterior, comprobaremos que realmente se trata de un concepto intrínseco mostrando su invariancia por isometrías.

IV.11. DEFINICION: Sea Y un campo vectorial tangente de una superficie M de \mathbb{R}^3 definido sobre un abierto U de M . Para cada $p \in U$, $X \in T_pM$, se define la derivada covariante $\nabla_X Y$ de Y en la dirección de X por

$$(IV.11.1) \quad \nabla_X Y = D_X Y - \langle D_X Y, N \rangle N \quad (\text{i.e. } \nabla_X Y = \text{parte tangencial de } D_X Y).$$

Como $-\langle D_X Y, N \rangle = -D_X \langle Y, N \rangle + \langle Y, D_X N \rangle = -\langle Y, L_p X \rangle$, la expresión anterior es equivalente a

$$(IV.11.1') \quad \nabla_X Y = D_X Y - \langle L_p X, Y \rangle N. \quad (\text{fórmula de Gauss}).$$

Resulta de esta definición que si X e Y son campos vectoriales diferenciables, también lo es $\nabla_X Y$ (por serlo $D_X Y$).

Para el estudio de las propiedades formales de la derivada covariante será útil la siguiente:

IV.12. DEFINICION: Si X, Y son dos campos vectoriales sobre una abierto U de una superficie M , su corchete de Lie $[X, Y]$ es el campo vectorial sobre el mismo abierto U definido por $[X, Y] = D_X Y - D_Y X$.

Si X e Y son campos vectoriales tangentes, entonces $[X, Y]$ también lo es. En efecto: $\langle [X, Y], N \rangle = \langle D_X Y - D_Y X, N \rangle = D_X \langle Y, N \rangle - \langle Y, D_X N \rangle - D_Y \langle X, N \rangle + \langle X, D_Y N \rangle = \langle Y, LX \rangle - \langle X, LY \rangle = 0$ (por ser L autoadjunto).

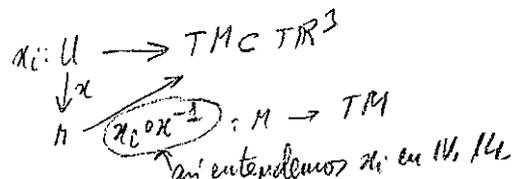
IV.13. PROPOSICION: Sean $W, X, \in T_p M$; Y, Z campos vectoriales definidos sobre un abierto conteniendo a p , f una función diferenciable sobre ese abierto. Se verifica que:

- a) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- b) $\nabla_{X+W} Y = \nabla_X Y + \nabla_W Y$
- c) $\nabla_{f(p)X} Y = f(p) \nabla_X Y$
- d) $\nabla_X(f Y) = f(p) \nabla_X Y + (D_X f)(p) Y$
- e) $\nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y, Z]$
- f) $D_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$.

DEMOSTRACION: a).....d) se dejan al lector. Veamos e) y f):

e): $\nabla_Y Z - \nabla_Z Y = D_Y Z - \langle LY, Z \rangle N - D_Z Y + \langle LZ, Y \rangle N = [Y, Z]$.

f): $D_X \langle Y, Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle = \langle D_X Y - \langle LX, Y \rangle N, Z \rangle + \langle Y, D_X Z - \langle LX, Z \rangle N \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$.



§5. Expresión en coordenadas.

IV.14. DEFINICION: Sea (U, x) un sistema de coordenadas de M , $\{x_i\}_{i=1}^2$ la referencia local del plano tangente a M en los puntos de $x(U)$ asociada a este sistema de coordenadas. Sobre el abierto $x(U)$ de M , $\nabla_{x_i} x_j$ es un campo vectorial tangente, por lo tanto se podrá poner como combinación lineal de x_1, x_2 . Denotemos por Γ_{ij}^k a las componentes de $\nabla_{x_i} x_j$ en la referencia $\{x_k\}_{k=1}^2$

i.e. $\nabla_{x_i} x_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k x_k$. Las funciones Γ_{ij}^k se llaman símbolos de Christoffel.

IV.15. PROPOSICION: Sea (U, x) un sistema de coordenadas de M ; X, Y campos vectoriales sobre $x(U)$, $X = \sum_{i=1}^2 X^i x_i$, $Y = \sum_{i=1}^2 Y^i x_i$. Se tiene que

a) $\nabla_X Y = \sum_{i,k} (X^i \frac{\partial Y^k}{\partial u^i} + \sum_j X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) x_k$ b) $x_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k x_k + L_{ij} N$.

DEMOSTRACION: Usando las propiedades dadas en IV.13 se tiene que:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_i \nabla_{X^i x_i} (\sum_j Y^j x_j) = \sum_i X^i \nabla_{x_i} (\sum_j Y^j x_j) = \sum_i X^i (\sum_j (D_{x_i} Y^j) x_j + \sum_j Y^j \nabla_{x_i} x_j) = \\ &= \sum_i X^i (\sum_j \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} x_j + \sum_j Y^j \Gamma_{ij}^k x_k) = \sum_{i,k} X^i (\frac{\partial Y^k}{\partial u^i} + \sum_j Y^j \Gamma_{ij}^k) x_k. \end{aligned}$$

$u^i \rightarrow x(u^1, u^2)$ curva int. de x_i
 $D_{x_i} Y^j = \frac{\partial (Y^j \circ x)}{\partial u^i}$ en x_i se encuentran como fun. de U , k como Y^j en M
 115

Por otro lado, de la definición de ∇ y de que $\langle -N_i, x_j \rangle = \langle Lx_i, x_j \rangle = L_{ij}$, resulta:

$$x_{ij} = x_{ji} = D_{x_i} x_j = \nabla_{x_i} x_j + \langle Lx_i, x_j \rangle N = \sum_k \Gamma_{ij}^k x_k + L_{ij} N.$$

IV.16. PROPOSICION: Los símbolos de Christoffel vienen dados, en términos de los coeficientes de la 1ª forma fundamental, por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{\ell} g^{k\ell} \left(\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\ell} \right).$$

DEMOSTRACION: De IV.15 b) resulta que $\langle x_{ij}, x_\ell \rangle = \sum_k \Gamma_{ij}^k g_{k\ell}$, de donde

$$(IV. 16. b)) \quad \Gamma_{ij}^k = \sum_{\ell} \langle x_{ij}, x_\ell \rangle g^{\ell k}.$$

Ahora bien, $\langle x_{ij}, x_\ell \rangle = \frac{\partial}{\partial u^i} \langle x_j, x_\ell \rangle - \langle x_j, x_{i\ell} \rangle = \frac{\partial}{\partial u^i} g_{j\ell} - \left(\frac{\partial}{\partial u^\ell} \langle x_j, x_i \rangle - \langle x_{j\ell}, x_i \rangle \right) =$

$$= \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\ell} + \langle x_i, x_{j\ell} \rangle;$$

y $\langle x_{ij}, x_\ell \rangle = \langle x_{ji}, x_\ell \rangle = \frac{\partial}{\partial u^j} g_{i\ell} - \langle x_i, x_{j\ell} \rangle.$

Sumando ambas expresiones: $2 \langle x_{ij}, x_\ell \rangle = \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\ell} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial u^j}$, lo que, sustituido en (IV.16.1), da la fórmula buscada. \hat{O} .

Como consecuencia de esta proposición se tiene la "necesitada" invariancia de la derivada covariante por isometrías.

IV.17. COROLARIO: Sea $f: M \rightarrow M'$ una isometría, $p \in M$, $X \in T_p M$, Y un campo vectorial tangente sobre M , ∇ (resp. ∇') la derivada covariante en M (resp. M'). Se verifica que: $df(p) (\nabla_X Y) = \nabla'_{df(p)X} (df(Y))$.

DEMOSTRACION: Por ser f una isometría, si (U, x) es un sistema de coordenadas de M en p , $(U, x' = f \circ x)$ es un sistema de coordenadas de M' en $f(p)$, y para los respectivos coeficientes de la primera forma fundamental se verifica que $g_{ij} = g'_{ij}$ (cfr. IV.9). Además, si Z es un campo vectorial sobre $x(U)$, $Z = \sum Z^i x_i$, se tiene que $df(Z) = \sum (Z^i \circ f) df(x_i) = \sum Z^i x'_i$. De IV.16 resulta que $g_{ij} = g'_{ij}$ implica $\Gamma_{ij}^k = \Gamma'_{ij}^k$, siendo Γ_{ij}^k (resp. Γ'_{ij}^k) los símbolos de Christoffel para el sistema de coordenadas (U, x) (resp. (U, x')) en M (resp. M'). Resulta entonces de IV.15 que

$$\nabla'_{df(p)X} (df(Y)) = \nabla'_{\sum X^i x'_i} (\sum Y^j x'_j) = \sum_{i,k} \left(X^i \frac{\partial Y^k}{\partial u^i} + X^i \sum_j Y^j \Gamma'_{ij}^k \right) x'_k =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i,k} \left(X^i \frac{\partial Y^k}{\partial u^i} + X^i \sum_j Y^j \Gamma_{ij}^k \right) df(p)(x_k) = df(p) \left(\left(X^i \frac{\partial Y^k}{\partial u^i} + X^i \sum_j Y^j \Gamma_{ij}^k \right) x_k \right) = \\ &= df(p)(\nabla_X Y). \end{aligned}$$

IV.18. TEOREMA (egregium de Gauss):

$$K = \frac{1}{\det I} \sum_m g_{2m} \left\{ \Gamma_{11,2}^m - \Gamma_{12,1}^m + \sum_{\ell} \left(\Gamma_{11}^{\ell} \Gamma_{\ell 2}^m - \Gamma_{12}^{\ell} \Gamma_{\ell 1}^m \right) \right\}, \text{ con } \Gamma_{ij,\ell}^k = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^{\ell}}$$

DEMOSTRACION: De IV.15. b), derivando esa expresión, resulta:

$$\begin{aligned} x_{ijk} &= \sum_{\ell} \left\{ \Gamma_{ij,k}^{\ell} x_{\ell} + \Gamma_{ij}^{\ell} \left(\sum_m \Gamma_{\ell k}^m x_m + L_{\ell k} N \right) \right\} + L_{ij,k} N - L_{ij} \sum_m L_k^m x_m = \\ &= \sum_m \left(\Gamma_{ij,k}^m + \sum_{\ell} \Gamma_{ij}^{\ell} \Gamma_{\ell k}^m - L_{ij} L_k^m \right) x_m + \left(\sum_{\ell} L_{k\ell} \Gamma_{ij}^{\ell} + L_{ij,k} \right) N. \\ x_{ikj} &= \sum_m \left(\Gamma_{ik,j}^m + \sum_{\ell} \Gamma_{ik}^{\ell} \Gamma_{\ell j}^m - L_{ik} L_j^m \right) x_m + \left(\sum_{\ell} L_{j\ell} \Gamma_{ik}^{\ell} + L_{ik,j} \right) N. \end{aligned}$$

Y como $x_{ijk} = x_{ikj}$,

$$\Gamma_{ij,k}^m - \Gamma_{ik,j}^m + \sum_{\ell} \left(\Gamma_{ij}^{\ell} \Gamma_{\ell k}^m - \Gamma_{ik}^{\ell} \Gamma_{\ell j}^m \right) = L_{ij} L_k^m - L_{ik} L_j^m.$$

Multiplicando ambos miembros por g_{mn} , sumando a lo largo de m , y tomando $i=j=1, k=n=2$, resulta la fórmula del teorema .

IV.19. COROLARIO: La curvatura de Gauss es invariante por isometrías.

§6. Paralelismo en superficies.

IV.20. DEFINICION: Sea $c: I \rightarrow M$ una curva diferenciable y regular. Un campo vectorial diferenciable X a lo largo de c (o "sobre c ") es una aplicación diferenciable $X: I \rightarrow T\mathbb{R}^3 / X(t) \in T_{c(t)}\mathbb{R}^3$.

IV.21. PROPOSICION: Un campo vectorial Y a lo largo de c es diferenciable sii para todo sistema de coordenadas (U, x) en $c(t_0)$, $t_0 \in J \subset I$ tal que $c(J) \subset x(U)$, las

funciones $Y^i(t)$ definidas por $Y(t) = \sum_{i=1}^2 Y^i(t) x_i(c(t))$, $t \in J$, son diferenciables.

DEMOSTRACION: Es evidente que si $Y^i(t)$ son funciones diferenciables, entonces $Y(t)$ es diferenciable. Recíprocamente, si $Y(t)$ es diferenciable, entonces $\langle Y(t), x_j(c(t)) \rangle$ es diferenciable, también son diferenciables $g_{ij}(t) = \langle x_i(c(t)), x_j(c(t)) \rangle$ y, por lo tanto, también lo son las componentes $g^{ij}(t)$ de la matriz inversa de $(g_{ij}(t))$; resulta de todo ello que

$$\sum_j g^{ij} \langle Y, x_j \rangle = \sum_j g^{ij} \langle \sum_k Y^k x_k, x_j \rangle = \sum_{j,k} g^{ij} g_{jk} Y^k = Y^i \text{ es diferenciable.}$$

IV.22. NOTA: Sea $X \in T_p M$, $c:]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M$, una curva diferenciable tal que $c(0) = p$, $c'(0) = X$. Entonces, para todo campo vectorial Y sobre M ,

$$N_p \uparrow \nabla_X Y = D_X Y - \langle D_X Y, N_p \rangle N_p \Big|_h = \frac{d(Y \circ c)}{dt} (0) - \left\langle \frac{d(Y \circ c)}{dt} (0), N_p \right\rangle N_p,$$

de donde se deduce que $\nabla_X Y$ depende solo de los valores que Y toma a lo largo de una curva c tangente a X en p en un entorno de p , y que es independiente de la curva elegida cumpliendo estas condiciones. Por lo tanto, para que $\nabla_X Y$ esté bien definida basta tener una aplicación $Y: c(I) \rightarrow T\mathbb{R}^3$ tal que $Y(c(t)) \in T_{c(t)}M$ y que $Y \circ c$ sea diferenciable.

Para un campo vectorial tangente a lo largo de una curva regular c , como $c'(t) \neq 0 \forall t \in I$, existe, para cada t , un entorno $]t-\epsilon, t+\epsilon[$ sobre el que c es un difeomorfismo sobre su imagen, y se puede definir $\tilde{Y}: c]t-\epsilon, t+\epsilon[\rightarrow T\mathbb{R}^3$ por $\tilde{Y}(c(s)) = Y(s)$ (i.e. $\tilde{Y} = Y \circ c^{-1}$), que verifica $\tilde{Y}(c(s)) \in T_{c(s)}M$, por lo que, de acuerdo con el párrafo anterior, tiene sentido hablar de $\nabla_{c'} Y \equiv \nabla_{c'} \tilde{Y}$. Esto permite dar la siguiente definición.

IV.23 DEFINICION: Sea X un campo vectorial tangente a lo largo de una curva regular c de una superficie M . Se llama derivada covariante de X en la dirección de c a

$$\nabla_{c'} X = \nabla_{c'} X = \frac{dX}{dt} - \left\langle \frac{dX}{dt}, N(c(t)) \right\rangle N(c(t)) = \frac{dX}{dt} - \langle Lc'(t), X(t) \rangle N \circ c(t).$$

no **IV. 24. NOTA:** Obsérvese que si Y es un campo vectorial sobre un abierto U de M y $c: I \rightarrow M$ es una curva regular de M con $c(I) \subset U$, entonces $\tilde{Y}(t) = Y \circ c(t)$ es un campo vectorial a lo largo de c y $\frac{\nabla \tilde{Y}}{dt} = \frac{\nabla \tilde{Y}}{dt} - \langle Lc'(t), \tilde{Y}(t) \rangle N \circ c(t) = \frac{d(Y \circ c)}{dt} - \langle Lc'(t), (Y \circ c)(t) \rangle (N \circ c(t)) = \nabla_{c'} Y$ en el sentido de la definición IV.11, lo que muestra que el nuevo concepto de derivada covariante IV.23 coincide con el de IV.11.

Además, si se parte de IV. 23 como primera definición, se puede, para un $X \in T_p M$ y un campo vectorial Y sobre M definir $\nabla_X Y = \frac{\nabla(Y \circ c)}{dt}$, siendo c una curva de M con $c(0) = p, c'(0) = X$ e $Y \circ c$ el campo vectorial a lo largo de c definido por Y . Esta definición implica la IV.11.

COMENTARIO sobre el caso en que c no es regular.

IV.25.PROPOSICION: Sea Y un campo vectorial diferenciable a lo largo de una curva $c: I \rightarrow M$. Sea (U, x) un sistema de coordenadas en $c(t_0), t_0 \in J \subset I$ tal que

$c(J) \subset x(U)$, y sean $Y^i(t)$ las componentes de $Y(t)$ (i.e. $Y(t) = \sum_{i=1}^2 Y^i(t) x_i(c(t))$). Se verifica que

$$(IV.25.1) \quad \frac{\nabla}{dt} Y(t) = \sum_k \left\{ \frac{dY^k}{dt}(t) + \sum_{i,j} Y^i(t) \frac{du^j}{dt}(t) \Gamma_{ji}^k(c(t)) \right\} x_k(c(t)).$$

DEMOSTRACION: De la definición de $\frac{\nabla}{dt}$ resulta que $\frac{\nabla}{dt}$ es lineal y que, si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación diferenciable, $\frac{\nabla}{dt}(f(t) Y(t)) = \frac{d}{dt}(f(t) Y(t)) - \langle Lc'(t), f(t) Y(t) \rangle N \circ c(t) =$

$$= \left(\frac{d}{dt} f(t) \right) Y(t) + f(t) \frac{d}{dt} Y(t) - f(t) \langle Lc'(t), Y(t) \rangle N \circ c(t) = \left(\frac{d}{dt} f(t) \right) Y(t) + f(t) \frac{dY}{dt}(t). \text{ De aquí: } \nabla$$

$$\frac{\nabla}{dt} Y(t) = \frac{\nabla}{dt} \left(\sum_i Y^i(t) x_i(c(t)) \right) = \sum_i \frac{dY^i}{dt}(t) x_i(c(t)) + \sum_i Y^i(t) \frac{\nabla x_i}{dt} \circ c(t) = \text{[por IV.24]} =$$

$$= \sum \frac{dY^i}{dt}(t) x_i(c(t)) + \sum_i Y^i(t) \nabla_{c'} x_i = \text{[por IV.15 a), ó por IV.13 c) y IV.14]} =$$

$$= \sum_k \left\{ \frac{dY^k}{dt}(t) + \sum_{i,j} Y^i(t) \frac{du^j}{dt}(t) \Gamma_{ji}^k(c(t)) \right\} x_k(c(t)).$$

IV.26. DEFINICION: Un campo vectorial tangente X a lo largo de una curva $c: I \rightarrow M$ se dice que es paralelo si $\frac{\nabla X}{dt}(t) = 0 \quad \forall t \in I$.

Si M es un plano, $\frac{\nabla X}{dt} = \frac{dX}{dt}$, y X paralelo a lo largo de c equivale a que X sea un campo vectorial constante, i.e., un campo paralelo (en el sentido de la geometría elemental) a sí mismo. De ahí procede el nombre de la definición anterior.

En el plano, un campo vectorial es paralelo (i.e. constante) sii tiene módulo constante y forma un ángulo constante con una dirección dada. Esto, en una superficie, se traduce por la siguiente propiedad:

IV.27. PROPOSICION: Sean X, Y campos vectoriales paralelos a lo largo de una curva $c: I \rightarrow M$. Entonces $\langle X, Y \rangle(t)$ es constante. En particular, $|X(t)|, |Y(t)|$ son constantes y el ángulo formado por X e Y es constante.

DEMOSTRACION:
$$\frac{d}{dt} \langle X, Y \rangle = \langle \frac{dX}{dt}, Y \rangle + \langle X, \frac{dY}{dt} \rangle =$$

$$= \langle \frac{\nabla X}{dt} + \langle Lc', X \rangle N, Y \rangle + \langle X, \frac{\nabla Y}{dt} + \langle Lc', Y \rangle N \rangle = 0,$$

luego $\langle X, Y \rangle = \text{cte}$. Tomando $X = Y$ sale que $|X|$ ó $|Y|$ es constante. Resulta de todo esto que $\cos \angle (X, Y) = \frac{\langle X, Y \rangle}{|X| |Y|} = \text{cte}$. \hat{O} .

IV.28. TEOREMA: Sea $c: I \rightarrow M$ una curva diferenciable, $I = [0, 1]$. Sea $Y_0 \in T_{c(0)} M$. Entonces existe un único campo vectorial paralelo Y a lo largo de c tal que $Y(0) = Y_0$.

DEMOSTRACION: De (IV.25.1) resulta que $Y(t)$ es paralelo sii para cada sistema de coordenadas en $c(t)$,

$$(IV.28.1) \quad \frac{dY^k}{dt} + \sum_{i,j} Y^i \frac{du^j}{dt} \Gamma_{ji}^k = 0, \quad k = 1, 2,$$

que es un sistema lineal de ecuaciones diferenciales. Aplicando los teoremas de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales se tiene pues que, para cada $t_0 \in I$ y cada sistema de coordenadas (U, x) en t_0 existe un intervalo $I_0 \subset I$, $t_0 \in I_0$ tal que $c(I_0) \subset x(U)$ y existe una solución única $(Y^1(t), Y^2(t))$ de (IV.28.1) (i.e. un campo vectorial único $Y(t) = Y^1(t) x_1 + Y^2(t) x_2$ paralelo a lo largo de $c(I_0)$ sobre I_0 verificando $Y^i(t_0) = \tilde{Y}_0^i$ para valores prefijados de \tilde{Y}_0^i (i.e. $Y(t_0) = \tilde{Y}_0$ para $\tilde{Y}_0 \in T_{c(t_0)} M$ prefijado).

El mismo razonamiento de la demostración de IV.2 prueba que existe una partición $0 = t_1 < \dots < t_{n+1} = 1$ de $[0, 1]$ y unos sistemas de coordenadas (posiblemente con repeticiones) $(U_1, x_1), \dots, (U_n, x_n)$ tales que $c([t_i, t_{i+1}]) \subset x_i(U_i)$, $i=1, \dots, n$. En el sistema de coordenadas (U_1, x_1) existe una solución única $Y_1(t)$ de (II.28.1) definida sobre el intervalo $[t_1, t_2]$ verificando la condición inicial $Y_1(0) = Y_0$. Para $i > 1$, sobre cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ tomamos, usando el sistema

de coordenadas (U_i, x_i) , la única solución $Y_i(t)$ de (II.28.1) verificando que $Y_i(t_i) = Y_{i-1}(t_i)$.

Observemos como ha sido, usando coordenadas, la construcción de $Y_i(t)$:

Sobre $[t_{i-1}, t_i]$, $Y_{i-1}(t)$ es un campo vectorial definido por $Y_{i-1}(t) = \sum_k Y_{i-1}^k(t) (x_{i-1})_k$, con $Y_{i-1}^k(t)$ (y por lo tanto $Y_{i-1}(t)$) definido sobre $]t_{i-1} - \epsilon_{i-1}, t_i + \epsilon_{i-1}[$ para un cierto ϵ_{i-1} . En un entorno de t_i , para el sistema de coordenadas (U_i, x_i) se tiene que

$$Y_{i-1}(t) = \sum_k Y_{i-1}^k(t) (x_{i-1})_k = \sum_k \tilde{Y}_{i-1}^k(t) (x_i)_k.$$

Como (IV.28.1) es la expresión en coordenadas de $\frac{\nabla Y}{dt} = 0$, y, en un entorno de t_i , Y_{i-1} verifica $\frac{\nabla Y_{i-1}}{dt} = 0$, las funciones Y_{i-1}^k siguen verificando las ecuaciones (II.28.1) para el nuevo sistema de coordenadas (U_i, x_i) . Las

funciones $Y_i^k(t)$ definiendo $Y_i(t) = \sum Y_i^k(t) (x_i)_k$ se definen por ser las soluciones de (II.28.1) verificando $Y_i^k(t_i) = \tilde{Y}_{i-1}^k(t_i)$. Por el teorema de unicidad de solución de las ecuaciones diferenciales, se tiene que, en

$$]t_{i-1} - \epsilon_{i-1}, t_i + \epsilon_{i-1}[\cap]t_i - \epsilon_i, t_{i+1} + \epsilon_i[, Y_i^k(t) = \tilde{Y}_{i-1}^k(t), \text{ luego } Y_i(t) = Y_{i-1}(t). \quad \phi$$

Definimos ahora $Y: I \rightarrow TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ por $Y(t) = Y_i(t)$ si $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Resulta de todo lo anterior que $Y(t)$ es un campo vectorial tangente a lo largo de c , bien definido y diferenciable, que es paralelo y que verifica $Y(0) = Y_0 \cdot \hat{O}$.

Este teorema permite dar la siguiente:

IV.29. DEFINICION: Se llama transporte paralelo a lo largo de una curva diferenciable c desde $c(0)$ hasta $c(t)$ a la aplicación $P_{c,0}^t: T_{c(0)}M \rightarrow T_{c(t)}M$ tal que $P_{c,0}^t(Y_0) = Y(t)$, siendo $Y(t)$ el campo paralelo a lo largo de c que verifica $Y(0) = Y_0$.

IV.30. PROPOSICION: $P_{c,0}^t$ es una isometría.

DEMOSTRACION: $P_{c,0}^t$ es lineal: si $P_{c,0}^t(X_0) = X(t)$, $P_{c,0}^t(Y_0) = Y(t)$, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se tiene que $\lambda X(0) + \mu Y(0) = \lambda X_0 + \mu Y_0$ y $\frac{\nabla}{dt}(\lambda X(t) + \mu Y(t)) = \lambda \frac{\nabla X}{dt}(t) + \mu \frac{\nabla Y}{dt}(t) = 0$, luego $P_{c,0}^t(\lambda X_0 + \mu Y_0) = \lambda P_{c,0}^t(X_0) + \mu P_{c,0}^t(Y_0)$.

Como consecuencia de IV.27 se tiene que $\langle P_{c,0}^t(X_0), P_{c,0}^t(Y_0) \rangle = \langle X_0, Y_0 \rangle_{\hat{O}}$.

§7. El transporte paralelo y la desarrollable osculadora.

Las superficies regladas desarrollables son localmente isométricas al plano (lo veremos más adelante, será consecuencia de IV.66 y III.40), por lo tanto en ellas es fácil construir geoméricamente el transportado paralelo pasando al plano por medio de la isometría local. Vamos a ver a continuación que para una superficie genérica M y una curva c en la superficie es posible encontrar una superficie reglada desarrollable con esa curva como curva directriz, tangente a M a lo largo de C , de modo que el transporte paralelo a lo largo de C en M se pueda construir geoméricamente haciéndolo sobre la superficie desarrollable encontrada.

IV.31. PROPOSICION: Sea M una superficie y $c: I \rightarrow M$ una curva regular. Sea $Y(t)$ un campo vectorial tangente a lo largo de c tal que $\langle L\dot{c}(t), Y(t) \rangle = 0$ y \dot{c} e Y sean linealmente independientes. Entonces $\bar{x}(s,t) = c(t) + s Y(t)$ es una superficie reglada desarrollable, contiene a $c(I)$ y, a lo largo de c , los planos tangentes a M y a $\bar{x}(s,t)$, y las derivadas covariantes $\frac{\nabla}{dt}$ en M y en $\bar{x}(s,t)$ coinciden.

Obsérvese que si $\dot{c}(t)$ no es asintótica, $Y(t)$ puede ser $N \wedge \dot{N}$. En efecto: $\langle L\dot{c}, N \wedge \dot{N} \rangle = -\langle \dot{N}, N \wedge \dot{N} \rangle = 0$; si \dot{c} no es asintótica, $\langle \dot{N}, \dot{c} \rangle \neq 0$; entonces si $N \wedge \dot{N} = \lambda \dot{c}$, $\langle \dot{N}, \dot{c} \rangle = 0$, luego \dot{c} y $N \wedge \dot{N}$ son l.i.

La condición $\{\dot{c}, Y\}$ l.i. hace que la superficie $\bar{x}(s,t)$ no pueda ser la desarrollable tangencial.

DEMOSTRACION: Veamos que $\bar{x}(s,t)$ es desarrollable: $\langle N, Y \rangle = 0$ implica que $\langle \dot{N}, Y \rangle + \langle N, \dot{Y} \rangle = 0$, pero $0 = \langle L\dot{c}, Y \rangle = -\langle \dot{N}, Y \rangle$, luego $\langle N, \dot{Y} \rangle = 0$. Por lo tanto $Y \wedge \dot{Y}$ está en la dirección de N , luego $\langle \dot{c}, Y \wedge \dot{Y} \rangle = 0$. Evidentemente $\bar{x}(0,t) = c(t)$, i.e. la superficie contiene a $c(I)$. A lo largo de $c(t) = \bar{x}(0,t)$, el vector normal a $\bar{x}(s,t)$ es $\bar{N}(0,t) = \frac{1}{\| \cdot \|} (\dot{c}(t) + 0 \dot{Y}(t)) \wedge Y(t) = \frac{1}{\| \cdot \|} \dot{c}(t) \wedge Y(t)$, que está en la dirección de $N(\bar{x}(0,t))$, luego M y \bar{x} son paralelas a lo largo de c . De aquí $\bar{N}(0,t) = \pm N(t) \equiv N(\bar{x}(0,t))$, luego, si $\frac{\bar{\nabla}}{dt}$ (resp. $\frac{\nabla}{dt}$) es la derivada covariante a lo largo de c en $\bar{x}(s,t)$ (resp. M), entonces:

$$\frac{\bar{\nabla}}{dt} Y = \frac{dY}{dt} - \langle \frac{dY}{dt}, \bar{N} \rangle \bar{N} = \frac{dY}{dt} - \langle \frac{dY}{dt}, N \rangle N = \frac{\nabla}{dt} Y. \quad \text{O.}$$

IV.32 COROLARIO: Un campo vectorial tangente $Y(t)$ a lo largo de $c(t)$ es paralelo a lo largo de c en M sii lo es a lo largo de c en \bar{x} (M , c y \bar{x} como en IV.31).

IV.33. DEFINICION: La superficie $\bar{x}(s,t) = c(t) + s Y(t)$ definida en IV.31 se

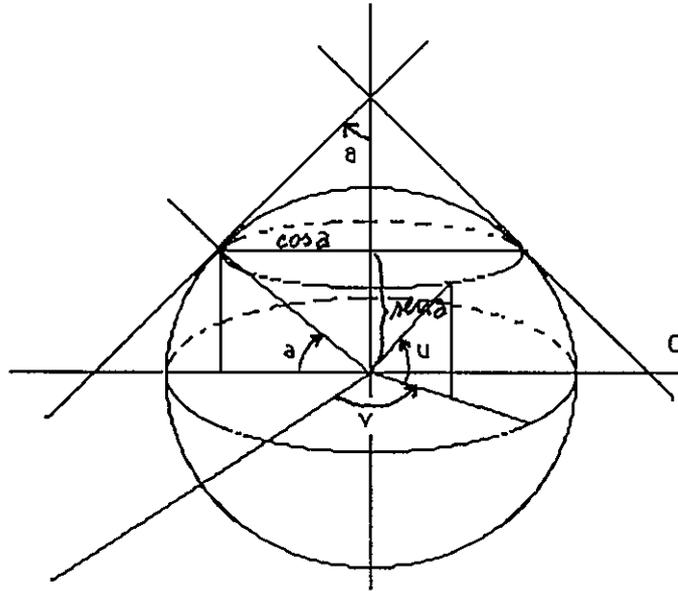
llama desarrollable osculadora de M a lo largo de c .

IV.34. Cuando $\dot{c}(t)$ no es una dirección asintótica para todo $t \in I$ y se toma $Y = N \wedge \dot{N}$, la desarrollable osculadora \tilde{x} de M se puede interpretar geoméricamente del siguiente modo: "Consideremos la familia $\{T_{c(t)}M\}_{t \in I}$ de planos tangentes a M a lo largo de la curva $c(t)$. Para Δt pequeño, los dos planos $T_{c(t)}M$ y $T_{c(t+\Delta t)}M$ de la familia se cortarán a lo largo de una recta paralela al vector $\{N(t) \wedge N(t+\Delta t)\}/\Delta t$. Cuando $\Delta t \rightarrow 0$, esta recta se aproximará a la posición límite paralela al vector $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t) \wedge N(t+\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0}$

$N(t) \wedge \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = N(t) \wedge \dot{N}(t) = Y(t)$. Resulta entonces que las rectas generatrices de la desarrollable osculadora de M a lo largo de c son las posiciones límites de las intersecciones de planos próximos de la familia $\{T_{c(t)}M\}$, lo que expresa diciendo que la desarrollable osculadora en la envolvente de la familia de planos tangentes a M a lo largo de $c(t)$.

IV.35. NOTA: La desarrollable osculadora nos permite interpretar el transporte paralelo desde el punto de vista extrínseco de la siguiente manera. Veremos mas adelante (teorema de Minding) que una superficie con curvatura de Gauss $K = 0$ es localmente isométrica al plano. Por lo tanto la desarrollable osculadora es localmente isométrica al plano (cfr. III.30). Sea $\mathcal{D} \equiv \tilde{x}(s,t)$ la desarrollable osculadora de M a lo largo de $c(t)$. Dado $p = c(t_0)$ existe un abierto V de \mathcal{D} conteniendo a p y una isometría $\varphi: V \rightarrow \varphi(V) \subset \mathbb{R}^2$ de V sobre un abierto del plano \mathbb{R}^2 . Para obtener el transporte paralelo de $Y_0 \in T_pM$ a lo largo de c desde $c(t_0)$ hasta $c(t_1)$ con $c[t_0, t_1] \subset V$ bastará, por IV.32, calcular el transporte paralelo en \mathcal{D} y, para ello, por ser φ una isometría, bastará tomar el transporte paralelo de $d\varphi(p) Y_0$ a lo largo de $\varphi \circ c$ desde $c(t_0)$ hasta $c(t_1)$ y tomar luego la imagen del transportado por $d\varphi(c(t_1))^{-1}$. Para obtener el transporte paralelo entre dos puntos de c en los que no se cumplan las condiciones anteriores, se divide c en segmentos de curva en los que se cumple y se calcula el transporte paralelo en cada trozo.

IV.36. EJEMPLO: Consideremos la esfera S^2 con la parametrización $x(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$, $(u,v) \in]\pi/2, \pi/2[\times]0, 2\pi[$. Sea $c(t)$ el paralelo de S^2 dado por $c(t) = x(a,t)$ (i.e. $u(t)=a$, $v(t)=t$). El vector unitario normal "hacia afuera" de S^2 a lo largo de c es: $N \circ c(t) = c(t) = (\cos a \cos t, \cos a \sin t, \sin a)$. Como en la esfera no hay direcciones asintóticas, podemos tomar $Y(t) = (N \wedge \dot{N})(t)$. Ahora bien, $\dot{N}(t) = (-\cos a \sin t, \cos a \cos t, 0)$ y



$$N \wedge \dot{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos a \cos t & \cos a \sin t & \sin a \\ -\cos a \sin t & \cos a \cos t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(\cos a) (-(\sin a) (\cos t), -(\sin a) (\sin t), \cos a).$$

Entonces la desarrollable osculadora es $\bar{x}(s,t) = c(t) + s N \wedge \dot{N}(t) =$
 $= (\cos a \cos t, \cos a \sin t, \sin a) + s \cos a (-\sin a \cos t, -\sin a \sin t, \cos a).$

Distinguimos dos casos:

1) $a = 0$ (el paralelo $c(t)$ es el ecuador). \bar{x} es el cilindro tangente al ecuador $\bar{x}(s,t) = (\cos t, \sin t, s)$.

