

Geometría Diferencial Clásica

Notas informales para las clases del curso 2012-2013

Vicente Miquel Molina

”Si un alumno no aprende por el camino que el docente enseña, el docente deberá buscar el camino por el que cada alumno aprende”. (Dra. Isabel Galli, Argentina)

Para quien ya está estudiando en la Universidad, yo diría:

”Si un estudiante no aprende con el modo de enseñar de su profesor, deberá descubrir su propio modo de aprender, jamás deberá tirar la toalla y pensar que él no puede aprender”. Ese “modo personal de aprender” es una de las principales enseñanzas que la Universidad ha de darle.¹

Pero hay algo más que ningún estudiante puede olvidar: todo aprendizaje requiere estudio y esfuerzo.

¹Es decir, la Universidad ha de darle la oportunidad de que encuentre su modo personal de aprender, lo que requiere darle tiempo para ir a la biblioteca para leer y pensar, y no atosigarlo con miles de ejercicios que ha de entregar cada semana.

Índice general

1. Curvas en \mathbb{R}^n	1
1.1. Curvas parametrizadas regulares	1
1.2. Longitud de una curva y longitud de arco	1
2. Curvas en el plano	3
2.1. Referencia móvil de una curva plana	3
2.2. Curvatura de una curva en \mathbb{R}^2	3
2.3. Existencia y unicidad de curvas con curvatura dada	5
2.4. Integral de la curvatura de una curva simple, cerrada y plana	7
3. Curvas en el espacio	10
3.1. Referencia móvil de una curva en el espacio	10
3.2. Fórmulas de Frenet	11
3.3. Curvas no parametrizadas con respecto a la longitud de arco	13
3.4. Observación sobre la condición de birregularidad	14
4. Existencia y unicidad de curvas con curvatura y torsión dadas	16
5. Superficies parametrizadas en \mathbb{R}^3	18
5.1. Superficies parametrizadas regulares	18
5.2. Superficies de revolución	19
5.3. Superficies regladas	21
5.4. Superficies tubulares	24
5.5. Plano tangente	25
5.6. Aplicaciones diferenciables	28
5.6.1. Sobre el concepto de diferencial de una aplicación entre superficies	29
5.6.2. Otra manera equivalente de definir la diferencial de una aplicación entre superficies	30
5.6.3. Expresión de la diferencial en coordenadas	31
5.7. Primera forma fundamental	32
6. Las curvaturas de una superficie	36
6.1. Las aplicaciones de Gauss y Weingarten	36
6.2. Curvatura normal y curvaturas principales	40

6.3.	Lineas de curvatura, curvas asintóticas y fórmulas para el cálculo	44
6.4.	Clasificación de los puntos de una superficie	45
6.5.	Superficies con todos sus puntos umbilicales	52
7.	Variación del área y superficies minimales	54
7.1.	Fórmula de la primera variación del área	54
7.2.	Clasificación de las superficies minimales de revolución	57
7.3.	Clasificación de las superficies minimales regladas	59
8.	Isometrías. Derivada covariante. Teorema egregio de Gauss	62
8.1.	Isometrías entre superficies	62
8.2.	La derivada covariante	66
8.3.	Teorema “egregium” de Gauss	70
9.	Transporte paralelo. Geodésicas	72
9.1.	Derivada covariante de un campo vectorial a lo largo de una curva	72
9.2.	Transporte paralelo a lo largo de una curva	74
9.3.	Geodésicas y curvatura geodésica	75
9.4.	Ejemplos de geodésicas y de cálculos de transporte paralelo	79
9.5.	Caracterización variacional de las geodésicas	80
10.	Variedades diferenciables	82
10.1.	Introducción	82
10.2.	Concepto de variedad diferenciable	83
10.3.	Ejemplos	86
10.4.	Aplicaciones diferenciables. Difeomorfismos	92
11.	Espacio tangente y diferencial de una aplicación	96
11.1.	Introducción	96
11.2.	Definición de espacio tangente	97
11.3.	La diferencial de una aplicación	100
11.4.	Inmersiones y sumersiones	105
11.5.	Comentario sobre inmersión de superficies compactas en \mathbb{R}^3 como sub-variedades regulares	108
12.	Campos vectoriales	109
12.1.	Definición y primeras propiedades	109
12.2.	El corchete de Lie	111
12.3.	Campos f -relacionados	112
13.	Teorema de Gauss Bonnet	114
13.1.	Superficies de \mathbb{R}^3 “globales”	114
13.2.	Formas diferenciales	115
13.3.	Formas de conexión y curvatura en una superficie de \mathbb{R}^3	117
13.4.	Teorema de Gauss-Bonnet local	122

13.5. Teorema de Gauss-Bonnet global 127

Capítulo 1

Curvas en \mathbb{R}^n

1.1. Curvas parametrizadas regulares

Definición 1.1 Una curva parametrizada regular de \mathbb{R}^n es una aplicación diferenciable $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ con derivada no nula en todo punto

Nota 1.2 $c'(t) \neq 0$ significa que tiene tangente no nula. A esto se le llama una curva inmersa, o se dice que c es una inmersión.

Al vector $c'(t)$ se le llama vector tangente a c en t .

A la recta $c(t) + \lambda c'(t)$ se la llama recta tangente a c en t . Usando el desarrollo de Taylor, se ve que es una aproximación de primer orden de la curva c en el punto $c(t)$ (al que también llamaremos punto t).

Relación de equivalencia “rep”. Dos curvas $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ son equivalentes (c rep α) si existe una aplicación diferenciable con derivada no nula $\varphi : J \rightarrow I$ tal que $\alpha = c \circ \varphi$. Si $\varphi' > 0$ se dice que son equivalentes con la misma orientación. A φ se le llama cambio de parámetro (conservando la orientación si $\varphi' > 0$).

A cada clase de equivalencia por “rep” de curvas parametrizadas se la llama curva regular. A cada clase de equivalencia respecto de reparametrizaciones conservando la orientación se la llama curva regular orientada.

1.2. Longitud de una curva y longitud de arco

Estamos acostumbrados a obtener la longitud de la trayectoria descrita por un móvil integrando su velocidad en cada instante de tiempo. Por lo tanto no parece que nos resulte difícil aceptar la siguiente definición:

Definición 1.3 La longitud de una curva regular (y también de una curva diferenciable) $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ se define por

$$L(c) := \int_a^b |c'(t)| dt$$

Esta definición se puede justificar a partir de la definición de longitud de una curva rectificable (demostrando, de paso, que una curva diferenciable es rectificable), el lector curioso puede verlo, por ejemplo, en mis apuntes de hace muchos años.

Es fácil demostrar que la definición es correcta, es decir, que no depende de la parametrización de la curva (o, lo que es lo mismo, que dos curvas parametrizadas equivalentes tienen la misma longitud)

Definición 1.4 Una curva se dice que está parametrizada respecto de su longitud de arco s si su vector tangente tiene módulo 1 (i.e. $|c'(s)| = 1$ para todo s).

Naturalmente, si una curva está parametrizada respecto de su longitud de arco, su longitud es igual a la de su parámetro menos una constante.

Proposición 1.5 Toda curva regular se puede parametrizar respecto de su longitud de arco

Demostración Dada $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, definimos $s : [a, b] \rightarrow [0, L(c)]$ por

$$s(t) = \int_a^t |c'(t)| dt.$$

Calculando derivadas: $\frac{ds}{dt}(t) = |c'(t)| \neq 0$, luego existe la función inversa $t : [0, L(c)] \rightarrow [a, b]$ cuya derivada respecto de s es

$$\frac{dt}{ds} = \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1} = \frac{1}{|c'(t)|}.$$

La curva $\alpha(s) = c(t(s))$ está parametrizada respecto de su longitud de arco s . \square

La parametrización respecto de la longitud de arco es única salvo una traslación $s \mapsto s + s_0$ (o $s \mapsto -s + s_0$ si se trata de una reparametrización que cambia la orientación de la curva).