2) $a \neq 0$ ($c(t)$ un paralelo no ecuatorial). La desarrollable osculadora es un cono en este caso. El v\u00e9rtice del cono es el punto $\bar{x}(s_0, t)$ para el que $\bar{x}(s_0, t)$ no depende de t , i.e. el punto para el que

$(\cos a \cos t - s \cos a \sin a \cos t, \cos a \sin t - s \cos a \sin a \sin t, \sin a + s \cos^2 a)$ no depende de t , i.e. el v\u00e9rtice se obtiene para $s = 1/\sin a$ y es $\bar{x}(1/\sin a, t) = (0, 0, 1/\sin a)$.

Calcularemos el transporte paralelo para este caso.

Definimos una isometr\u00eda $\varphi: \bar{x}([- \infty, 1/(\sin a)[\times]0, 2\pi[) \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ por

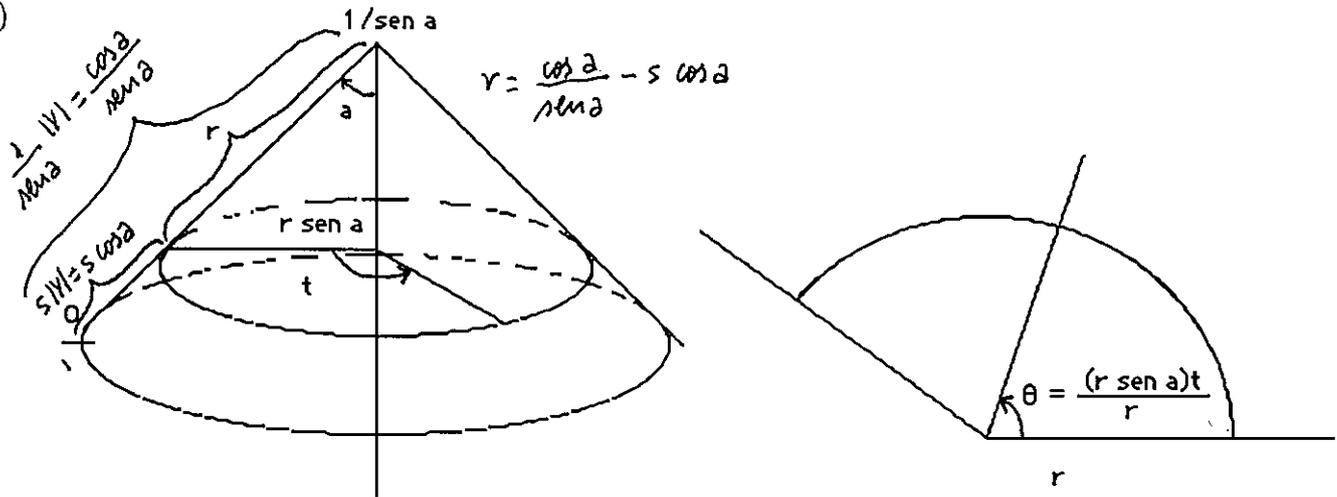
$$\varphi(\bar{x}(s,t) = (r(s,t) \cos \theta(s,t), r(s,t) \sin \theta(s,t),$$

$$\text{con } r(s,t) = \cos a \left(\frac{1}{\sin a} - s \right), \quad \theta(s,t) = (\sin a) t,$$

siendo D el subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 definido por

$$D = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) / 0 < r < + \infty, 0 < \theta < 2\pi \sin a\}.$$

φ es un difeomorfismo por ser \bar{x} un sistema de coordenadas del abierto considerado del cono y $(r,\theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ otro sistema de coordenadas del abierto considerado de \mathbb{R}^2 y ser $(s,t) \mapsto (r(s,t), \theta(s,t))$ un difeomorfismo. Adem\u00e1s es una isometr\u00eda, pues si tomamos para el cono el sistema de coordenadas \bar{x} y para \mathbb{R}^2 el sistema de coordenadas $\varphi \circ \bar{x}$, se tiene que :



$$\bar{g}_{SS} = \langle \bar{x}_S, \bar{x}_S \rangle = \cos^2 a, \quad \bar{g}_{St} = \langle \bar{x}_S, \bar{x}_t \rangle = 0, \quad \bar{g}_{tt} = \langle \bar{x}_t, \bar{x}_t \rangle = \cos^2 a (1 - s \operatorname{sen} a)^2.$$

$$g_{SS}^\varphi = \langle (\varphi \circ \bar{x})_S, (\varphi \circ \bar{x})_S \rangle = \langle -\cos a (\cos (t \operatorname{sen} a), \operatorname{sen} (t \operatorname{sen} a)), -\cos a (\cos (t \operatorname{sen} a), \operatorname{sen} (t \operatorname{sen} a)) \rangle = \cos^2 a,$$

$$g_{St}^\varphi = \langle (\varphi \circ \bar{x})_S, (\varphi \circ \bar{x})_t \rangle = \langle -\cos a (\cos (t \operatorname{sen} a), \operatorname{sen} (t \operatorname{sen} a)), (\cos a) \left(\frac{1}{\operatorname{sen} a} - s \right) (-\operatorname{sen} a \operatorname{sen} (t \operatorname{sen} a), \operatorname{sen} a \cos (t \operatorname{sen} a)) \rangle = 0,$$

$$g_{tt}^\varphi = \langle (\varphi \circ \bar{x})_t, (\varphi \circ \bar{x})_t \rangle = (\cos a)^2 \left(\frac{1}{\operatorname{sen} a} - s \right)^2 \times \langle (-\operatorname{sen} a \operatorname{sen} (t \operatorname{sen} a), \operatorname{sen} a \cos (t \operatorname{sen} a)), (\operatorname{sen} a \operatorname{sen} (t \operatorname{sen} a), \operatorname{sen} a \cos (t \operatorname{sen} a)) \rangle = \cos^2 a (1 - s \operatorname{sen} a)^2,$$

lo que prueba, por IV.9, que φ es una isometría.

Vamos a calcular el transporte paralelo a lo largo de $c(t)$ de $Y_0 = c'(\frac{\pi}{2}) \in T_{c(\frac{\pi}{2})} S^2$ desde $t = \pi/2$ hasta $t = 3\pi/2$. Siguiendo el procedimiento indicado en IV.35, calculamos primero

$$d\varphi(Y_0) = d\varphi(c'(\frac{\pi}{2})) = d\varphi(\bar{x}_t(0, \pi/2)) = (\varphi \circ \bar{x})_t(0, \pi/2) = (-\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} a), \cos(\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} a)) \cos a.$$

El transporte paralelo en \mathbb{R}^2 de $d\varphi(Y_0)$ a lo largo de $\varphi \circ c$ es:

$$P_{\varphi \circ c}^{\frac{3\pi/2}{\pi/2}} d\varphi(Y_0) = (-\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} a), \cos(\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} a)) \cos a.$$

El transporte paralelo en $\bar{x}(s, t)$ (y por tanto en S^2) a lo largo de c será:

$$P_c^{\frac{3\pi/2}{\pi/2}} Y_0 = d\varphi(\bar{x}(0, 3\pi/2))^{-1} P_{\varphi \circ c}^{\frac{3\pi/2}{\pi/2}} d\varphi(Y_0) = d\varphi(\bar{x}(0, 3\pi/2))^{-1} (-\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} a), \cos(\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} a)) \cos a.$$

Si escribimos $P_{\varphi \circ c}^{\frac{3\pi/2}{\pi/2}} d\varphi(Y_0) = \xi^t(\varphi \circ \bar{x})_t(0, 3\pi/2) + \xi^S(\varphi \circ \bar{x})_S(0, 3\pi/2)^{(*)}$,

entonces $P_{\varphi \circ c}^{\frac{3\pi/2}{\pi/2}} Y_0 = d\varphi^{-1}(\bar{x}(0, 3\pi/2)) (\xi^t(\varphi \circ \bar{x})_t(0, 3\pi/2) +$

$$+ \xi^S(\varphi \circ \bar{x})_S(0, 3\pi/2) = \xi^t \bar{x}_t(0, 3\pi/2) + \xi^S \bar{x}_S(0, 3\pi/2).$$

Luego hemos de calcular ξ^t y ξ^S . Para ello:

$$(\varphi \circ \bar{x})_t(0, 3\pi/2) = \cos a \left(-\sin\left(\frac{3\pi}{2} \sin a\right), \cos\left(\frac{3\pi}{2} \sin a\right) \right);$$

$$(\varphi \circ \bar{x})_S(0, 3\pi/2) = \left(-\cos a \cos\frac{3\pi}{2} \sin a, -\cos a \sin\frac{3\pi}{2} \sin a \right);$$

con lo cual, por (*), ξ^t y ξ^S vienen determinados por

$$-\xi^t \sin\left(\frac{3\pi}{2} \sin a\right) \cos a - \xi^S \cos a \cos\left(\frac{3\pi}{2} \sin a\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} \sin a\right) \cos a$$

$$\xi^t \cos\left(\frac{3\pi}{2} \sin a\right) \cos a - \xi^S \cos a \sin\left(\frac{3\pi}{2} \sin a\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin a\right) \cos a,$$

de donde

$$\xi^S = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \sin a\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} \sin a\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin a\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2} \sin a\right) \right) = -\sin(\pi \sin a)$$

$$\xi^t = \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin a\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2} \sin a\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin a\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} \sin a\right) = \cos(\pi \sin a),$$

luego

$$\begin{aligned} P_{c \pi/2}^{3\pi/2} Y_o &= -\sin(\pi \sin a) \cos a (0, \sin a, \cos a) + \cos(\pi \sin a) (\cos a, 0, 0) = \\ & \qquad \qquad \qquad N \wedge c' \qquad \qquad \qquad c' \\ &= \cos a (\cos(\pi \sin a), -\sin(\pi \sin a) \sin a, -\sin(\pi \sin a) \cos a) \end{aligned}$$

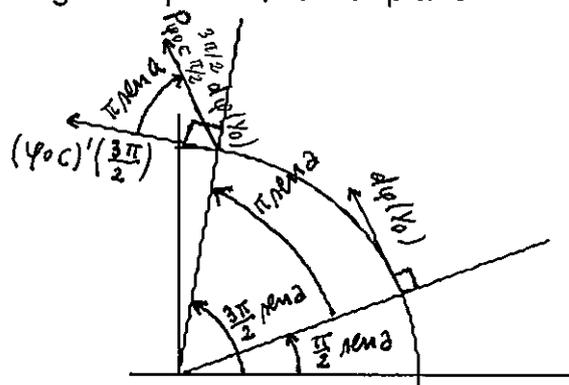
Por ser $P_{c \pi/2}^{3\pi/2}$ una isometría, $|P_{c \pi/2}^{3\pi/2} Y_o| = |Y_o|$, se tiene entonces que

$$\cos \angle(P_{c \pi/2}^{3\pi/2} Y_o, \bar{x}_t(0, 3\pi/2)) = \frac{\langle P_{c \pi/2}^{3\pi/2} Y_o, \bar{x}_t(0, 3\pi/2) \rangle}{|P_{c \pi/2}^{3\pi/2} Y_o| |\bar{x}_t(0, 3\pi/2)|} = |\text{como } \bar{g}_{St} = 0| =$$

$$= \frac{\xi^t |\bar{x}_t(0, 3\pi/2)|^2}{|Y_o| |\bar{x}_t(0, 3\pi/2)|} = \frac{\xi^t \sqrt{\bar{g}_{tt}}(0, 3\pi/2)}{\sqrt{\bar{g}_{tt}}(0, \pi/2)} = |\text{por la expresión de } \bar{g}_{tt}| = \xi^t = \cos(\pi \sin a),$$

a),

luego el ángulo que forman $P_{c \pi/2}^{3\pi/2} Y_o$ y $c'(3\pi/2)$ es $\pi \sin a$, que es igual (como corresponde al hecho de ser φ una isometría) al ángulo que forman sus correspondientes imágenes por $d\varphi$ en el plano



Lección 19ª: GEODESICAS

§8. Geodésicas y curvatura geodésica.

Las rectas en el plano pueden ser caracterizadas de dos formas: como aquellas curvas que minimizan la distancia entre cualesquiera dos de sus puntos y como aquellas curvas que pueden ser recorridas sin aceleración. El concepto que generaliza el de recta en las superficies es el de geodésica. Para definir esa generalización usaremos la segunda caracterización de recta, restringiendo incluso un poco más el concepto. Las geodésicas de una superficie serán no solo las curvas que pueden recorrerse sin aceleración, sino las curvas recorridas sin aceleración. Con esta definición resultará que el concepto de geodésica está ligado no solo a la curva geométrica, sino también a la parametrización de la misma, de modo que para que una curva sea geodésica ha de tener una parametrización especial.

IV.37. DEFINICION: Una curva regular $c: I \rightarrow M$ es una geodésica sii $c'(t)$ es un campo vectorial paralelo a lo largo de c , i.e. $\frac{\nabla c'}{dt} = 0$ en todo $t \in I$.

IV.38. PROPOSICION: Si $c(t)$ es una geodésica, entonces $|c'(t)| = cte$ y $t = as+b$, siendo s el parámetro longitud de arco de c , y a, b constantes reales. (Recuérdese que si t no es el parámetro longitud de arco, $\frac{\nabla c'(s)}{ds} = 0 \Leftrightarrow \frac{\nabla c'(t)}{dt} = 0$).

DEMOSTRACION: Si $c(t)$ es geodésica, $c'(t)$ es paralelo a lo largo de c y, por IV.27, $|c'(t)| = a$ es constante. Entonces el parámetro longitud de arco s de c viene dado por $s(t) = \int_d^t |c'(t)| dt = a(t-d) = at - ad = at - b$, con $b = ad$. \hat{O} .

IV.39. NOTA: En el plano $\frac{\nabla c'}{dt} = \frac{dc'}{dt}$, luego $c(t)$ es una geodésica sii $c(t) = tX_0 + Y_0$, i.e, una recta parametrizada por un parámetro $t = as + b$, siendo s la longitud de arco de c ($|c'| = |X_0| = a$, $b = ad$).

En el plano las rectas son también las curvas de curvatura cero. Para caracterizar de igual modo las geodésicas vamos a definir una curvatura intrínseca para las curvas en una superficie.

IV.40. DEFINICION: Dada una curva regular $c: I \rightarrow M$, llamaremos referencia de Frenet (intrínseca) de c en M a la base ortonormal $\{\bar{e}_1(t), \bar{e}_2(t)\}$ de $T_{c(t)}M$ a lo largo de $c(t)$ definida por $\bar{e}_1(t) = c'(t) / |c'(t)| = e_1(t)$ y $\bar{e}_2(t)$ elegido de modo que $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ sea una base ortonormal ($\langle \bar{e}_i(t), \bar{e}_j(t) \rangle = \delta_{ij}$) con la misma orientación que $\{x_1, x_2\}$ (la base asociada a un sistema de coordenadas (U, x)).

Evidentemente esta definición solo tiene sentido para curvas $c: I \rightarrow M$ tales que existe una familia $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de sistemas de coordenadas de M de modo que $c(I) \subset \bigcup_{\alpha \in A} x_\alpha(U_\alpha)$ y $\bigcup_{\alpha \in A} x_\alpha(U_\alpha)$ sea una superficie orientable ($\bigcup_{\alpha \in A} x_\alpha(U_\alpha)$ es siempre una superficie por ser un abierto de la superficie M).

Esta definición es equivalente a la siguiente: sea $N = \frac{x_1 \wedge x_2}{|x_1 \wedge x_2|}$. Entonces $\tilde{e}_1(t) = e_1(t)$ y $\tilde{e}_2(t) = N \wedge \tilde{e}_1(t)$. En efecto, $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ verifica las condiciones de la definición anterior y un \tilde{e}_2 con estas condiciones es único.

IV.41. NOTA: Obsérvese que $\langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_1 \rangle = 1$ implica $\langle \frac{\nabla \tilde{e}_1}{dt}, \tilde{e}_1 \rangle = 0$ y, por lo tanto, $\frac{\nabla \tilde{e}_1}{dt}$ está en la dirección de \tilde{e}_2 . Ello permite escribir

$$(IV.41.1) \quad \frac{\nabla \tilde{e}_1}{dt} = |c'(t)| k_g(t) \tilde{e}_2(t).$$

La expresión (IV.41.1) hace ver de nuevo que la referencia de $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ es intrínseca, aún cuando $\tilde{e}_2 = N \wedge \tilde{e}_1$, como corresponde a la definición de $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ dada en IV.40.

IV.42. DEFINICION: Se llama curvatura geodésica k_g de la curva c en M a la función $k_g(t)$ definida por la expresión (IV.41.1). Resulta de esta expresión que:

$$(IV.42.1) \quad k_g(t) = \frac{1}{|c'(t)|} \langle \frac{\nabla \tilde{e}_1}{dt}, \tilde{e}_2 \rangle(t).$$

IV.43. PROPOSICION: Sea c una curva regular en M , k su curvatura, k_g su curvatura geodésica y k_N su curvatura normal, entonces $k e_2 = k_g \tilde{e}_2 + k_N N$. Es decir, k_g es la componente tangencial de la curvatura de la curva.

DEMOSTRACION: $|c'| k e_2 = \frac{de_1}{dt} = \frac{\nabla e_1}{dt} + \langle Lc', e_1 \rangle N = |c'| k_g \tilde{e}_2 + |c'| \langle L \frac{c'}{|c'|}, e_1 \rangle N =$
 $= |c'| (k_g \tilde{e}_2 + k_N N)$, ya que $k_N = k_N(e_1) = II(e_1)/I(e_1) = \langle L e_1, e_1 \rangle = \langle L \frac{c'}{|c'|}, e_1 \rangle$.

IV.44. PROPOSICION: k_g es independiente de la parametrización de c . Si ^{conservando la orientación} cambia la orientación de $\{x_1, x_2\}$, entonces k_g cambia de signo.

DEMOSTRACION: De IV.43 resulta que $k_g = k \langle e_2, \tilde{e}_2 \rangle$. Si se hace un cambio de parámetro de c conservando la orientación, no varían k , e_2 y \tilde{e}_2 , luego no varía k_g . Si se hace un cambio de parámetro de c invirtiendo la orientación, k no varía, e_1 cambia de signo, e_2 ^{no} cambia de signo y $\tilde{e}_2 = N \wedge \tilde{e}_1$ cambia de

signo (pues N no varía al no depender de c), luego k_g ^{cambia de signo} ~~no varía~~. Si se cambia la orientación de $\{x_1, x_2\}$ cambia el signo de N , luego cambia el signo de $\tilde{e}_2 = N \wedge \tilde{e}_1$, sin que cambie lo demás, por lo tanto k_g cambia de signo.

IV.45. PROPOSICION: (Caracterización de las geodésicas): Una curva regular $c: I \rightarrow M$ tiene k_g cero sii es una geodésica cuando se parametriza respecto de su longitud de arco.

DEMOSTRACION: Por IV.44, $k_g(t) = 0$ equivale a $k_g(s) = 0$, lo que es equivalente a $\frac{\nabla e_1}{ds}(s) = 0 \quad \forall s$, i.e. $\frac{\nabla c'}{ds}(s) = 0$, es decir, a que $c(s)$ sea una geodésica. \hat{O} .

Vamos a ver ahora una interpretación geométrica de la curvatura geodésica semejante a la que se dió para la curvatura de una curva plana:

IV.46. PROPOSICION: La curvatura geodésica de una curva es la derivada del ángulo que la tangente a la curva forma con una dirección paralela a lo largo de la curva.

DEMOSTRACION: Sea $c: I \rightarrow M$ una curva parametrizada con respecto a la longitud de arco s , $Y(s)$ un campo paralelo a lo largo de c y de norma 1. Si φ es el ángulo que forman $c' = e_1 = \tilde{e}_1$, entonces $Y(s) = \cos \varphi(s) \tilde{e}_1(s) + \sin \varphi(s) \tilde{e}_2(s)$ ^{Y con} de donde:

$$(\Delta) \quad 0 = \frac{\nabla Y}{ds}(s) = -(\sin \varphi) \varphi' \tilde{e}_1 + \cos \varphi k_g \tilde{e}_2 + (\cos \varphi) \varphi' \tilde{e}_2 + \sin \varphi \frac{\nabla e_2}{ds}.$$

Pero $\langle \tilde{e}_2, \tilde{e}_2 \rangle = 1$ implica $\langle \frac{\nabla \tilde{e}_2}{ds}, \tilde{e}_2 \rangle = 0$, luego $\frac{\nabla \tilde{e}_2}{ds} = \langle \frac{\nabla \tilde{e}_2}{ds}, \tilde{e}_1 \rangle \tilde{e}_1$ ^(*)
 $= - \langle \tilde{e}_2, \frac{\nabla \tilde{e}_1}{ds} \rangle \tilde{e}_1 = -k_g \tilde{e}_1$, donde hemos aplicado que $\langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \rangle = 0$ en (*).

Sustituyendo en la igualdad anterior (Δ) :

$$0 = (-\sin \varphi) \varphi' - (\sin \varphi) k_g \tilde{e}_1 + ((\cos \varphi) k_g + (\cos \varphi) \varphi') \tilde{e}_2, \text{ de donde}$$

$$(\sin \varphi) (\varphi' + k_g) = 0 \quad \text{y} \quad (\cos \varphi) (\varphi' + k_g) = 0, \text{ luego } k_g = -\varphi'. \quad \hat{O}$$

NOTA: Obsérvese que la proposición IV.46 da un nuevo método para calcular transportados paralelos a lo largo de una curva c .

En el plano, por un punto y en una dirección pasa una única recta. El resultado análogo para las geodésicas es el siguiente:

IV.47. PROPOSICION: Dado un punto $p \in M$, $Y \in T_p M$, $Y \neq 0$, existe un $\epsilon > 0$ y existe una única geodésica $c:]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M$ tal que $c(0) = p$ y $c'(0) = Y$.

DEMOSTRACION: Sea (U, x) un sistema de coordenadas en p ; $c(t) = x(u^1(t), u^2(t))$ una curva de M . Por (IV.28) $c(t)$ es una geodésica de M verificando $c(0) = p$ y $c'(0) = Y$ sii se verifica el sistema de ecuaciones diferenciales

- $\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0$; $k = 1, 2$, con $(u^1(0), u^2(0)) = x^{-1}(p)$ y $\frac{du^i}{dt}(0) = Y^i$,
siendo $Y = \sum_{i=1}^2 Y^i x_i(p)$. Entonces la proposición resulta del teorema de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Vamos a ver ahora algunos ejemplos de geodésicas.

IV.48. EN LA ESFERA: Las geodésicas son las circunferencias máximas. En efecto: tales circunferencias se obtienen por intersección de la esfera con planos pasando por el origen. El vector normal e_2 de una tal circunferencia en un punto está en la dirección del radio de la esfera que, a su vez, está en la dirección del vector normal a la esfera N . Por lo tanto, resulta de IV.43 que la curvatura geodésica de una tal circunferencia es cero y, por IV.45, es una geodésica cuando se parametriza con respecto a su longitud de arco.

○ Por otra parte, para todo punto p de la esfera y todo vector X tangente a la esfera en p , el plano que pasa por el centro de la esfera y contiene a p y $p + X$ corta a la esfera en una circunferencia máxima c que pasa por p y tiene X como vector tangente. Por IV.47 y por lo que acabamos de ver, esta circunferencia c es la única geodésica pasando por p y con X como vector tangente. Por lo tanto las circunferencias máximas son todas las geodésicas de la esfera.

○ **IV.49. EN EL CILINDRO:** Los mismos argumentos utilizados en IV.48 muestran que las circunferencias que se obtienen por intersección del cilindro con planos perpendiculares al eje del cilindro son geodésicas del cilindro. También lo son las rectas generatrices pues en ellas $k_g = k = 0$. Si queremos obtener todas las geodésicas habremos de enfocar el problema de otro modo. Observemos que el cilindro $x(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$ es localmente isométrico al plano mediante una isometría de la forma $(u, v) \mapsto x(\frac{u}{r}, v)$. Como las geodésicas del plano son de la forma $c(s) = (\alpha + as, \beta + bs)$, las del cilindro son localmente de la forma $\tilde{c}(s) = x(\frac{1}{r}(\alpha + as), \beta + bs) = (r \cos(\frac{\alpha}{r} + \frac{a}{r}s), r \sin(\frac{\alpha}{r} + \frac{a}{r}s), \beta + bs)$, que son hélices apoyadas en el cilindro, se convierten en circunferencias cuando $b = 0$ y en rectas cuando $a = 0$ (las dos familias de geodésicas obtenidas antes por otro razonamiento).

Lección 20ª: LA APLICACION EXPONENCIAL

§9. Aplicación exponencial.

En esta lección introduciremos un tipo especial de sistema de coordenadas con vistas a su posterior aplicación geométrica. Como vimos en el apartado anterior, dado un punto $p \in M$ y un vector $X \in T_pM$, existe una única geodésica: $\gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M / \gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = X$. Para indicar la dependencia de la geodésica γ respecto de X la denotaremos por $\gamma(t, X)$ en lugar de $\gamma(t)$.

IV.50. LEMA: Sea $p \in M$, $X \in T_pM$ y $\gamma(t, X):]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ la única geodésica verificando $\gamma(0, X) = p$, $\gamma'(0, X) = X$. Se tiene que para todo $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ la geodésica $\gamma(t, \lambda X)$ está definida sobre el intervalo $] -\varepsilon/\lambda, \varepsilon/\lambda[$ y verifica: $\gamma(t, \lambda X) = \gamma(\lambda t, X)$.

DEMOSTRACION: Bastará con ver que $\gamma(t, \lambda X) = \gamma(\lambda t, X)$, pues de aquí se sigue que $\gamma(t, \lambda X)$ está definida sobre $] -\varepsilon/\lambda, \varepsilon/\lambda[$. Definamos $c:]-\varepsilon/\lambda, \varepsilon/\lambda[\rightarrow M$ por $c(t) = \gamma(\lambda t, X)$. Esta curva verifica: $c(0) = \gamma(0, X) = p$; $c'(0) = \lambda \gamma'(\lambda 0, X) = \lambda X$ y, además, $\frac{\nabla c'(t)}{dt} = \nabla_{c'} c' = \lambda^2 \nabla_{\gamma'(\lambda t, X)} \gamma'(\lambda t, X) = \lambda^2 \frac{\nabla \gamma'(s, X)}{ds} \Big|_{s=\lambda t} = 0$, i.e., c es geodésica, luego, por definición de $\gamma(t, \lambda X)$, $c(t) = \gamma(t, \lambda X)$. c.q.d. \hat{O} .

IV.51. DEFINICION: Dado $X \in T_pM$, se define la aplicación exponencial por $\exp_p X = \gamma(1, X)$ para $X \neq 0$ en los puntos $X \in T_pM$ en los que $\gamma(1, X)$ esté definida, y $\exp_p 0 = p$.

IV.52. NOTA: Tomando $\lambda = 1/|X|$ en el lema IV.50, se tiene que, si $X \neq 0$,

$$(IV.52.1) \quad \gamma(1, X) = \gamma\left(|X|, \frac{X}{|X|}\right).$$

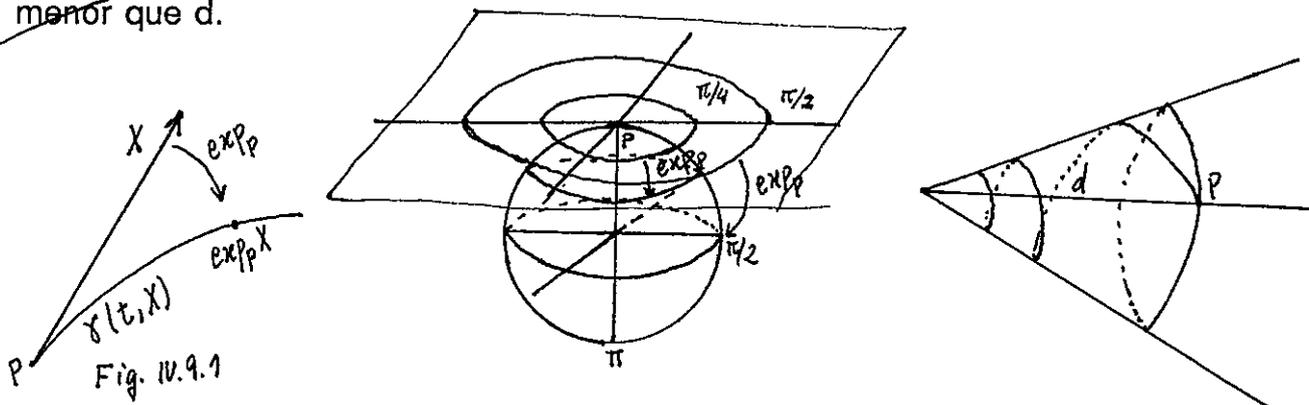
Como $\gamma\left(t, \frac{X}{|X|}\right)$ es una geodésica con vector tangente unitario en el origen, se sigue que esta curva está parametrizada respecto de su longitud de arco. Entonces la fórmula (IV.52.1.) permite describir geoméricamente la aplicación \exp_p de la siguiente forma: "Dado $X \in T_pM$, $\exp_p X$ es el punto de la geodésica tangente a X en p que se obtiene tomando sobre esta geodésica una longitud $|X|$ medida a partir de p en la dirección de X ", i.e. " $\exp_p X$ es el punto de M obtenido 'doblando' el vector tangente X a lo largo de la geodésica pasando por p y tangente a X " (fig. IV.9.1)

IV.53. EJEMPLOS: a) Esfera unidad S^2 . En este caso $\exp_p X$ está definida para todo $X \in T_pS^2$ y todo $p \in S^2$, como resulta inmediatamente del hecho de que la geodésica que pasa por p tangente a X es la circunferencia máxima cumpliendo estas condiciones. Si $-p$ es el punto antípoda se p se tiene que para todo número natural n :

$$\exp_p X = p \text{ si } |X| = 2\pi n \text{ y } \exp_p X = -p \text{ si } |X| = (2n+1)\pi.$$

Sin embargo, sobre $S^2 - \{-p\}$, \exp_p está definida solo sobre los $X \in T_p M$ tales que $|X| < \pi$.

b) Cono menos el vértice. Si p es un punto de esta superficie y d es su distancia al vértice, entonces \exp_p no está definida para los vectores en la dirección de la generatriz y sentido hacia el vértice del cono y de módulo ~~menor~~ ^{mayor} que d .



En la siguiente proposición veremos que, al menos en un entorno de p , \exp_p está siempre definida.

IV.54. PROPOSICION: Dado $p \in M$, existe $\epsilon > 0$ tal que \exp_p está definida y es diferenciable en $B_\epsilon(0) \subset T_p M$ ($B_\epsilon(0) \equiv$ disco abierto de radio ϵ en $T_p M$).

DEMOSTRACION: Sea (U, x) un sistema de coordenadas de M en p . Según vimos en IV.47, una geodésica pasando por $p = x(u_0^1, u_0^2)$ con vector tangente $X_0 = \sum X_0^i x_i \in T_p M$ es la curva cuyas coordenadas verifican el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$(IV.54.1) \quad \ddot{u}^k + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k \dot{u}^i \dot{u}^j = 0, \quad k = 1, 2$$

con las condiciones iniciales

$$(IV.54.2) \quad \dot{u}^i(0) = X_0^i \quad (IV.54.3) \quad u^i(0) = u_0^i, \quad i = 1, 2.$$

Por teoría de ecuaciones diferenciales se tiene que, dado el sistema de ecuaciones (IV.54.1), con las condiciones (IV.54.3), existen $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ y existe una única aplicación $\varphi \equiv (u^1, u^2) :]-\epsilon_1, \epsilon_1[\times B_{\epsilon_2}(0) \xrightarrow{(1)} U \subset \mathbb{R}^2$ tales que

$$u^i(0, (X^1, X^2)) = u_0^i \quad \frac{\partial u^i}{\partial t}(0, (X^1, X^2)) = X^i, \quad i = 1, 2,$$

y, para cada $(X^1, X^2) \in B_{\epsilon_2}(0)$, la curva $t \mapsto u^k(t, (X^1, X^2))$, $k = 1, 2$, $t \in]-\epsilon_1, \epsilon_1[$, es solución de (IV.54.1).

Definamos $\mathcal{J} :]-\epsilon_1, \epsilon_1[\times B_{\epsilon_2}(0) \rightarrow x(U) \subset M$ por $\mathcal{J} = x \circ \varphi$. \mathcal{J} verifica:

$$\mathcal{J}(0, (X^1, X^2)) = x(u_0^1, u_0^2) = p \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}(0, (X^1, X^2)) \equiv \mathcal{J}'(0, (X^1, X^2)) = dx(u_0)(X^1, X^2) \equiv X \in T_p M.$$

¹Obsérvese que $B_{\epsilon_2}(0) \subset \mathbb{R}^2$, no en $T_p M$.

Como $dx(u_0)(B_{\epsilon_2}(0))$ es un abierto de T_pM , existe $\epsilon_2^1 > 0$ tal que el disco abierto de centro el origen y radio ϵ_2^1 en T_pM verifica $B_{\epsilon_2^1}(0) \subset dx(u_0)(B_{\epsilon_2}(0)) \subset T_pM$. Definimos entonces

$$\gamma:]-\epsilon_1, \epsilon_1[\times B_{\epsilon_2^1}(0) \longrightarrow x(U) \subset M \text{ por } \gamma(t, X) = \gamma(t, dx(u_0)^{-1}X),$$

que es diferenciable por ser $dx(u_0)^{-1}$ un difeomorfismo y verifica:

$\gamma(0, X) = \gamma(0, dx(u_0)^{-1}X) = p$, $\gamma'(0, X) = \gamma'(0, dx(u_0)^{-1}X) = dx(u_0)dx(u_0)^{-1}X = X$, y $x^{-1}(\gamma(t, X)) = x^{-1}(\gamma(t, dx(u_0)^{-1}X)) = x^{-1}(x \circ \varphi(t, dx(u_0)^{-1}X)) = \varphi(t, dx(u_0)^{-1}X)$, luego las coordenadas u^k de las curvas $t \longmapsto \gamma(t, X)$ verifican (IV.54.1) y son geodésicas pasando por p en $t = 0$ y con vector tangente X .

Por el lema IV.50, tomando $\lambda = \epsilon_1/2$, se tiene que la curva $t \longmapsto \gamma(t, \frac{\epsilon_1}{2}X) = \gamma(\frac{\epsilon_1}{2}t, X)$ es una geodésica definida para $t \in]-\epsilon_1/(\epsilon_1/2), \epsilon_1/(\epsilon_1/2)[=]-2, 2[$, y esto para todo X tal que $|X| < \epsilon_2^1$, por tanto $|\frac{\epsilon_1}{2}X| < \frac{\epsilon_1 \epsilon_2^1}{2}$.

Resulta de todo ello que, si $\epsilon = (\epsilon_1 \epsilon_2^1)/2$, entonces existe una aplicación diferenciable $\gamma:]-2, 2[\times B_\epsilon(0) \longrightarrow M$, $B_\epsilon(0) \subset T_pM$ tal que $t \longmapsto \gamma(t, X)$ es una geodésica verificando $\gamma(0, X) = X$. Como consecuencia, la aplicación $\exp_p: B_\epsilon(0) \longrightarrow M / X \longmapsto \gamma(1, X)$ está bien definida y es diferenciable. \square

IV.55. PROPOSICION: Existe un $\epsilon > 0$ tal que $\exp_p: B_\epsilon(0) \longrightarrow M$ es un difeomorfismo de un entorno U de 0 en T_pM sobre su imagen en M .

DEMOSTRACION: Por el teorema de la función inversa, bastará probar que $d \exp_p(0)$ es un isomorfismo. Para ello, sea $X \in T_pM$, $c:]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow T_pM$ la curva $c(t) = tX$, que verifica $c(0) = 0$, $c'(0) = X$. Entonces $d \exp_p(0)(X) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp_p c(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp_p tX = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma(1, tX) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma(t, X) = \gamma'(0, X) = X$, i.e. $d \exp_p(0)$ es la identidad, lo que acaba la demostración. \square

§10. Coordenadas normales.

IV.56. DEFINICION: Dado un punto p de M , un entorno abierto V de p en M diremos que es un entorno normal de p si existe un entorno abierto U de 0 en T_pM tal que $\exp_p: U \rightarrow V$ es un difeomorfismo.

Utilizando esta definición y las proposiciones anteriores introduciremos dos tipos especiales de sistemas de coordenadas: "las coordenadas normales", correspondientes a un sistema de coordenadas rectangulares en T_pM , y "las coordenadas geodésicas polares" correspondientes a las coordenadas polares en el plano tangente.

IV.57. DEFINICION: Sea $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de T_pM y $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T_pM$ el isomorfismo dado por $\psi(X^1, X^2) = X^1 e_1 + X^2 e_2$. Sea V un entorno normal de p , $U = \psi^{-1}(\exp_p^{-1}(V))$, $x = \exp_p \circ \psi$. El sistema de coordenadas (U, x) se llama sistema de coordenadas normales de M centrado en p asociado a $\{e_1, e_2\}$.

Evidentemente un sistema de coordenadas normales (U, x) centrado en p está caracterizado por $x(u^1, u^2) = \exp_p(u^1 e_1 + u^2 e_2)$ ó, equivalentemente, $x^{-1}(\exp_p(X^1 e_1 + X^2 e_2)) = (X^1, X^2)$.

IV.58. NOTA: En un sistema de coordenadas normales en p la ecuación de una geodésica pasando por p es la misma que la de una recta pasando por el origen en el plano. En efecto: sea $\gamma(t)$ una geodésica verificando $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = X$, entonces utilizando la notación indicada el comienzo del §9, el lema IV.50 y la definición IV.51, $\gamma(t) = \gamma(t, X) = \gamma(1, tX) = \exp_p tX$. Por lo tanto, si (U, x) es un sistema de coordenadas normales centrado en p asociado a e_1, e_2 y $X = X^1 e_1 + X^2 e_2$, entonces $x^{-1}(\gamma(t)) = x^{-1}(\exp_p tX) = \psi^{-1}(tX) = (tX^1, tX^2)$.

IV.59. DEFINICION: Sea el difeomorfismo $\varphi:]0, \infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 - (\mathbb{R}^+ \times \{0\})$ dado por $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ (i.e. φ^{-1} da las coordenadas polares de \mathbb{R}^2). Sean $\{e_1, e_2\}$ y ψ como en IV.57. Sea V un entorno normal de p , $U = \varphi^{-1}(\psi^{-1} \exp_p^{-1}(V) - (\mathbb{R}^+ \times \{0\}))$, y $\tilde{x} = \exp_p \circ \psi \circ \varphi$. Al sistema de coordenadas (U, \tilde{x}) se le llama sistema de coordenadas geodésicas polares de M en p asociado a $\{e_1, e_2\}$.

Un sistema de coordenadas geodésicas polares en p viene caracterizado por $\tilde{x}(r, \theta) = \exp_p(r \cos \theta e_1 + r \sin \theta e_2)$.

IV.60. NOTA: La ecuación de una geodésica pasando por p en un sistema de coordenadas geodésicas polares en p es $\tilde{x}^{-1} \circ \gamma(t) = (\lambda t, \theta_0)$, con $\lambda, \theta_0 \in \mathbb{R}$ fijos. En efecto, si $\gamma(t)$ es una geodésica con $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = X$, se tiene, como vimos en IV.58, $\gamma(t) = \exp_p tX$, y, si $X = |X|(\cos \theta_0 e_1 + \sin \theta_0 e_2)$, entonces $\tilde{x}^{-1} \circ \gamma(t) = (|X|t, \theta_0)$.

IV.61. NOTA: Las imágenes por \exp_p de las circunferencias $S_r(0)$ en T_pM centradas en 0 (curvas $r = \text{cte}$) se llaman circunferencias geodésicas y se denotan por $S_r(p)$. Las imágenes de las rectas (curvas $\theta = \text{cte}$) se llaman radios geodésicos. Análogamente se definen los discos (o bolas) geodésicos abierto ($B_r(p) = \exp_p(B_r(0))$) y cerrado ($\bar{B}_r(p) = \exp_p(\bar{B}_r(0))$). Se pueden describir igualmente por: $S_r(p) = \{q \in M / \text{hay un segmento de geodésica de longitud } r \text{ que une } p \text{ con } q\}$, $B_r(p) = \{q \in M / \text{hay un segmento de geodésica de longitud menor que } r \text{ que une } p \text{ con } q\}$,

§11. Propiedades de las coordenadas normales.

IV.62. PROPOSICION: En un sistema de coordenadas normales (U, x) centrado en p , $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$.

DEMOSTRACION: $g_{ij}(p) = \langle x_i(p), x_j(p) \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial u^i}(\exp_p \circ \psi)(0,0), \frac{\partial}{\partial u^j}(\exp_p \circ \psi)(0,0) \rangle$
 $= \langle d\exp_p(0) \frac{\partial}{\partial u^i} \psi(0,0), d\exp_p(0) \frac{\partial}{\partial u^j} \psi(0,0) \rangle = \langle d\exp_p(0) e_i, d\exp_p(0) e_j \rangle =$
 $= \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, donde hemos usado que $d\exp_p(0) = Id$ (cfr. demostración de IV.55) en la penúltima igualdad. □.

IV.63. PROPOSICION: Para un sistema de coordenadas normales centrado en p , $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ y $g_{ij,k}(p) \equiv (\partial g_{ij} / \partial u^k)(p) = 0$ para todo $i, j, k = 1, 2$.

DEMOSTRACION: Sea (U, x) es un sistema de coordenadas normales centrado en p , asociado a $\{e_1, e_2\}$. Se tiene que

$$x_i(u) = \frac{\partial}{\partial u^i} (\exp_p(\psi(u))) = d\exp_p(u^1 e_1 + u^2 e_2) \left(\frac{\partial \psi}{\partial u^i} \right),$$

pero como $\psi(u^1, u^2) = u^1 e_1 + u^2 e_2$, se tiene que $\frac{\partial \psi}{\partial u^i} = e_i$, luego

$$x_i(u) = d\exp_p(\psi(u)) (e_i).$$

Si $u = (t, 0)$, entonces $x_1(t, 0) = d\exp_p(te_1)(e_1) = \frac{d}{dt} (\exp_p te_1)$ es el vector tangente a una geodésica y , del mismo modo, $x_2(t, 0) = \frac{d}{dt} (\exp_p te_2)$ es el vector tangente a una geodésica. Por lo tanto:

$$(\nabla_{x_1} x_1)(t, 0) = 0 \text{ y } (\nabla_{x_2} x_2)(0, t) = 0, \text{ de donde } \Gamma_{11}^k(p) = 0 = \Gamma_{22}^k(p) \text{ para } k = 1, 2.$$

Por otro lado

$$(x_1 + x_2)(t, t) = \frac{\partial}{\partial u^1} \exp_p \psi(t, t) + \frac{\partial}{\partial u^2} \exp_p \psi(t, t) =$$

$$= d\exp_p \psi(t, t) \left(\frac{\partial \psi}{\partial u^1}(t, t) + \frac{\partial \psi}{\partial u^2}(t, t) \right) =$$

$= d\exp_p(\psi(t, t)) \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial u^1} + \frac{\partial \psi}{\partial u^2} \right) (t, t) \right) = d\exp_p(\psi(t, t)) (e_1 + e_2) = \frac{d}{dt} \exp_p(t(e_1 + e_2))$
 vector tangente a una geodésica, luego $(\nabla_{x_1 + x_2} (x_1 + x_2))(t, t) = 0$, luego

$$(\nabla_{x_1} x_1 + \nabla_{x_1} x_2 + \nabla_{x_2} x_1 + \nabla_{x_2} x_2)(t, t) = 0. \text{ En particular } (\nabla_{x_1} x_1 + \nabla_{x_1} x_2 + \nabla_{x_2} x_1 + \nabla_{x_2} x_2)(0, 0) =$$

$$0, \text{ y, por (*)}, (\nabla_{x_1} x_2 + \nabla_{x_2} x_1)(0, 0) = 0, \text{ de donde } \sum_k \Gamma_{12}^k(p) x_k(p) + \sum_k$$

$$\Gamma_{21}^k(p) x_k(p) = 0, \text{ lo que, por la simetría de } \Gamma \text{ en los subíndices, implica } \Gamma_{12}^k(p) = \Gamma_{21}^k(p) = 0, k = 1, 2.$$

Por otra parte, $g_{ij,k}(p) = \frac{\partial}{\partial u^k} \langle x_i, x_j \rangle(p) = D_{x_k} \langle x_i, x_j \rangle(p) = \langle \nabla_{x_k} x_i, x_j \rangle(p) + \langle x_i, \nabla_{x_k} x_j \rangle(p) = \sum_{\ell} \langle \Gamma_{ki}^{\ell} x_{\ell}, x_j \rangle(p) + \sum_{\ell} \langle x_i, \Gamma_{kj}^{\ell} x_{\ell} \rangle(p) = 0$.

§12. Propiedades de las coordenadas geodésicas polares.

IV.64. PROPOSICION: En un sistema de coordenadas geodésicas polares (\tilde{U}, \tilde{x}) en p se verifica que $g_{rr} = 1, g_{r\theta} = 0, \lim_{r \rightarrow 0} g_{\theta\theta} = 0, \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{g_{\theta\theta}})_r = 1$,

siendo $(\sqrt{g_{\theta\theta}})_r = \frac{\partial \sqrt{g_{\theta\theta}}}{\partial r}$.

DEMOSTRACION: De acuerdo con IV.60, las curvas $r \mapsto \tilde{x}(r, \theta)$ son trozos de geodésicas con vector tangente en t de norma unidad, de donde se deduce, por IV.25, que $g_{rr} = 1$. Para calcular $g_{r\theta}$ vamos a ver primero cual es el valor de su derivada en la dirección de los radios geodésicos:

$$\frac{\partial}{\partial r} g_{r\theta} = \frac{\partial}{\partial r} \langle \tilde{x}_r, \tilde{x}_{\theta} \rangle = \langle \frac{\nabla}{dr} \tilde{x}_r, \tilde{x}_{\theta} \rangle + \langle \tilde{x}_r, \frac{\nabla}{dr} \tilde{x}_{\theta} \rangle = \langle \tilde{x}_r, \frac{\nabla}{dr} \tilde{x}_{\theta} \rangle,$$

ya que $\frac{\nabla}{dr} \tilde{x}_r = 0$ por ser $r \mapsto \tilde{x}(r, \theta)$ una geodésica. Además (cfr. IV.13.e)),

$$\begin{aligned} \nabla_{\tilde{x}_r} \tilde{x}_{\theta} &= \nabla_{\tilde{x}_{\theta}} \tilde{x}_r + [\tilde{x}_r, \tilde{x}_{\theta}] = \nabla_{\tilde{x}_{\theta}} \tilde{x}_r + D_{\tilde{x}_r} \tilde{x}_{\theta} - D_{\tilde{x}_{\theta}} \tilde{x}_r = \\ &= \nabla_{\tilde{x}_{\theta}} \tilde{x}_r + \tilde{x}_{r\theta} - \tilde{x}_{\theta r} = \nabla_{\tilde{x}_{\theta}} \tilde{x}_r, \end{aligned}$$

luego $\frac{\partial}{\partial r} g_{r\theta} = \langle \tilde{x}_r, \nabla_{\tilde{x}_{\theta}} \tilde{x}_r \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \langle \tilde{x}_r, \tilde{x}_r \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} g_{rr} = 0$. Por lo tanto $g_{r\theta}$ es constante. Por otro lado, por la desigualdad de Schwarz,

$$|g_{r\theta}| = |\langle \tilde{x}_r, \tilde{x}_{\theta} \rangle| \leq |\tilde{x}_r| |\tilde{x}_{\theta}| = |\tilde{x}_{\theta}|,$$

de donde

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} |g_{r\theta}| &\leq \lim_{r \rightarrow 0} |\tilde{x}_{\theta}(r, \theta)| = \lim_{r \rightarrow 0} \left| \frac{\partial}{\partial \theta} \exp_p r (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) \right| = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} |d \exp_p (r (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2)) (-r \sin \theta e_1 + r \cos \theta e_2)| = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r |d \exp_p (r (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2)) (-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2)| = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $g_{r\theta} = 0$, y $\lim_{r \rightarrow 0} g_{\theta\theta}(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} |\tilde{x}_{\theta}(r, \theta)|^2 = 0$.

Por otro lado, el cálculo anterior muestra que

$$\begin{aligned} (\sqrt{g_{\theta\theta}})_r &= \partial |\tilde{x}_{\theta}(r, \theta)| / \partial r = \\ &= \frac{\partial}{\partial r} (r |d \exp_p (r (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2)) (-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2)|) \quad (f). \end{aligned}$$

Como \exp_p es diferenciable,

$$\frac{\partial}{\partial r} (|d \exp_p (r (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2)) (-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2)|)$$

está acotada en un entorno de 0. Entonces, calculando en (f) y tomando límites cuando r tiende a cero, se obtiene la expresión buscada. fl.

Lección 21ª: APLICACIONES GEOMETRICAS DE LAS COORDENADAS NORMALES Y GEODESICAS POLARES.

§13. Sobre el inverso del teorema egregio de Gauss.

El teorema egregio de Gauss (corolario IV.19) establece que si dos superficies son localmente isométricas, entonces tienen la misma curvatura de Gauss en los puntos correspondientes. Vamos a estudiar ahora el problema inverso: "Dado un difeomorfismo local $f: M \rightarrow M'$ tal que $K(p) = K'(f(p))$ (i.e. f conserva la curvatura de Gauss), ¿es f una isometría local?". Veremos que, para el caso general, la respuesta a este problema es negativa, y estudiaremos hipótesis restrictivas bajo las cuales la respuesta será afirmativa. Otra forma más débil de plantearse el inverso del teorema de Gauss es la siguiente: "Si existe un difeomorfismo local $f: M \rightarrow M'$ tal que $K(p) = K'(f(p))$, entonces existe una isometría local (no necesariamente f) de M en M' ". Seguidamente daremos un contraejemplo a esta forma débil del inverso que será también, por lo tanto, un contraejemplo a la forma fuerte del inverso del teorema de Gauss.

IV.65. CONTRAEJEMPLO AL INVERSO DE IV.19: Consideremos la superficie de revolución engendrada al girar alrededor del eje Z la curva logarítmica:

$$x(s,t) = (s \cos t, s \sin t, \ln s), \quad 0 < t < 2\pi, \quad 0 < s < +\infty.$$

Las fórmulas de III.38 dan para la primera forma fundamental y la curvatura de Gauss de esta superficie las expresiones

$$g_{ss} = 1 + (1/s^2), \quad g_{st} = 0, \quad g_{tt} = s^2, \quad K = -1/(1+s^2)^2.$$

Consideremos ahora el helicoide

$$\bar{x}(s,t) = (s \cos t, s \sin t, t), \quad 0 < t < 2\pi, \quad -\infty < s < +\infty.$$

Para esta superficie se tienen las fórmulas

$$\bar{g}_{ss} = 1, \quad \bar{g}_{st} = 0, \quad \bar{g}_{tt} = 1+s^2, \quad \bar{K} = -1/(1+s^2)^2.$$

Resulta de estas expresiones que la aplicación $f: x(s,t) \leftrightarrow \bar{x}(s,t)$, $0 < t < 2\pi$, $0 < s < +\infty$ es un difeomorfismo que conserva la curvatura de Gauss y no es una isometría. Pero, además, no existe ninguna isometría local entre x y \bar{x} . En efecto, supongamos que existe una isometría local $F: x(s,t) \leftrightarrow \bar{x}(s',t')$. Por el teorema egregio de Gauss F debe conservar la curvatura, i.e. $K(x(s,t)) = \bar{K}(\bar{x}(s',t'))$, y de las fórmulas anteriores para K y \bar{K} resulta que $1/(1+s^2)^2 = 1/(1+s'^2)^2$, lo que implica (puesto que $s, s' > 0$) que $s = s'$. Por se F una isometría local ha de verificar que

$$\begin{aligned} |x_s(s,t)|^2 &= |(dF)(x_s(s,t))|^2 = |(\partial(F \circ x)/\partial s)(s,t)|^2 = |(\partial \bar{x}/\partial s)(s, t'(s,t))|^2 = \\ &= |\bar{x}_s + \bar{x}_t (\partial t'/\partial s)|^2, \text{ i.e. } 1+(1/s^2) = 1+(1+s^2)(\partial t'/\partial s)^2. (*) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} |x_t(s,t)|^2 &= |(dF)(x_t(s,t))|^2 = |(\partial(F \circ x)/\partial t)(s,t)|^2 = |(\partial \bar{x}/\partial t)(s, t'(s,t))|^2 = \\ &= |\bar{x}_t (\partial t'/\partial t)|^2, \text{ i.e. } s^2 = (1+s^2)(\partial t'/\partial t)^2. (**) \end{aligned}$$

Ahora bien, de (*) resulta que

$$t' = \int (1/(s^2(1+s^2)))^{1/2} ds + \phi(t) \quad (\$),$$

$$\alpha(s)t + \theta(s) = \phi(t) + \delta(s)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} : \alpha(s) = \phi'(t) + \delta'(s) \Rightarrow \phi'(t) = \alpha \Rightarrow \phi = \alpha t + b$$

$$\frac{\partial}{\partial s} : \alpha'(s)t + \theta'(s) = \cancel{\alpha'(s)t} + \delta'(s) \quad \text{as depende de } t$$

y de (**) resulta que

$$t' = (\frac{s}{1+s^2})^{1/2} t + \theta(s) \quad (\$ \$),$$

que está en contradicción con (\$), ya que ϕ ha de ser solo función de t .

IV.66. TEOREMA (de Minding): Sean M_1 y M_2 dos superficies con la misma curvatura de Gauss constante K . Sean $p_i \in M_i, i=1,2, \{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de $T_{p_1}M_1$ y $\{f_1, f_2\}$ una b.o.n. de $T_{p_2}M_2$. Entonces existen entornos normales V_i de p_i y una isometría $\psi : V_1 \rightarrow V_2$ tales que $d\psi(p)e_i = f_i$. En particular, M_1 y M_2 son localmente isométricas.

DEMOSTRACION: En IV.18 vimos que

$$K = \frac{1}{\det I} \sum_m g_{2m} \left\{ \Gamma_{11,2}^m - \Gamma_{12,1}^m + \sum_{\ell} \left(\Gamma_{11}^{\ell} \Gamma_{\ell 2}^m - \Gamma_{12}^{\ell} \Gamma_{\ell 1}^m \right) \right\}.$$

Empleando coordenadas geodésicas polares, con $u^1 \equiv r, u^2 \equiv \theta$, teniendo en cuenta IV.64, resulta:

$$\text{(matriz de } I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} \quad \text{(matriz de } I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/g_{\theta\theta} \end{pmatrix} \quad \det I = g_{\theta\theta}, \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1$$

$$= \Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2 g_{\theta\theta}} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} \frac{\partial \sqrt{g_{\theta\theta}}}{\partial r} = \frac{\partial \ln \sqrt{g_{\theta\theta}}}{\partial r},$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{\partial \ln \sqrt{g_{\theta\theta}}}{\partial \theta}. \quad \text{Sustituyendo en la expresión de } K \text{ se obtiene}$$

$$K = \frac{-1}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} \frac{\partial^2 \sqrt{g_{\theta\theta}}}{\partial r^2}.$$

Por lo tanto si K es constante, $\sqrt{g_{\theta\theta}}$ debe satisfacer la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$(IV.66.1) \quad \frac{\partial^2 \sqrt{g_{\theta\theta}}}{\partial r^2} + K \sqrt{g_{\theta\theta}} = 0.$$

Estudiaremos la solución de esta ecuación distinguiendo tres casos:

a) $K = 0$. La ecuación (IV.66.1) se convierte en

$$\frac{\partial^2 \sqrt{g_{\theta\theta}}}{\partial r^2} = 0,$$

de donde $(\sqrt{g_{\theta\theta}})_r = \varphi(\theta)$ (siendo φ una función solo de θ), por lo tanto $\varphi(\theta) =$

$\lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{g_{\theta\theta}})_r = 1$ por IV.64, luego $(\sqrt{g_{\theta\theta}})_r = 1$, e integrando, $\sqrt{g_{\theta\theta}} = r + f(\theta)$, de

donde $f(\theta) = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{g_{\theta\theta}} - r) = 0$ por IV.64, luego $g_{\theta\theta} = r^2$. Por lo tanto, si $K = 0$

se tiene $g_{rr}(r, \theta) = 1, \quad g_{r\theta}(r, \theta) = 0, \quad g_{\theta\theta}(r, \theta) = r^2$.

b). $K > 0$. La solución general de (IV.66.1) es

$$\sqrt{g_{\theta\theta}} = A(\theta) \cos(\sqrt{K} r) + B(\theta) \text{sen}(\sqrt{K} r) \quad (A, B \text{ funciones solo de } \theta).$$

Tomando límites cuando $r \rightarrow 0$ y usando IV.64 se tiene $0 = A(\theta)$, derivando

entonces resulta $(\sqrt{g_{\theta\theta}})_r = \sqrt{K} B(\theta) \cos(\sqrt{K} r)$ y, tomando límites de nuevo y usando IV.64, se obtiene $B(\theta) = 1/\sqrt{K}$. Por lo tanto en este caso

$$g_{rr}(r,\theta) = 1, \quad g_{r\theta}(r,\theta) = 0, \quad g_{\theta\theta}(r,\theta) = (1/K) \operatorname{sen}^2(\sqrt{K} r)$$

c) $K < 0$. La solución general de (IV.66.1) es

$$\sqrt{g_{\theta\theta}} = A(\theta) \operatorname{ch}(\sqrt{-K} r) + B(\theta) \operatorname{sh}(\sqrt{-K} r)$$

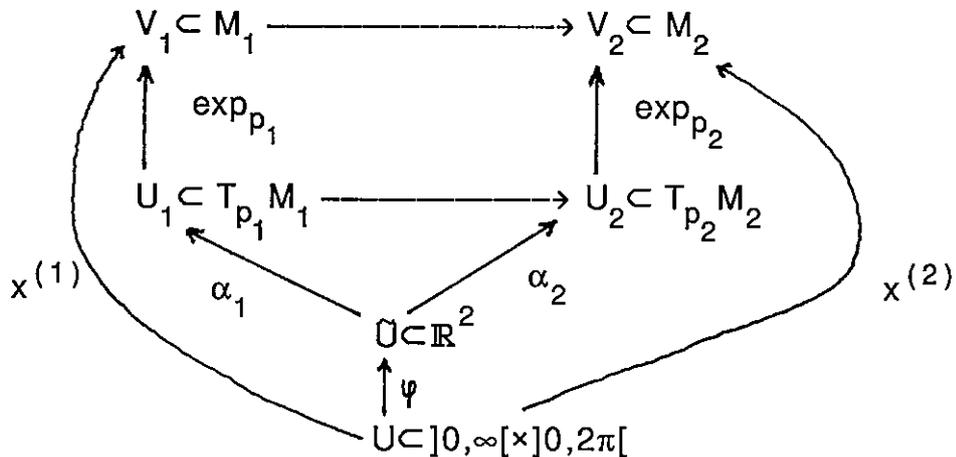
y, haciendo las mismas operaciones que en el caso b), se obtiene $B(\theta) = 1/\sqrt{-K}$. Entonces

$$g_{rr}(r,\theta) = 1, \quad g_{r\theta}(r,\theta) = 0, \quad g_{\theta\theta}(r,\theta) = (1/-K) \operatorname{sh}^2(\sqrt{-K} r).$$

Resumiendo, en los tres casos hemos obtenido $g_{rr}=1, g_{r\theta} = 0, g_{\theta\theta} = f(K,r)$, con f una función que depende solo de K y r .

Sea $\bar{\psi}: T_{p_1}M_1 \rightarrow T_{p_2}M_2$ la isometría definida por $\bar{\psi}(u^1 e_1 + u^2 e_2) = u^1 f_1 + u^2 f_2$.

Sea, para cada $i=1,2$, ∇_i un entorno normal de p_i , \mathcal{U}_i el abierto de $T_{p_i}M_i$ tal que $\exp_{p_i}: \mathcal{U}_i \rightarrow \nabla_i$ es un difeomorfismo. Sean $U_1 = \mathcal{U}_1 \cap \bar{\psi}^{-1}(\mathcal{U}_2)$, $U_2 = \bar{\psi}(U_1) = \bar{\psi}(\mathcal{U}_1) \cap \mathcal{U}_2$, $V_i = \exp_{p_i} U_i \subset \nabla_i$. Entonces $\bar{\psi}: U_1 \rightarrow U_2$ y $\exp_{p_i}: U_i \rightarrow V_i$ son difeomorfismos. Definimos entonces el difeomorfismo $\psi = \exp_{p_2} \circ \bar{\psi} \circ \exp_{p_1}^{-1}: V_1 \rightarrow V_2$. Vamos a ver que ψ es una isometría. Sean $\alpha_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{p_i}M$ los isomorfismos dados por $\alpha_1(u^1, u^2) = u^1 e_1 + u^2 e_2$, $\alpha_2(u^1, u^2) = u^1 f_1 + u^2 f_2$. Sea $\mathcal{U} = \alpha_1^{-1}(U_1)$, y sea φ la aplicación



definida en IV.57, $U = \varphi^{-1}(\mathcal{U} - (\mathbb{R}^+ \times \{0\}))$. $(\mathcal{U}, x^{(i)}) = \exp_{p_i} \circ \alpha_i \circ \varphi$, define un sistema de coordenadas geodésicas polares en p_i que verifica $x^{(2)} = \psi \circ x^{(1)}$, $x^{(i)}(U) = V_i - L_i$, siendo $L_1 = \exp_{p_1}\{\lambda e_1 / \lambda \geq 0\}$, $L_2 = \exp_{p_2}\{\lambda f_1 / \lambda \geq 0\}$, y $\psi: V_1 - L_1 \rightarrow V_2 - L_2$ un difeomorfismo, que por IV.9, será una isometría sii los coeficientes de la primera forma fundamental $g_{ij}^{(i)}$ son los mismos en los sistemas de

coordenadas $(U, x^{(1)})$, $i=1,2$. Ahora bien, esta igualdad es consecuencia de la igualdad de K de M_1 y M_2 , según la discusión hecha antes en tres casos a), b), c), luego $\psi: V_1 \rightarrow V_2$ es una isometría. Por otro lado ψ también es un difeomorfismo de V_1 sobre V_2 , el producto escalar es una aplicación continua, y $\overline{V_i} \supset V_i$, luego $\psi: V_1 \rightarrow V_2$ es también una isometría.

Además $d\psi(p_1)(e_i) = d(\exp_{p_2} \circ \bar{\psi} \circ \exp_{p_1}^{-1})(p_1)(e_i) = d\exp_{p_2}(0) \circ \bar{\psi}(0) \circ d\exp_{p_1}^{-1}(p_1)e_i = d\exp_{p_2}(0) f_i = f_i$, ya que $d\exp_{p_1}^{-1}(p_1) = (d\exp_{p_1}(0))^{-1} = \text{id}$. \hat{O} .

§14. La curvatura de Gauss y el área de un disco geodésico.

IV.67. PROPOSICION: (*Interpretación geométrica intrínseca de la curvatura de Gauss*): Sea $p \in M$, $A(r)$ el área del disco geodésico de centro p y radio r (ver def. en IV.61), entonces:

$$K(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{12}{\pi} \frac{\pi r^2 - A(r)}{r^4}$$

DEMOSTRACION: En la demostración de IV.66 hemos visto que (fórmula (IV.66.1)) $(\sqrt{g_{\theta\theta}})_{rr} + K \sqrt{g_{\theta\theta}} = 0$.

De aquí, derivando,

$$(\sqrt{g_{\theta\theta}})_{rrr} = -K (\sqrt{g_{\theta\theta}})_r - K_r \sqrt{g_{\theta\theta}}.$$

Tomando límites cuando $r \rightarrow 0$ y usando IV.64, resulta que

$$K(p) = - \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{g_{\theta\theta}})_{rrr}$$

Para cada valor de θ considero el desarrollo de Taylor de $\sqrt{g_{\theta\theta}}(r, \theta)$ alrededor de $r = 0$.

$$\sqrt{g_{\theta\theta}}(r, \theta) = \sqrt{g_{\theta\theta}}(0, \theta) + r (\sqrt{g_{\theta\theta}})_r(0, \theta) + \frac{r^2}{2} (\sqrt{g_{\theta\theta}})_{rr}(0, \theta) + \frac{r^3}{3} (\sqrt{g_{\theta\theta}})_{rrr}(0, \theta) + R(r, \theta),$$

donde los valores de $\sqrt{g_{\theta\theta}}$ y sus derivadas sucesivas en $r = 0$ están definidos por sus valores límite cuando $r \rightarrow 0$, y $\lim_{r \rightarrow 0} (R(r, \theta)/r^3) = 0$.

Sustituyendo ahora los valores de los coeficientes de este desarrollo de Taylor, resulta

$$\sqrt{g_{\theta\theta}}(r, \theta) = r - \frac{r^3}{3!} K(p) + R(r, \theta).$$

Por otra parte, como $g_{rr} = 1$ y $g_{r\theta} = 0$, se tiene para $A(r)$.

$$\begin{aligned} A(r) &= \int_{B_r(0)} \sqrt{\det I} \, dr \, d\theta = \int_0^r \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\theta\theta}}(r, \theta) \, dr \, d\theta = \int_0^r \int_0^{2\pi} (r - \frac{r^3}{3!} K(p) + R(r, \theta)) \, dr \, d\theta = \\ &= \int_0^r \left\{ 2\pi r - \pi \frac{r^3}{3!} K(p) + \int_0^{2\pi} R(r, \theta) \, d\theta \right\} \, dr = \pi r^2 - \frac{\pi r^4}{12} K(p) + \bar{R}(r), \text{ donde} \end{aligned}$$

○ $\bar{R}(r) = \int_0^r \int_0^{2\pi} R(r, \theta) d\theta dr$ y, por tanto, $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\bar{R}(r)}{r^4} = 0$. De la expresión anterior para $A(r)$ resulta $K(p) = \frac{1}{\pi r^4} (\pi r^2 - A(r) + \bar{R}(r))$ y, tomando límites cuando $r \rightarrow 0$, se sigue la proposición.

§15. Las geodésicas como curvas más cortas.

IV.68. PROPOSICION: (*Propiedad minimizante de las geodésicas*): Sean $p \in M$, $\varepsilon > r > 0$ tales que \exp_p es un difeomorfismo sobre $B_\varepsilon(0)$ y sea $B_r(p) = \exp_p(B_r(0))$.

○ Sea $\gamma: [0, \lambda] \rightarrow B_r(p)$ una geodésica de M con $\gamma(0) = p$. Sea $t_1 \in [0, \lambda]$ y $c: [0, t_1] \rightarrow M$ una curva diferenciable tal que $c(0) = p$, $c(t_1) = q = \gamma(t_1)$. Entonces $L_{t_1}^1(\gamma) \leq L(c)$ y si se da la igualdad $L_{t_1}^1(\gamma) = L(c)$ entonces $\gamma([0, t_1]) = c([0, t_1])$.

DEMOSTRACION: La idea para la demostración será usar coordenadas geodésicas polares en p pero definidas sobre un dominio en el que dejan de ser sistema de coordenadas y en el que, sin embargo, siguen siendo válidas las expresiones correspondientes para calcular la longitud.

Sean φ, ψ las aplicaciones definidas en IV.57 y IV.59, pero ahora φ se considera extendida a todo $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$ (con lo cual sigue siendo diferenciable pero no difeomorfismo). Obsérvese que $\varphi: \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ es un difeomorfismo local. Se sigue de ello que si $\bar{U} = (\psi \circ \varphi)^{-1}(B_r(0) - \{0\})$, entonces $\bar{x} = \exp_p \circ \psi \circ \varphi$ es un difeomorfismo local de \bar{U} sobre $B_r(p) - \{p\}$.