En efecto, si s y \tilde{s} son dos parametrizaciones respecto de la longitud de arco de una curva regular c , existe una reparametrización $\varphi(s) = \tilde{s}$ que verifica:

$$1 = \left| \frac{dc(\varphi(s))}{ds} \right| = \left| \frac{dc(\tilde{s})}{d\tilde{s}} \right| \left| \frac{d\tilde{s}}{ds} \right| = 1 \left| \frac{d\tilde{s}}{ds} \right|$$

de donde se deduce que $\frac{d\tilde{s}}{ds} = \pm 1$ y, por lo tanto, que $\tilde{s} = \pm s + s_0$.

Nota 1.6 Poner ejemplos 1 a 6 del libro de Kühnel más la elipse.

Capítulo 2

Curvas en el plano

2.1. Referencia móvil de una curva plana

Dado un vector v de \mathbb{R}^2 , tenemos una manera natural (y única) de encontrar otro vector Jv ortogonal a él, con el mismo módulo y que forma con él una base que define la misma orientación que la base canónica. La única manera de obtener un tal Jv es aplicar a v una rotación (en sentido contrario a las agujas del reloj) de ángulo $\pi/2$. Es decir: $J(a, b) = (-b, a)$.

Con la ayuda de este operador J podemos construir una referencia ortonormal de \mathbb{R}^2 en cada punto de una curva c . Tomemos una parametrización de c respecto de su longitud de arco. Entonces $c'(s)$ es un vector unitario, y $Jc'(s)$ es otro vector unitario ortogonal a $c'(s)$ y de modo que la base $c'(s), Jc'(s)$ tiene la misma orientación que la base canónica de \mathbb{R}^2 .

Definición 2.1 *Sea s un parámetro longitud de arco de una curva regular $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $s \in I$. A la familia de bases ortonormales $\{c'(s), Jc'(s)\}_{s \in I}$ se la llama referencia móvil de c . También usaremos la notación $e_1(s) = c'(s)$, $e_2(s) = Jc'(s)$.*

2.2. Curvatura de una curva en \mathbb{R}^2

Si la trayectoria de una curva parametrizada con respecto a su longitud de arco es recta, entonces su velocidad $c'(s)$ es constante y, por lo tanto, $c''(s)$. Eso nos dice que $c''(s)$ indica de alguna manera cuanto se separa c de ser una recta.

De $|c'(s)| = 1$ se deduce que $\langle c'(s), c''(s) \rangle = 0$, por lo tanto, $c''(s)$ está en la dirección de $Jc'(s)$ y podemos escribir $c''(s) = \kappa(s) Jc'(s)$. Obsérvese que $\kappa(s) = \langle c''(s), Jc'(s) \rangle$, por lo tanto es una función con la misma clase de diferenciabilidad que c'' .

Definición 2.2 *Dada una curva plana c , a la función $\kappa(s) = \langle c''(s), Jc'(s) \rangle$ se la llama curvatura de la curva c .*

El nombre proviene, como hemos indicado en el párrafo anterior, de que es una medida de lo que una curva se aparta de ser una recta.

De la definición se observa que la curvatura de una curva plana tiene un signo que es positivo cuando la curva “se curva” en la dirección de Jc' y negativo cuando “se curva” en la dirección contraria. Como la dirección de Jc' depende de la orientación (sentido de recorrido) de la curva, el signo de la curvatura depende de la orientación. En efecto:

Observación 2.3 Si $\tilde{c}(s) = c(-s)$, entonces $\tilde{c}'(s) = -c'(-s)$ y $\tilde{c}''(s) = c''(-s)$, que sustituido en la fórmula de la curvatura da, para la curvatura $\tilde{\kappa}(s)$ de $\tilde{c}(s)$,

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}(s) &= \langle \tilde{c}''(s), J\tilde{c}'(s) \rangle \\ &= \langle c''(-s), -Jc'(-s) \rangle = -\kappa(-s) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Proposición 2.4 Una curva regular plana de clase C^2 es una recta sii su curvatura es 0 en todo punto.

Demostración Si $\kappa(s) = 0$ para todo s , entonces $c''(s)$ es ortogonal a $Jc'(s)$, luego está en la dirección de $c'(s)$. Como, además, es ortogonal a $c'(s)$, la única posibilidad que le queda es $c''(s) = 0$, lo que da $c'(s) = \text{cte} = a$, lo que da $c(s) = a s + b$, ecuación de una recta. \square

Las llamadas ecuaciones de Frenet para las curvas planas casi se reducen a las definiciones anteriores:

Proposición 2.5 Ecuaciones de Frenet

$$e_1'(s) = \kappa e_2(s), \quad e_2'(s) = -\kappa e_1(s) \quad (2.2)$$

o, en forma matricial

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Demostración La primera ecuación es la definición de la curvatura $\kappa(s)$. La segunda ecuación resulta derivando en Je_1 teniendo en cuenta que, al ser J una aplicación lineal, su diferencial es ella misma: $(Je_1)'(s) = Je_1'(s) = J(\kappa e_2(s)) = \kappa Je_2(s) = \kappa(-e_1(s))$. \square

Cuando la curva no está parametrizada con respecto a su longitud de arco, también podemos dar una expresión para el cálculo de su curvatura usando la definición y el correspondiente cambio de parámetro. Si $c(s) = \alpha(t(s))$,

$$\begin{aligned} \kappa &= \langle c''(s), Jc'(s) \rangle \\ &= \left\langle \alpha''(t) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \alpha'(t) \frac{d^2t}{ds^2}, J\alpha'(t) \frac{dt}{ds} \right\rangle \\ &= \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 \langle \alpha''(t), J\alpha'(t) \rangle \\ &= \frac{1}{|\alpha'(t)|^3} \langle \alpha''(t), J\alpha'(t) \rangle. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.6 Poner ejemplos de la recta, circunferencia, elipse, función seno y sus dibujos con Mathematica.

La siguiente interpretación de la curvatura de una curva plana en términos de la variación de un ángulo será muy útil para establecer el importantísimo teorema de la integral de una curva cerrada.

Proposición 2.7 Sea $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva orientada, y v un vector unitario (i.e. de norma unidad) fijo de \mathbb{R}^2 . Sea $\theta(t)$ el ángulo de v a $e_1(t)$ medido en la dirección positiva (sentido opuesto al de las agujas del reloj), i.e. el ángulo definido por

$$\cos \theta(t) = \langle e_1(t), v \rangle; \quad \text{sen } \theta(t) = -\langle e_2(t), v \rangle. \quad (2.4)$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \theta'(t) &= |c'(t)|\kappa(t) \\ (\text{si } |c'| &= 1, \quad \kappa(s) = \theta'(s)). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Demostración Observemos primero que para cada t existe un entorno de t tal que la función $\theta(t) = \arccos(\langle e_1(t), v \rangle) = \arcsin(-\langle e_2(t), v \rangle)$ está bien definida y es diferenciable, luego tiene sentido hablar de $\theta(t)$. Ahora, derivando en (2.4), se tiene que

$$\begin{aligned} (-\text{sen } \theta(t))\theta'(t) &= \langle |c'| \kappa e_2(t), v \rangle \\ &= |c'| \kappa(t) \text{sen } \theta(t); \\ \cos \theta(t)\theta'(t) &= \langle |c'| \kappa e_1(t), v \rangle \\ &= |c'(t)| \kappa(t) \cos \theta(t). \end{aligned}$$

De ambas ecuaciones resulta la proposición. \square

2.3. Existencia y unicidad de curvas con curvatura dada

Las curvas planas están (salvo movimientos de espacio euclídeo) determinadas por su curvatura. En efecto:

Proposición 2.8 Dada una función diferenciable $\kappa(s)$, existe una curva plana parametrizada con respecto a la longitud de arco s , única salvo movimientos del plano, cuya curvatura es $\kappa(s)$.

Demostración Puesto que la curva que buscamos ha de verificar la ecuación (2.5), se cumplirá que $c'(s) = \cos \theta(s) v + \sin \theta(s) Jv$ con $\theta(s) = \int_0^s \theta'(s) ds = \int_0^s \kappa(s) ds$. Una vez obtenida c' a partir de k , obtenemos $c(s) = \int_0^s c'(s) ds$, luego la curva existe.