Para calcular la longitud de la curva c vamos a distinguir varios casos:

○ $\delta /$ 1) $c([0, t_1]) \subset B_r(p)$ y $c^{-1}(p) = \{0\}$. Sea $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \xi < t_1$. Sea $t \in]\xi, t_1]$. Como $p \neq c(t) \in B_r(p)$ y \bar{x} es un difeomorfismo local sobre $B_r(p) - \{p\}$, para cada $c(t)$ y para cada $u_t \in \bar{x}^{-1}(c(t))$ existen $\mathcal{E}_t \subset B_r(p) - \{p\}$ entorno abierto de $c(t)$ y V_t entorno abierto de u_t , $V_t \subset \bar{U}$, tales que $\bar{x}: V_t \rightarrow \mathcal{E}_t$ es un difeomorfismo. Variando t en $]\xi, t_1]$ obtenemos un recubrimiento por abiertos $\{c^{-1}(\mathcal{E}_t)\}_{t \in]\xi, t_1]}$ de $]\xi, t_1]$. Sea n tal que $\frac{\lambda}{n} < \lambda$, el n° de Lebesgue del recubrimiento, y sean $s_i = \xi + i \frac{t_1 - \xi}{n}$ y \mathcal{E}_i abiertos tales que $[s_{i-1}, s_i] \subset c^{-1}(\mathcal{E}_i)$, $1 \leq i \leq n$.
 Sea V_i el correspondiente abierto de $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$ tal que $\bar{x}: V_i \rightarrow \mathcal{E}_i$ es un difeomorfismo y $\bar{x}|_{V_{i-1}}^{-1}(c(s_{i-1})) \in V_i$. Entonces las funciones $\rho(t), \theta(t)$ definidas por $\bar{x}|_{V_i}(\rho(t), \theta(t)) = c(t)$ para $t \in [s_{i-1}, s_i]$ están bien definidas y son diferenciables.

dejar como está
¿t_1 - \xi?
← conviene dar nombre a las partes de este

Además cada $(V_i, \tilde{x}|_{V_i})$ es un sistema de coordenadas de M en el que se verifica que $g_{\rho\rho} = \langle \tilde{x}_\rho, \tilde{x}_\rho \rangle = 1$ y $g_{\rho\theta} = \langle \tilde{x}_\rho, \tilde{x}_\theta \rangle = 0$ (por estar \tilde{x} definida como para las coordenadas geodésicas polares). Resulta de todo esto que la longitud de c desde $c(\epsilon)$ hasta $c(t_1)$ viene dada por

$$L_{\epsilon}^{t_1}(c) = \sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} |c'(t)| dt = \sum_i \int_{s_{i-1}}^{s_i} \sqrt{g_{\rho\rho} \rho'^2 + g_{\theta\theta} \theta'^2} dt \geq \sum_i \int_{s_{i-1}}^{s_i} \sqrt{\rho'^2} dt = \sum_i \int_{s_{i-1}}^{s_i} |\rho'| dt \geq \left| \sum_i \int_{s_{i-1}}^{s_i} \rho' dt \right| = |\rho(t_1) - \rho(\epsilon)|.$$

δ / Tomando límites cuando $\epsilon \rightarrow 0$, como $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \rho(\epsilon) = 0$, se tiene que

$$L_0^{t_1}(c) \geq \rho(t_1) = L(\gamma),$$

donde la última igualdad resulta de que $\rho(t_1) = \text{distancia de } \exp_p^{-1}(c(t_1)) \text{ al origen}$, y como $c(t_1) = q = \gamma(t_1)$, la definición de \exp_p (cfr. IV.51 y 52) implica que esa distancia es la longitud de γ desde $\gamma(0)$ hasta $\gamma(t_1)$.

Si se da la igualdad $L(c) = L(\gamma)$, entonces han de ser igualdades todas las desigualdades de (IV.68.1). Por lo tanto ha de ocurrir que:

$$|\rho'| = \rho', \text{ i.e. } \rho' \geq 0$$

$$\theta' = 0 \text{ (puesto que } g_{\theta\theta} > 0 \text{), i.e. } \theta = \text{cte sobre }]0, t_1[$$

Esto implica que $c|_{[0, t_1]}$ es una geodésica radial (cfr. IV.62).

$\rho' \geq 0$ significa que la geodésica se recorre en la dirección de γ creciente, es decir, desde p hasta q .

Por lo tanto, si $L(c) = L(\gamma)$, tanto $\gamma(t)$ como $c(t)$ son geodésicas uniendo p con q tales que $c([0, t_1]) \subset B_r(p)$ y $\gamma([0, t_1]) \subset B_r(p)$, luego $c(t) = \exp_p \tilde{c}(t)$ y $\gamma(t) = \exp_p \tilde{\gamma}(t)$, siendo $\tilde{c}(t)$ y $\tilde{\gamma}(t)$ rectas en $T_p M$ pasando por 0 en $t = 0$ y por $\exp_p^{-1} q = X$ en $t = t_1$, i.e. $\tilde{c}([0, t_1]) = \tilde{\gamma}([0, t_1]) = \{sX, s \in [0, 1]\}$, de donde $c([0, t_1]) = \gamma([0, t_1])$.

2) Supongamos ahora $c([0, t_1]) \subset B_r(p)$ y $c^{-1}(p) \neq \{0\}$. Sea $t' = \sup\{t \in [0, t_1] / c(t) = p\}$. Como c es continua, $c(t') = p$, y como $c(t_1) = q$, se sigue que $t' \neq t_1$. Consideremos la curva $\tilde{c}: [t', t_1] \rightarrow M$ definida por $\tilde{c} = c|_{[t', t_1]}$, la cual verifica

$\tilde{c}^{-1}(p) = \{t'\}$ y, por lo tanto, se le puede aplicar el razonamiento del caso 1), de modo que se tiene que $L(\tilde{c}) \geq L(\gamma)$ y $L(\tilde{c}) = L(\gamma)$ si y solo si $\tilde{c}([t', t_1]) = \gamma([0, t_1])$. Como consecuencia de esto resulta que $L(c) \geq L(\tilde{c}) \geq L(\gamma)$ y $L(c) = L(\gamma)$ sii $L(c) = L(\tilde{c})$ y $L(\tilde{c}) = L(\gamma)$. La primera de estas igualdades implica $L(c|_{[0, t']}) = 0$, i.e. $c'(t) = 0$ para $0 \leq t < t'$ y, por lo tanto, $c([0, t']) = p$, lo que da $c([0, t_1]) = \tilde{c}([t', t_1]) = \gamma([0, t_1])$.

- 3) Supongamos $c([0, t_1]) \not\subset B_r(p)$. Sea $t_0 = \sup\{t \in [0, t_1] / c([0, t]) \subset B_r(p)\}$. Como $B_r(p) = \exp_p(B_r(0))$, se tiene que $c(t_0) \in S_r(p) \equiv \exp_p(S_r(0))$. (en efecto, \lceil / por definición de t_0 , $\exp_p^{-1}c([0, t_0]) \subset B_r(0)$, luego $\exp_p^{-1}c([0, t_0]) \subset \bar{B}_r(0)$; si $\exp_p^{-1}c(t_0) \notin S_r(0)$, entonces existiría un $\eta > 0$ tal que $\exp_p^{-1}c([t_0 - \eta, t_0 + \eta]) \subset B_r(0)$, en contra de que t_0 es el supremo). Como $\bar{B}_r(0) \subset B_\varepsilon(0)$, se tiene que, se puede aplicar los resultados de 1) y 2) a $c([0, t_0]) \subset \exp_p B_\varepsilon(0)$ del siguiente modo: sea $\tilde{\gamma}$ una geodésica radial uniendo p con $c(t_0) \in \exp_p S_r(0)$. Entonces $L(\tilde{\gamma}) = r > L(\gamma)$, y los razonamientos de 1) y 2) para este caso dan $L(c) \geq L_{t_0}^1(c) \geq L(\tilde{\gamma}) = r > L(\gamma)$.

○ El teorema anterior nos muestra que las geodésicas verifican una propiedad análoga a la de las rectas en el plano; definen la distancia más corta entre dos puntos de la superficie. Sin embargo esta propiedad no es cierta globalmente. En efecto: en una esfera, dados dos puntos no opuestos hay dos trozos de geodésica que unen tales puntos, que dan dos geodésicas distintas, una de mayor longitud que la otra, uniendo los dos puntos. En general se tiene el siguiente resultado:

IV.69. PROPOSICION: Sea $c: I \rightarrow M$ una curva regular parametrizada proporcionalmente a su longitud de arco. Si la longitud de arco entre cualesquiera dos puntos $\tau, t \in I$ es más pequeña o igual que la longitud de cualquier curva parametrizada uniendo $c(t)$ con $c(\tau)$, entonces c es una geodésica.

DEMOSTRACION: Sea $t_0 \in I$ arbitrario y $B_r(p)$ un entorno de $p=c(t_0)$ como el dado en IV.68. Sea $q = c(t_1) \in B_r(p)$. Por IV. 68 se tiene que existe una geodésica $\gamma [t_0, t_1] \rightarrow W$ tal que $\gamma(t_0) = p$ $\gamma(t_1) = q$ y que verifica $L(\gamma) \leq L_{t_0}^1(c)$. Pero, por hipótesis, $L_{t_0}^1(c) \leq L(\gamma)$, luego $L_{t_0}^1(c) = L(\gamma)$ y, de nuevo por IV.68, $c([t_0, t_1]) = \gamma([t_0, t_1])$. Como c está parametrizada por la longitud de arco, c es una geodésica en $]t_0, t_1[$. Como c es regular, por continuidad, c es geodésica también en t_0 . \bullet

como que $L_{t_0}^1$ es la longitud de arco en M al ser c parametrizada proporcionalmente a su longitud de arco.

IV.70. NOTA: Obsérvese que IV.68 es válida también cuando c es diferenciable a trozos solamente. En efecto, esto únicamente obliga a calcular $L_{t_0}^1(c)$ haciendo una división del intervalo $[t_0, t_1]$ en mayor número de subintervalos, de modo que en los extremos de algunos de estos subintervalos $c'(t)$ no estaría definida, pero en estos subintervalos $[t_i, t_{i+1}]$ se tiene:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} |c'(t)| dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_i + \varepsilon}^{t_{i+1} - \varepsilon} \sqrt{r'^2 + g_{\theta\theta} \theta'^2} dt \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_i + \varepsilon}^{t_{i+1} - \varepsilon} |r'| dt \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_i + \varepsilon}^{t_{i+1} - \varepsilon} r' dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (r(t_{i+1} - \varepsilon) - r(t_i + \varepsilon)) = r(t_{i+1}) - r(t_i),$$

ya que r es continua (aunque no diferenciable) en todo el intervalo $[0, t_1]$. El resto del razonamiento es como en IV.68.

§16. Aplicaciones a la distancia intrínseca.

IV.71. PROPOSICION: La distancia intrínseca $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$ (cfr. DEF.IV.3) hace de (M, d) un espacio métrico (en el sentido de la Topología).

DEMOSTRACION: Comprobaremos las propiedades de una función distancia.

1) $d(p, q) \geq 0$: consecuencia de que el ínfimo de números reales positivos es mayor o igual que cero.

2) $d(p,q)=d(q,p)$: consecuencia de que para cada curva parametrizada $c: [a,b] \rightarrow M$ con $c(a) = p, c(b) = q$ existe otra $\tilde{c}: [a, b] \rightarrow M$ definida por $\tilde{c}(t) = c(a-t+b)$ que verifica $\tilde{c}(a) = q, \tilde{c}(b) = p$ y $L(c) = L(\tilde{c})$.

3) $d(p, q) + d(q, r) \geq d(p, r)$: consecuencia de que si $A, B \subset \mathbb{R}, A \subset B$, entonces $\inf(A) \geq \inf(B)$. En efecto: Dadas $\alpha: [a, b] \rightarrow M, \beta: [c, d] \rightarrow M$ continuas y diferenciables a trozos tales que $\alpha(a) = p, \alpha(b) = q = \beta(c), \beta(d) = r$, la curva $\alpha * \beta: [a, b+d-c] \rightarrow M$ definida por

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ \beta(t-b+c) & \text{si } t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$

es continua (por serlo en cada uno de los intervalos cerrados y coincidir en la intersección) y diferenciable a trozos y verifica $\alpha * \beta(a) = \alpha(a) = p$ y $\alpha * \beta(b+d-c) = \beta(d) = r$. Se tiene entonces que $L(\alpha * \beta) = L(\alpha) + L(\beta)$ y que:

$$\begin{aligned} d(p, q) + d(q, r) &= \inf \{L(\alpha) / \alpha: p \rightarrow q\} + \inf \{L(\beta) / \beta: q \rightarrow r\} = \\ &= \inf \{L(\alpha) + L(\beta) / \alpha: p \rightarrow q, \beta: q \rightarrow r\} = \\ &= \inf \{L(\alpha * \beta) / \alpha: p \rightarrow q, \beta: q \rightarrow r\} \geq \inf \{L(c) / c: p \rightarrow r\} = d(p, r). \end{aligned}$$

4) $d(p, q) = 0$ si y solo si $p = q$. *Consecuencia de que $d(p,q) \geq d^e(p,q)$ luego $d(p,q) = 0 \Rightarrow d^e(p,q) = 0 \Rightarrow p = q$*
 Si $p = q$, la curva constante $c: [a, b] \rightarrow M / c(t) = p$ tiene longitud cero y, por tanto, $d(p,p) = 0$.

Supongamos que $d(p, q) = \inf \{L(c), c: I \rightarrow M \text{ } C^\infty \text{ a trozos uniendo } p \text{ con } q\} = 0$. Si $p \neq q$, existe un entorno abierto V de p en M tal que $q \notin V$. Como \exp_p es continua, existe un entorno normal U de p en M (cfr. IV.68) con $\bar{B}_r(p) = \exp_p \bar{B}_r(0) \subset U \subset V$. Por definición de ínfimo, para todo $\epsilon > 0$ con $\epsilon < r$, existe $c: [a, b] \rightarrow M$ diferenciable a trozos tal que $c(a) = p, c(b) = q$ y que verifica $L(c) < \epsilon$. Como $c([a, b])$ es conexo y $q \notin \bar{B}_r(p)$, se sigue que existe $t_0 \in [a, b]$ tal que $c(t_0) \in S_r(p)$, (en efecto, si no fuese así: observemos que, como \exp_p es continua, $\bar{B}_r(0)$ compacto y M hausdorff, $\bar{B}_r(p)$ es un cerrado de M , luego $(M - \bar{B}_r(p))$ es un abierto de M . Si no existe ningún $t_0 \in [a, b]$ tal que $c(t_0) \in S_r(p) = \bar{B}_r(p) \cap (M - \bar{B}_r(p))$, entonces: $c([a, b]) = c([a, b]) \cap M = c([a, b]) \cap \{ \bar{B}_r(p) \cup (M - \bar{B}_r(p)) \cup (\bar{B}_r(p) \cap (M - \bar{B}_r(p))) \} = (c([a, b]) \cap \bar{B}_r(p)) \cup (c([a, b]) \cap (M - \bar{B}_r(p)))$, que es una unión disjunta de abiertos no vacíos de $c([a, b])$, en contra de que $c([a, b])$ es conexo). Por lo tanto $L(c) \geq L_a^{t_0}$

~~(c) $\geq L$ (geodésica radial de p a $c(t_0)$) $= r > \epsilon$, en contradicción con que $L(c) < \epsilon$, luego $p = q$. \hat{O} .~~

IV.72. NOTA: La proposición anterior interpreta las bolas y esferas geodésicas $B_r(p)$, $\bar{B}_r(p)$ y $S_r(p)$ definidas en IV. 61 como bolas y esferas de centro p y radio r del espacio métrico (M, d) si r y p son tales que $\exp_p|_{B_r(0)}$ es un difeomorfismo.

IV.73. PROPOSICION: La topología inducida en una superficie M por la distancia intrínseca coincide con la de M como subespacio topológico de \mathbb{R}^3 .

DEMOSTRACION: Dados los puntos $p, q \in M$, sea $d^e(p, q)$ la distancia euclídea en \mathbb{R}^3 y $d(p, q)$ la distancia intrínseca en M . La topología de M como subespacio topológico de \mathbb{R}^3 es la topología \mathcal{T}_{d^e} inducida sobre M por la métrica d^e . Denotemos por \mathcal{T}_d la topología inducida sobre M por la distancia intrínseca d . Sea $B_r^e(p)$ (respectivamente $B_r(p)$) la bola de centro p y radio r para la distancia d^e (resp. d). Para $r_0 > 0$ tal que $\exp_p: B_{r_0}(0) \rightarrow B_{r_0}(p)$ sea un difeomorfismo, $\{B_r(p) = \exp_p B_r(0)\}_{r \leq r_0}$ es una base de entornos de p en (M, d) , y $\{B_r^e(p)\}_{r \leq r_0}$ una base de entornos de p en (M, d^e) . Como $d^e(p, q) \leq d(p, q)$, se tiene que $B_r(p) \subset B_r^e(p)$, luego $\mathcal{T}_d \supset \mathcal{T}_{d^e}$. Además, como $\exp_p|_{B_r(0)}$ es un difeomorfismo, $B_r(p)$ es un abierto de M en \mathcal{T}_{d^e} , luego existe $\epsilon > 0$, $\epsilon < r$, tal que $B_\epsilon^e(p) \subset B_r(p)$, luego $\mathcal{T}_{d^e} \supset \mathcal{T}_d$. \hat{O} .

IV.74. LEMA: ([J. Lozano]): Sea $c: I \rightarrow M$ un curva regular, $t_0 \in I$, I un intervalo abierto. Entonces

$$|c'(t_0)| = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{d(c(t), c(t_0))}{|t - t_0|},$$

siendo d la distancia intrínseca en M .

DEMOSTRACION: Sea $\delta > 0$ tal que $\exp_{c(t_0)}: B_\delta(0) \rightarrow U$ es un difeomorfismo, y sea $\epsilon > 0$ tal que $c(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[) \subset \exp_{c(t_0)}(B_\delta(0)) = U$. Entonces, para $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$, $\tilde{c}(t) = \exp_p^{-1}(c(t))$ es una curva en $T_p M$ ($p \equiv c(t_0)$) que verifica $\tilde{c}(t_0) = 0$. Se puede calcular entonces el límite.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{d(c(t), c(t_0))}{|t - t_0|} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{d(\exp_p \tilde{c}(t), \exp_p \tilde{c}(t_0))}{|t - t_0|} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{d(\exp_p \tilde{c}(t), \exp_p 0)}{|t - t_0|} =$$

$$\begin{aligned}
 \text{(IV.68 y IV.70)} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{L_{s=0}^1(\exp_p \circ \tilde{c}(t))}{|t-t_0|} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{|\tilde{c}(t)|}{|t-t_0|} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{|\tilde{c}(t) - \tilde{c}(t_0)|}{|t-t_0|} = \\
 &= |\tilde{c}'(t_0)| = |d \exp_p(0) \tilde{c}'(t_0)| = \left| \frac{d}{dt} \exp_p \tilde{c}(t) \Big|_{t=t_0} \right| = \left| \frac{d}{dt} c(t_0) \right| = |c'(t_0)|. \quad \hat{O}.
 \end{aligned}$$

IV.75. TEOREMA ([J. Lozano]): Sea $f: M_1 \rightarrow M_2$ una aplicación diferenciable y suprayectiva entre dos superficies. Si f conserva la distancia intrínseca, entonces f es una isometría (recíproco de IV.7).

DEMOSTRACION: Si f conserva la distancia intrínseca, entonces es inyectiva ($p \neq q$ implica $d(p, q) \neq 0$, luego $d(f(p), f(q)) \neq 0$ y, por tanto, $f(p) \neq f(q)$). Por tanto, solo queda probar que para todo $p \in M_1$, $df(p)$ es una isometría entre espacios vectoriales euclídeos, lo que equivale a que, para todo $X \in T_p M_1$, $|df(p)X| = |X|$. Para probar esto, sea $c:]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M$ una curva regular tal que $c(0) = p$ y $c'(0) = X$. Entonces, utilizando IV.74 y el hecho de que f conserva la distancia intrínseca, resulta:

$$|df(p)X| = |(f \circ c)'(0)| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(f \circ c(t), f \circ c(0))}{|t|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(c(t), c(0))}{|t|} = |c'(0)| = |X|.$$

Por tanto $df(p)$ es una isometría entre espacios vectoriales, luego es un isomorfismo. Por el teorema de la función inversa f es un difeomorfismo local y como es biyectiva, f es un difeomorfismo. \hat{O} .

Lección 22ª: ENTORNOS CONVEXOS

§17. Entornos totalmente normales.

IV.76. TEOREMA: Dado $p \in M$, existen un entorno W de p en M y un número $\delta > 0$ tales que para todo $q \in W$, \exp_q es un difeomorfismo de $B_\delta(0) \subset T_qM$ sobre su imagen y $\exp_q(B_\delta(0)) \supset W$, i.e. W es un entorno normal de todos sus puntos. Se dice entonces que W es un entorno totalmente normal.

DEMOSTRACION: La haremos en varias etapas:

a) Sea (U, x) un sistema de coordenadas en p con $x(u_0) = p$. Una curva en U es una geodésica sii sus coordenadas u^i verifican el sistema de ecuaciones diferenciales

$$(IV.76.1) \quad \frac{d^2 u^k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{i,j} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0, \quad k = 1, 2$$

Por los teoremas de existencias y unicidad y de dependencia diferenciable de las condiciones iniciales de ecuaciones diferenciales, existen números reales positivos θ, δ, η y una aplicación

$$\gamma :]-2\theta, 2\theta[\times B_{2\delta}^e(u_0) \times B_\eta^e(0) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2, (B_{2\delta}^e(u_0) \subset U, B_\eta^e(0) \subset T_{u_0}\mathbb{R}^2),$$

tal que para cada valor fijado de $(u, X) \in B_{2\delta}^e(u_0) \times B_\eta^e(0)$, la aplicación $t \rightarrow \gamma(t, u, X)$ verifica la ecuación (IV.76.1) con las condiciones iniciales $\gamma(0, u, X) = u$ y $\gamma'(0, u, X) = X$. Se tiene como consecuencia que si $q \in M$ y $X \in T_qM$ son tales que $x^{-1}(q) = u \in B_{2\delta}^e(u_0)$ y $dx(u)^{-1}X = X \in B_\eta^e(0)$, entonces la aplicación $\gamma(t, q, X) = x \circ \gamma(t, u, X)$ es la geodésica pasando por q en $t=0$ (pues $\gamma(0, q, X) = x \circ \gamma(0, u, X) = x(u) = q$) y tangente X en $t=0$ (pues $\gamma'(0, q, X) = dx \circ \gamma'(0, u, X) \gamma'(0, u, X) = dx(u)X = X$).

b) Consideremos ahora la aplicación ($S^1 =$ circunferencia de radio unidad en \mathbb{R}^2)

$$\bar{B}_\delta^e(u_0) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} / (u, X) \rightarrow \langle X, X \rangle / \langle dx(u)X, dx(u)X \rangle = (1 / \langle dx(u)X, dx(u)X \rangle),$$

que es continua y diferenciable y está definida sobre un compacto y, por tanto, está acotada, i.e. existe un $r^2 > 0$ tal que

$$(1 / \langle dx(u)X, dx(u)X \rangle) \leq r^2 \quad \text{para todo } (u, X) \in \bar{B}_\delta^e(u_0) \times S^1.$$

Resulta de ello que la aplicación de $\bar{B}_\delta^e(u_0) \times (\mathbb{R}^2 - \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $(u, X) \rightarrow \langle X, X \rangle / \langle dx(u)X, dx(u)X \rangle =$

$$(|X|^2 \langle X/|X|, X/|X| \rangle / |X|^2 \langle dx(u)(X/|X|), dx(u)(X/|X|) \rangle),$$

está acotada por r^2 (pues $X/|X| \in S^1$), luego

$$(IV.76.2) \quad \langle X, X \rangle \leq r^2 \langle dx(u)X, dx(u)X \rangle. \quad \text{para todo } u \in \bar{B}_\delta^e(u_0) \text{ y todo } X \in \mathbb{R}^2$$

(para $X = 0$ la desigualdad es evidente).

- c) Como $x(B_\delta^e(u_o))$ es un abierto de la superficie conteniendo a p ., por IV.71, 72 y 73 existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(p) \subset x(B_\delta^e(u_o))$. Sea

$$\mathcal{U} = \{(q, X) / q \in B_\varepsilon(p), X \in T_q M \text{ y } |X| < \varepsilon_1 = \eta\theta/r.\}.$$

Para $(q, X) \in \mathcal{U}$, como $q \in B_\varepsilon(p) \subset x(B_\delta^e(u_o))$, existe $u \in B_\delta^e(u_o)$ tal que $q = x(u)$. Entonces

$$\exp_q X = \gamma(1, q, X) = \gamma(\theta, q, X/\theta) = x \circ \underline{\gamma}(\theta, x^{-1}(q), dx(u)^{-1}(X/\theta))$$

está bien definido puesto que (obsérvese el dominio de definición de $\underline{\gamma}$ en a) $\bullet \theta \in]-2\theta, 2\theta[$,

• $u = x^{-1}(q) \in x^{-1}(B_\varepsilon(p)) \subset B_\delta^e(u_o) \subset B_{2\delta}^e(u_o)$,

• $dx(u)^{-1}(X/\theta) \in B_\eta^e(0)$. En efecto: $|X| < \eta\theta/r$ implica $|X/\theta| < \eta/r$, i.e. $X/\theta \in B_{\eta/r}(0)$. Ahora bien, como $dx(u)$ es un isomorfismo, para cada $Y \in B_{\eta/r}(0)$ existe un $\underline{Y} \in T_u \mathbb{R}^2$ tal que $dx(u)\underline{Y} = Y$ y, como $u = x^{-1}(q) \in B_\delta^e(u_o)$, resulta de

(IV.76.2) que $|\underline{Y}| \leq r |dx(u)\underline{Y}| = r |Y| < r \eta/r = \eta$, luego $B_{\eta/r}(0) \subset dx(u)(B_\eta^e(0))$. Por lo tanto $X/\theta \in dx(u)(B_\eta^e(0))$.

La misma demostración de la última afirmación (cambiando η por $\eta\theta$) prueba que $B_{\eta\theta/r}(0) \subset dx(u)(B_{\eta\theta}^e(0))$ y, por lo tanto, si $(q, X) \in \mathcal{U}$, $X \in dx(u)(B_{\eta\theta}^e(0))$

d) El conjunto $\mathcal{V} = \{(u, \underline{X}) \in B_\delta^e(u_o) \times B_{\eta\theta}^e(0) / (x(u), dx(u)\underline{X}) \in \mathcal{U}\}$ es un abierto de \mathbb{R}^4 . En efecto, usando coordenadas, y teniendo en cuenta, según se ha visto en c), que si $(x(u), dx(u)\underline{X}) \in \mathcal{U}$, entonces $u \in B_\delta^e(u_o)$ y $\underline{X} \in B_{\eta\theta}^e(0)$, de donde resulta que

○
$$\mathcal{V} = \{(u, \underline{X}) / x(u) \in B_\varepsilon(p) \text{ y } |dx(u)\underline{X}|^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u) X^i X^j < \varepsilon_1^2\} = f^{-1}([-\infty, \varepsilon_1^2]) \cap (x^{-1}(B_\varepsilon(p)) \times \mathbb{R}^2),$$

siendo f la aplicación continua definida por $f(u, \underline{X}) = \sum_{i,j} g_{ij}(u) X^i X^j$.

Definamos ahora $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow M \times M$ por $\varphi(u, \underline{X}) = (x(u), \exp_{x(u)} dx(u)\underline{X})$. Como M es una subvariedad de \mathbb{R}^3 , $M \times M$ es una subvariedad de \mathbb{R}^6 . Por ser \mathcal{V} abierto, tiene sentido hablar de la diferenciabilidad de la función φ . Se tiene que

$$\exp_{x(u)} dx(u)\underline{X} = \gamma(1, x(u), dx(u)\underline{X}) = \gamma(\theta, x(u), dx(u)X/\theta) = x \circ \underline{\gamma}(\theta, u, \underline{X}/\theta).$$

Por a), $\underline{\gamma}$ es diferenciable (y continua) en todos sus argumentos y, como x es diferenciable (y continua), se sigue que $\exp_{x(u)} dx(u)\underline{X}$ es una función diferenciable de u y de \underline{X} . Por lo tanto φ es diferenciable al serlo sus componentes.

- Calculemos ahora $d\varphi(u_o, 0)$ actuando sobre un vector arbitrario $(\underline{Y}, \underline{Z}) \in$

$T_{(u_0,0)}\mathbb{R}^4$. Podemos escribir $(\underline{Y}, \underline{Z}) = (\underline{Y}, 0) + (0, \underline{Z})$, siendo:

• $(0, \underline{Z})$ tangente a la curva $\beta(t) = (u_0, t \underline{Z})$ (pues $\beta(0) = (u_0, 0)$ y $\beta'(0) = (0, \underline{Z})$).

• $(\underline{Y}, 0)$ tangente a la curvas $\alpha = (x^{-1} \circ \tilde{\alpha}, 0)$, donde $\alpha: I \rightarrow M$ es una curva en M que verifica $\tilde{\alpha}(0) = x(u_0)$ y $\tilde{\alpha}'(0) = dx(u_0)\underline{Y}$ (pues $\alpha(0) = (x^{-1} \circ \tilde{\alpha}(0), 0) = (u_0, 0)$ y $\alpha'(0) = (dx(u_0)^{-1}(\tilde{\alpha}'(0)), 0) = (\underline{Y}, 0)$).

Sea $Z \in T_{x(u_0)} M$ definido por $Z = dx(u_0) \underline{Z}$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} d\varphi(u_0,0)(\underline{Y}, \underline{Z}) &= d\varphi(u_0,0)(\underline{Y}, 0) + d\varphi(u_0,0)(0, \underline{Z}) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)(0) + \frac{d}{dt}(\varphi \circ \beta)(0) = \\ &= \frac{d}{dt}(\varphi \circ (x^{-1} \circ \tilde{\alpha}, 0))(0) + \frac{d}{dt}(\varphi(u_0, t \underline{Z}))(0) = \text{utilizando la definici3n de } \varphi | = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\tilde{\alpha}(t), \exp_{\tilde{\alpha}(t)} dx(x^{-1} \circ \tilde{\alpha}(t)) 0) + \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x(u_0), \exp_{x(u_0)} dx(u_0) t \underline{Z}) = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\tilde{\alpha}(t), \tilde{\alpha}(t)) + \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x(u_0), \exp_{x(u_0)} t \underline{Z}) = (\tilde{\alpha}'(0), \tilde{\alpha}'(0)) + (0, Z) = \\ &= (dx(u_0)\underline{Y}, dx(u_0)\underline{Y}) + (0, dx(u_0)\underline{Z}) = (dx(u_0)\underline{Y}, dx(u_0)(\underline{Y} + \underline{Z})). \end{aligned}$$

Por lo tanto, como $dx(u_0)$ es un isomorfismo, $d\varphi(u_0,0)$ es un isomorfismo. Por el teorema de la funci3n inversa, existen abiertos $U_1, V_1 \subset \mathbb{R}^2$ con $u_0 \in U_1, 0 \in V_1$ tales que $U_1 \times V_1 \subset \mathcal{U}$ y $\varphi: U_1 \times V_1 \rightarrow \varphi(U_1 \times V_1) \subset M \times M$ es un difeomorfismo.

e) El mismo razonamiento que en c), cambiando $B_\delta^e(u_0)$ por U_1 y $B_{\eta_\theta}^e(0)$ por V_1 (recordemos que $u_0 \in U_1, 0 \in V_1$) muestra que existen $\delta' > 0, \epsilon' > 0$ tales que si

$$\mathcal{W} = \{(q, X) \in \mathcal{U} / q \in B_{\epsilon'}(p) \text{ y } X \in B_{\delta'}(0) \subset T_q M\},$$

entonces $(q, X) \in \mathcal{W}$ implica $q = x(u) \in x(U_1), X \in dx(u)(V_1)$ y $B_{\delta'}(0) \subset T_q M \subset dx(u)(V_1)$.

Para cada $u \in U_1$, sea $\varphi_u: V_1 \rightarrow M$ la aplicaci3n definida por $\varphi_u(\underline{X}) = \Pi_2 \circ \varphi(u, \underline{X})$ i.e. la aplicaci3n que hace conmutativo el diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \{u\} \times V_1 & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(\{u\} \times V_1) \subset x(u) \times M \\ i \uparrow & & \downarrow \Pi_2 \\ V_1 & \xrightarrow{\varphi_u} & M \end{array}$$

($i \equiv$ inyecci3n can3nica. $\Pi_2 \equiv$ proyecci3n sobre el segundo factor).

Como $\varphi|_{U_1 \times V_1}$ es un difeomorfismo sobre su imagen, para cada $u \in U_1, \varphi|_{\{u\} \times V_1}$ es un homeomorfismo sobre su imagen y, como i y Π_2 tambi3n lo son, φ_u es un homeomorfismo sobre su imagen. Adem3s, recordando que φ es una

aplicación de un abierto de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, la definición de φ_u dice que φ se escribe en la forma

$$(IV.76.3) \quad \varphi(u, \underline{X}) = (x(u), \varphi_u(\underline{X})).$$

Como φ es diferenciable, sus componentes son diferenciables y φ_u es diferenciable como función de \underline{X} . También de (IV.76.3) resulta que la expresión matricial de $d\varphi(u, \underline{X})$ es de la forma

$$d\varphi(u, \underline{X}) = \left(\begin{array}{c|c} dx(u) & 0 \\ \hline \left(\frac{\partial \varphi_u(\underline{X})}{\partial u} \right) & \left(\frac{\partial \varphi_u(\underline{X})}{\partial \underline{X}} \right) \end{array} \right),$$

luego su restricción a los vectores $(0, \underline{Z}), Z \in \mathbb{R}^2$, coincide con

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \left(\frac{\partial \varphi_u(\underline{X})}{\partial \underline{X}} \right) \end{array} \right),$$

que es inyectiva sobre $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ por ser $d\varphi(u, \underline{X})$ inyectiva sobre \mathbb{R}^4 . Luego $d\varphi_u(\underline{X})$, cuya matriz es $\left(\frac{\partial \varphi_u(\underline{X})}{\partial \underline{X}} \right)$, es inyectiva, luego isomorfismo sobre su imagen, luego φ_u es un difeomorfismo.

Observemos además que

$$\varphi_u(\underline{X}) = \pi_2 \circ \varphi(u, \underline{X}) = \pi_2(x(u), \exp_{x(u)} dx(u) \underline{X}) = \exp_{x(u)} dx(u) \underline{X}.$$

Por tanto, para cada $q = x(u) \in x(U_1)$ la aplicación $\exp_q: dx(u)(V_1) \subset T_q M \rightarrow M$ viene dada por $\exp_q X = \varphi_{x^{-1}(q)}(dx(x^{-1}(q))^{-1} X)$, luego es un difeomorfismo. Como para cada $(q, X) \in \mathcal{W}$, $q = x(u) \in x(U_1)$ y $B_{\delta'}(0) \subset dx(u)(V_1)$, se tiene que \exp_q es un difeomorfismo de $B_{\delta'}(0)$ sobre su imagen.

f) El conjunto

$$\mathfrak{K} = \{(u, \underline{X}) \in U_1 \times V_1 / (x(u), dx(u) \underline{X}) \in \mathcal{W}\} \subset U_1 \times V_1$$

es un abierto de \mathbb{R}^4 (por la misma razón que, en d), \mathcal{U} era un abierto de \mathbb{R}^4). Por ello, como $\varphi|_{U_1 \times V_1}$ es un difeomorfismo sobre su imagen, $\varphi(\mathfrak{K})$ es un abierto de $M \times M$, y existe un abierto W de M conteniendo a p tal que $W \subset B_{\epsilon'}(p)$ y $W \times W \subset \varphi(\mathfrak{K}) \subset \varphi(U_1 \times V_1)$. Dado $q \in W \subset B_{\epsilon'}(p) \subset x(U_1)$, $q = x(u)$, $u \in U_1$, se tiene que

$$\{q\} \times W \subset \varphi(\mathfrak{K}) = \varphi(\{(u, \underline{X}) \in U_1 \times V_1 / (x(u), dx(u) \underline{X}) \in \mathcal{W}\}),$$

y, como φ es biyectiva cuando se restringe a \mathfrak{K} , para todo $m \in W$ se verifica que existe un único $(u, \underline{X}) \in U_1 \times V_1$ tal que $(x(u), dx(u) \underline{X}) \in \mathcal{W}$ y $(q, m) = \varphi(u, \underline{X}) = (x(u), \exp_q dx(u) \underline{X})$, con $x(u) = q$, luego existe un único $\underline{X} \in V_1$ con $m = \exp_q dx(u) \underline{X}$ y $(q, dx(u) \underline{X}) \in \mathcal{W}$, lo que implica, por definición de \mathcal{W} , que $dx(u) \underline{X} \in B_{\delta'}(0)$. Por lo tanto $m = \exp_q dx(u) \underline{X} \in \exp_q B_{\delta'}(0)$. Luego $W \subset \exp_q B_{\delta'}(0)$.

Este abierto W es el entorno totalmente normal de p buscado.

Aunque la demostración ha resultado técnicamente complicada la idea básica es sencilla: 1) Tomar un entorno \mathcal{U} de $(p, 0)$ en TM tal que $\exp_q X$ esté bien definida en todo $(q, X) \in \mathcal{U}$, 2) calcular la diferencial de $\exp: \mathcal{U} \rightarrow M \times M ((q, X) \mapsto (q, \exp_q X))$, ver que es un isomorfismo en $(q, 0)$ y aplicar el teorema de la función inversa para 3) determinar un abierto W entorno de p en M tal que $\exp|_{W \times W}$ sea un difeomorfismo. Las dificultades técnicas surgen fundamentalmente del hecho de que no conocemos una estructura de subvariedad de \mathbb{R}^n para $TM = \{ (q, X) / q \in M, X \in T_q M \} = \cup \{ T_q M, q \in M \}$, y hemos de hacer los razonamientos pasando constantemente a \mathbb{R}^4 . \hat{O} .

def. de difeomorfismo sobre un abto convexo de TM interseccion a W x (0)

$\varphi \rightarrow$

IV.77. COROLARIO: Sea $c: [0, \ell] \rightarrow M$ una curva regular y C^∞ a trozos tal que en cada arco regular el parámetro es proporcional a la longitud de arco. Si la longitud de c es menor o igual que la longitud de cualquier curva parametrizada uniendo $c(0)$ con $c(\ell)$, entonces c es una geodésica. En particular, c es regular en todos sus puntos.

DEMOSTRACION: Primero veremos que "la longitud del arco descrito por la curva c entre cualesquiera dos de sus puntos es menor o igual que la de cualquier curva parametrizada uniendo esos puntos". En efecto, sean $s, r \in [0, \ell]$; sea $\alpha: [s, r] \rightarrow M$ una curva C^∞ y regular a trozos tal que $\alpha(s) = c(s)$ y $\alpha(r) = c(r)$. Si $L(\alpha) < L(c|_{[s, r]})$, consideremos la curva $\beta: [0, \ell] \rightarrow M$ dada por

$$\beta(t) = \begin{cases} c(t) & 0 \leq t \leq s \\ \alpha(t) & s \leq t \leq r \\ c(t) & r \leq t \leq \ell \end{cases}, \text{ que es } C^\infty \text{ y regular a trozos.}$$

Esta curva verificaría $L(\beta) = L_0^s(c) + L_s^r(\alpha) + L_r^\ell(c) < L_0^s(c) + L_s^r(c) + L_r^\ell(c) = L = L(c)$, contra la hipótesis sobre c . Por lo tanto es cierta la afirmación entre comillas.

Sea $t \in [0, \ell]$. Vamos a ver que c es geodésica en un entorno de t (y, por lo tanto, en $[0, \ell]$, ya que t es arbitrario). Sea W un entorno totalmente normal de $c(t)$ (cfr. IV.76), y sea $\epsilon > 0$ tal que $c([t-\epsilon, t+\epsilon]) \subset W$. Sean $q_1 = c(t-\epsilon)$, $q_2 = c(t+\epsilon) \in W$ y sea γ la geodésica radial uniendo q_1 con q_2 y contenida en $B_\delta(q_1)$ (siendo $\delta > 0$ el número dado por el teorema IV.76). Por ser c y γ curvas uniendo q_1 y q_2 y ser γ una geodésica, resulta de IV.68 que $L(\gamma) \leq L(c|_{[t-\epsilon, t+\epsilon]})$. Por otro lado, de la afirmación entre comillas resulta que

$L(c|_{[t-\epsilon, t+\epsilon]}) \leq L(\gamma)$, luego $L(\gamma) = L(c|_{[t-\epsilon, t+\epsilon]})$. Aplicando de nuevo IV.68 resulta que $\gamma(I) = c([t-\epsilon, t+\epsilon])$ (siendo I el intervalo sobre el que está definido γ). Como además c está parametrizada respecto de su longitud de

totalmente normal, para poder trabajar en entornos de p, se dice que c es regular a trozos. Para que sea geodésica en un entorno de t, se debe probar que c es regular a trozos y que c es geodésica en un entorno de t.

arco, c es una geodésica en $]t-\epsilon, t+\epsilon[$.

§18. Existencia de entornos convexos.

IV.78. LEMA: Sea (U, x) un sistema de coordenadas geodésicas polares en p . Sean g_{ij} los coeficientes de la primera forma fundamental en el sistema de coordenadas normales (U, x) en p asociado a la misma base ortonormal de $T_p M$ que (U, x) . Entonces $g_{\theta\theta} = r^2 (g_{11} g_{22} - g_{12}^2)$.

DEMOSTRACION: Como $\tilde{x} = x \circ \varphi$, se tiene que (cfr. 0.5 y demostración de II.35)

$$\sqrt{g_{rr} g_{\theta\theta} - g_{r\theta}^2} = |\tilde{x}_r \wedge \tilde{x}_\theta| = |x_1 \wedge x_2| \det(d\varphi),$$

y, como $\det(d\varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r,$

teniendo en cuenta que $g_{rr} = 1$ y $g_{r\theta} = 0$, resulta

$$\sqrt{g_{\theta\theta}} = r |x_1 \wedge x_2| = r \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}$$

V.79. LEMA: Para cada $p \in M$ existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $r < \epsilon$ si una geodésica $\gamma(t)$ tangente a una circunferencia geodésica $S_r(p)$ en t_0 , entonces existe un $\eta > 0$ tal que para $|t-t_0| < \eta, t \neq t_0$, $\gamma(t)$ está fuera de $\bar{B}_r(p)$.

DEMOSTRACION: Consideremos un sistema de coordenadas geodésicas polares (ρ, θ) centrado en p . Para estas coordenadas

$$\Gamma_{\theta\theta}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\rho} (2 \partial g_{\rho\theta} / \partial \theta - \partial g_{\theta\theta} / \partial \rho) = -\frac{1}{2} \partial g_{\theta\theta} / \partial \rho.$$

Por IV.78, $g_{\theta\theta} = \rho^2 (g_{11} g_{22} - g_{12}^2)$,

siendo $g_{ij}, 1 \leq i, j \leq 2$ las componentes en el sistema de coordenadas normales en p asociado a la misma referencia ortonormal de $T_p M$ que las coordenadas geodésicas polares (ρ, θ) . Resulta de la última igualdad que

$\partial g_{\theta\theta} / \partial \rho = 2 \rho (g_{11} g_{22} - g_{12}^2) + \rho^2 (g_{11} g_{22} - g_{12}^2)_{,\rho} = \rho (2 \det I + \rho (\det I)_{,\rho})$, que es el producto de la función positiva ρ por otra que en el origen ($\rho = 0$) vale $2 + 0 = 2 > 0$. Como además $\partial g_{\theta\theta} / \partial \rho$ es continua existe un $\epsilon > 0$ tal que para $r < \epsilon, \partial g_{\theta\theta} / \partial \rho (r, \theta) > 0$ y, por lo tanto, $\Gamma_{\theta\theta}^\rho (r, \theta) < 0$.

Sea ahora $\gamma(t), x^{-1} \circ \gamma(t) = (\rho(t), \theta(t))$, una geodésica tangente a la esfera geodésica $S_r(p)$ ($r < \epsilon$) en $t = t_0$. Entonces $\gamma'(t_0) = \rho'(t_0) x_\rho + \theta'(t_0) x_\theta$ es tangente a $S_r(p)$, que en coordenadas polares viene dada por $\rho = r$ y, por lo tanto, sus vectores tangentes están en la dirección de x_θ , luego $\rho'(t_0) \neq 0$, (y $\theta'(t_0) \neq 0$, puesto que $\gamma'(t_0) \neq 0$). Por ser γ una geodésica ha de verificar la

ecuación diferencial

$$\rho'' + 2 \Gamma_{\theta\rho}^{\rho} \rho' \theta' + \Gamma_{\rho\rho}^{\rho} \rho'^2 + \Gamma_{\theta\theta}^{\rho} \theta'^2 = 0,$$

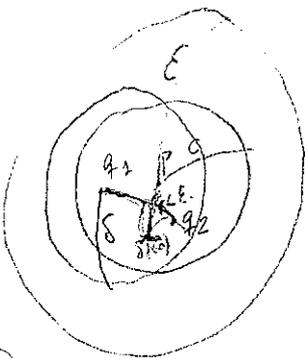
que en t_0 da

$$\rho''(t_0) = - \Gamma_{\theta\theta}^{\rho} \theta'(t_0)^2,$$

y como $\Gamma_{\theta\theta}^{\rho}(\rho(t_0), \theta(t_0)) = \Gamma_{\theta\theta}^{\rho}(r, \theta(t_0)) < 0$, resulta que $\rho''(t_0) > 0$. Por lo tanto t_0 es un punto en el que ρ alcanza un mínimo relativo estricto, luego existe un entorno $]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$ de t_0 tal que para todo $t \in]t_0 - \eta, t_0 + \eta[- \{t_0\}$, $\rho(t) > \rho(t_0) = r$ y, por lo tanto, $\gamma(t) \notin \bar{B}_r(p)$ c.q.d. \blacktriangleleft .

80/ **IV.77. TEOREMA (de existencia de entornos convexos):** Para cada punto $p \in M$ existe un número $\delta_0 > 0$ tal que, para todo $c \leq \delta_0$, $B_c(p)$ es convexa, es decir, cualesquiera dos puntos de $B_c(p)$ se pueden unir por una única geodésica minimal contenida en $B_c(p)$.

DEMOSTRACION: Sea $\epsilon > 0$ como en IV.79. Sean W, δ como en IV.76, con $\delta < \epsilon/2$. Elijamos $\delta_0 < \delta$ de modo que $B_{\delta_0}(p) \subset W$. Vamos a probar que, para todo $c \leq \delta_0$, $B_c(p)$ es convexa. Sean $q_1, q_2 \in B_c(p) \subset W$. Sea $B_\delta(0) \subset T_{q_1} M$. Por IV.76, $\exp_{q_1} B_\delta(0) \supset W$, luego $q_2 \in \exp_{q_1} B_\delta(0) = B_\delta(q_1)$, y existe una única geodésica radial $\gamma: I \rightarrow M$ uniendo q_1 con q_2 cuya longitud es $L(\gamma) < \delta$ y tal que $\gamma(I) \subset B_\delta(q_1)$. Como $q_1 \in B_c(p) \subset B_\delta(p)$ y $\delta < \epsilon/2$, se tiene que $B_\delta(q_1) \subset B_\epsilon(p)$, luego $\gamma(I) \subset B_\delta(q_1) \subset B_\epsilon(p)$. Como $\gamma(I)$ es compacto, la distancia de los puntos de $\gamma(I)$ a p alcanza un máximo $r < \epsilon$ en un punto $m = \gamma(t_0) \in B_\epsilon(p)$. Si $\gamma(I) \not\subset B_c(p)$, entonces $q_1 \neq m \neq q_2$, y el que en $\gamma(t_0)$ se alcance el máximo r de la distancia de $\gamma(t)$ a p implica que, si $(\rho(t), \theta(t))$ son las coordenadas geodésicas polares de la geodésica $\gamma(t)$ en un sistema de coordenadas centrado en p , entonces $\rho(t_0) = r$ y $\rho'(t_0) = 0$, de donde resulta que $\gamma(t)$ es tangente a $S_r(p)$ en $t = t_0$ (cfr. demostración de IV.79). Entonces, aplicando IV.79, existe un $\eta > 0$ tal que para todo $t \in]t_0 - \eta, t_0 + \eta[- \{t_0\}$, $\rho(t) > \rho(t_0) = r$, i.e. $d(\gamma(t), p) > r$, en contra de que r es el máximo, luego $\gamma(I) \subset B_c(p)$. \hat{O} .



PROBLEMAS DEL CAPITULO IV

1.- Mostrar que un difeomorfismo es una isometría si y solo si la longitud de arco de cualquier curva parametrizada es igual a la longitud de arco de su curva imagen por el difeomorfismo.

2.- Sean $\alpha, \beta: I \rightarrow M$ curvas parametrizadas respecto a la longitud de arco con la misma curvatura, y supongamos que la parametrización de la desarrollable tangencial de α , $x(u,v) = \alpha(u) + v \alpha'(u)$, y la correspondiente de β son verdaderos sistemas de coordenadas de una superficie. Encontrar una isometría local que vaya de la desarrollable tangencial de α a: i) la desarrollable tangencial de β , ii) una región del plano.

3.- Sea (u,x) un sistema de coordenadas de una superficie M y (U',x') de M' . Sea $F: M \rightarrow M'$ una aplicación diferenciable tal que $F(x(u,v)) = x'(f(u),g(v))$, siendo $(u,v) \mapsto (f(u), g(v))$ un difeomorfismo de U sobre U' . Probar que F es una isometría local sii $g_{11} = g'_{11} (df/du)^2$, $g_{12} = g'_{12} (df/du) (df/dv)$, y $g_{22} = g'_{22} (dg/dv)^2$.

4.- Sea M una superficie que se puede recubrir usando un solo sistema de coordenadas, en el cual $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, y g_{22} es función solo de u ($g_{22,v} = 0$). Probar que si la derivada $d(\sqrt{g_{22}})/du$ está acotada por 1, entonces existe una isometría de M sobre un abierto de una superficie de revolución.

5.- Sea M una superficie de revolución. Probar que las rotaciones alrededor de su eje son isometrías de M .

6.- a) Sea M una superficie y sea F una isometría de \mathbb{R}^3 tal que $F(M) = M$. Probar que la restricción de F a M es una isometría de M . b) Usar la parte a) para probar que el grupo de isometrías de la esfera unidad $x^2+y^2+z^2 = 1$ es el grupo ortogonal lineal $O(3, \mathbb{R})$ restringido a S^2 . c) Dar un ejemplo para mostrar que hay isometrías entre superficies que no se pueden extender a isometrías de \mathbb{R}^3 .

7.- Sea $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2 = 1\}$ un cilindro. Construir una isometría $f: C \rightarrow C$ tal que el conjunto $\{p \in C / f(p) = p\}$ de puntos fijos de f contenga exactamente dos puntos.

8.- a) Mostrar que si una curva es a la vez línea de curvatura y geodésica entonces es una curva plana. b) Mostrar que si una geodésica (con curvatura distinta de cero en todo punto) es una curva plana, entonces es una línea de curvatura. c) Dar un ejemplo de línea de curvatura plana y no geodésica.

9.- Probar que una curva C de una superficie M es a la vez asintótica y geodésica si y solo si es un segmento de recta.

10.- Calcular la curvatura geodésica del paralelo superior del toro .

11.- Cortar el cilindro C del problema 7 con un plano pasando por el eje X y formando un ángulo θ con el plano XY . a) Mostrar que la curva intersección es una elipse C . b) Calcular el valor absoluto de la curvatura geodésica de C en el cilindro en los puntos en los que C corta a sus ejes.

12.- Mostrar que si todas las geodésicas de una superficie conexa son curvas planas, entonces la superficie está contenida en un plano o en una esfera.

13.- Sean C_1 y C_2 dos meridianos de una esfera que forman un ángulo f en el punto p_1 . Tomar el transporte paralelo del vector tangente w de C_1 a lo largo de C_1 y de C_2 desde el punto inicial p_1 hasta el punto p_2 en que los dos meridianos se cortan de nuevo, obteniendo, respectivamente, w_1 y w_2 . Calcular el ángulo que forman w_1 y w_2 .

14.- Mostrar que la curvatura geodésica de una curva orientada $C \subset M$ en un punto $p \in C$ es igual a la curvatura de la curva plana obtenida proyectando C sobre el plano tangente $T_p M$ en la dirección de la normal a la superficie en p .

15.- Mostrar que el paralelo $c(t)$ de una superficie de revolución es una geodésica si la pendiente de la recta tangente a la curva generatriz C en $c(t)$ es cero.

16.- Sea p_0 un polo de la esfera unidad S^2 y q, p dos puntos sobre el ecuador correspondiente de modo que los meridianos p_0q y p_0p forman un ángulo θ en p_0 . Consideremos un vector unitario v tangente al meridiano p_0q en p_0 , y tomemos el transporte paralelo de v a lo largo de la curva cerrada constituida por el meridiano p_0q , el paralelo qp , y el meridiano pp_0 . a) Determinar el ángulo de la posición final de v con v . b) Hacer lo mismo cuando los puntos p y q , en lugar de estar en el ecuador están en el paralelo de colatitud ϕ .

17.- Considérese una geodésica que parte de un punto p en la parte superior ($z > 0$) de un hiperboloide de revolución $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ y forma un ángulo θ con el paralelo pasando por p de modo que $\cos \theta = 1/r$, siendo r la distancia de p al eje z . Mostrar que la geodésica en la dirección de los paralelos decrecientes se aproxima asintóticamente al paralelo $x^2 + y^2 = 1$.

18.- Sea M una superficie, $p \in M$ y G_p el grupo de automorfismos de $T_p M$. Sea $H_p = \{T \in G_p / T = P_\alpha$ para alguna curva diferenciable a trozos $\alpha: [a, b] \rightarrow M$ verificando $\alpha(a) = p, \alpha(b) = p\}$. Probar que H_p es un subgrupo de G_p (H_p se llama grupo de holonomía de M en p).

19.- a) Probar que el grupo de holonomía local de cualquier punto de una superficie con curvatura de Gauss K idénticamente nula se reduce a la identidad. b) Probar que si M es conexa, los grupos de holonomía $H_p(M)$ y $H_q(M)$ en dos puntos arbitrarios p y q son isomorfos (se puede hablar, por tanto, de grupo de holonomía de una superficie). c) Probar que el grupo de holonomía de una esfera es isomorfo al grupo de las rotaciones de \mathbb{R}^2 .

20.- Calcular el transportado paralelo del vector tangente $v = (0, 1, 1)$ a la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en el punto $(1, 0, 0)$ a lo largo de la curva $z = 0$ hasta el punto $(0, 1, 0)$.

21.- Se considera la superficie de revolución $x(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, u)$ ($f(u) > 0$). a) Probar que los meridianos son geodésicas. b) Calcular el transportado paralelo del vector $X = (0, 1, 0)$ en el

punto $(f(0),0,0)$ al punto $(f(1),0,1)$ a lo largo de un meridiano.

22.- Sea $c:I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada con $c(t) \in M_1 \cap M_2$ para todo $t \in I$, siendo M_1, M_2 superficies de \mathbb{R}^3 . Sea X un campo vectorial a lo largo de c tangente a M_1 y M_2 . a)Mostrar con un ejemplo que X puede ser paralelo a lo largo de c considerada como una curva de M_1 y no serlo si se considera c como una curva de M_2 . b) Mostrar que si M_1 es tangente a M_2 a lo largo de c , entonces X es paralelo a lo largo de c en M_1 sii lo es en M_2 .

23.- Sea una superficie de revolución $x(u,v) = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, u)$ ($r(u) > 0$). Probar que una curva $c(t)$ es una geodésica (salvo la parametrización) sii $r(u(t)) \cos \theta(t) = cte$, siendo $\theta(t)$ el ángulo que forma el vector tangente a la geodésica con un paralelo, y suponiendo que $u'(t)$ no es idénticamente nulo en ningún intervalo. (Físicamente este teorema expresa la conservación del momento angular).(Si $u'(t) \neq 0$, en este tramo la curva es un segmento de paralelo y este segmento es geodésico sii r' se anula en $u(t)$).

24.- Se dice que una superficie de revolución (como la de 23) posee un ecuador si $r(u) \leq r(0)$ con la igualdad sii $u = 0$ y para todo $u+ > 0$ existe $u- < 0$ tal que $r(u+) = r(u-)$ y recíprocamente. Sea q_0 un ángulo suficientemente pequeño para que existan $u+, u-$ tales que $r(0) \cos q_0 = r(u+) = r(u-)$. Probar que la geodésica que corta al ecuador en un ángulo q_0 : a) se mantiene en la región $u- \leq u \leq u+$, b)corta a todo paralelo $u=cte$ para $u- < u < u+$, c) se acerca a los paralelos $u = u+, u = u-$ tangencialmente.

(Como la rotación $u \rightarrow u, v \rightarrow v+v_0$ es una isometría de una superficie de revolución, el resultado anterior caracteriza a toda geodésica que corte al ecuador en un ángulo suficientemente pequeño).

25.- Sea T un toro de revolución que supondremos parametrizado por

$$x(u,v) = ((r \cos u + a) \cos v, (r \cos u + a) \sin v, r \sin u).$$

Probar que : a) Si una geodésica es tangente al paralelo $u = \pi/2$, entonces está enteramente contenida en la región de T dada por $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$. b) Una geodésica que corta al paralelo $u = 0$ bajo un ángulo θ ($0 < \theta < \pi/2$) también corta al paralelo $u = \pi$ si $\cos \theta < (a-r)/(a+r)$.

26.- Superficies de Liouville son aquellas para las que es posible obtener un sistema de coordenadas locales $x(u,v)$ tal que los coeficientes de la primera forma fundamental se pueden escribir de la forma $g_{11} = g_{22} = U + V, g_{12} = 0$, donde $U = U(u)$ es una función solo de u y V una función solo de v . Probar que si $\theta, 0 \leq \theta \leq \pi/2$, es el ángulo que una geodésica forma con la curva $v = cte$, entonces $U \sin^2 \theta - V \cos^2 \theta = cte$.

27.- Probar que sobre una superficie de curvatura constante las circunferencias geodésicas tienen curvatura geodésica constante.

28.- Sea (r,θ) un sistema de coordenadas geodésicas polares sobre una superficie, y sea $\gamma(r(s),\theta(s))$ una geodésica que forma un ángulo $\phi(s)$ con las curvas $\theta = cte$. Tomamos las curvas $\theta = cte$ orientadas en el sentido de r creciente y ϕ medido desde $\theta = cte$ a γ en la orientación dada por la parametrización (r,θ) . Mostrar que $(d\phi/ds) + (\sqrt{g_{22}})_r (d\theta/ds) = 0$.

29.- Sea Δ un triángulo geodésico (i. e. sus lados son segmentos de geodésicas) sobre una superficie M . Supongamos que Δ es suficientemente pequeño para estar contenido en un entorno normal de uno de sus vértices. Probar (sin usar el teorema de Gauss-Bonnet) que

$$\iint_{\Delta} K \, dA = (\sum_{i=1}^3 \alpha_i) - \pi,$$

donde K es la curvatura gaussiana de M , y α_i ($0 < \alpha_i < \pi$), $i=1,2,3$, son los ángulos internos del triángulo Δ .

30.- Sea el punto $p=(0,0,0)$ del paraboloides $z=x^2+y^2$. Probar que \exp_p no tiene puntos críticos.

31.- Sea S^2 la esfera de radio unidad y centro el origen de coordenadas. Sean $p=(0,0,1) \in S^2$, $v=(1,0,0)$, $\tilde{w}=(0,1,0) \in T_p S^2$. Calcular $d\exp_p(tv)(tw)$.

32.- En el cilindro $M \equiv x^2 + y^2 = 1$ se considera la curva $c(t) = (\cos at, \sin at, bt)$. a) Probar que $c(t)$ es una geodésica. b) Calcular el transportado paralelo del vector $X = (0,1,1)$ en $p = (1,0,0)$ desde $t=0$ hasta $t = \pi/a$ a lo largo de $c(t)$.

33.- Sea M el hiperboloide de revolución dado por $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $p = (1,0,0) \in M$ y $X = (0,0,1) \in T_p M$. a) Calcular $\exp_p X$ (sugerencia: utilizar para M la parametrización $x(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u)$). b) Sea $Y = (0,2,0) \in T_p M$, calcular $\exp_p Y$ (en este caso, probar que la geodésica que se utiliza para el cálculo de $\exp_p Y$ es realmente una geodésica).

34.- a) Sea $c(s)$ una curva regular parametrizada respecto de su longitud de arco. Se consideran las superficies de un solo sistema de coordenadas

$$\underline{x}(s,v) = c(s) + v e_3(s), \quad \underline{x}(s,v) = c(s) + v e_2(s).$$

Dar una condición necesaria y suficiente sobre la curva c para que la aplicación $\underline{x}(s,v) \rightarrow \underline{x}(s,v)$ sea una isometría local de superficies.

b) Sea C una circunferencia de centro $(R,0,0)$ y radio r ($R > r$) y T el toro de revolución obtenido por rotación de C alrededor del eje Z . Sea \underline{I} el toro obtenido por revolución de la circunferencia \underline{C} de centro $(2R,0,0)$ y radio r alrededor del eje Z . ¿Existe algún entorno de $(R+r,0,0)$ en T que sea isométrico a un entorno de $(2R+r,0,0)$ en \underline{I} ?

35.- Se considera la superficie de revolución M dada por el conjunto de puntos que verifican la ecuación $x^2 + y^2 + (z^2/4) = 1$. Sean $p = (0,0,2) \in M$, $X = (1,0,0) \in T_p M$, $Y = (0,1,0) \in T_p M$. Calcular $\exp_p X$ y $d\exp_p(X)Y$.

36.- Sea M el helicoide dado por $x(u,v) = (v \cos u, v \sin u, au)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Sea $p = (1,0,0) \in M$, $X = (0,1,a) \in T_p M$. Calcular el transporte paralelo de X a lo largo de $c(t) = (\cos t, \sin t, at)$ desde $t=0$ hasta $t=1$.

37.- Sea M una superficie de revolución $(\underline{x}(\underline{u}, \underline{v}) = (f(\underline{v}) \cos \underline{u}, f(\underline{v}) \sin \underline{u}, g(\underline{v})))$. Sea H el helicoide $x(u,v) = (v \cos u, v \sin u, u)$. Sea $F: H \rightarrow M$ una isometría local que transforme los rayos en meridianos y las rectas en paralelos (i.e. si $F(x(u,v)) = \underline{x}(\underline{u}, \underline{v})$, entonces $\underline{u} = \underline{u}(u)$ y $\underline{v} = \underline{v}(v)$). Determinar expresiones para las funciones f y g de modo que se verifique esta propiedad.

38.- Se considera el paraboloides de revolución $z = x^2 + y^2$. Sea $p = (0,0,0)$ y sea $X = (0,1,0)$, vector tangente en p al paraboloides. (a) Calcular $\exp_p X$. (b) Calcular $(d\exp_p)X Y$, con $Y = (1,0,0)$. (Sugerencia: 1) empléese la función $l = f(r) = \int_0^r \sqrt{1+4r^2} \, dr$ y su inversa $r = f^{-1}(l)$, y déjese el resultado en función de f , f^{-1} , y sus derivadas si es necesario. 2) Una parametrización conveniente del paraboloides es $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = r^2$).

CAPITULO V: INTRODUCCION A LA GEOMETRIA GLOBAL INTRINSECA DE SUPERFICIES.

Lección 23ª: SUPERFICIES COMPLETAS

§1. Superficies geodésicamente completas

Las propiedades globales de una superficie aquellas que se refieren a toda la superficie y no solo a un trozo de ella. Este lenguaje, sin embargo, resulta demasiado impreciso: ¿qué es "toda la superficie"?, ¿qué es un "trozo de superficie"? Dada una superficie M , un abierto $U \subsetneq M$ de ella es también una superficie, U podría considerarse como "toda la superficie U " o como un "trozo de la superficie M ". Por tanto, el objeto de la geometría global puede quedar sin sentido si no se precisa lo que se entiende por "toda la superficie". A ello dedicamos esta lección.

V.1.DEFINICION: Una superficie conexa M se dice no extendible ~~sino~~ es un abierto propio de otra superficie conexa. En caso contrario se dice extendible. h#

Un abierto del plano o la esfera son ejemplos de superficies extendibles. La esfera o el plano son ejemplos de superficies no extendibles (como veremos más adelante).

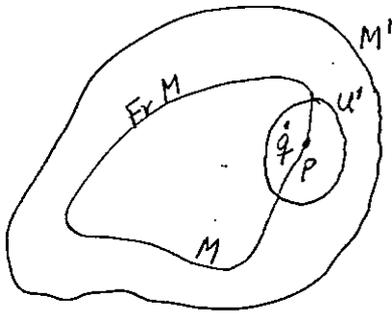
Una condición general para asegurar la no extendibilidad de una superficie es la compacidad. Pero una condición como esta no incluye una superficie tan interesante como es el plano. Por ello vamos a dar una definición más general.

V.2.DEFINICION: Una superficie conexa M se dice que es geodésicamente completa si, para todo $p \in M$, la aplicación exponencial \exp_p está definida sobre todo T_pM , i.e. si las geodésicas $\gamma(t)$ que parten de p están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. (En efecto, si γ es una geodésica, $\gamma(t) = \exp_p t X$, $X \in T_pM$, y si \exp_p está definida sobre todo T_pM entonces $\gamma(t)$ está definida $\forall t$. Recíprocamente, si toda geodésica está definida $\forall t \in \mathbb{R}$, entonces $\forall p \in M$, $\forall X \in T_pM$, si γ es la geodésica pasando por p con vector tangente X , entonces $\exp_p X = \gamma(1)$ está bien definida).

Esta definición está motivada por la posibilidad de "realizar" por geodésicas la distancia entre dos puntos, como ocurre en el plano con las rectas. Obsérvese que, para que tenga sentido la definición anterior que se da en términos de geodésicas, es esencial que, como hicimos en IV.37, intervenga la parametrización en la definición de geodésica (cfr. IV.38).

V.3. PROPOSICION: Una superficie geodésicamente completa M es no extendible.

DEMOSTRACION: Supongamos que M es un abierto propio de una superficie conexa M' . Entonces $\text{Fr } M = \bar{M} - \overset{\circ}{M} = \bar{M} - M \neq \emptyset$, ya que si $\text{Fr } M = \emptyset$, $M = \bar{M}$, con lo cual M sería un conjunto no vacío abierto y cerrado en M' , que es conexo, luego $M = M'$, en contra de la hipótesis. Sea $p \in \text{Fr } M$ y $U' \subset M'$ un entorno normal de p en M' imagen por \exp_p de un conjunto estrellado. Sea $q \in U' \cap M$ (q existe por ser $p \in \text{Fr } M$ y U' abierto) y $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow U' \subset M'$ una geodésica de M' con $\tilde{\gamma}(0) = p$, $\tilde{\gamma}(1) = q$. Definimos $\gamma: [0, 1] \rightarrow U' / \gamma(t) = \tilde{\gamma}(1-t)$. Entonces $\gamma(0) = q \in M$, y $\gamma(1) = p \in \text{Fr } M$. Como M es un abierto de M' y γ es continua, existe un $\epsilon > 0$ tal que



$\gamma|_{[0, \epsilon[}$ es una geodésica de M . Si existe una extensión $\tilde{\gamma}$ de $\gamma|_{[0, \epsilon[}$ definida sobre \mathbb{R} que es una geodésica de M , entonces $\tilde{\gamma}$ es también una geodésica de M' y, por la unicidad de las geodésicas, $\tilde{\gamma}|_{[0, 1]} = \gamma$, absurdo puesto que $\gamma(1) = p \in \text{Fr} M = \bar{M} - M$. \hat{O} .

V.4. NOTA: El recíproco de V.3 no es cierto: el cono sin el vértice es una superficie no extendible y no completa. Se puede ver la demostración en [do Carmo pp. 327-328].

Lo que hace geoméricamente interesantes a las superficies completas es el siguiente:

§2. Teorema de Hopf-Rinow

V.5. TEOREMA (de Hopf-Rinow): Sea M una superficie conexa. Son equivalentes:

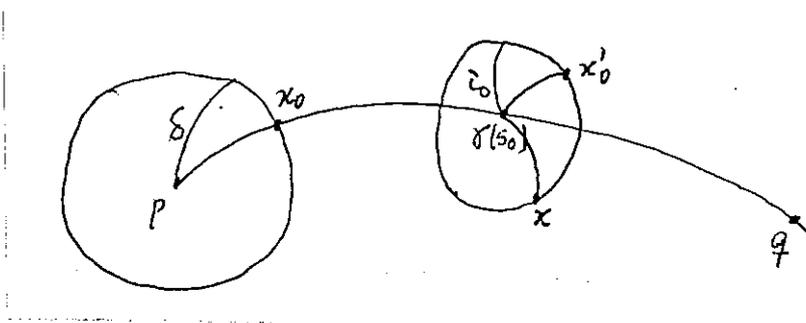
- a) $\exists p \in M/\exp_p$ está definida sobre todo $T_p M$.
- b) Los cerrados y acotados de M son compactos.
- c) M con la distancia intrínseca es un espacio métrico completo.
- d) M es geodésicamente completa.
- e) Existe una sucesión creciente de compactos $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ de M (creciente quiere decir que $K_n \subset K_{n+1}$) recubriendo M ($\bigcup_{n=1}^\infty K_n = M$), tales que si $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de M con $q_n \notin K_n$, entonces, para todo $p \in M$, $d(p, q_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

Además, cada una de las afirmaciones anteriores implica:

- f) $\forall q \in M$ existe una geodésica minimal γ uniendo p con q (recordemos que γ minimal significa que $L(\gamma) = d(p, q)$).

Observación: Usando (d), (f) puede transformarse en $\forall p, q$, existe una geodésica γ en M uniendo p y q con $L(\gamma) = d(p, q)$. Esto es lo que habitualmente se conoce como teorema de Hopf-Rinow.

DEMOSTRACION: a) \Rightarrow f): Sea $r = d(p, q)$, $\delta > 0 / \exp_p$ sea un difeomorfismo sobre un abierto conteniendo a $\bar{B}_\delta(0) \subset T_p M$. La esfera geodésica $S_\delta(p)$ es un compacto (pues es imagen por \exp_p del compacto $S_\delta(0)$). Consideremos la función continua (por ser la función distancia en un espacio métrico) $d: S_\delta(p) \rightarrow \mathbb{R} / x \mapsto d(q, x)$. Como $S_\delta(p)$ es compacto, la función d alcanzará un mínimo en $x_0 \in S_\delta(p)$.



Como $x_0 \in S_\delta(p)$, existe $v \in T_p M / |v| = 1$ y $x_0 = \exp_p \delta v$. Consideremos la geodésica $\gamma(s) = \exp_p s v$. Queremos probar que $\gamma(r) = q$ ⁽¹⁾ (pues entonces γ es una geodésica uniendo p con q y verificando $L(\gamma) = r$, ya que s es el parámetro longitud de arco de γ).

Para ello planteamos la ecuación

$$(V.5.1) \quad d(\gamma(s), q) = r - s.$$

Lo que nos proponemos probar estará demostrado si vemos que (V.5.1) se verifica para $s = r$. Vamos a verlo. Sea $A = \{s \in [0, r] / (V.5.1) \text{ es cierta}\}$. $A \neq \emptyset$, ya que (V.5.1) se verifica para $s = 0$. Además A es un cerrado en $[0, r]$, ya que $f: [0, r] \rightarrow \mathbb{R} / f(s) = d(\gamma(s), q) - r + s$ es una función continua y $A = f^{-1}(0)$.