Supongamos que tenemos dos curvas $c(s)$, $c_*(s)$ parametrizadas con respecto a su longitud de arco y cuya curvatura viene dada por la misma función $c(s)$. Entonces existe una isometría del plano $B = R \circ T$, donde R es una rotación y T

es una traslación tales que $c_*(0) = Bc(0)$ y $c'_*(0) = Rc'(0)$. La curva $Bc(s)$ verifica $(Bc)''(s) = Bc''(s) = B\kappa(s)Jc'(s) = \kappa(s)J(Bc)'(s)$, ecuación diferencial que también verifica $c_*(s)$, y satisface las mismas condiciones iniciales $c_*(0) = Bc(0)$ y $c'_*(0) = Rc'(0)$, luego, por el teorema de unicidad de soluciones de una EDO, $c_*(s)$ y $Bc(s)$ coinciden para todo valor de s . Luego la solución es única salvo una isometría que conserva la orientación (un movimiento). \square

Corolario 2.9 *Una curva de curvatura constante k es un arco de circunferencia de radio $1/k$*

Demostración Aplicando la construcción dada en la demostración de la proposición anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}\theta(s) &= \int_0^s \kappa(s) ds = \int_0^s k ds = ks, \\ c(s) &= \int_0^s c'(s) ds \\ &= \int_0^s \{\cos(ks) v + \sin(ks) Jv\} ds \\ &= \frac{1}{k} \{\text{sen}(ks) v - \cos(ks) Jv\}\end{aligned}$$

que es la ecuación de una circunferencia de radio $\frac{1}{k}$. \square

Existe una manera de probar el corolario anterior sin usar la proposición 2.8. La idea es: una circunferencia tiene como curvatura la inversa del radio, según calculamos en un ejercicio en clase. Además, el vector jornal a la circunferencia e_2 (si la circunferencia se recorre en dirección contraria a las agujas del reloj) apunta hacia el centro de la circunferencia. Por lo tanto, si a un punto c de la circunferencia le sumamos un vector de módulo $1/k$ y en la dirección de su vector normal, obtendremos el centro de la circunferencia, que es un punto fijo. Para ver que una curva de curvatura constante k es una circunferencia, hacemos la operación anterior a partir de un punto cualquiera de la curva, comprobamos que el punto obtenido es fijo (no depende del punto de la curva elegido) y luego comprobamos que la curva que tenemos es la circunferencia de centro ese punto y radio $1/k$. Vamos a hacerlo con detalle:

Definimos $p(s) = c(s) + \frac{1}{k}e_2(s)$. Comprobamos que $p(s)$ es fijo derivando: $p'(s) = c'(s) + \frac{1}{k}(-ke_1(s)) = 0$, luego p es constante. Ahora bien $|c(s) - p| = |\frac{1}{k}e_2(s)| = 1/k$, luego $c(s)$ está contenida en una circunferencia de centro p y radio $1/k$.

Motivados por este cálculo, se dan las siguientes definiciones:

Definición 2.10 *Dada una curva $c(t)$,*

(i) se llama centro de curvatura de c en $c(t)$ al punto $c(t) + \frac{1}{\kappa(t)}e_2(t)$,

(ii) se llama radio de curvatura de c en $c(t)$ al número $\frac{1}{\kappa(t)}$,

(iii) se llama círculo oscilador o circunferencia osculatriz a la circunferencia cuyo centro es el centro de curvatura y cuyo radio es el radio de curvatura.

2.4. Integral de la curvatura de una curva simple, cerrada y plana

El ángulo θ dado por las fórmulas θ estaba definido solo localmente. Vamos a ver ahora que la definición puede ser global:

Teorema 2.11 Dada una curva $c(s) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^r parametrizada respecto su longitud de arco, existe una función $\varphi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^r tal que

$$c(s) = |c(s)|(\cos(\varphi(s)), \sin(\varphi(s))). \quad (2.6)$$

La diferencia $\varphi(L) - \varphi(0)$ no depende de la elección de la función φ .

Demostración Consideremos $\psi_{\pm}(x)$ como el ángulo de las coordenadas polares de un punto $x \in \mathbb{R}_{\pm}^2$, es decir, $\psi_{\pm} : \mathbb{R}_{\pm}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow [0, \pi]$ definido por $\psi_{\pm}(x) = \arccos(\langle x, (1, 0) \rangle)$, de modo que para $x \in \mathbb{R}_+^2 - \{(0, 0)\}$, elegimos (para n el número natural conveniente para cada caso) $\psi_+(x) \in [2\pi n, 2\pi n + \pi]$ ó $\psi_+(x) \in [-2\pi(n+1), -2\pi n - \pi]$, y para $x \in \mathbb{R}_-^2 - \{(0, 0)\}$ elegimos $\psi_-(x) \in [2\pi n + \pi, 2\pi(n+1)]$ ó $\psi_-(x) \in [-2\pi n - \pi, -2\pi n]$.

Dada la curva $c(s)$, existe una partición $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{n-1} < s_n = L$ de modo que en cada subintervalo $[s_i, s_{i+1}]$, el segmento de curva $c([s_i, s_{i+1}])$ está contenido en uno de los dos semiespacios \mathbb{R}_{\pm}^2 de \mathbb{R}^2 . Para el primer intervalo, la correspondiente función $\varphi(s) := \psi_{\pm} \circ c(s)$ con imágenes en el correspondiente intervalo para $n = 0$ está bien definida y es continua. Para $s \in [s_1, s_2]$, la función $\varphi(s) := \psi_{\pm} \circ c(s)$ está bien definida y es continua en el correspondiente intervalo para cualquier elección de n y del signo de los elementos del intervalos. Podemos elegir n y el signo de modo que las funciones definidas sobre cada intervalo $[s_0, s_1]$ y $[s_1, s_2]$ den lugar a una función continua sobre $[s_0, s_2]$. Siguiendo así el proceso inductivamente, tenemos una función φ bien definida sobre $[s_0, s_n]$.

De las definiciones de ψ_{\pm} y φ , es evidente que $c(s) = |c(s)|(\cos(\varphi(s)), \sin(\varphi(s)))$.

Si $\varphi^*(s)$ es otra función para la que (2.6) es cierta, de la igualdad de las dos expresiones para $c(s)$ resulta que $\varphi(s) - \varphi^*(s)$ es un múltiplo de 2π y, como es la diferencia de dos funciones continuas, ha de ser constante e igual a un cierto $2m\pi$, luego $\varphi^*(L) - \varphi^*(0) = \varphi(L) + 2m\pi - (\varphi(0) + 2m\pi) = \varphi(L) - \varphi(0)$. \square

Definición 2.12 (i) Una curva geométrica de clase C^k se dice que es cerrada si una de sus parametrizaciones (y, por lo tanto, todas) $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ verifica $c(a) = c(b)$ y $c^{(r)}(a) = c^{(r)}(b)$ para $1 \leq r \leq k$.

(ii) Una curva geométrica se dice que es simple si una de sus parametrizaciones (y, por lo tanto, todas) es inyectiva.

Corolario 2.13 Para una curva cerrada, la función φ definida por el Teorema 2.11 verifica $\varphi(L) - \varphi(0) = 2\pi m$ para algún número entero m .

Definición 2.14 Para una curva cerrada c , el número m del corolario anterior se llama número de vueltas (en inglés “winding number”) de c . Lo denotaremos $W(c)$.

Definición 2.15 Para una curva cerrada c , se llama índice de rotación I de c al número de vueltas de su vector tangente unitario.

Corolario 2.16 El índice de rotación I de una curva cerrada plana es igual a su curvatura total (integral de su curvatura) dividida por 2π .