• Vamos a ver ahora que $r = \sup A$ (lo que, por ser A cerrado, implica que $r \in A$, y concluye la demostración). Ahora bien $r = \sup A$ equivale a que si $s_0 < r$, $s_0 \in A$, entonces $\exists \delta' > 0 / s_0 + \delta' \in A$.

Esto es lo que vamos a probar. Dado $s_0 \in A$, $s_0 < r$, sea $\delta' > 0$ tal que $\exp_{\gamma(s_0)}$ sea un

difeomorfismo sobre un abierto conteniendo a $\bar{B}_{\delta'}(0)$ y tal que $q \notin \bar{B}_{\delta'}(\emptyset)$. Consideramos de nuevo, $\gamma(s_0)$

como antes, $d : S_{\delta'}(\gamma(s_0)) \rightarrow \mathbb{R} / d(x) = d(x, q)$. Sea $x'_0 \in S_{\delta'}(\gamma(s_0))$ un punto en el que esta función alcanza el mínimo. Como $s_0 \in A$,

$$d(\gamma(s_0), q) = r - s_0.$$

Por otro lado, $d(\gamma(s_0), q) = \inf \{L(\alpha), \alpha: \gamma(s_0) \rightsquigarrow q\}$, pero, como $q \notin \bar{B}_{\delta'}(\gamma(s_0))$, toda curva diferenciable a trozos α uniendo $\gamma(s_0)$ con q debe cortar a $S_{\delta'}(\gamma(s_0))$ en un punto x' . Luego

$d(\gamma(s_0), q) = \inf \{L(\alpha) + L(\beta) / \alpha: \gamma(s_0) \rightsquigarrow x', \beta: x' \rightsquigarrow q, x' \in S_{\delta'}(\gamma(s_0))\} = \delta' + d(x'_0, q)$, de donde $d(x'_0, q) = d(\gamma(s_0), q) - \delta' = r - (s_0 + \delta')$, por ser $s_0 \in A$.

Sea $\tilde{\gamma}$ la geodésica radial uniendo $\gamma(s_0)$ con x'_0 , parametrizada respecto de su longitud de arco.

Se verifica que $L(\tilde{\gamma}) = \delta'$, $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(s_0)$, $\tilde{\gamma}(\delta') = x'_0$. La curva

$$\bar{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } 0 \leq t \leq s_0 \\ \tilde{\gamma}(t - s_0) & \text{si } s_0 \leq t \leq s_0 + \delta' \end{cases} \text{ está parametrizada respecto de su longitud de arco y une}$$

$\bar{\gamma}(0) = \gamma(0) = p$ con $\bar{\gamma}(s_0 + \delta') = \tilde{\gamma}(\delta') = x'_0$. Su longitud es $L(\bar{\gamma}) = s_0 + \delta'$. Por otro lado, $d(x'_0, p)$

$\geq d(p, q) - d(x'_0, q) = r - (r - (s_0 + \delta')) = s_0 + \delta'$. De todo ello resulta que $d(x'_0, p) = s_0 + \delta' = L(\bar{\gamma})$, luego

$\bar{\gamma}$ es una geodésica (cfr. IV.77) partiendo de p . Como $\bar{\gamma}|_{[0, s_0]} = \gamma|_{[0, s_0]}$ y, por hipótesis, ambas están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, se sigue de la unicidad de las geodésicas que $\bar{\gamma} \equiv \gamma$, luego $\bar{\gamma}(s_0 + \delta') = \gamma(s_0 + \delta') = x'_0$, por lo tanto $d(\gamma(s_0 + \delta'), q) = r - (s_0 + \delta')$, luego $s_0 + \delta' \in A$, c.q.d.

a) \Rightarrow b): Sea A cerrado y acotado en M . Por ser acotado, A está contenido en una bola $B_r(p)$ de centro p y radio r (en el sentido de espacios métricos). Si $q \in \bar{B}_r(p)$, por f existe una geodésica $\gamma(t)$ uniendo p con q con $L(\gamma) = d(p, q) \leq r$, γ se puede escribir de la forma $\gamma(t) = \exp_p t X$ con $|X| = 1$, y $\gamma(0) = p$, $\gamma(r_q) = q$, siendo $r_q = d(p, q)$. Resulta por lo tanto que $q \in \exp_p(\bar{B}_r(0))$, luego $A \subset \bar{B}_r(p) \subset \exp_p(\bar{B}_r(0))$, y como \exp_p es continua y $\bar{B}_r(0)$ es compacto, $\exp_p \bar{B}_r(0)$ es compacto y al ser A

¹Obsérvese que \exp_p definida para todo $v \in T_p M$ implica $\gamma(s)$ definida para todo $s \in \mathbb{R}$

cerrado contenido en un compacto (y T_2 , evidentemente), A es compacto.

b) \Rightarrow c) Sea $\{p_n\}$ una sucesión de Cauchy en M , entonces $\{p_n\}$ es acotado en M , por lo tanto existe una bola cerrada (que es además un conjunto acotado) $B \supset \{p_n\}$. Por b), B es compacto, y por lo tanto, completo, luego $\{p_n\}$, que es de Cauchy, tiene un límite en B y, por lo tanto, en M .

c) \Rightarrow d): Si M no fuese geodésicamente completa existiría una geodésica $\gamma(s)$ parametrizada respecto de la longitud que estaría definida para $s < s_0 = \inf\{s \in \mathbb{R} / \gamma(s) \text{ no está definida}\}$ pero no en un entorno de s_0 . Sea $\{s_n\}$ una sucesión de Cauchy creciente en \mathbb{R} que converge a s_0 . Se tiene entonces que $d(\gamma(s_n), \gamma(s_m)) \neq |s_n - s_m| \rightarrow 0$, luego $\{\gamma(s_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en M que es completa, luego $\gamma(s_n) \rightarrow p_0 \in M$. Sea W un entorno totalmente normal de p_0 y $\delta > 0$ dado por IV.76 (i.e. tal que $\exp_q|_{B_\delta(0)} \supset W \forall q \in W$ y $\exp_q|_{B_\delta(0)}$ es un difeomorfismo). Sean n, m

suficientemente grandes para que $|s_n - s_m| < \delta/2$ y $\gamma(s_n), \gamma(s_m) \in W$. Entonces existe una geodésica única $\tilde{\gamma}$ uniendo $\gamma(s_n)$ con $\gamma(s_m)$ y con $L_{s_n}^{s_m}(\tilde{\gamma}) < \delta$. Además, $\tilde{\gamma}$ se puede escribir de la forma $\tilde{\gamma}(t) = \exp_{\gamma(s_n)} t X$, con $|X| = 1$ y está definida para $t < \delta$ (ya que $\exp_{\gamma(s_n)}|_{B_\delta(0)}$ es un difeomorfismo). Por

otro lado, para todo s tal que $s_n \leq s \leq s_m$, $d(\gamma(s), \gamma(s_n)) \neq s - s_n \leq s_m - s_n < \delta/2$, luego $\gamma(s) \in B_{\delta/2}(\gamma(s_n))$, luego $\tilde{\gamma}|_{[s_n, s_m]}$ es la geodésica radial que une $\gamma(s_n)$ con $\gamma(s_m)$, luego $\tilde{\gamma}([0, s_m - s_n]) = \tilde{\gamma}([s_n, s_m])$ y, como ambas son geodésicas, parametrizadas respecto la longitud de arco, $\tilde{\gamma}(s - s_n) = \gamma(s)$, y, como $\tilde{\gamma}$ está definida para $s - s_n < \delta$, i.e. $s < s_n + \delta$, $\tilde{\gamma}$ extiende γ hasta $s_n + \delta$, pero $|s_n - s_0| = \lim_{m \rightarrow \infty} |s_n - s_m| \leq \delta/2$ da $s_0 \leq s_n + \delta/2$, luego $s_0 < s_n + \delta$, con lo cual hemos extendido γ más allá de s_0 , en contra de la hipótesis, luego ésta no puede darse.

d) \Rightarrow a) evidente.

b) \Leftrightarrow e): **b) \Rightarrow e)**: Dado $p \in M$, la sucesión de las bolas cerradas $\{\bar{B}_n(p)\}_{n=1}^\infty$ verifica $\bar{B}_n(p) \subset \bar{B}_{n+1}(p)$, $\bigcup_{n=1}^\infty \bar{B}_n(p) = M$ y, si $\forall n \ q_n \notin \bar{B}_n(p)$, $d(p, q_n) > n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Como $\bar{B}_n(p)$ es un cerrado y acotado y, por b), es un compacto, esta sucesión es la que dice e).

e) \Rightarrow b) Si A es cerrado y acotado, $\exists \bar{B}_r(p) \supset A$. Para ver que A es compacto bastará ver que $\bar{B}_r(p)$ lo es. Veamos, por tanto, que las bolas cerradas de M son compactos si se verifica e). Sea $p \in M$, $\varepsilon > 0$. $\bar{B}_\varepsilon(p) \subset M = \bigcup K_n$. Puede ocurrir:

- $\exists n \in \mathbb{N} / \bar{B}_\varepsilon(p) \subset K_n$. Entonces, como K_n es compacto, $\bar{B}_\varepsilon(p)$ es compacto.
- $\forall n \in \mathbb{N} \exists q_n \in \bar{B}_\varepsilon(p) - K_n$. Entonces, por e), $d(p, q_n) \rightarrow \infty$, absurdo. \circ .

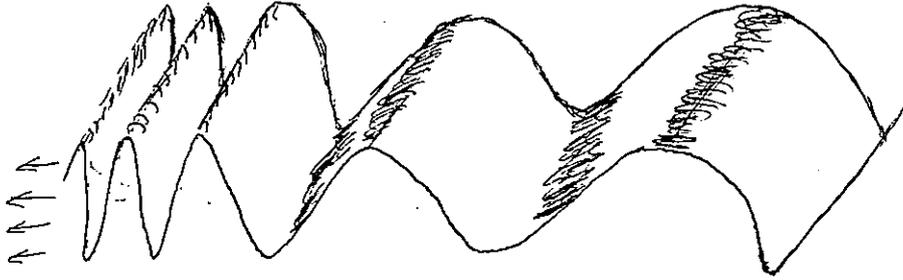
V.6. COROLARIO: a) Una superficie compacta es geodésicamente completa.

b) Una superficie cerrada como subespacio de \mathbb{R}^3 es completa.

DEMOSTRACION: a) Es consecuencia de que un espacio métrico compacto es completo. b) Si M es cerrado en \mathbb{R}^3 , como (\mathbb{R}^3, d^e) es completo, entonces (M, d^e) es completo. Como $d^e \leq d$, si $\{q_n\}$ es una sucesión de Cauchy para d , también lo es para d^e , y si (M, d^e) es completo, $\{p_n\}$ converge en d^e y

como las topologías inducidas por d^e y d son la misma, $\{p_n\}$ converge en d , y (M, d) es completa.

V.7. NOTA: En la demostración del corolario anterior hemos visto que si una superficie M es d^e -completa, entonces es d -completa. El recíproco, sin embargo, no es cierto, como lo muestra el ejemplo de la figura.



M completa $v(s) :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow T_p M$ curva / $|v(s)| = \rho = \text{cte}$

$f : [0, 1] \times]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M$
 $(t, s) \mapsto f(t, s) = \exp_p t v(s)$

PROP: $\left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{(t,0)}, \frac{\partial f}{\partial s} \Big|_{(t,0)} \right\rangle = 0$

Sea (U, ρ) int. coord en un entorno de $f(t, 0)$, $x^{-1}(f(s, t)) = (u^1(s, t), u^2(s, t))$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t} \right] &= \frac{\nabla}{\partial s} \left(\frac{\partial u^1}{\partial t} x_1 + \frac{\partial u^2}{\partial t} x_2 \right) = \frac{\partial^2 u^1}{\partial s \partial t} x_1 + \frac{\partial^2 u^2}{\partial s \partial t} x_2 + \frac{\partial u^1}{\partial t} \nabla \frac{\partial u^1}{\partial s} x_1 + \frac{\partial u^2}{\partial t} \nabla \frac{\partial u^2}{\partial s} x_2 \\ &+ \frac{\partial u^2}{\partial t} \nabla \frac{\partial u^1}{\partial s} x_1 + \frac{\partial u^1}{\partial t} \nabla \frac{\partial u^2}{\partial s} x_2 \\ &= \frac{\partial^2 u^1}{\partial s \partial t} x_1 + \frac{\partial^2 u^2}{\partial s \partial t} x_2 + \frac{\partial u^1}{\partial t} \nabla \frac{\partial u^1}{\partial s} x_1 + \frac{\partial u^2}{\partial t} \nabla \frac{\partial u^2}{\partial s} x_2 \\ &+ \frac{\partial u^2}{\partial t} \nabla \frac{\partial u^1}{\partial s} x_1 + \frac{\partial u^1}{\partial t} \nabla \frac{\partial u^2}{\partial s} x_2 \\ &= \frac{\nabla}{dt} \left(\frac{\partial u^1}{\partial s} x_1 + \frac{\partial u^2}{\partial s} x_2 \right) = \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} \end{aligned}$$

Luego $\frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s} \Big|_{(t,0)}, \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{(t,0)} \right\rangle = \left\langle \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle_{(t,0)} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0$

luego $\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle_{(t,0)} = \text{cte}$, luego $\left. \begin{array}{l} \text{son } \perp, \text{ prop. probada} \end{array} \right\}$

y en $t=0$ $\frac{\partial f}{\partial s} \Big|_{(t,0)} = \frac{d \exp_p t v(0)}{ds} \Big|_{t=0} \rightarrow 0$

dada $f(t, s)$, definamos $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = d \exp_p(tv) v'(0)$

Lema: $\forall t / J(t) \neq 0, \frac{1}{|J(t)|^2} \left\langle \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = -K(t) \rho^2$ ($\rho = |v(s)|$)

y cuando $J(t) = 0$, es evidente por $\left\langle \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = -|J(t)| K(t) \rho^2$. Luego no digas $\text{cte} \neq 0$.

Sea: $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{(t,0)}$ c.v. tangente a geodésica $t \mapsto f(t, 0)$, luego $\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{(t,0)} \neq 0$,

si $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s} \Big|_{(t,0)} \neq 0$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ tiene rango 2 en $(t, 0)$, luego \exists esta $U_{(t,0)}$ de $\mathbb{R}^2 /$

f y int. de coordenadas γ , en su int. de coord. no tiene:

$t \mapsto f(t,s)$ es geodésica $\forall s / (t,s) \in U(t_0)$, luego

$$0 = \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} = \Gamma_{tt}^s \frac{\partial f}{\partial s} + \Gamma_{tt}^t \frac{\partial f}{\partial t} \Rightarrow \Gamma_{tt}^s = \Gamma_{tt}^t = 0 \text{ sobre } U(t_0)$$

$$\left\langle \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \Big|_{s=0} = \left\langle \frac{\nabla}{dt} \left(\Gamma_{st}^s \frac{\partial f}{\partial s} + \Gamma_{st}^t \frac{\partial f}{\partial t} \right), \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \Big|_{s=0} = \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

$$= \left\langle \Gamma_{st,t}^s \frac{\partial f}{\partial s} + \Gamma_{st}^s \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} + \Gamma_{st,t}^t \frac{\partial f}{\partial t} + \Gamma_{st}^t \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \Big|_{s=0} =$$

$$= \left\langle \left(\Gamma_{st,t}^s + \Gamma_{st}^s \Gamma_{ts}^s \right) \frac{\partial f}{\partial s} + \left(\Gamma_{st}^s \Gamma_{tt}^t + \Gamma_{st,t}^t \right) \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \Big|_{s=0} =$$

$$= \left(\Gamma_{st,t}^s + \Gamma_{st}^s \Gamma_{ts}^s \right) g_{ss}$$

Teor eqn Gauss

$$K =$$

pero si $t = u^1, s = u^2, g_{21} = g_{st} = 0, g_{11} = g_{tt} = |v(s)|^2 = \rho^2$, luego

$$\begin{aligned} -K(\sigma(t)) &= \frac{-1}{g_{ss}g_{tt}} g_{ss} \left(\Gamma_{tt,s}^s - \Gamma_{ts,t}^s + \sum_l \left(\Gamma_{tl}^l \Gamma_{ts}^s - \Gamma_{ts}^l \Gamma_{tl}^s \right) \right) = \frac{1}{\rho^2} \left(-\Gamma_{ts,t}^s + \Gamma_{ts}^s \Gamma_{st}^s \right) = \\ &= \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{g_{ss}} \left\langle \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \Big|_{s=0}. \end{aligned}$$

PROP: $\frac{\nabla^2 J}{dt} + \rho^2 K(\sigma(t)) J(t) = 0$ con $\sigma(t) = f(t,0), \rho = \|\sigma'\| = |v(s)|$

Dem: \forall $J(t) \neq 0, K = \frac{1}{\rho^2} \left\langle -\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla f}{\partial t}, \frac{J}{|J|^2} \right\rangle =$

$$= \frac{1}{\rho^2} \left\langle -\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{J}{|J|^2} \right\rangle = -\frac{1}{\rho^2} \left\langle J'', \frac{J}{|J|^2} \right\rangle, \text{ luego}$$

$$\rho^2 K J = - \left\langle J'', \frac{J}{|J|} \right\rangle \frac{J}{|J|} = -J''$$

$$J \langle J, \sigma' \rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \langle J, \sigma' \rangle = 0 \Rightarrow \langle J'', \sigma' \rangle = 0$$

NOTA: $\{e_1, e_2\}$ def. F. met. inducida de $\gamma(t)$.

$$\frac{v_0}{dt} = 10^4 \text{ kg } \bar{e}_2 = 0 \quad \frac{v_{e_2}}{dt} = -10^4 \text{ kg } e_1 = 0 \quad \text{y } J(t) \text{ y } \bar{e}_2(t) \text{ ambos } \perp \text{ a } e_1(t), \text{ luego}$$

$$J(t) = y(t) \bar{e}_2(t), \text{ luego } \frac{\nabla^2 J}{dt^2} = y''(t) \bar{e}_2(t), \text{ luego}$$

$$y'' + \rho^2 K y = 0$$

DEF: J.c.v. a lo largo de γ con $|\dot{\gamma}| = \rho$, J campo de Jacobi si $J'' + \rho^2 K J = 0$ se anula en $\gamma(0)$ y es ortogonal a γ (lo que le permite $\frac{\partial J}{\partial s}$)

PROP: $\{J(t) \text{ c.j. a lo largo de } \gamma \}$ y m. e.v. de dim. 1 y cada J viene determinado por

$$J'(0) \equiv \frac{\nabla J}{dt}(0)$$

Dem. Tomando una cf. de Fermat a lo largo de $\gamma(t)$, J(t) es de Jacobi en $y'' + \rho^2 K y = 0$ con cond. iniciales $y(0) = 0, y'(0)$ lo que sea. Soluc. de (1) verificando $y(0)$ forman un c.v. de dim. 1 y mutuamente det. por $y'(0)$.

¿dada una sola $\xi(t)$, si $\xi(t)$ es otra, $\xi'' + \rho^2 K \xi = 0, \xi(0) = 0, \xi'(0) = \lambda \xi'(0)$

$\lambda \xi(t)$ verifica porque es un múltiplo c.i. luego $\xi(t) = \lambda \xi(t)$

PROP: J campo de Jacobi a lo largo de $\gamma(t)$, $\exists f(t, s) / J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}$ y, por tanto

$$J(t) = d \exp_{\gamma(0)}(t \gamma'(0)) \frac{\partial f}{\partial s}(0)$$

Dem. Definamos $f(t, s) = \exp_{\gamma(0)}(t v(s))$ con $v(s) = |\dot{\gamma}(s)| \left(\cos\left(\frac{|J'(0)|s}{|\dot{\gamma}(0)|}\right) \frac{\gamma'(0)}{|\dot{\gamma}(0)|} + \sin\left(\frac{|J'(0)|s}{|\dot{\gamma}(0)|}\right) \frac{J'(0)}{|J'(0)|} \right)$
 $v(0) = J'(0)$

Entonces $\frac{\partial f}{\partial s} \Big|_{s=0} = d \exp_{\gamma(0)}(t v(0)) \frac{J''(0)}{|\dot{\gamma}(0)|} + v'(0)$

y $\frac{\partial f}{\partial s} \Big|_{s=0}$ es un campo de Jacobi (lo vimos) que verifica $\frac{\partial f}{\partial s} \Big|_{s=0, t=0} = 0$

y $\frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} \Big|_{(0,0)} = \frac{\nabla}{dt} \left(d \exp_{\gamma(0)}(t \gamma'(0)) \right) = d \exp_{\gamma(0)}(0) \frac{J'(0)}{|\dot{\gamma}(0)|} + 0 \cdot \frac{\nabla}{dt} = J'(0)$

resultados demostrados.

NOTA

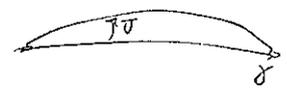
Sea $J(t) = y(t) e_2(t)$,

$y(t) = \frac{y'(0)t}{1} + \frac{y''(0)t^2}{2} + \frac{y'''(0)t^3}{6} + R(t)$ con $\frac{R(t)}{t^3} \rightarrow 0$

$y(0) = 0 \quad y''(0) = -\rho^2 K(\sigma(0)) y(0) = 0$

$y'''(0) = -\rho^2 (K\sigma)'(0) y(0) - \rho^2 (K\sigma)(0) y'(0)$

DEF: σ geodésica, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma(t_0)$ punto conj de $\sigma(0)$ e lo largo de σ si $\exists c$ Jacobi $J(t)$ o lo largo de $\sigma(t)$, no ident. punto / $J(t_0) = 0$.

NOTA $\sigma(t)$ conjugado de $\sigma(0)$ ni $\sigma(0)$ conj de $\sigma(t)$ 

$\sigma^{-2}(t) = \sigma(t_0 - t) \quad Y^{-1}(t) = Y(t_0 - t)$

PROP: σ geod. por la. $\sigma(t_0)$ pto conjugado de $\sigma(0)$ ni $t_0 \sigma'(0)$ pto crítico de $\exp_{\sigma(0)}$

Dem: pto conj si $\exists J(t) / J(0) = 0 \quad J(t_0) = 0$, pero $J(t) = \exp_{\sigma(0)} t J'(0)$

luego $J(t_0) = 0 \Leftrightarrow t \sigma'(0)$ pto en que $d\exp_{\sigma(0)}$ no es isomorf, porque $J'(0) \neq 0$ y ortogonal a $\sigma'(0)$ (vimo $\langle J, \sigma' \rangle = 0 \Rightarrow \langle J', \sigma' \rangle = 0$.)

Campo de Jacobi para superficies de $K = K_0$ cte.

Quando $Y = y \bar{e}_2$, vimos que y ha de satisfacer

$y''(t) + K_0 y(t) = 0 \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
 (aquí he tomado $\rho = 1$ ($\sigma'(t) = 1$))

las soluciones de esto son:

$y(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{K_0} t)}{\sqrt{K_0}} & \text{si } K_0 > 0 \\ t & \text{si } K_0 = 0 \\ \frac{\sinh(\sqrt{-K_0} t)}{\sqrt{-K_0}} & \text{si } K_0 < 0 \end{cases} \quad \text{y } J(t) = y(t) \bar{e}_2(t)$

Recordemos $\sigma'(0) = J'(0)$, y tomar esto es tomar $J'(0) = 1$ lo que cumple otras condiciones sean, simplemente múltiplos de esto, pues, recordemos $J(t) = \exp_{\sigma(0)} t J'(0)$

Por ejemplo, para la esfera de radio r , $K_0 = \frac{1}{r^2}$, $J(0) = 0$, $J(\frac{\pi r}{2}) = 0$, el primer punto conjugado de $\sigma(0)$ es $\sigma(\frac{\pi r}{2}) = \sigma(\frac{\pi}{\sqrt{K_0}})$ (su punto antípoda)

i.e., para $K_0 > 0$, la "distancia" de $\sigma(0)$ a su primer pto conjugado es $\pi/\sqrt{K_0}$ y, para $K_0 \leq 0$,

$\rho = \sigma(0)$ no tiene puntos conjugados

LEMA DE COMPARACION DE STURM: Sean $A(t) \geq B(t)$ (o' $A(t) > B(t)$)

$u(t)$ solución de $u'' + Au = 0$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$

$v(t)$ " " $v'' + Bv = 0$, $v(0) = 0$, $v'(0) = 1$

$a = z^+(u(t))$ $b = z^+(v(t))$

Se tiene:

1) $a \leq b$ (resp. $a < b$)

2) si $0 < t_0 < t_1 < a \Rightarrow v(t_1)u(t_0) \geq u(t_1)v(t_0)$ (resp $v(t_1)u(t_0) > u(t_1)v(t_0)$)

3) si $0 < t < a \Rightarrow v(t) \geq u(t)$ (resp $v(t) > u(t)$).

Bemo Sea $t \in]0, \min(a, b)[$. Supong $A \geq B$:

$0 = \int_0^t \{u(v'' + Bv) - v(u'' + Au)\} dt = \int_0^t uv(B-A) dt + uv|_0^t - \int_0^t u'v' dt - v u'|_0^t + \int_0^t v'u' dt =$

$= (uv' - v u')|_0^t + \int_0^t uv(B-A) dt \leq u(t)v'(t) - v(t)u'(t)$

porque $u(0) = 0 = v(0)$ y $u'(0) = 1 = v'(0) \Rightarrow \exists \delta > 0$ / $u(t) > 0$ y $v(t) > 0$ para $t \in]0, \delta[$.
y $B - A \leq 0$

luego $u(t)v'(t) \geq v(t)u'(t)$ i.e. $\frac{v'}{v} \geq \frac{u'}{u}$, luego

para $0 < t_0 < t_1 < \min(a, b)$, $\int_{t_0}^{t_1} \frac{v'}{v} dt \geq \int_{t_0}^{t_1} \frac{u'}{u} dt$ i.e. $\ln \frac{v(t_1)}{v(t_0)} \geq \ln \frac{u(t_1)}{u(t_0)}$

i.e. $u(t_0)v(t_1) \geq u(t_1)v(t_0)$ (2) Si 1)

$\lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{v(t_0)}{u(t_0)} \stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{v'(t_0)}{u'(t_0)} = \frac{v'(0)}{u'(0)} = 1 \Rightarrow \frac{v(t_1)}{u(t_1)} \geq 1$ (3) si 1)

3) $\Rightarrow t_1 \rightarrow \min(a, b) \Rightarrow v(\min(a, b)) \geq u(\min(a, b))$. Si $\min(a, b) = b$, $v(b) \geq u(b) \Rightarrow u(b) \leq 0$
 $\Rightarrow a \leq b \Rightarrow a = b$
a primer caso de u
luego $\min(a, b) = a$. (4).

Caso $A > B$: Si $a = b$,

$0 = uv' - v u'|_0^b + \int_0^b \underbrace{(B-A)uv}_{\neq 0} dt$

y $0 = 0 + \text{algo} > 0$, absurdo, luego $a < b$ 1)

En 2) dependíamos

$0 < u(t_1)v'(t_1) - v(t_1)u'(t_1)$, $\frac{v'}{v} < \frac{u'}{u}$ $\ln \frac{v(t_1)}{v(t_0)} > \ln \frac{u(t_1)}{u(t_0)}$ y $u(t_1)v(t_0) > u(t_0)v(t_1)$

En 3) dependíamos

$\frac{v(t_1)}{u(t_1)} > \frac{v(t_0)}{u(t_0)} \rightarrow 1$, y $\left(\frac{v(t)}{u(t)}\right)' = \frac{-v u' + u v'}{u^2} > 0$, luego $\frac{v(t_1)}{u(t_1)} > 1$

fin

TEOR: γ geod $|\gamma'|=1$, $K|\gamma(t)|=K(t)$

(a) $K(t) \leq k_1$ (resp $K(t) < k_1$) $\Rightarrow \gamma(0)$ no tiene ninguna pto cony para $t \in [0, \frac{\pi}{\sqrt{k_1}}[$
 (resp. $t \in [0, \frac{\pi}{\sqrt{k_1}})$)

(b) $K(t) \geq k_0$ (resp $>$) $\Rightarrow \gamma(0)$ tiene al menos un punto conyugado para $t \in]0, \frac{\pi}{\sqrt{k_0}}[$
 (resp $t \in]0, \frac{\pi}{\sqrt{k_0}}[$)

Si $K(t) \leq 0$: no hay pto conyugado

Si $K(t) \geq 0$: pto cony. en $]0, \infty[$?

> 0 : " " " " *Wada, siempre se concluye nada, de hecho algo en 'Heon Pehlmann, 1992' ha de ser difeomorfismo a \mathbb{R}^2 .*

Sea $\{a\}$ para de Stokes con $B(t) = K(t)$, $A = k_1$:

~~te~~ $y(t) \geq \frac{\sin \sqrt{k_1} t}{\sqrt{k_1}}$ y $z^+(y) \geq \frac{\pi}{\sqrt{k_1}}$

(d) con $A = K(t)$ $B = k_0$

$y(t) \leq \frac{\sin \sqrt{k_0} t}{\sqrt{k_0}}$ y $z^+(y) \leq \frac{\pi}{\sqrt{k_0}}$

k_1 o $k_0 \leq 0$ no por t o' por $\sqrt{k_i} t$, que no se acumula nunca, y no se concluye nada.

COR: Si $k_0 \leq K(t) \leq k_1$,

$\gamma(t)$ no tiene pto conyugados en $[0, \frac{\pi}{\sqrt{k_0}}[$ y, en los intervalos $[\frac{\pi}{\sqrt{k_1}}, \frac{\pi}{\sqrt{k_0}}]$.

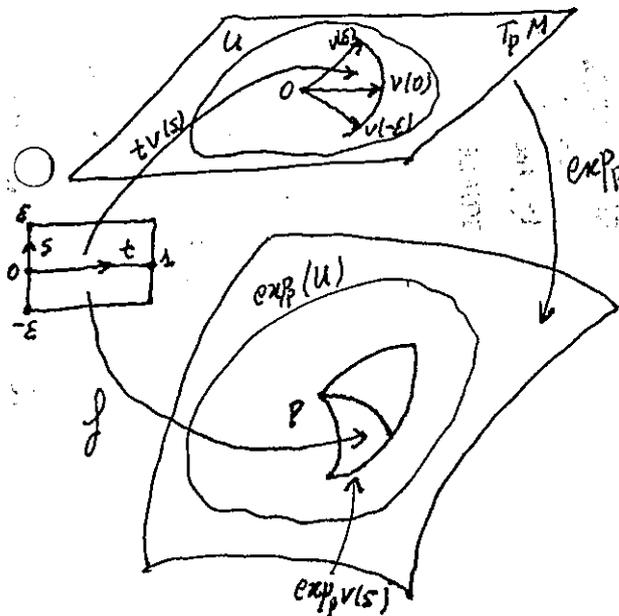
Lección 24ª: CAMPOS DE JACOBI Y PUNTOS CONJUGADOS

§3. Campos de Jacobi.

Consideremos por simplicidad que estamos en una superficie M geodésicamente completa. Sea U abierto estrellado $\subset T_p M$ tal que $\exp_p|_U$ sea un difeomorfismo, y $v(s):]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow U$ una curva en U . Definamos

$$f: [0,1] \times]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow U \quad \text{exp}_p|_U$$

$$(t, s) \longmapsto f(t,s) = \exp_p t v(s)$$



Para cada s fijo, $t \mapsto f(t, s)$ es una geodésica (se dice que f es una familia uniparamétrica - de parámetro s - de geodésicas).

Si $v(0) = v$, $v'(0) = w$, se tiene que $\frac{\partial f}{\partial s}(t,0) = d \exp_p(t v(0)) t v'(0) = d \exp_p(tv) tw$. Si, además, se toma la curva $v(s)$ de modo que $|v(s)| = r_0 \equiv \text{cte}$ entonces, eligiendo un sistema de coordenadas geodésicas polares en que el ángulo θ valga 0 en la dirección de un $v(s_0)$, $-\epsilon < s_0 < 0$, como $|v(s)| = r_0 \forall s$, se tiene que $\exp_p t v(s) = f(t,s)$ tiene por coordenadas polares $(t r_0, \theta(s))$, con lo cual

$$\frac{\partial f}{\partial s}(t,0) = \theta'(0) x_\theta, \text{ y } \frac{\partial f}{\partial t}(t,0) = \frac{d}{dt} \exp_p(t v(0)) \frac{d}{dt} \exp_p t v(0) = r_0 x_r, \text{ i.e.}$$

$\frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$ es

ortogonal a la geodésica radial $\exp_p tv$. Todo esto permite interpretar

intuitivamente $\left| \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) \right| = |d \exp_p(v) w|$ como una medida de la velocidad con que las geodésicas $t \mapsto \exp_p t v(s)$ partiendo de p , se alejan entre sí.

Todo esto sugiere que puede ser interesante el estudio de los campos a lo largo de una geodésica $\exp_p t v$ de la forma $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = d \exp_p(t v) tw$, con $w = v'(0) \perp v$.

Según hemos visto $|J(t)|$ daría una medida de la velocidad con que las geodésicas se alejan entre sí. Por otro lado esta velocidad de alejamiento debe -intuitivamente- influir en el área de un disco geodésico: para un mismo radio será mayor el área del disco cuanto más rápidamente se separen las geodésicas. Vimos en IV. 67 que la curvatura de Gauss K influía en el

área de un disco geodésico. Por lo tanto será natural que encontremos relaciones entre los campos $J(t)$, la curvatura K y la velocidad de separación de las geodésicas partiendo de un punto.

Obsérvese por otro lado que si $0 = J(t) = d \exp_p(t v) w$, $t v$ es un punto crítico de \exp_p , luego encontraremos también relaciones entre los puntos críticos de \exp_p , los campos $J(t)$ y la curvatura de Gauss K .

Vamos ahora a estudiar esos campos $J(t)$ comenzando por estudiar una ecuación diferencial que los caracteriza completamente.

V.8. LEMA: Sea $v:]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow U \text{ abto } \subset T_p M$ una curva diferenciable regular, $r > 0$ tal que $\bar{B}_r(0) \subset U$ abto tal que $\exp_p|_U$ es un difeomorfismo, $|v(s)| = r = \text{cte} \neq 0$. Sea $f(t,s) = \exp_p t v(s)$. Entonces, si $w = v'(0)$ y $v = v(0)$, $\exists \delta > 0 / \forall t \in [0, 1+\delta[$, en $s = 0$

$$\frac{1}{\left| \frac{\partial f}{\partial s} \right|^2} \left\langle \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = -K(\gamma(t)) r^2,$$

siendo $\gamma(t) = \exp_p t v$.