Demostración De acuerdo con las definiciones de I , del número de vueltas W , de la función φ dada por el teorema 2.11, que si definimos θ como la función φ para la curva $c'(s)$, y teniendo en cuenta la proposición 2.4, podemos escribir:

$$\begin{aligned} I(c) &= W(c') = \frac{1}{2\pi}(\theta(L) - \theta(0)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^L \theta'(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(s) ds. \end{aligned}$$

□

Lema 2.17 Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto estrellado con respecto a un punto $p \in \mathbb{R}^2$. Si $u : A \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ es una aplicación continua, existe una función continua (llamada ángulo polar) $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica $u(x) = |u(x)|(\cos \varphi(x), \sin(\varphi(x)))$.

Teorema 2.18 El índice de rotación de una curva simple cerrada regular es ± 1 . Gracias al corolario 2.16, esto equivale a que si $k(s)$ es la curvatura de una curva regular parametrizada respecto de la longitud de arco, entonces $\int_0^L \kappa(s) ds = \pm 2\pi$.

Demostración Por tratarse de una curva cerrada, su imagen es un conjunto compacto de \mathbb{R}^2 , luego acotado, luego contenido en un semiespacio de \mathbb{R}^2 . Sea R la recta frontera de ese semiespacio. Podemos desplazarla hasta que sea tangente a la curva en un punto. Por lo tanto, cambiando las coordenadas del plano si es necesario, podemos suponer que las coordenadas de la curva son $c(s) = (x(s), y(s))$, $y(s) \geq 0$, $y(0) = y(L) = 0$. Definimos $A = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq s \leq t \leq L\}$, que es el conjunto de puntos limitado por el triángulo de lados $s = 0$, $t = L$ y $s = t$, que es un conjunto estrellado con respecto a cualquiera de sus puntos.

Definimos la función continua $u : A \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

$$u(s, t) = \begin{cases} \frac{c(t) - c(s)}{|c(t) - c(s)|} & \text{si } s \neq t \text{ y } (s, t) \neq (0, L) \\ c'(s) & \text{si } s = t, \\ -c'(0) & \text{si } (s, t) = (0, L). \end{cases}$$

Por el lema 2.17, existe $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u(s, t) = (\cos(\varphi(s, t)), \sin(\varphi(s, t)))$ y $\varphi(0, 0) = 0$. Si definimos $\theta(s) = \varphi(s, s)$, por la definición de u se tiene que $c'(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$. Por la definición de índice, tenemos

$$\begin{aligned} I(c) &= \frac{1}{2\pi}(\theta(L) - \theta(0)) \\ &= \frac{1}{2\pi}(\varphi(L, L) - \varphi(0, 0)) \end{aligned}$$

Tal y como hemos tomado las coordenadas del plano, ha de ser $c'(0) = \pm(1, 0)$. Consideraremos primero el caso en que $c'(0) = (1, 0)$.

Calcularemos la diferencia $\varphi(L, L) - \varphi(0, 0)$ usando que

$$\varphi(L, L) - \varphi(0, 0) = \varphi(L, L) - \varphi(0, L) + \varphi(0, L) - \varphi(0, 0).$$

Observemos que

- $\varphi(L, L)$ es el ángulo que forma $c'(L) = \lim_{s \rightarrow L} \frac{c(L) - c(s)}{|c(L) - c(s)|}$ con $(1, 0)$,
- $\varphi(0, L)$ es el ángulo que forma $-c'(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{c(L) - c(s)}{|c(L) - c(s)|}$ con $(1, 0)$,
- $\varphi(0, 0)$ es el ángulo que forma $c'(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{c(s) - c(0)}{|c(s) - c(0)|}$ con $(1, 0)$.

Como la curva $c(s)$ está contenida en el semiplano \mathbb{R}_+^2 y $c(L) = c(0)$ está en la frontera del semiplano, todos los vectores $c(L) - c(s)$ apuntan hacia el semiplano \mathbb{R}_-^2 , por lo tanto, por la continuidad de φ , $\varphi(s, L)$ solo puede tomar valores entre π y 2π . Por lo tanto, $\varphi(L, L) = 2\pi$ y $\varphi(0, L) = \pi$.

Del mismo modo, todos los vectores $c(s) - c(0)$ apuntan hacia el otro semiplano \mathbb{R}_+^2 , y $\varphi(0, s)$ solo puede tomar valores entre 0 y π . Por lo tanto $\varphi(0, L) = \pi$ y $\varphi(0, 0) = 0$.

Por lo tanto, $\varphi(L, L) - \varphi(0, 0) = (2\pi - \pi) + (\pi - 0) = 2\pi$, lo que da índice de rotación igual a 1.

En el otro caso, $c'(0) = -(1, 0)$, el mismo razonamiento da $\varphi(L, L) - \varphi(0, 0) = -2\pi$, que corresponde a $I(c) = -1$. \square

Observación 2.19 *Aparte del interés de este teorema de establecer que la integral de la curvatura de una curva cerrada simple no depende en absoluto de la curva y que es un número con sentido geométrico, y de decir que ese número con sentido geométrico tiene el mismo valor para todas las curvas cerradas simples, este teorema es uno de los primeros que veremos de relación entre la geometría y la topología, pues el número de vueltas de una curva cerrada regular en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ es invariante por homotopía (regular) en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.*

Definición 2.20 *Un campo vectorial a lo largo de una curva $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación $v : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Consideraremos que el vector $v(t)$ tiene su origen en el punto $c(t)$ de la curva.*

Ejemplos vistos de campos vectoriales a lo largo de una curva son cada uno de los vectores de la referencia de Frenet de una curva. También lo es el campo vectorial tangente $c'(t)$ de la curva $c(t)$.

Capítulo 3

Curvas en el espacio

3.1. Referencia móvil de una curva en el espacio

Definición 3.1 Una curva geométrica de \mathbb{R}^3 se dice *birregular* si su parametrización respecto de la longitud de arco $c : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ verifica que $c'(s)$, $c''(s)$ son vectores linealmente independientes para todo $s \in [0, L]$.

Observación 3.2 Obsérvese que si $c(t)$ es una parametrización arbitraria de una curva irregular de \mathbb{R}^3 , s es el parámetro longitud de arco, y $\alpha(s) = c(t(s))$, entonces

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= c'(t) \frac{1}{|c'(t)|} \\ \alpha''(s) &= c''(t) \frac{1}{|c'(t)|^2} \\ &\quad + c'(t) \left(-\frac{1}{|c'(t)|^3} \langle c'(t), c''(t) \rangle \right)\end{aligned}$$

y la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{|c'(t)|^2} & 0 \\ -\frac{1}{|c'(t)|^3} \langle c'(t), c''(t) \rangle & \frac{1}{|c'(t)|} \end{pmatrix}$$

que expresa los vectores α' , α'' como combinación lineal de los vectores c' , c'' es regular para cualquier curva regular $c(t)$. Luego para la definición de curva irregular podíamos haber elegido cualquier parametrización, no era necesario tomar la longitud de arco.

Definición 3.3 Se llama *referencia de Frenet* de una curva irregular $c(s)$ (parametrizada respecto de su longitud de arco) a la familia de bases ortonormales $\{e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}_{s \in [0, L]}$ definida por:

$$\begin{aligned}e_1(s) &= c'(s), \\ e_2(s) &= \frac{c''(s)}{|c''(s)|}, \\ e_3(s) &= e_1(s) \wedge e_2(s).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Obsérvese que si c no es birregular, e_3 o no está bien definido o es nulo, luego no hay b.o.n. y no está bien definida la referencia de Frenet.

El uso del producto vectorial en la definición de e_3 indica: (a) que la referencia de Frenet depende de la orientación de \mathbb{R}^3 y (b) que la referencia de Frenet es, en cada punto, una base orientada positivamente. También resulta claro de la definición que es cierto que se trata de una base ortonormal.

Nota 3.4 Obsérvese que el vector e_2 se asemeja mucho al e_2 de una curva plana. Si $c : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, el vector $e_2(s)$ definido en el capítulo anterior (que a partir de ahora llamaremos Jc' para no confundirlo con el recién definido y el vector e_2 de la referencia de Frenet recién definida están relacionados por $e_2 = \pm Jc'$, donde el signo $+$ o $-$ dependen del sentido de recorrido de la curva.