DEMOSTRACION: Como $v(s) \in \bar{B}_r(0) \subset U$, $\exists \delta > 0 / \bar{B}_{r+\delta r} \subset U$ y, por lo tanto $f(t,s) = \exp_p t v(s)$ está definida también para $(t,s) \in [0, 1+\delta] \times]-\epsilon, \epsilon[$. Como $|v(s)| = \text{cte}$, $v'(0) = w$ es ortogonal a $v = v(0)$ y, según vimos en la introducción,

$t \quad 0 / \quad \frac{\partial f}{\partial s}(t,0) = d \exp_p(v) t w \neq 0 \quad y \quad (2) \quad |v(s)|=r \Rightarrow \langle v, w \rangle = \langle v(0), w'(0) \rangle = -\frac{1}{2} \langle v, v' \rangle' = 0$

$\frac{\partial f}{\partial t}(t,0) = \frac{d}{dt} (\exp_p t v)$, vector tangente a la geodésica $\gamma: t \rightarrow \exp_p t v$, y vimos también allí que, tomando un sistema de coordenadas geodésicas polares (r, θ) adecuado

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,0) = r x_r, \quad \frac{\partial f}{\partial s}(t,0) = \theta'(0) x_\theta$$

y, por lo tanto, $\frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial t}(t,0)$ son vectores ortogonales. Como $\frac{\partial f}{\partial s}(t,0) = df(t,0)(0,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial t}(t,0) = df(t,0)(1,0)$, resulta que $df(t,0)$ es un isomorfismo si $t \neq 0$. Luego $\forall t \neq 0$ existe un entorno $U_{(t,0)}$ de $(t,0)$ en \mathbb{R}^2 tal que f es un difeomorfismo sobre $U_{(t,0)}$. Por lo tanto podemos considerar $(U_{(t,0)}, f)$ como un sistema de coordenadas de la superficie. En este sistema de coordenadas se tiene:

Como $t \rightarrow f(t,s) = \exp_p t v(s)$ es una geodésica,

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} = \Gamma_{tt}^s \frac{\partial f}{\partial s} + \Gamma_{tt}^t \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \implies \Gamma_{tt}^s = 0 = \Gamma_{tt}^t \text{ sobre } U_{(t,0)}.$$

Para el primer miembro de la igualdad del lema:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \Big|_{s=0} &= \left\langle \frac{\nabla}{dt} \left(\Gamma_{st}^s \frac{\partial f}{\partial s} + \Gamma_{st}^t \frac{\partial f}{\partial t} \right), \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \Big|_{s=0} \stackrel{\downarrow}{=} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \\ &= \left\langle \left(\Gamma_{s,t,t}^s + \Gamma_{st}^s \Gamma_{ts}^s \right) \frac{\partial f}{\partial s} + \left(\Gamma_{s,t,t}^t + \Gamma_{st}^s \Gamma_{ts}^t \right) \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \Big|_{s=0}. \end{aligned}$$

Ahora bien, en $s = 0$, $g_{st} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}(t,0), \frac{\partial f}{\partial t}(t,0) \right\rangle = 0$, luego

$$\left\langle \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \Big|_{s=0} = \left(\Gamma_{s,t,t}^s + \Gamma_{st}^s \Gamma_{ts}^s \right) g_{ss} = \left(\Gamma_{s,t,t}^s + \Gamma_{st}^s \Gamma_{ts}^s \right) \left| \frac{\partial f}{\partial s} \right|^2.$$

Ahora bien, por el teorema egregio de Gauss,

$$K = \frac{1}{\det I} \left\{ \sum_m g_{2m} \left[\Gamma_{11,2}^m - \Gamma_{12,1}^m + \sum_{\ell} \left(\Gamma_{11}^{\ell} \Gamma_{\ell 2}^m - \Gamma_{12}^{\ell} \Gamma_{\ell 1}^m \right) \right] \right\},$$

entonces, si $t \equiv u^1$, $s \equiv u^2$, $g_{21} \equiv g_{st} = 0$, como hemos visto, y $g_{11} \equiv g_{tt} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle =$
 $t \mapsto f(t, s)$ geodésica

$$\downarrow = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t=0}, \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t=0} \right\rangle = \langle v(s), v(s) \rangle = r^2. \text{ Por lo tanto:}$$

$$- K(\gamma(t)) = \frac{-1}{g_{ss} g_{tt}} g_{ss} \left(\Gamma_{11,2}^2 - \Gamma_{12,1}^2 + \sum_{\ell} \left(\Gamma_{11}^{\ell} \Gamma_{\ell 2}^2 - \Gamma_{12}^{\ell} \Gamma_{\ell 1}^2 \right) \right) = [\text{como } \Gamma_{11}^{\ell} = 0$$

$$\text{según vimos}] = \frac{+1}{r^2} \left(\Gamma_{s,t,t}^s + \Gamma_{ts}^s \Gamma_{st}^s \right) = \frac{1}{r^2} \frac{1}{\left| \frac{\partial f}{\partial s} \right|^2} \left\langle \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \Big|_{s=0} \cdot \hat{O}.$$

V.9. NOTA: Obsérvese que los puntos esenciales en la demostración del lema V.8 han sido:

- a) La ortogonalidad de $\frac{\partial f}{\partial t}(t,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$ *← mejor usar pag. 168 para esto desde la 1ª demostración.*
- b) La no nulidad de $\frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$.

c) El uso de coordenadas para los cálculos de las fórmulas en las que intervienen las derivadas covariantes y la curvatura de Gauss.

Para ver fácilmente la aplicabilidad de estas dos cosas hemos usado un abierto sobre el que \exp_p es un difeomorfismo. Sin embargo, para el punto c) basta con trabajar en entornos de puntos en los que \exp_p es no singular, pues entonces f es un sistema de coordenadas en un entorno de ese punto. También para el punto b) basta con trabajar en puntos en los que \exp_p es no singular.

Para a) observemos que las coordenadas polares (r, θ) siguen verificando $\langle x_r, x_\theta \rangle = 0$ incluso cuando dejan de ser sistema de coordenadas, en efecto: ya vimos que

(r y θ vienen de diffeomorfismo por t y v(s), no dependen de exp_p)

$$\langle x_r, x_\theta \rangle \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0, \text{ y } \frac{\partial}{\partial r} \langle x_r, x_\theta \rangle = \left\langle \frac{\nabla}{dr} x_r, x_\theta \right\rangle + \left\langle x_r, \frac{\nabla}{dr} x_\theta \right\rangle = \left\langle x_r, \frac{\nabla}{dr} x_\theta \right\rangle,$$

pero $\frac{\nabla}{dr} x_\theta - \frac{\nabla}{d\theta} x_r = [x_r, x_\theta] = \frac{D}{dr} x_\theta - \frac{D}{d\theta} x_r = x_{\theta r} - x_{r\theta} = 0,$

→ tiene sentido si exp_p es regular

$$\text{luego } \frac{\partial}{\partial r} \langle x_r, x_\theta \rangle = \left\langle x_r, \frac{D}{d\theta} x_r \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \langle x_r, x_r \rangle = 0.$$

Por lo tanto V.8 es válido, no solo en puntos de un abto U en los que \exp_p es un difeomorfismo, sino en todos los puntos en los que \exp_p es regular. Además, por continuidad, V.8 es válido en los puntos singulares de \exp_p que sean límite de puntos regulares.

V.10. PROPOSICION: Sea f la aplicación definida en V.8, pero donde U es ahora un abierto de $T_p M$ en el cual \exp_p es regular. Si $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$, J verifica la ecuación

$$\frac{\nabla^2 J}{dt^2} + r^2 K(\gamma(t)) J(t) = 0, \text{ siendo } \gamma(t) = \exp_p t v(0) = f(t, 0) \text{ y } r = |\gamma'|.$$

DEMOSTRACION: Por el lema 5.8 y la nota 5.9,

$$K(\gamma(t)) = \frac{1}{r^2} \left\langle - \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{J}{|J|^2} \right\rangle.$$

Ahora bien, empleando los sistemas de coordenadas locales de la demostración de V.8, se ve que $\frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}$, por lo tanto

$$K(\gamma(t)) = \frac{1}{r^2} \left\langle - \frac{\nabla^2 J}{dt^2}, \frac{J}{|J|^2} \right\rangle \text{ y, como } \langle J, \gamma' \rangle = 0, \frac{d^2}{dt^2} \langle J, \gamma' \rangle = 0, \text{ de donde}$$

$$\left\langle \frac{\nabla^2 J}{dt^2}, \gamma' \right\rangle = 0, \text{ luego } \frac{\nabla^2 J}{dt^2} = \left\langle \frac{\nabla^2 J}{dt^2}, \frac{J}{|J|} \right\rangle \frac{J}{|J|}, \text{ por lo tanto } \frac{\nabla^2 J}{dt^2} = - r^2 K(\gamma(t))$$

J. Ô

V.11. NOTA: Sea $\{\tilde{e}_1(t), \tilde{e}_2(t)\}$ una referencia de Frenet intrínseca de $\gamma(t)$.

Como $\gamma(t)$ es una geodésica, $\frac{\nabla \tilde{e}_1}{dt} = 0$, y $\frac{\nabla \tilde{e}_2}{dt} = 0$ (cfr. IV.41 y demostración de IV.42). Por lo tanto, como $J(t) \perp \gamma'(t)$ que está en la

dirección de $\tilde{e}_1(t)$, resulta que $J(t) = y(t) \tilde{e}_2(t)$ y $\frac{\nabla^2 J}{dt^2} = y''(t) \tilde{e}_2(t)$, y

la ecuación de V.10 para J se traduce en

$$(V.11.1) \quad y'' + r^2 K y = 0.$$

○ **V.12. DEFINICION:** Sea J un campo vectorial a lo largo de una geodésica γ parametrizada de modo que $|\gamma'(t)| = r$. Diremos que J es un campo de Jacobi si verifica la ecuación

$$J'' + r^2 K J = 0 \quad (\text{con } J'' = \nabla^2 J / dt^2),$$

se anula en $\gamma(0)$ y es ortogonal a γ .

V.13. PROPOSICION: Los campos de Jacobi a lo largo de una geodésica $\gamma(t)$ constituyen un espacio vectorial real de dimensión 1 y cada campo de Jacobi J viene determinado por $J'(0) = \frac{\nabla J}{dt}(0)$.

○ **DEMOSTRACION:** Dada una referencia de Frenet $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ a lo largo de $\gamma(t)$, se tiene, por V.11, que $J(t)$ es de Jacobi sii es de la forma $J(t) = y(t) \bar{e}_2(t)$ e $y(t)$ verifica $y'' + r^2 K y = 0$ con la condición inicial $y(0) = 0$ (equivalente a $J(0) = 0$). Por los teoremas de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales, las soluciones de la ecuación diferencial lineal (V.11.1) verificando $y(0) = 0$ forman un espacio vectorial de dimensión 1 y están unívocamente determinadas por $y'(0)$. ○

V.14. PROPOSICION: Sea J campo de Jacobi a lo largo de una geodésica γ . Entonces

$$(V.14.1) \quad J(t) = \text{dexp}_{\gamma(0)}(t \gamma'(0)) t J'(0) \quad \forall t.$$

$f(t,s) = \text{exp}_{\gamma(0)}(t v(s)) \quad |v(s)| = |\gamma'(0)| \quad v(0) = \gamma'(0) \quad v'(0) = J'(0)$
 $v(s) = |\gamma'| \left(\cos \left(\frac{|\gamma'(0)|}{|\gamma'|} s \right) \frac{\gamma'(0)}{|\gamma'|} + \sin \left(\frac{|\gamma'(0)|}{|\gamma'|} s \right) \frac{J'(0)}{|\gamma'(0)|} \right)$

DEMOSTRACION: Es evidente que el campo J así definido es de Jacobi: Por 5.10 $J(t)$ verifica la ecuación (V.11.1) para los t tales que $t \gamma'(0)$ es un punto regular de $\text{exp}_{\gamma(0)}$, y en los puntos singulares que son límites de puntos regulares la ecuación se sigue verificando por continuidad. En los puntos singulares que no son límite de puntos regulares $J(t)$ es cero en un entorno de esos puntos. En efecto, si $t_0 \gamma'(0)$ es un punto crítico que no es límite de

○ puntos regulares, existe un entorno de $t_0 \gamma'(0)$ constituido por puntos singulares de exp_p , luego $\text{dexp}_p(t \gamma'(0))$ no es un isomorfismo para t en un entorno de t_0 , luego, como $\text{dexp}_p(t \gamma'(0)) (\gamma'(0)) = \gamma'(t)$, se tiene que $\text{dexp}_p(t \gamma'(0)) t J'(0)$ está en la dirección de $\gamma'(t)$. Por lo tanto, será cierto que $J(t)$ es cero en un entorno de t_0 si probamos que $\text{dexp}_p(t \gamma'(0)) t J'(0)$ es ortogonal a $\gamma'(t) \forall t \neq 0$, i.e. si $\frac{\partial f}{\partial t}(t,0)$ es ortogonal a $\frac{\partial f}{\partial s}(t,0) \forall t \neq 0$, siendo $f(t,s) = \text{exp}_p t v(s)$, con $v(0) = \gamma'(0)$, $|v(s)| = 1$ y $v'(0) = J'(0)$. Ahora bien, $\langle \frac{\partial f}{\partial s}(0,0), \frac{\partial f}{\partial t}(0,0) \rangle = \langle 0, \gamma'(0) \rangle = 0$, y

$$\frac{d}{dt} \langle \frac{\partial f}{\partial s}(t,0), \frac{\partial f}{\partial t}(t,0) \rangle = \langle \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle(t,0) + 0.$$

○ Tomemos ahora un sistema de coordenadas arbitrario $x(u^1, u^2)$ en un entorno

de $f(t,0)$, entonces si $x^{-1} \circ f(s,t) = (u^1(s,t), u^2(s,t))$,

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\nabla}{ds} \left(\frac{\partial u^1}{\partial t} x_1 + \frac{\partial u^2}{\partial t} x_2 \right) = \frac{\partial^2 u^1}{\partial s \partial t} x_1 + \frac{\partial^2 u^2}{\partial s \partial t} x_2 + \frac{\partial u^1}{\partial t} \nabla \frac{\partial u^1}{\partial s} x_1 + \frac{\partial u^2}{\partial t} \nabla \frac{\partial u^2}{\partial s} x_2 \\ &\quad + \frac{\partial u^2}{\partial t} \nabla \frac{\partial u^1}{\partial s} x_1 + \frac{\partial u^1}{\partial t} \nabla \frac{\partial u^2}{\partial s} x_2 = | \text{como } \nabla_{x_2} x_1 = \nabla_{x_1} x_2 | = \\ &= \frac{\partial^2 u^2}{\partial t \partial s} x_2 + \frac{\partial^2 u^1}{\partial t \partial s} x_1 + \frac{\partial u^1}{\partial s} \nabla \frac{\partial u^1}{\partial t} x_1 + \frac{\partial u^2}{\partial s} \nabla \frac{\partial u^1}{\partial t} x_2 + \frac{\partial u^1}{\partial s} \nabla \frac{\partial u^2}{\partial t} x_1 + \\ &\quad + \frac{\partial u^2}{\partial s} \nabla \frac{\partial u^2}{\partial t} x_2 = \frac{\nabla}{dt} \left(\frac{\partial u^1}{\partial s} x_1 + \frac{\partial u^2}{\partial s} x_2 \right) = \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}, \end{aligned}$$

luego $\frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}(t,0), \frac{\partial f}{\partial t}(t,0) \right\rangle = \left\langle \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle (t,0) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0$,

luego $\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}(t,0), \frac{\partial f}{\partial t}(t,0) \right\rangle = \text{cte}$ y como en $t=0$ vale 0, $\text{cte} = 0$.

Por lo tanto, $J'' = 0$, de modo que la ecuación se verifica trivialmente para estos puntos. Ahora bien como, por V.13, un campo de Jacobi está determinado por $J'(0)$ y

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} \left(d \exp_{\gamma(0)}(t\gamma'(0)) t J'(0) \right) \Big|_{t=0} &= \frac{\nabla}{dt} \Big|_{t=0} t \left\{ d \exp_{\gamma(0)}(t\gamma'(0)) J'(0) \right\} = \\ &= d \exp_{\gamma(0)}(0) J'(0) + 0 \cdot \frac{\nabla}{dt} \left\{ \right\} \Big|_{t=0} = J'(0), \text{ se tiene (V.14.1).} \quad \hat{O}. \end{aligned}$$

V.15. COROLARIO: Se tiene la siguiente fórmula que da la velocidad de alejamiento de las geodésicas en función de la curvatura (si γ está parametrizada respecto su longitud de arco):

$$y(t) = y'(0) t - y'(0) K \circ \gamma(0) \frac{t^3}{6} + R(t), \text{ con } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t)}{t^3} = 0.$$

DEMOSTRACION: Consecuencia de que $y(0) = 0$, $y'(0) = -K \circ \gamma(0) y(0) = 0$, $y''(0) = -K \circ \gamma(0) y'(0) - (K \circ \gamma)'(0) y(0) = -K \circ \gamma(0) y'(0)$. \hat{O} .

§.4. Puntos conjugados

Vamos ahora a relacionar los campos de Jacobi con las singularidades de la aplicación exponencial.

V.16. DEFINICION: Sea $\gamma : [0,a] \rightarrow M$ una geodésica, $t_0 \in]0,a]$. Se dice que $\gamma(t_0)$ es un punto conjugado de $\gamma(0)$ a lo largo de γ si existe un campo de Jacobi J a lo largo de $\gamma(t)$ no idénticamente nulo tal que $J(t_0) = 0$.

Obsérvese que si $\gamma(t_0)$ es un punto conjugado de $\gamma(0)$, entonces $\gamma(0)$ es conjugado de $\gamma(t_0)$.

V.17. PROPOSICION: Sea $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ una geodésica parametrizada respecto de su longitud de arco, $p = \gamma(0)$. El punto $q = \gamma(t_0)$, $t_0 \in [0, a]$ es conjugado de p a lo largo de γ sii $V_0 = t_0 \gamma'(0)$ es un punto crítico de \exp_p .

DEMOSTRACION: Por V.16 y V.14, q es conjugado de p sii existe $J(t) = \text{dexp}_p(t\gamma'(0)) t J'(0)$ con $J'(0) \neq 0$ y no idénticamente nulo con $J(t_0) = \text{dexp}_p(t_0\gamma'(0)) t_0 J'(0) = 0$, lo que es equivalente a que $t_0\gamma'(0)$ sea un punto crítico de dexp_p . \hat{O} .

V.18. EJEMPLOS: CAMPOS DE JACOBI PARA SUPERFICIES DE CURVATURA CONSTANTE: Si la curvatura de Gauss es una cte K_0 , la ecuación de Jacobi en una referencia de Frenet toma la forma (para una geodésica parametrizada proporcionalmente al arco):

$$y''(t) + K_0 y(t) = 0$$

que tiene como soluciones (con las condiciones iniciales $y(0) = 0, y'(0) = 1$).

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\text{sen } t \sqrt{K_0}}{\sqrt{K_0}} & \text{si } K_0 > 0 \\ t & \text{si } K_0 = 0 \\ \frac{\text{sh } t \sqrt{-K_0}}{\sqrt{-K_0}} & \text{si } K_0 < 0 \end{cases} \quad \text{lo que da para el campo de Jacobi } J(t) = \begin{cases} \frac{\text{sen } t \sqrt{K_0}}{\sqrt{K_0}} \bar{e}_2(t) & \text{si } K_0 > 0 \\ t \bar{e}_2(t) & \text{si } K_0 = 0 \\ \frac{\text{sh } t \sqrt{-K_0}}{\sqrt{-K_0}} \bar{e}_2(t) & \text{si } K_0 < 0 \end{cases}$$

(Por ejemplo, para la esfera de radio r , $K_0 = \frac{1}{r^2}$, $J(0), J\left(\frac{\pi}{r}\right) = 0$, i.e. el conjugado de $\gamma(0)$ e $\gamma(\pi/r) = \gamma\left(\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}\right)$ (su punto antípoda). ←

Resulta de lo anterior que para $K_0 > 0$ la "distancia" de p a su primer punto conjugado es $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$ y que para $K_0 \leq 0$ p no tiene puntos conjugados. *" " ojo con el numeral*
 → Vamos a ver ahora que ocurre cuando K no sea constante pero esté acotada.

V.19. LEMA (de comparación de Sturm): Sea $A(t) \geq B(t)$ (resp. $A(t) > B(t)$), $u(t)$ una solución de $u'' + A u = 0$ con $u(0) = 0, u'(0) = 1$ y $v(t)$ una solución de $v'' + B v = 0$ con $v(0) = 0, v'(0) = 1$. Sea a el primer valor de $t > 0$ para el que se anula $u(t)$, y b el primero para el que se anula $v(t)$. Se tiene que: **1)** $a \leq b$ (resp. $a < b$), **2)** si $0 < t_0 < t_1 < a$, $v(t_1) u(t_0) \geq u(t_1) v(t_0)$ (resp. $v(t_1) u(t_0) > u(t_1) v(t_0)$), **3)** si $0 < t < a$, $v(t) \geq u(t)$ (resp. $v(t) > u(t)$).

DEMOSTRACION: Sea $t \in]0, \min(a,b)[$. Si $A \geq B$,

$0 = \int_0^t (u (\ddot{v} + Bv) - v (\ddot{u} + Au)) =$ | integrando por partes | $= \int_0^t u v (B-A) dt + u \dot{v} \Big|_0^t -$
 $- \int_0^t \dot{u} \dot{v} dt - v \dot{u} \Big|_0^t + \int_0^t \dot{v} \dot{u} dt = (u\dot{v} - v\dot{u}) \Big|_0^t + \int_0^t (B-A) u v dt \leq (u \dot{v}' - u' \dot{v}) \Big|_0^t,$
 puesto que $u(0) = 0 = v(0)$ y $u'(0) = 1 = v'(0)$ implican que u y v son
 positivas antes de llegar a su primer 0 (i.e. para $0 < t < \min(a,b)$) y $A \geq B \Rightarrow$
 $B - A \leq 0$. Por lo tanto $u(t) v'(t) - u'(t) v(t) \geq 0$, de donde $\frac{v'(t)}{v(t)} \geq \frac{u'(t)}{u(t)}$, luego,

para $0 < t_0 < t_1 < \min(a,b)$, $\int_{t_0}^{t_1} \frac{v'}{v} dt \geq \int_{t_0}^{t_1} \frac{u'}{u} dt$, i.e. $\ln \frac{v(t_1)}{v(t_0)} \geq \ln \frac{u(t_1)}{u(t_0)}$, de
 donde $v(t_1) u(t_0) \geq u(t_1) v(t_0)$, lo que prueba 2) en cuanto probemos 1). Por

otro lado la desigualdad anterior implica $\frac{v(t_1)}{u(t_1)} \geq \frac{v(t_0)}{u(t_0)}$, pero $\lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{v(t_0)}{u(t_0)} =$

| l'Hôpital | $= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{v'(t_0)}{u'(t_0)} = \frac{v'(0)}{u'(0)} = 1$, luego $\frac{v(t_1)}{u(t_1)} \geq 1$ y tenemos 3) en cuanto

probemos 1). Veamos ahora 1):

En 3), tomemos límites cuando $t_1 \rightarrow \min(a,b)$, se tiene $v(\min(a,b)) \geq$
 $\geq u(\min(a,b))$. Si $\min(a,b) = b$, entonces $v(b) \geq u(b)$, pero $v(b) = 0$, luego $u(b) \leq$
 0 , luego (como a es el primer 0 de u) $a \leq b$ y $a = b$. Por lo tanto, siempre
 $\min(a,b) = a$.

Para el caso $A(t) > B(t)$, si fuese $a \geq b$ resultaría

(*) $0 = (u\dot{v}' - v\dot{u}') \Big|_0^b + \int_0^b (B-A) u v dt$ con $B - A < 0$, $u, v \geq 0$ y $(u\dot{v}' - v\dot{u}') \Big|_0^b =$
 $= u(b) v'(b)$ con $u(b) \geq 0$ y $v'(b) \leq 0$ (ya que $v(t) > 0$ para $t < b$ y $v(b) = 0$,
 luego v ó tiene mínimo en b ó es decreciente en b), por lo tanto el segundo
 miembro de (*) aparece estrictamente menor que cero, lo que es un absurdo,
 luego $a < b$.

2) se prueba como en el caso anterior y de aquí se obtiene, como antes,
 que para $0 < t < a$, $v(t) \geq u(t)$. Ahora bien, si para algún $t' < a$, $v(t') = u(t')$, como
 $u(0) = v(0) = 0$ y $\frac{v'(t)}{v(t)} > \frac{u'(t)}{u(t)}$, $v'(t') - u'(t') > 0$ i.e. $v - u$ es estrictamente
 creciente en t' , lo que implica que para $t < t'$ con $|t' - t|$ suficientemente
 pequeño, $v(t) < u(t)$, absurdo, luego $u(t) < v(t)$.

V.20. TEOREMA: Sea γ una geodésica parametrizada proporcionalmente a
 su longitud de arco. Sea $K \circ \gamma(t) = K(t)$. (a) Si $\forall t K(t) \leq k_1$ (resp. $K(t) < k_1$),
 $\gamma(t)$ no tiene ningún punto conjugado para $t \in [0, \pi/\sqrt{k_1}]$ (resp. $t \in [0,$
 $\pi/\sqrt{k_1})$). (b) Si $\forall t k_0 \leq K(t)$ (resp. $k_0 < K(t)$), $\gamma(t)$ tiene al menos un punto

conjugado para $t \in]0, \pi/\sqrt{k_0}]$ (resp. $t \in]0, \pi/\sqrt{k_0}]$). (Nota: si $K < 0$ se debe interpretar $\sqrt{K} = \infty$, i.e. si $K \leq 0$ p no tiene puntos conjugados).

DEMOSTRACION: Usemos V.19 con $B(t) = K(t)$ $A = k_1$. La solución $u(t)$ es

$\frac{\text{sen}(t\sqrt{k_1})}{\sqrt{k_1}}$, por tanto $v(t)$ tiene su primer cero para $t \geq \frac{\pi}{\sqrt{k_1}}$, y el correspondiente campo de Jacobi no se anula hasta este valor de t . **(b)** tiene la misma demostración. \hat{O} .

V.21. COROLARIO: Sea $\gamma(t)$ una geodésica tal que $k_0 \leq K \circ \gamma(t) \leq k_1$. Entonces

$\gamma(t)$ no tiene ningún punto conjugado para $t < \frac{\pi}{\sqrt{k_1}}$ y tiene al menos uno para

$$\frac{\pi}{\sqrt{k_1}} \leq t \leq \frac{\pi}{\sqrt{k_0}} \quad \hat{O}.$$

Lección 25ª: ESPACIOS RECUBRIDORES

§5. Topología de los espacios recubridores

Acabamos de ver (V.20) que cuando $K \leq 0$ entonces $\exp_p: T_p M \rightarrow M$, es un difeomorfismo local. para todo $p \in M$. Es natural preguntarse cuando este difeomorfismo local es un difeomorfismo global. Es conveniente poner esta cuestión en un planteamiento más general para los que necesitamos los espacios recubridores. EN ESTA LECCION SUPONDREMOS AQUI QUE TODOS LOS ESPACIOS TOPOLOGICOS SON T_2 .

V.22. DEFINICION: Sean \tilde{B} , B dos espacios topológicos. Diremos que $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ es una *aplicación recubridora* si:

1. π es continua y $\pi(\tilde{B}) = B$
2. cada $p \in B$ tiene un entorno U (llamado *entorno distinguido de p*) tal que

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha},$$

donde los V_{α} son abiertos disjuntos dos a dos tales que $\pi|_{V_{\alpha}}: V_{\alpha} \rightarrow U$ es un homeomorfismo para cada α .

\tilde{B} se llama *espacio recubridor* de B .

V.23. EJEMPLO: Sea H la hélice

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = \cos t, y = \sin t, z = bt; t \in \mathbb{R}\}$$

y $S^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1\}$ la circunferencia de radio 1. Sea $\pi: H \rightarrow S^1 / \pi(x, y, z) = (x, y, 0)$. Evidentemente π es continua (restricción a H de la proyección de \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^2) y $\pi(H) = S^1$, luego verifica V.22.1. Dado $p \in S^1$, $q = -p$, vamos a ver que $U = S^1 - \{q\}$ es un entorno distinguido de p . En efecto, si $p = (\cos t_0, \sin t_0)$, $\pi(\cos t_0, \sin t_0, bt_0) = p$. Sea V_n el arco de hélice correspondiente al intervalo

$$]t_0 + (2n-1)\pi, t_0 + (2n+1)\pi[\subset \mathbb{R}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Cada V_n es un abierto de la hélice (es la intersección de $] -2, 2[\times] -2, 2[\times]b(t_0 + (2n-1)\pi), b(t_0 + (2n+1)\pi[$ con H), los V_n son disjuntos dos a dos y $\pi|_{V_n}$ tiene una inversa continua dada por $(\cos t, \sin t, 0) \rightarrow (\cos(t+2n\pi), \sin(t+2n\pi), b(t+2n\pi))$, luego es un homeomorfismo de V_n sobre U .

V.24. Sea $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ una aplicación recubridora. Como $\pi(\tilde{B}) = B$, cada punto $\tilde{p} \in \tilde{B}$ es tal que $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ para algún $p \in B$. Por lo tanto, existe un

entorno V_α de \bar{p} tal que $\pi|_{V_\alpha}$ es un homeomorfismo. Se sigue de ello que π es un homeomorfismo local. Sin embargo el recíproco no es cierto como muestra el siguiente ejemplo:

Consideremos en V.23 un segmento \tilde{H} de la hélice correspondiente al intervalo $]\pi, 4\pi[\subset \mathbb{R}$. $\tilde{\pi} = \pi|_{\tilde{H}}$ es todavía un homeomorfismo local y $\tilde{\pi}(\tilde{H}) = S^1$. Sin embargo, ningún entorno de $\pi(\cos 3\pi, \sin 3\pi, b 3\pi) = (-1, 0, 0) = p \in S^1$ puede ser entorno distinguido. En efecto, tomando U suficientemente pequeño, $\tilde{\pi}^{-1}(U) = V_1 \cup V_2$ donde V_1 es el segmento de hélice correspondiente a $t \in]\pi, \pi + \varepsilon[$ y V_2 es el segmento correspondiente a $t \in]3\pi - \varepsilon, 3\pi + \varepsilon[$. Ahora bien, $\tilde{\pi}|_{V_1}$ no es un homeomorfismo sobre U , ya que $\pi(V_1)$ no contiene a p , luego $\tilde{\pi}$, que es un homeomorfismo local, no es una aplicación recubridora.

V.25. NOTA: Obsérvese que en V.24 hemos tomado U suficientemente pequeño, cabría preguntarse si no podríamos haber obtenido un entorno distinguido tomando U más grande. La respuesta es no, porque: "si U es un entorno distinguido de p , entonces todo entorno W de p tal que $W \subset U$ es de nuevo un entorno distinguido de p " ya que $\pi^{-1}(W) \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$ y, tomando $\tilde{V}_\alpha = \pi^{-1}(W) \cap V_\alpha$, resulta $\pi^{-1}(W) = \bigcup_x \tilde{V}_\alpha$, con los \tilde{V}_α verificando las condiciones de la definición de entorno distinguido.

Podemos volver a la cuestión del comienzo de este apartado pasándola a homeomorfismo y usando también espacios recubridores, de modo que las cuestiones ahora son:

1. ¿Bajo qué condiciones un homeomorfismo local es una aplicación recubridora?

2. ¿Bajo que condiciones una aplicación recubridora es un homeomorfismo global?

Daremos primero una respuesta sencilla a la cuestión 1:

V.26. PROPOSICION: Sea $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ un homeomorfismo local, \tilde{B} compacto y B conexo. Entonces π es una aplicación recubridora.

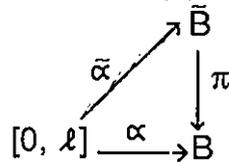
DEMOSTRACION: Como π es un homeomorfismo local, $\pi(\tilde{B}) \subset B$ es abto en B (pues $\forall \tilde{p} \in \tilde{B} \exists$ abto $\tilde{V} \ni \tilde{p}$ y $V \ni p = \pi(\tilde{p})$ abto / $\pi|_{\tilde{V}}: \tilde{V} \rightarrow V$ es un homeomorfismo, $\pi(\tilde{B}) = \pi(\bigcup \tilde{V}) = \bigcup \pi(\tilde{V}) = \bigcup V$ abto). Además π continuo y B compacto implican $\pi(\tilde{B})$ compacto $\subset B$, luego $\pi(\tilde{B})$ es cerrado, y como B es conexo, $\pi(\tilde{B}) = B$.

Sea $b \in B$. Entonces $\pi^{-1}(b) \subset \tilde{B}$ es finito, pues, en caso contrario, como \tilde{B} es compacto, tendría un punto límite $\tilde{q} \in \tilde{B}$ (ya que $\{b\}$ cerrado implica que $\pi^{-1}(b)$ es cerrado en el compacto \tilde{B} y, por lo tanto, compacto), en contra de que $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ es un homeomorfismo local. Sea $\pi^{-1}(b) = \{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_k\}$. Como π es un homeomorfismo local, $\forall i = 1, \dots, k \exists W_i$ abto $\ni \tilde{b}_i$, tal que $\pi|_{W_i}$ es un homeomorfismo. Como

$\pi^{-1}(b)$ es finito, podemos elegir los W_i disjuntos dos a dos. Como $\pi(W_i)$ es un abto de B , \exists abto $U \ni p / U \subset \bigcap_{i=1}^k \pi(W_i)$. Tomando $V_i = \pi^{-1}(U) \cap W_i$, tenemos que $\pi^{-1}(U) = \bigcup_i V_i$ y que los V_i son disjuntos dos a dos, y que $\pi|_{V_i}: V_i \rightarrow U$ es un homeomorfismo. Por tanto U es un entorno distinguido. \hat{O} .

Para el caso no compacto y para la cuestión 2, necesitamos más sobre espacios recubridores, que pasamos a explicar a continuación.

V.27. DEFINICION: Sea $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ una aplicación continua y $\alpha: [0, \ell] \rightarrow B$ un arco de B . Si existe un arco $\tilde{\alpha}: [0, \ell] \rightarrow \tilde{B}$ de \tilde{B} tal que $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, se dice que $\tilde{\alpha}$ es un levantamiento de α con origen $\tilde{\alpha}(0) \in \tilde{B}$.



V.28. PROPOSICION: Sea $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ una aplicación recubridora, $\alpha: [0, \ell] \rightarrow B$ un arco de B y $\tilde{p}_0 \in \tilde{B}$ un punto de \tilde{B} tal que $\pi(\tilde{p}_0) = \alpha(0) = p_0$. Entonces existe un único levantamiento $\tilde{\alpha}: [0, \ell] \rightarrow \tilde{B}$ con origen en \tilde{p}_0 , i.e., con $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{p}_0$.