El vector e_2 de la referencia de Frenet en \mathbb{R}^3 apunta siempre en la dirección en que la curva se curva, no depende, por lo tanto, del sentido de recorrido de la curva, mientras que el vector Jc' no depende de hacia donde se curve la curva y sí de su sentido de recorrido.

3.2. Fórmulas de Frenet

La variación de la referencia de Frenet de una curva en el espacio nos indica cómo se va curvando la curva. Así, una recta no es birregular y ni siquiera tiene bien definida una referencia de Frenet. En una curva plana c' y c'' definen siempre el mismo plano y el vector e_3 es constante, mientras que lo que se curve la curva depende solo de la variación de e_1 (o, equivalentemente, de e_2 , según se vió en (2.2)), como vimos en el capítulo anterior. Vamos, por ello, a estudiar la variación de la referencia de Frenet y veremos a continuación lo que esa variación nos dice sobre como se curva la curva.

Teorema 3.5 (fórmulas de Frenet) Para una curva birregular de clase C^r parametrizada respecto de la longitud de arco se tiene que existen funciones $\kappa, \tau : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^{r-2} y C^{r-3} respectivamente tales que :

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{ds}(s) &= \kappa(s) e_2(s), \\ \frac{de_2}{ds}(s) &= -\kappa(s)e_1(s) + \tau(s)e_3(s), \\ \frac{de_3}{ds}(s) &= -\tau(s) e_2(s). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Además

$$\kappa(s) = |c''(s)|, \tag{3.3}$$

$$\tau(s) = \frac{1}{|c''(s)|^2} \langle c'''(s), c'(s) \wedge c''(s) \rangle \tag{3.4}$$

Demostración Puesto que e_1, e_2, e_3 forman una base ortonormal, de lo que se trata es de encontrar la expresión en esa base de los vectores de_i/ds anteriores, para lo cual calculamos:

Observemos en primer lugar que, por ser los e_i unitarios,

$$0 = \langle e_i, e_i \rangle' (s) = 2 \langle e_i(s), e_i'(s) \rangle.$$

Para el resto de productos escalares, tenemos

$$\begin{aligned} \langle e_1'(s), e_2(s) \rangle &= \left\langle c''(s), \frac{1}{|c''(s)|} c''(s) \right\rangle = |c''(s)|, \\ \langle e_1'(s), e_3(s) \rangle &= |c''(s)| \langle e_2(s), e_3(s) \rangle = 0, \\ \langle e_2'(s), e_1(s) \rangle &= \langle e_2, e_1 \rangle' (s) - \langle e_2, e_1' \rangle = -|c''|, \\ \langle e_2'(s), e_3(s) \rangle &= \frac{1}{|c''|} \langle c''', e_3 \rangle = \frac{1}{|c''|^2} \langle c''', c' \wedge c'' \rangle, \\ \langle e_3'(s), e_1(s) \rangle &= \langle e_3, e_1 \rangle' - \langle e_3, e_1' \rangle = 0, \\ \langle e_3'(s), e_2(s) \rangle &= \langle e_3, e_2 \rangle' - \langle e_3, e_2' \rangle = -\langle e_3, e_2' \rangle. \end{aligned}$$

Las fórmulas de Frenet resultan entonces de llamar $\kappa(s) = \langle e_1'(s), e_2(s) \rangle$ y $\tau(s) = \langle e_2'(s), e_3(s) \rangle$. \square

Definición 3.6 Las funciones $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ del teorema anterior se llaman, respectivamente, curvatura y torsión de la curva $c(s)$.

Los vectores e_1, e_2 y e_3 se llaman, respectivamente, vector tangente, normal y binormal de la curva $c(s)$.

De acuerdo con el siguiente teorema está clara la justificación del nombre de κ y sería más razonable llamar a τ la segunda curvatura:

Proposición 3.7 Una curva irregular $c(s)$ está contenida en un plano si y solo si su torsión es nula

Demostración Si la curva es plana, fijado uno de sus puntos $c(s_0)$, para todo s los vectores $c(s) - c(s_0)$ está contenido en un mismo plano vectorial V . Por lo tanto, su primera y segunda derivada $c'(s)$ y $c''(s)$ están contenidos en ese mismo plano V , luego el producto vectorial $e_3 = e_1(s) \wedge e_2(s) = e_r$ es un vector constante, luego su derivada $e_3'(s) = -\tau(s)e_2$ es cero, luego $\tau(s) = 0$.

Recíprocamente, si $\tau(s) = 0$, entonces $e_3'(s) = 0$, luego e_3 es un vector fijo y la función $f(s) = \langle c(s) - c(s_0), e_3 \rangle$ verifica $f(s_0) = 0$ y $f'(s) = \langle c'(s), e_3 \rangle = 0$, luego $f(s) = 0$ para todo s , luego $c(s)$ está contenida en el plano que pasa por $c(s_0)$ y es ortogonal a e_3 . \square

3.3. Curvas no parametrizadas con respecto a la longitud de arco

Puesto que no siempre es posible trabajar con curvas parametrizadas con respecto a la longitud de arco, conviene saber cual es la expresión de las fórmulas de Frenet, la curvatura y la torsión en curvas que no están parametrizadas respecto de la longitud de arco. Vamos a deducir esas fórmulas.

Proposición 3.8 *Para una curva regular $c(t)$ con parametrización arbitraria, las fórmulas de Frenet son:*

$$\begin{aligned}\frac{de_1(t)}{dt} &= |c'(t)| \kappa(t) e_2(t) \\ \frac{de_2(t)}{dt} &= |c'(t)|(-\kappa e_1 + \tau e_3) \\ \frac{de_3(t)}{dt} &= -|c'(t)| \tau e_2\end{aligned}\tag{3.5}$$

y las expresiones para calcular curvatura y torsión son:

$$\kappa(t) = \frac{|c'(t) \wedge c''(t)|}{|c'(t)|^3}\tag{3.6}$$

$$\tau(t) = \frac{\langle c' \wedge c'', c''' \rangle}{|c' \wedge c''|^2}\tag{3.7}$$

Demostración Si $c(t)$ es una curva no parametrizada respecto de la longitud de arco, denotemos por $s = \varphi(t)$ el parámetro longitud de arco de c y por $\alpha = c \circ \varphi^{-1}$ a su correspondiente parametrización respecto de la longitud de arco. Ya calculamos en la observación 3.2:

$$\begin{aligned}e_1 &= \frac{1}{|c'(t)|} c'(t) \\ \kappa e_2 &= \frac{1}{|c'(t)|^2} \left(c''(t) - \left\langle c''(t), \frac{c'(t)}{|c'(t)|} \right\rangle \frac{c'(t)}{|c'(t)|} \right) \\ e_3 &= e_1 \wedge e_2 = \frac{1}{\kappa |c'(t)|^3} c'(t) \wedge c''(t)\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\frac{de_1(t)}{dt} &= \frac{de_1}{ds} |c'(t)| = |c'(t)| \kappa(t) e_2(t) \\ \frac{de_2(t)}{dt} &= \frac{de_2}{ds} |c'(t)| = |c'(t)|(-\kappa e_1 + \tau e_3) \\ \frac{de_3(t)}{dt} &= \frac{de_3}{ds} |c'(t)| = -|c'(t)| \tau e_2\end{aligned}$$

De la fórmula para e_3 resulta que

$$\kappa(t) = \frac{|c'(t) \wedge c''(t)|}{|c'(t)|^3}$$

y de las fórmulas para de_3/dt y e_2 resulta

$$\begin{aligned} \tau(t) &= -\frac{1}{|c'|} \left\langle \frac{de_3}{dt}, e_2(t) \right\rangle \\ &= -\frac{1}{|c'|} \left(\frac{1}{\kappa|c'(t)|^3} \right)' \langle c' \wedge c'', e_2(t) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{|c'|} \left(\frac{1}{\kappa|c'(t)|^3} \right) \langle c' \wedge c''', e_2(t) \rangle \\ &= -\frac{1}{\kappa|c'|^3} \left(\frac{1}{\kappa|c'(t)|^3} \right) \langle c' \wedge c''', c''(t) \rangle \\ &= -\frac{1}{|c' \wedge c''|^2} \langle c' \wedge c''', c''(t) \rangle = \frac{\langle c' \wedge c'', c''' \rangle}{|c' \wedge c''|^2} \end{aligned}$$