DEMOSTRACION: Veamos primero la unicidad. Sean $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}: [0, \ell] \rightarrow \tilde{B}$ dos levantamientos de α con origen en \tilde{p}_0 . Sea $A \subset [0, \ell]$ el conjunto de puntos en que $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\beta}(t)$. A es no vacío ($0 \in A$) y cerrado (pues un teorema de topología dice - p. 34 - :f, g: $X \rightarrow Y$ continuas e $Y T_2 \Rightarrow \{x/f(x) = g(x)\}$ cerrado en X). Veamos que A es abierto en $[0, \ell]$. Supongamos $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\beta}(t) = \tilde{p}$. Sea V un entorno de \tilde{p} tal que $\pi|_V$ es un difeomorfismo. Como $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ son continuas, existe un entorno (intervalo abierto) de t , $I_t \subset [0, \ell] / \tilde{\alpha}(I_t) \subset V, \tilde{\beta}(I_t) \subset V$. Como $\pi \circ \tilde{\alpha} = \pi \circ \tilde{\beta}$ y π es un homeomorfismo en V , $\tilde{\alpha}|_{I_t} = \tilde{\beta}|_{I_t}$, luego $t \in I_t \subset A$, luego A es abierto. Por lo tanto $A = [0, \ell]$.

Veamos ahora la existencia. Como α es continua, $\forall \alpha(t) \in B, \exists$ intervalo $I_t \ni t \subset [0, \ell]$ tal que $\alpha(I_t) \subset U_t$ entorno distinguido de $\alpha(t)$. $\bigcup_{t \in [0, \ell]} I_t = [0, \ell]$, y, como $[0, \ell]$ es compacto, admite un subrecubrimiento I_0, \dots, I_n . Ordenemos los I_i de modo que $0 \in I_0$. Como $\alpha(I_0) \subset U_0$ entorno distinguido de $\alpha(0)$, \exists entorno V_0 de $\tilde{p}_0/\pi_0 = \pi|_{V_0}: V_0 \rightarrow U_0$ es un homeomorfismo. $\forall t \in I_0$ definimos $\tilde{\alpha}_0(t) = \pi_0^{-1} \circ \alpha(t)$. Evidentemente $\tilde{\alpha}_0(0) = \tilde{p}_0, \pi_0 \circ \tilde{\alpha}_0(t) = \alpha(t) \forall t \in I_0$. Tomemos $I_1 \cap I_0 \neq \emptyset$, sea $t_1 \in I_1 \cap I_0$. $\alpha(I_1) \subset U_1$ entorno distinguido de $\alpha(t_1)$, y podemos definir $\tilde{\alpha}_1$ en I_1 con origen en $\tilde{\alpha}(t_1)$. Por unicidad (la demostrada antes)

○ $\tilde{\alpha}_1) |_{I_1 \cap I_0} = \tilde{\alpha}_0 |_{I_1 \cap I_0}$, y entre los dos definen un arco sobre $I_0 \cup I_1$ que es un levantamiento de α . Procediendo así sucesivamente construimos un arco $\tilde{\alpha}: I = [0, \ell] \rightarrow \tilde{B}$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{p}_0$ y $\pi \circ \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t)$, $t \in [0, \ell]$. \hat{O} .

V.29. COROLARIO: Si $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ es una aplicación recubridora y B es arco-conexo, existe una biyección entre los conjuntos $\pi^{-1}(p)$ y $\pi^{-1}(q)$ para cualesquiera $p, q \in B$.

DEMOSTRACION: Si B es arco-conexo, existe un arco $\alpha: [0, \ell] \rightarrow B/\alpha(0) = p$, $\alpha(\ell) = q$. $\forall \tilde{p} \in \pi^{-1}(p) \exists$ levantamiento $\tilde{\alpha}_{\tilde{p}}: [0, \ell] \rightarrow \tilde{B}/\tilde{\alpha}_{\tilde{p}}(0) = \tilde{p}$. Definamos $\varphi: \pi^{-1}(p) \rightarrow \pi^{-1}(q)/\varphi(\tilde{p}) = \tilde{\alpha}_{\tilde{p}}(\ell)$. Por la unicidad del levantamiento, φ es una biyección (unicidad $\Rightarrow \varphi$ inyectiva, y dado $\tilde{q} \in \pi^{-1}(q)$, tiene una antiimagen:

○ $\alpha^{-1}(t) = \alpha(\ell-t)$ une q con p y su levantamiento $\tilde{\alpha}_q^{-1}(t)$ une \tilde{q} con un $\tilde{p}' \in \pi^{-1}(p)$, por lo tanto $\tilde{\alpha}_q^{-1}$ une \tilde{p}' con \tilde{q} , y como $\pi \circ \tilde{\alpha}_q^{-1}(t) = \alpha^{-1}(t)$, $\pi \circ \tilde{\alpha}_q^{-1}(t) = \pi \circ \tilde{\alpha}_q^{-1}(\ell-t) = \alpha(t)$, $\tilde{\alpha}_q^{-1}$ es un levantamiento de α con origen en \tilde{p}' , y por la unicidad del levantamiento, $\tilde{\alpha}_q^{-1} = \tilde{\alpha}_{\tilde{p}'}$, luego $\varphi(\tilde{p}') = \tilde{\alpha}_{\tilde{p}'}(\ell) = \tilde{\alpha}_q^{-1}(0) = \tilde{q}$. Luego q tiene antiimagen, luego φ es suprayectiva).

Resulta pues que el número de puntos de $\pi^{-1}(p)$, $p \in B$, no depende de p cuando B es arco-conexo. Ello permite dar la:

○ **V.30. DEFINICION:** Si $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ es una aplicación recubridora y B es conexo y $\pi^{-1}(p)$ es finito, el n° de puntos de $\pi^{-1}(p)$ se llama número de hojas del recubrimiento. Si $\pi^{-1}(p)$ no es finito, se dice que el recubrimiento es infinito.

Observemos que, según vimos en la demostración de V.3.6, si \tilde{B} es compacto, el recubrimiento es siempre finito.

§.6. Homotopías y levantamiento de arcos.

V.31. Para el tratamiento de la cuestión 2 necesitamos también hacer precisas algunas ideas intuitivas que surgen de las siguientes consideraciones:

○ Para que una aplicación recubridora $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ sea un homeomorfismo basta que sea una aplicación biyectiva. Por lo tanto tendremos que buscar una condición que asegure que cuando dos puntos \tilde{p}_1, \tilde{p}_2 de \tilde{B} proyectan por π

al mismo punto $p = \pi(\tilde{p}_1) = \pi(\tilde{p}_2)$ de B , entonces $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2$. Supondremos que \tilde{B} es arco-conexo y proyectamos un arco $\tilde{\alpha}$ de \tilde{B} que une \tilde{p}_1 y \tilde{p}_2 a un arco cerrado α de B que une p con p . Si B no tiene "agujeros" (en un sentido a precisar), entonces es posible deformar α continuamente al punto p . Esto es: existe una familia de arcos α_t , continuos en $t \in [0,1]$, con $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1 =$ arco cte p . Como $\tilde{\alpha}$ es un levantamiento de α , es natural esperar que los α_t puedan ser levantados a una familia $\tilde{\alpha}_t$, continua en t , con $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}$. Se sigue que $\tilde{\alpha}_1$ es un levantamiento del arco cte p y, por tanto, se reduce a un punto singular. Por otra parte $\tilde{\alpha}_1$ une \tilde{p}_1 con \tilde{p}_2 y por tanto concluimos $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2$.

Para hacer riguroso este argumento heurístico hemos de definir una "familia continua de arcos" uniendo dos arcos dados y mostrar que una tal familia puede ser levantada.

V.32. DEFINICION: Sea B un espacio topológico T_2 , $\alpha_0: [0, \ell] \rightarrow B$, $\alpha_1: [0, \ell] \rightarrow B$ dos arcos de B uniendo $p = \alpha_0(0) = \alpha_1(0)$ con $q = \alpha_0(\ell) = \alpha_1(\ell)$. Diremos que α_0 y α_1 son homotópicos si existe una aplicación continua

$H: [0, \ell] \times [0, 1] \rightarrow B$ tal que

$$1. H(s, 0) = \alpha_0(s), \quad H(s, 1) = \alpha_1(s), \quad s \in [0, \ell].$$

$$2. H(0, t) = p, \quad H(\ell, t) = q \quad t \in [0, 1]$$

La aplicación H se llama una *homotopía* entre α_0 y α_1 . $\forall t \in [0, 1]$, el arco $\alpha_t: [0, \ell] \rightarrow B / \alpha_t(s) = H(s, t)$ se llama un arco de la homotopía H . Por tanto la homotopía es una familia de arcos $\alpha_t, t \in [0, 1]$, que constituyen una deformación continua de α_0 en α_1 de tal modo que las extremidades p, q de los arcos α_t permanecen fijas durante la deformación.

V.33. DEFINICION: Sea $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ una aplicación continua y sean $\alpha_0, \alpha_1: [0, \ell] \rightarrow B$ dos arcos de B uniendo los puntos p y q . Sea

$K: [0, \ell] \times [0, 1] \rightarrow B$ una homotopía entre α_0 y α_1 . Si existe una aplicación continua $\tilde{H}: [0, \ell] \times [0, 1] \rightarrow \tilde{B}$ tal que $\pi \circ \tilde{H} = K$, se dice que \tilde{H} es un levantamiento de la homotopía K , con origen en $\tilde{H}(0, 0) = \tilde{p} \in \tilde{B}$.

V.34. PROPOSICION: Sea $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ un homeomorfismo local con la propiedad de levantar arcos. Sean $\alpha_0, \alpha_1: [0, \ell] \rightarrow B$ dos arcos uniendo p y $q \in B$, sea $H: [0, \ell] \times [0, 1] \rightarrow B$ una homotopía entre α_0 y α_1 , y \tilde{p} un punto de \tilde{B} tal que $\pi(\tilde{p}) = p$. Entonces existe un levantamiento único \tilde{H} de H con origen en \tilde{p} .

DEMOSTRACION: Veamos primero la unicidad. Sean \tilde{H}_1, \tilde{H}_2 dos levantamientos de H con $\tilde{H}_1(0,0) = \tilde{H}_2(0,0) = \tilde{p}$. Entonces

$$A = \{(s,t) \in [0,\ell] \times [0,1] = Q \mid \tilde{H}_1(s,t) = \tilde{H}_2(s,t)\}$$

es no vacío y cerrado en Q . Como \tilde{H}_1 y \tilde{H}_2 son continuas y π es un homeomorfismo local, A es abierto en Q (como en V.28). Como Q es conexo, $A = Q$.

Para probar la existencia, sea $\alpha_t(s) = H(s,t)$ un arco de la homotopía H . Definimos \tilde{H} por $\tilde{H}(s,t) = \tilde{\alpha}_t(s)$, $s \in [0,\ell]$, $t \in [0,1]$, donde $\tilde{\alpha}_t$ es el levantamiento de α_t con origen en \tilde{p} . Evidentemente, $\pi \circ \tilde{H}(s,t) = \alpha_t(s) = H(s,t)$ para $s \in [0,\ell]$, $t \in [0,1]$, y $\tilde{H}(0,0) = \tilde{\alpha}_0(s) = \tilde{p}$.

$\forall t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$, $s \mapsto \tilde{H}(s,t)$ es un levantamiento de $s \mapsto H(s,t)$ pasando por $\tilde{H}(s_0,t)$. $\forall (s,t) \in [0,\ell] \times [0,1]$, sean V_{st}, U_{st} abiertos de \tilde{B} y B respectivamente, con $\tilde{H}(s,t) \in V_{st}$, $H(s,t) \in U_{st}$, y $\pi: V_{st} \rightarrow U_{st}$ un homeomorfismo. Como la aplicación H es continua $\forall (s,t) \in [0,\ell] \times [0,1]$, existe un entorno $Q_{st} \ni (s,t) / H(Q_{st}) \subset U_{st}$ con $Q_{st} =]s - \epsilon_s, s + \epsilon_s[\times]t - \epsilon_t, t + \epsilon_t[$. Para cada t , $\{]s - \epsilon_s, s + \epsilon_s[\times]t - \epsilon_t, t + \epsilon_t[\mid s \in [0,\ell] \}$ es un recubrimiento abierto de $[0,\ell]$ que admite un subrecubrimiento finito

$$[0, s_1[\times]t - \epsilon_t, t + \epsilon_t[,]s'_1, s_2[\times]t - \epsilon_t, t + \epsilon_t[, \dots,]s'_{n-1}, \ell[\times]t - \epsilon_t, t + \epsilon_t[$$

$$\quad \parallel \quad \quad \quad \parallel \quad \quad \quad \parallel$$

$$Q_1^t \quad s'_i < s_i \quad \quad \quad Q_2^t \quad \quad \quad \quad \quad \quad Q_n^t$$

En $[0, s_1[\times]t - \epsilon_t, t + \epsilon_t[= Q_1^t$, $H(Q_1^t) \subset U_1^t$ homeomorfo por π^{-1} a V_1^t . Para cada $t' \in]t - \epsilon_t, t + \epsilon_t[$, $\tilde{\alpha}_{t'}(s) = \pi^{-1} \circ \alpha_{t'}(s)$ por la unicidad del levantamiento, i.e., sobre Q_1^t , $\tilde{H}(s,t) = \pi^{-1} \circ H(s,t)$, luego $\tilde{H}|_{Q_1^t}$ es continua.

Sobre Q_2^t , $H(Q_2^t) \subset U_2^t \xleftarrow{\pi} V_2^t$ y $\pi^{-1} \circ \alpha_{t'}(s)$ es un levantamiento de $\alpha_{t'}(s)$ tal que si $s'_1 < s_0 < s_1$, entonces $\tilde{\alpha}_{t'}(s_0) = \tilde{H}(s_0, t') \in V_1^t \cap V_2^t$, y como π es homeomorfismo sobre V_2^t , y $\pi \circ \tilde{\alpha}_{t'}(s_0) = \alpha_{t'}(s_0)$, por la unicidad del levantamiento pasando por $\tilde{\alpha}_{t'}(s_0) = \pi^{-1} \alpha_{t'}(s_0)$, se tiene que, sobre Q_2^t , $\tilde{H}(s,t) = \pi^{-1} \circ H(s,t)$, luego $\tilde{H}|_{Q_2^t}$ es continua.

Actuando así sucesivamente, se ve que $\tilde{H}|_{Q_i^t}$ es continua para $i = 1, \dots, n$.

Como $\bigcup_{i=1}^n Q_i^t = [0,\ell] \times]t - \epsilon_t, t + \epsilon_t[$, se tiene que \tilde{H} es continua sobre $[0,\ell] \times]t - \epsilon_t, t + \epsilon_t[$, y esto para cada $t \in [0,1]$, luego \tilde{H} es continua en todo $(s, t) \in [0,\ell] \times [0,1]$. \hat{O} .

V. 35. COROLARIO: Sea $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ un homeomorfismo local con la propiedad de levantar arcos. Sean $\alpha_0, \alpha_1: [0, \lambda] \rightarrow B$ dos arcos de B uniendo los puntos p y q y elijamos $\tilde{p} \in \tilde{B}$ tal que $\pi(\tilde{p}) = p$. Si α_0 y α_1 son homotópicos, entonces los levantamientos $\tilde{\alpha}_0$ y $\tilde{\alpha}_1$ de α_0 y α_1 , respectivamente, con origen \tilde{p} , son homotópicos.

DEMOSTRACION: Sea H una homotopía entre α_0 y α_1 y \tilde{H} su levantamiento, con origen en \tilde{p} . Probaremos que \tilde{H} es una homotopía entre $\tilde{\alpha}_0$ y $\tilde{\alpha}_1$. En efecto, por la unicidad del levantamiento de arcos,

$$\tilde{H}(s, 0) = \tilde{\alpha}_0(s), \quad \tilde{H}(s, 1) = \tilde{\alpha}_1(s), \quad s \in [0, \lambda].$$

Además, $\tilde{H}(0, t)$ es el levantamiento del arco constante $H(0, t) = p$ con origen en \tilde{p} . Por la unicidad, $\tilde{H}(0, t) = \tilde{p}$, $t \in [0, 1]$. Análogamente, $\tilde{H}(\lambda, t)$ es el levantamiento de $H(\lambda, t) = q$ con origen en $\tilde{\alpha}_0(\lambda) = \tilde{q}$, por lo tanto $\tilde{H}(\lambda, t) = \tilde{q}$, $t \in [0, 1]$. Luego \tilde{H} es una homotopía entre $\tilde{\alpha}_0$ y $\tilde{\alpha}_1$. ◻

Del argumento heurístico queda por definir lo que es un espacio "sin agujeros". Serán los espacios simplemente conexos que definiremos en la siguiente lección.

Lección 26: ESPACIOS SIMPLEMENTE CONEXOS Y TEOREMA DE HADAMARD

§7. Espacios simplemente conexos

V.36. DEFINICION: Un e.t. arco-conexo B se dice que es simplemente conexo si dados dos puntos $p, q \in B$ y dos arcos $\alpha_0: [0, \lambda] \rightarrow B, \alpha_1: [0, \lambda] \rightarrow B$ uniendo p y q , existe una homotopía en B entre α_0 y α_1 . En particular, cualquier arco $\alpha: [0, \lambda] \rightarrow B$ cerrado ($\alpha(0) = \alpha(\lambda) = p$) de B es homotópico al arco constante $\alpha(s) = p, s \in [0, \lambda]$.

V.37. PROPOSICION: Sea $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ un homeomorfismo local con la propiedad de levantamiento de arcos y suprayectivo. Sea \tilde{B} arco-conexo y B simplemente conexo. Entonces π es un homeomorfismo.

DEMOSTRACION: (la del argumento heurístico). Necesitamos probar que π es inyectiva. Sean $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \in \tilde{B}$ con $\pi(\tilde{p}_1) = \pi(\tilde{p}_2) = p$. Como \tilde{B} es arco-conexo, existe un arco $\tilde{\alpha}_0$ de \tilde{B} uniendo \tilde{p}_1 con \tilde{p}_2 . $\alpha_0 = \pi \circ \tilde{\alpha}_0$ es un arco cerrado de B . Como B es simplemente conexo, α_0 es homotópico al arco constante $\alpha_1(s) = p, s \in [0, \lambda]$. Por V.35, $\tilde{\alpha}_0$ es homotópico al levantamiento $\tilde{\alpha}_1$ de α_1 con origen en \tilde{p}_1 . Como $\tilde{\beta}(s) = \tilde{p}_1$ es un levantamiento de α_1 con origen en \tilde{p}_1 y ese levantamiento es único, $\tilde{\beta}(s) = \tilde{\alpha}_1(s) = \tilde{p}_1$, y como $\tilde{\alpha}_1$ es homotópico a $\tilde{\alpha}_0$ y $\tilde{\alpha}_0(\lambda) = \tilde{p}_2$, se tiene que $\tilde{p}_1 = \tilde{\alpha}_1(\lambda) = \tilde{\alpha}_0(\lambda) = \tilde{p}_2$, luego π es inyectiva.

V.38. COROLARIO: Si $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ es una aplicación recubridora, \tilde{B} es arco-conexo y B es simplemente conexo, entonces π es un homeomorfismo.

Vamos ahora a dar una respuesta más general a la primera cuestión de V.25. Para eso necesitamos definiciones.

V.39. DEFINICION: B se dice que es localmente simplemente conexo si todo punto de B posee una base de entornos simplemente conexos.

V.40. NOTA: Si B es localmente simplemente conexo entonces también es localmente arco-conexo, pues la noción de conexidad simple supone la de arco-conexidad (ver).

Una superficie es localmente simplemente conexa, ya que todo punto de la superficie tiene entornos arbitrariamente pequeños homeomorfos a discos abiertos del plano, y un disco abierto del plano es simplemente conexo. En efecto: sea $\alpha: I \rightarrow D^2 \subset \mathbb{R}^2$ una curva con $\alpha(0) = p$. Definamos

○ $H(s, t) = \alpha(0) + t(\alpha(s) - \alpha(0))$. Como D^2 es convexo, $H(s, t) \in D^2$, H es continua evidentemente, $H(0, t) = H(\lambda, t) = p$, $H(s, 0) = \alpha(0) = p$, $H(s, 1) = \alpha(s)$, luego H es una homotopía de la curva cte p en la $\alpha(s)$.

V.41. PROPOSICION: Sea $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ un homeomorfismo local suprayectivo con la propiedad de levantamiento de arcos. Supongamos que B es localmente simplemente conexo y que \tilde{B} es localmente arco-conexo. Entonces π es una aplicación recubridora.

DEMOSTRACION: Sea $p \in B$ y sea V un entorno simplemente conexo de p en B . El conjunto $\pi^{-1}(V)$ es la unión de sus componentes arco-conexas, $\pi^{-1}(V) = \cup_{\alpha} \tilde{V}_{\alpha}$, \tilde{V}_{α} abiertos, arco-conexos y disjuntos dos a dos. Consideremos la restricción $\pi|_{\tilde{V}_{\alpha}}: \tilde{V}_{\alpha} \rightarrow V$. Si probamos que $\pi|_{\tilde{V}_{\alpha}}$ es un homeomorfismo de \tilde{V}_{α} sobre V , π será una aplicación recubridora.

○ Probaremos primero que $\pi(\tilde{V}_{\alpha}) = V$. Evidentemente $\pi(\tilde{V}_{\alpha}) \subset V$. Supongamos que $p \in V$. Como V es arco-conexo, existe un arco $\alpha: [a, b] \rightarrow V$ uniendo $q \in \pi(\tilde{V}_{\alpha})$ con p . El levantamiento $\tilde{\alpha}: [a, b] \rightarrow \tilde{B}$ de α con origen en $\tilde{q} \in \tilde{V}_{\alpha}$, donde $\pi(\tilde{q}) = q$, es un arco en \tilde{V}_{α} , ya que \tilde{V}_{α} es una componente arco-conexa de \tilde{B} , luego $\pi(\tilde{\alpha}(b)) = p \in \pi(\tilde{V}_{\alpha})$, luego $V \subset \pi(\tilde{V}_{\alpha})$.

Por otro lado, como $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ es un homeomorfismo local con la propiedad de levantar arcos y \tilde{V}_{α} y V son abiertos de \tilde{B} y B respectivamente, $\pi|_{\tilde{V}_{\alpha}}$ sigue siendo un homeomorfismo local con la propiedad de levantar arcos (ya que por ser \tilde{V}_{α} una componente arco-conexa todo arco partiendo de \tilde{V}_{α} está contenido en \tilde{V}_{α}), luego, por V.37, π es un homeomorfismo. \hat{O} .

§8. Teorema de Hadamard

○ Volvemos a la cuestión del comienzo de la lección 25 ¿bajo qué condiciones $\exp_p: T_p M \rightarrow M$, siendo M una superficie completa de $K \leq 0$ es un difeomorfismo global de $T_p M$ sobre M ?

Vamos a dar unos resultados que transforman estas cuestiones en las anteriores:

V.42. LEMA: Sea M una superficie completa de curvatura $K \leq 0$. Entonces $\exp_p: T_p M \rightarrow M$, $p \in M$ es creciente en longitud en el siguiente sentido: si $u, v \in T_p M$, $w \in T_p M$, tenemos

$$\langle (d \exp_p)_u w, (d \exp_p)_u w \rangle \leq \langle w, w \rangle, \quad / \rangle$$

(donde w denota un vector en $(T_p M)_u$ obtenido de w por la traslación u).

DEMOSTRACION: Para $u = 0$ la igualdad se verifica trivialmente. Si $u \neq 0$, sea $v = u/|u|$ y $\gamma: [0, \lambda] \rightarrow M$ ($\lambda = |u|$) la geodésica $\gamma(s) = \exp_p sv$, $s \in [0, \lambda]$.

○ Por el lema de Gauss ($g_{\gamma} = 0$ in IV.64), podemos suponer $\langle w, v \rangle = 0$ (pues

sabemos que si $w = w' + \lambda v$, $w' \perp v$, $\langle (d \exp_p)_u v, (d \exp_p)_u v \rangle = \langle v, v \rangle$ y $\langle (d \exp_p)_u v, (d \exp_p)_u w' \rangle = 0$ por el lema de Gauss). Sea $J(s) = s (d \exp_p)_{sv} w$ el campo de Jacobi a lo largo de γ con $J'(0) = w$ (y $J(0) = 0$, $\langle J, \gamma' \rangle = 0$). Como $K \leq 0$, se tiene que

$$\frac{d}{ds} \langle J, \frac{\nabla J}{ds} \rangle = \langle \frac{\nabla J}{ds}, \frac{\nabla J}{ds} \rangle + \langle J, \frac{\nabla^2 J}{ds^2} \rangle = \left| \frac{\nabla J}{ds} \right|^2 - k |J|^2 \geq 0$$

y como $\langle J(0), \frac{\nabla J}{ds} \rangle = 0$, resulta que $\langle J(s), \frac{\nabla J}{ds}(s) \rangle \geq 0$, por lo tanto

$$\frac{d}{ds} \langle \frac{\nabla J}{ds}, \frac{\nabla J}{ds} \rangle = 2 \langle \frac{\nabla J}{ds}, \frac{\nabla^2 J}{ds^2} \rangle = -2K \langle \frac{\nabla J}{ds}, J \rangle \geq 0, \text{ luego}$$

$$\langle \frac{\nabla J}{ds}, \frac{\nabla J}{ds} \rangle \geq \langle \frac{\nabla J}{ds}(0), \frac{\nabla J}{ds}(0) \rangle = \langle w, w \rangle = C, \text{ de donde}$$

$$\frac{d^2}{ds^2} \langle J, J \rangle = 2 \langle \frac{\nabla J}{ds}, \frac{\nabla J}{ds} \rangle + 2 \langle J, \frac{\nabla^2 J}{ds^2} \rangle \geq 2C,$$

integrando los dos miembros de esta igualdad entre 0 y s:

$$\frac{d}{ds} \langle J, J \rangle \geq 2Cs + \left(\frac{d}{ds} \langle J, J \rangle \right)_{s=0} = 2Cs + 2 \langle \frac{\nabla J}{ds}(0), J(0) \rangle = 2Cs,$$

e integrando de nuevo:

$$\langle J, J \rangle \geq Cs^2 + \langle J(0), J(0) \rangle = Cs^2$$

Tomando $s = \ell$:

$$\langle J(\ell), J(\ell) \rangle \geq \ell^2 \langle w, w \rangle,$$

pero $J(\ell) = \ell (d \exp_p)_{\ell v} w$, lo que da el resultado buscado si se recuerda que $\ell = |u|$.

V.43. COROLARIO: (de la demostración): Si $K \not\leq 0$, entonces $\exp_p: T_p M \rightarrow M$ es una isometría local.

V.44. PROPOSICION: Sea M una superficie completa con curvatura de Gauss $K \leq 0$. Entonces la aplicación $\exp_p: T_p M \rightarrow M$ ($p \in M$) es una aplicación recubridora.

DEMOSTRACION: Puesto que \exp_p es un difeomorfismo local (V.20) suprayectivo (V.5), M es localmente simplemente conexa (V.40) y $T_p M$ es localmente arco-conexo, basta con ver (V.23) que \exp_p tiene la propiedad de levantar arcos.

Sea $\alpha: [0, \ell] \rightarrow M$ un arco en M y $v \in T_p M$ tal que $\exp_p v = \alpha(0)$. Como \exp_p es un difeomorfismo local, existe un entorno U de v en $T_p M$ tal que \exp_p restringido a U es un difeomorfismo. Podemos definir $\tilde{\alpha}$ en un entorno de 0 por $\tilde{\alpha}(t) = \exp_p^{-1} \alpha(t) \forall t \in [0, \varepsilon]$, $\tilde{\alpha}$ verifica $\tilde{\alpha}(0) = v$ y $\exp_p \circ \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) \forall t \in [0, \varepsilon]$.

Sea $A = \{t \in [0, \ell] / \exists \tilde{\alpha}_t: [0, t] \rightarrow T_p M / \tilde{\alpha}_t(0) = v \text{ y } \exp_p \tilde{\alpha}_t(s) = \alpha(s) \forall s \in [0, t]\}$. A es un intervalo. En efecto: es un intervalo porque si $t \in A$ y

$0 < t' < t$, entonces $\tilde{\alpha}_{t'} = \tilde{\alpha}_t|_{[0, t']}$ verifica las condiciones para que $t' \in A$.

Vamos a ver que si $A = [0, t_0]$ y $t_0 \leq \lambda$, entonces

$$\begin{aligned} \nearrow t_0 \in A \text{ si } t_0 = \lambda \\ \searrow \exists \epsilon / [t_0, t_0 + \epsilon[\subseteq A \text{ si } t_0 < \lambda \end{aligned}$$

lo que implica $A = [0, \lambda]$.

Veamos primero que, dados $t_1, t_2 \in A$, $t_1 < t_2$, $\tilde{\alpha}_{t_1} = \tilde{\alpha}_{t_2}|_{[0, t_1]}$. En efecto, $\tilde{\alpha}_{t_1}$ y $\tilde{\alpha}_{t_2}|_{[0, t_1]}$ son elevaciones para un difeomorfismo local, de un mismo arco con un mismo valor inicial. Entonces, el mismo argumento de la demostración de V.28 prueba que la elevación es única, i.e., que $\tilde{\alpha}_{t_1} = \tilde{\alpha}_{t_2}|_{[0, t_1]}$.

Entonces, si $A = [0, t_0[$, está bien definido el arco $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}_t(t)$ para $t \in A$. Sea t_n una sucesión creciente en A con $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$. Entonces la sucesión

$\{\tilde{\alpha}(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ está contenida en una bola cerrada $\bar{B} \subset T_p M$, pues si no fuese así,

$$d(\tilde{\alpha}(t_n), \tilde{\alpha}(0)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty \quad \text{y} \quad \ell_{\tilde{\alpha}(0)}^{t_n}(\tilde{\alpha}) = \int_0^{t_n} |\tilde{\alpha}'(t)| dt = \int_0^{t_n} |(\exp_p \tilde{\alpha})'(t)| dt =$$

$$\begin{aligned} \text{por lema V.42} \\ \int_0^{t_n} |(d \exp_p)_{\tilde{\alpha}(t)} \tilde{\alpha}'(t)| dt \geq \int_0^{t_n} |\tilde{\alpha}'(t)| dt = \ell_{\tilde{\alpha}(0)}^{t_n}(\tilde{\alpha}) \geq d(\tilde{\alpha}(0), \tilde{\alpha}(t_n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty, \end{aligned}$$

lo que implica que la longitud de α entre 0 y t_0 es arbitrariamente grande, lo

que es un absurdo (pues α' continua $\Rightarrow |\alpha'|$ $|_{[0, t_0]}$ acotada $\Rightarrow \int_0^{t_0} |\alpha'(t)| dt$ finito).

Como $\{\tilde{\alpha}(t_n)\} \subset B$, que es un compacto, existe un punto de acumulación $\tilde{V} \in T_p M$ de $\{\tilde{\alpha}(t_n)\}$. Sea V un entorno de \tilde{V} tal que $\exp_p|_V$ sea un difeomorfismo. Como \tilde{V} es un punto de acumulación, existe una subsucesión de $\{\tilde{\alpha}(t_n)\}$ convergente a \tilde{V} . La imagen por \exp_p de esta subsucesión será una subsucesión de $\{\alpha(t_n)\}$ convergente a $\lim \alpha(t_n) = \alpha(t_0)$, luego, como \exp_p es continua, $\exp_p \tilde{V} = \alpha(t_0)$, luego $\alpha(t_0) \in \exp_p(V)$ abto de M y, por la continuidad de α , $\exists \epsilon / \alpha(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[) \subset \exp_p(V)$. Definamos $\tilde{\alpha}_1$ sobre $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ por $\tilde{\alpha}_1(t) = \exp_p^{-1} \alpha(t)$. Para $t \in]t_0 - \epsilon, t_0[$, $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}_1(t)$ (pues $\exists n / \tilde{\alpha}(t_n) \in V$, $t_n \in]t_0 - \epsilon, t_0[$ y $\exp_p \circ \tilde{\alpha}(t_n) = \alpha(t_n)$ y $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha}_1$ son elevaciones de α pasando por el mismo punto $\tilde{\alpha}(t_n)$ y entonces, por el argumento standard, $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\alpha}_1$ coinciden).

Entonces $\tilde{\alpha}_1$ permite dar una extensión de α sobre $[0, t_0 + \epsilon[$, por lo tanto $[0, t_0 + \epsilon[\subset A$, como queríamos demostrar. ♣

V.45. COROLARIO (de la demostración): Si $\varphi: M_1 \dashrightarrow M_2$ es un difeomorfismo local de una superficie completa M_1 sobre una superficie M_2 que es creciente en longitud, entonces φ es una aplicación recubridora.

V.46. TEOREMA DE HADAMARD: Sea M una superficie completa simplemente conexa con curvatura de Gauss $K \leq 0$. Entonces $\exp_p: T_p M \dashrightarrow M$ es un difeomorfismo (i.e. M es difeomorfa a un plano).

DEMOSTRACION: Por V.44, \exp_p es una aplicación recubridora, y por V.37, \exp_p es un homeomorfismo, como es un difeomorfismo local, es un difeomorfismo. \hat{O} .

V.47. TEOREMA DE HADAMARD: Sea M una superficie regular compacta y conexa con curvatura de Gauss $K > 0$. Entonces la aplicación de Gauss $N: M \dashrightarrow S^2$ es un difeomorfismo, i.e. M es difeomorfo a una esfera.

DEMOSTRACION: Según vimos en III.7, $L = -dN$, luego $K = \det L_p = \det (dN_p) > 0$ implica que N es un difeomorfismo local. Como M es compacta, por V.26, N es una aplicación recubridora. Como S^2 es simplemente conexa, por V.37, N es un homeomorfismo. \hat{O} .

PROBLEMAS DEL CAPITULO V.

1. Sea M el cono de una hoja dado por la ecuación $z^2 = x^2 + y^2, z > 0, (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Mostrar que cualesquiera dos puntos de M pueden unirse por una geodésica de M .

2. Sea M el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en \mathbb{R}^3 y $p = (1,0,0) \in M$. Calcular $\exp_p v$ para $v = (0,a,b) \in T_p M$. Mostrar que \exp_p no tiene puntos críticos. Mostrar que existe un abierto en $T_p M$ conteniendo el rayo $\beta(t) = t v, v = (0,1,1)$ que se aplica difeomórficamente por \exp_p sobre un abierto de M conteniendo a la geodésica $\beta_v(t) = \exp_p t v$. Mostrar que, sin embargo, existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\beta_v(t) = \exp_p t v$ ($0 \leq t \leq t_0$) no es la curva más corta en M uniendo p con $\exp_p t_0 v$.

3. Sea M una superficie conexa y completa y $F \subset M$ un subconjunto no vacío cerrado de M tal que la componente $M-F$ es conexa. Mostrar que $M-F$ es una superficie no completa.

4. Una geodésica $\beta: [0, \infty[\rightarrow M$ sobre una superficie M se dice que es un rayo saliendo de $\beta(0)$ si realiza la distancia intrínseca entre $\beta(0)$ y $\beta(s)$ para todo $s \in [0, \infty[$. Sea p un punto de una superficie no compacta y completa. Probar que M contiene un rayo saliendo de p .

5. Sea $\beta: [0, \ell] \rightarrow M$ una geodésica sobre una superficie completa M , y supongamos que $\beta(\ell)$ no es conjugado de $\beta(0)$. Sea $w \in \{\beta'(\ell)\}^\perp \subset T_{\beta(\ell)} M$. Probar que existe un único campo de Jacobi $J(s)$ a lo largo de β con $J(\ell) = w$.