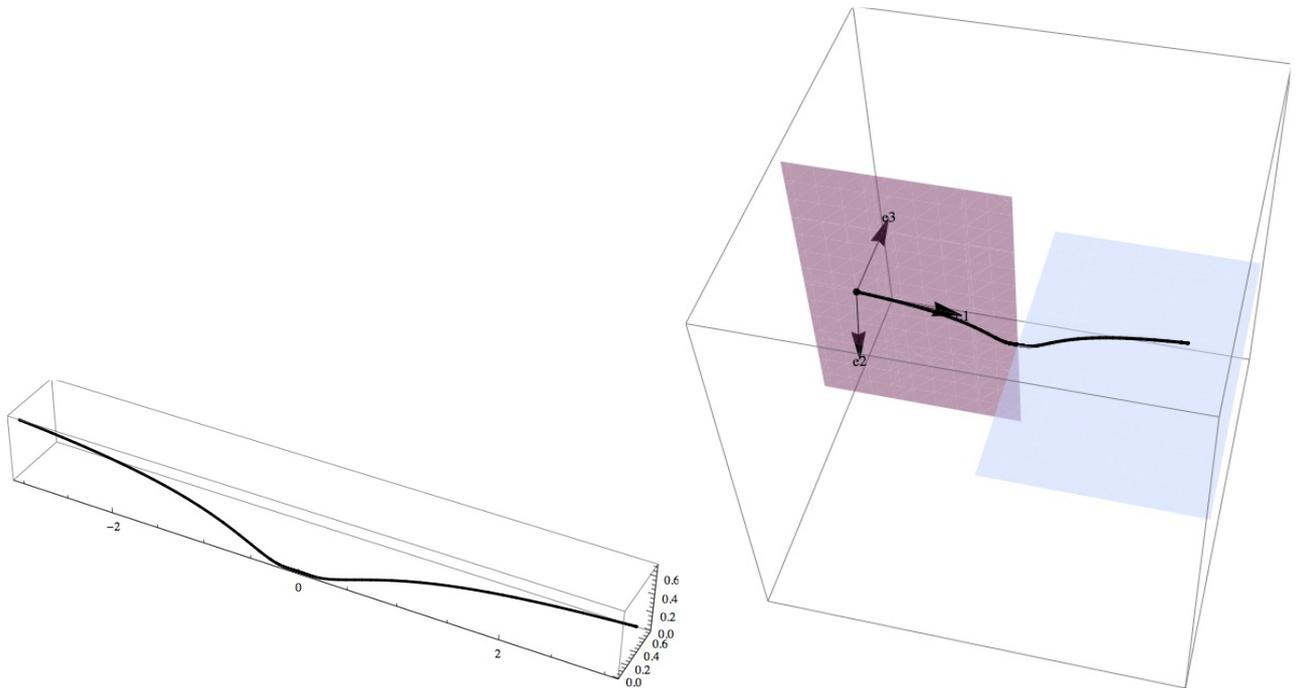
□

3.4. Observación sobre la condición de birregularidad

¿Qué pasa si una curva no es birregular? Vamos a insistir en que la hipótesis birregular (que es equivalente a curvatura no nula en todo punto) es necesaria para tener un triedro de Frenet unívocamente bien definido, y también, como consecuencia, para definir la torsión.

De acuerdo con la proposición 3.7, resulta natural considerar que la torsión es una medida de la desviación de una curva de ser plana. Pero si consideramos curvas que no son birregulares, esta interpretación natural falla, como lo muestra la curva

$$c(t) = \begin{cases} (t, e^{-\frac{1}{t}}, 0), & \text{si } t > 0, \\ (t, 0, e^{\frac{1}{t}}), & \text{si } t < 0, \\ (0, 0, 0), & \text{si } t = 0. \end{cases}$$



que es birregular en todo punto excepto en $t = 0$, en donde es regular pero no birregular. En efecto

$$c'(t) = \begin{cases} \left(1, 0, -\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}\right), & \text{si } t < 0, \\ \text{con } \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(1, 0, -\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}\right) = (1, 0, 0), \\ \left(1, \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}, 0\right), & \text{si } t > 0, \\ \text{con } \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(1, \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}, 0\right) = (1, 0, 0), \end{cases}$$

lo que indica que el vector tangente está bien definido también en $t = 0$ con valor $(1, 0, 0)$ no nulo.

Su torsión es 0 para $t \neq 0$, y si, por continuidad, dijéramos que la torsión también es cero en $t = 0$, tendríamos una curva no plana con torsión cero.

Capítulo 4

Existencia y unicidad de curvas con curvatura y torsión dadas

Desde el punto de vista de la geometría euclídea (orientada) dos curvas de \mathbb{R}^3 son iguales si difieren solo en una isometría (conservando la orientación) de \mathbb{R}^3 . Vamos a ver aquí que si dos curvas de \mathbb{R}^3 tienen la misma curvatura y torsión son iguales desde este punto de vista, i.e. que las curvaturas determinan la curva salvo una isometría.

Teorema 4.1 (de unicidad) Sean $c, c^* : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos curvas birregulares y tales que

$$i) |c'(t)| = |c^{*'}(t)|,$$

$$ii) \kappa(t) = \kappa^*(t),$$

$$iii) \tau(t) = \tau^*(t) \text{ (resp. } \tau(t) = -\tau^*(t) \text{)}.$$

Entonces existe una única isometría $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que conserva la orientación (resp. que invierte la orientación) y que verifica $c^* = B \circ c$.

Demostración La haremos para el caso $\tau(t) = \tau^*(t)$. Para el otro caso todo es igual, pero con una isometría que cambia la orientación.

Fijemos $t_0 \in I$. Existen una rotación R única tal que

$$Re_i(t_0) = e_i^*(t_0) \text{ para } i = 1, 2, 3. \quad (4.1)$$

Por las ecuaciones de Frenet para las curvas c^* y c tenemos

$$\begin{aligned} e_1^{*'}(t) &= |c^{*'}(t)|\kappa^*(t)e_2^*(t) \\ e_2^{*'}(t) &= |c^{*'}(t)|(-\kappa^*(t)e_1^*(t) + \tau^*(t)e_3^*(t)) \\ e_3^{*'}(t) &= -|c^{*'}(t)|\tau^*(t)e_2^*(t), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(Re_1)'(t) &= |c'(t)|\kappa(t)Re_2(t) \\ (Re_2)'(t) &= |c'(t)|(-\kappa(t)Re_1(t) + \tau(t)Re_2(t)) \\ (Re_3)'(t) &= -|c'(t)|\tau(t)Re_2(t).\end{aligned}$$

Es decir, $e_i^*(t)$ y $Re_i(t)$ verifican las mismas ecuaciones diferenciales con las mismas condiciones iniciales, luego $e_i^*(t) = Re_i(t)$ para todo t . De la igualdad para $i = 1$ resulta que $c^{*'}(t) = |c'(t)|Re_1(t) = Rc'(t)$. Usando este,

$$\begin{aligned}c^*(t) &= c^*(t_0) + \int_{t_0}^t c^{*'}(t)dt \\ &= c^*(t_0) + \int_{t_0}^t Rc'(t)dt \\ &= c^*(t_0) + Rc(t) - Rc(t_0)\end{aligned}\tag{4.2}$$

Si definimos ahora la isometría B como la composición de la rotación R con la traslación $TX = X + c^*(t_0) - Rc(t_0)$, es decir, $BX = T(RX)$, de (4.2) resulta que $c^*(t) = T \circ R(c(t)) = B(c(t))$. \square

Teorema 4.2 (de existencia) *Dadas dos funciones diferenciables $\kappa(s), \tau(s), \kappa(s) > 0$, definidas en un entorno de 0, existe una curva $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable irregular ($0 \in I$) parametrizada respecto de la longitud de arco tal que κ y tau son, respectivamente, la curvatura y la torsión de c .*

Demostración Si una curva c tiene κ y τ como curvatura y torsión, ha de verificar el sistema de 12 ecuaciones diferenciales (4 ecuaciones vectoriales) con 12 incógnitas (4 incógnitas vectoriales: c, e_1, e_2, e_3) siguiente:

$$\begin{aligned}c'(s) &= e_1(s) \\ e_1'(s) &= \kappa(s)e_2(s) \\ e_2'(s) &= -\kappa(s)e_1(s) + \tau(s)e_3(s) \\ e_3'(s) &= -\tau(s)e_2(s)\end{aligned}$$

Fijadas unas condiciones iniciales (por ejemplo $c(0) = (0, 0, 0)$, $e_1(0) = (1, 0, 0)$, $e_2(0) = (0, 1, 0)$, $e_3(0) = (0, 0, 1)$), el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales dice que existe una única solución del sistema de ecuaciones anterior verificando las ecuaciones dadas. Como las ecuaciones que hemos escrito no son más que las ecuaciones de Frenet correspondientes a la curva con $c' = e_1$, la curva solución c tiene por curvatura y torsión las funciones κ y τ . \square

Capítulo 5

Superficies parametrizadas en \mathbb{R}^3

Vamos a introducir las superficies siguiendo un procedimiento análogo al que hicimos con las curvas. Dejamos para cuando estudiemos variedades el dar un concepto que con más claridad sea independiente de la parametrización y que permita distinguir bien lo que son superficies embebidas de lo que son superficies inmersas. Lo que vamos a hacer en esta primera parte de la asignatura es geometría local, por lo tanto válido tanto para inmersiones como para embebimientos, y es suficiente para ello el concepto de superficie parametrizada.

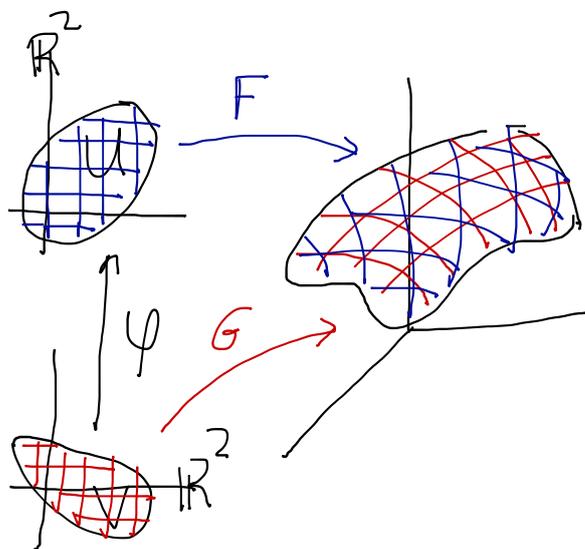
5.1. Superficies parametrizadas regulares

Definición 5.1 Una superficie parametrizada es una aplicación diferenciable (supondremos siempre de clase C^k , $k \geq 2$) $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de un dominio (subconjunto conexo de interior no vacío) U de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 .

Diremos que es regular si $dF(u)$ es inyectiva para cada $u \in U$.

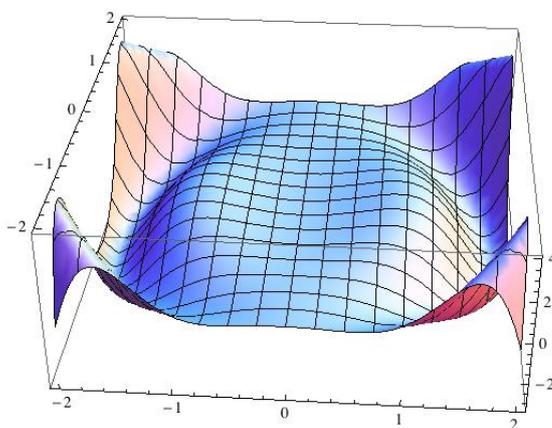
Si U no es abierto, entendemos que F es diferenciable si existe un abierto que contiene a U y una extensión diferenciable de F a ese abierto.

Si $G : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ es otra superficie parametrizada y existe un difeomorfismo $\varphi : V \rightarrow U$ tal que $G = F \circ \varphi$, entonces diremos F y G definen la misma superficie. Obsérvese que si F y G definen la misma superficie, entonces F es regular si y sólo si G es regular, ya que $DG = dF \circ d\varphi$ y $d\varphi$ es un isomorfismo.



Una gran e importante familia de superficies parametrizadas regulares viene dada por la siguiente proposición, cuya demostración muy sencilla se deja al lector:

Proposición 5.2 Si U es un abierto de \mathbb{R}^2 y $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación de clase C^k , entonces la gráfica de g define la superficie regular $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $F(u, v) = (u, v, g(u, v))$.



Ej: gráfica de $g(u, v) = u^2 \cos(u^2 + v^2)$.

Las secciones siguientes dan otras familias de ejemplos muy usadas:

5.2. Superficies de revolución

Definición 5.3 Una superficie de revolución es la que se obtiene por rotación de una curva plana (curva generatriz) alrededor de un eje (eje de revolución) contenido

en el mismo plano que la curva. Si tomamos como eje z el eje de revolución y como plano xz el plano de la curva generatriz, la curva se puede escribir como $c : I \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$, $c(u) = (x(u), 0, z(u))$ y la parametrización de la superficie de revolución es $F : I \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$F(u, v) = (x(u) \cos v, x(u) \operatorname{sen} v, z(u)).$$

La dF viene dada por

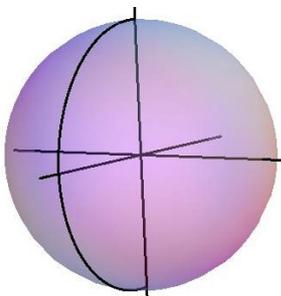
$$\begin{aligned} dF_{(u,v)}(1, 0) &= \frac{\partial F}{\partial u} = (x'(u) \cos v, x'(u) \operatorname{sen} v, z'(u)), \text{ y} \\ dF_{(u,v)}(0, 1) &= \frac{\partial F}{\partial v} = (-x(u) \operatorname{sen} v, x(u) \cos v, 0), \end{aligned} \quad (5.1)$$

y estos dos vectores son l. i. (que es lo mismo que decir que $dF_{(u,v)}$ es inyectiva) sii $x(u) \neq 0$ y $(x'(u), z'(u)) \neq (0, 0)$, i.e.: F es regular en todos los puntos en que la curva generatriz c no corta el eje de revolución sii c es regular.

Como ejemplos muy especiales de superficies de revolución tenemos:

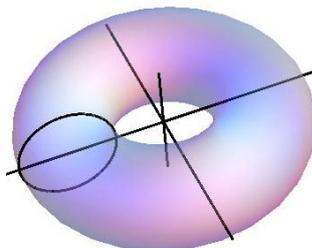
La esfera en coordenadas esféricas: $c(u) = (\cos u, 0, \operatorname{sen} u)$, $u \in [-\pi/2, \pi/2]$, $v \in [0, 2\pi]$, con lo que

$$\begin{aligned} F : [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3; \\ F(u, v) &= (\cos u \cos v, \cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u) \end{aligned}$$



El toro de revolución: $r, R \in \mathbb{R}^+$, $c(u) = (R+r \cos u, 0, r \operatorname{sen} u)$ es la circunferencia de centro $(R, 0, 0)$ y radio r en el plano xz , con lo que $F : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$;

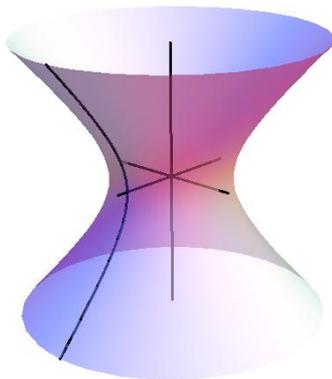
$$\begin{aligned} F(u, v) &= ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \operatorname{sen} v, r \operatorname{sen} u) \end{aligned}$$



El hiperboloide de revolución de una hoja: $c(u) = (chu, 0, shu)$, $u \in \mathbb{R}$ es una hoja de la hipérbola en el plano xz , con lo que

$$F : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3;$$

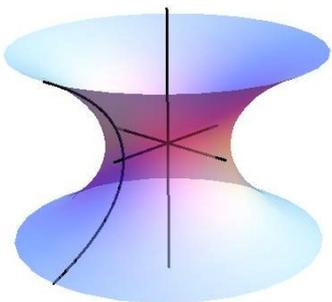
$$F(u, v) = (chu \cos v, chu \sin v, shu)$$



La catenoide: $c(u) = (chu, 0, u)$, $u \in \mathbb{R}$ es la catenaria en el plano xz , con lo que

$$F : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3;$$

$$F(u, v) = (chu \cos v, chu \sin v, u)$$



5.3. Superficies regladas

Una superficie reglada se obtiene por el movimiento de una recta (recta geratriz) a lo largo de una curva c (curva directriz). Al moverse la recta a lo largo de la curva, el “parámetro” del movimiento es el parámetro de la curva u y la recta movida en u tendrá una expresión de la forma $c(u) + vw(u)$, donde v es el parámetro de la recta y $w(u)$ es su vector director. Resulta por lo tanto que

Definición 5.4 Una superficie reglada de curva directriz c es una superficie parametrizada de la forma $F(u, v) = c(u) + v w(u)$, siendo $w(u)$ un campo vectorial a lo largo de c que no se anula en ningún punto.

La dF viene dada por

$$dF_{(u,v)}(1,0) = \frac{\partial F}{\partial u} = c'(u) + v w'(u), \text{ y}$$

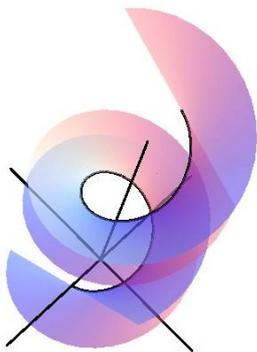
$$dF_{(u,v)}(0,1) = w(u),$$

Por lo que

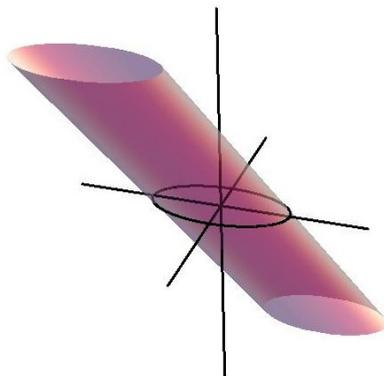
$dF_{(u,v)}$ es inyectiva siempre que $c' + vw'$ y w sean linealmente independientes, o, lo que es lo mismo $(c' + vw') \wedge w \neq 0$. (5.2)

Como ejemplos de superficies regladas tenemos :

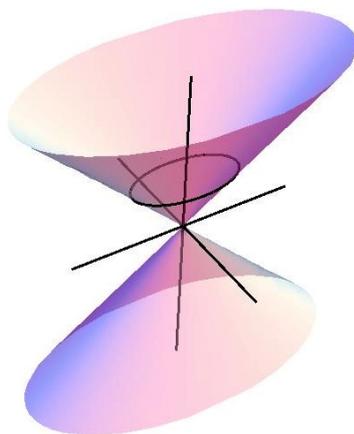
Superficie desarrollable tangencial $c(u)$ es una curva arbitraria, y $w(u) = c'(u)$ es su vector tangente. Se tiene, por tanto, que $c' + v w' = c' + v c''$ y $w = c'$, que son linealmente independientes sii $v \neq 0$ (suponiendo que c es irregular), luego la desarrollable tangencial es regular en todos los puntos excepto en $v = 0$, i. e., salvo en los puntos de la curva directriz c .



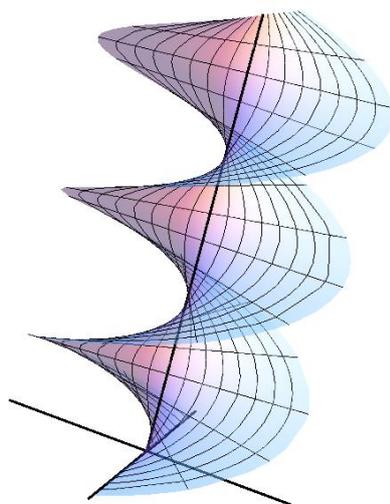
Cilindros c es una curva cualquiera y w es un vector constante. Se tiene, por tanto, que $c' + v w' = c'$ y w es constante, que son linealmente independientes en todos los puntos en que w no está en la dirección del vector tangente a c' . La superficie es regular en todos esos puntos.



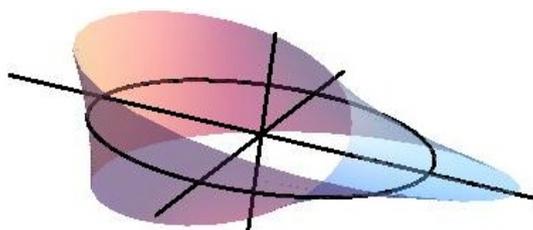
Conos c es una curva regular y w es un vector que, para cada u , apunta hacia un punto fijo p , es decir, $w(u) = c(u) - p$, p un punto fijo. Se tiene, por tanto, que $c' + v w' = c' + v c' = (1 + v)c'$ y $w = c - p$, que son linealmente independientes en todos los puntos en que w no está en la dirección del vector tangente a c' y $v \neq -1$. La superficie es regular en todos esos puntos. Obsérvese que $v = -1$ da, para la superficie, el punto $c - (c - p) = p$. Si c es plana y p no está en el plano que contiene a c , entonces p es el único punto en que F no es regular.



Helicoide c es la hélice circular $c(u) = (a \cos u, a \sin u, bu)$ y $w(u)$ es vector perpendicular al eje de la hélice que va desde el eje hasta un punto de la hélice, $w(u) = (a \cos u, a \sin u, 0)$. Se tiene, por tanto, que $c' + v w' = (-(1 + v)a \sin u, (1 + v)a \cos u, b)$ y $w = (a \cos u, a \sin u, 0)$, que son linealmente independientes en todos los puntos. La superficie es, pues, regular en todos sus puntos.

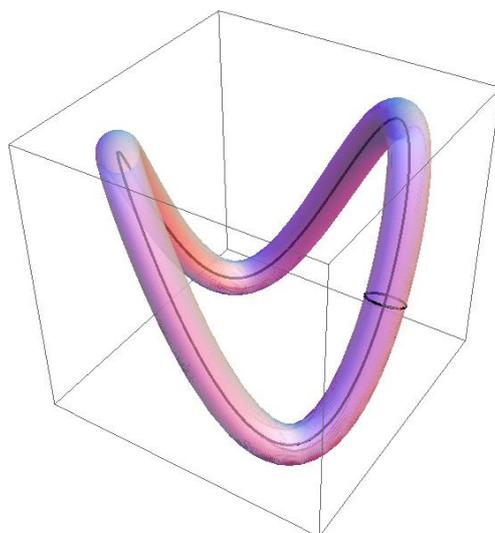


Cinta de Möbius c es la circunferencia $c(u) = (a \cos u, a \sin u, 0)$ y $w(u)$ es vector perpendicular a la curva c en $c(u)$ cuyo extremo recorre una circunferencia a mitad de velocidad que c/a , es decir, $w(u) = \cos(u/2)e_2(u) + \sin(u/2)e_3(u)$. La superficie es $F(u, v) = c(u) + v w(u) = c(u) + v (\cos(u/2)e_2(u) + \sin(u/2)e_3(u))$, con $-b < v < b < a$. Escribiendo las expresiones de $e_2 = (-\cos u, -\sin u, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$ para la circunferencia $c(u)$, tenemos $w(u) = (a \cos u - v \cos(u/2) \cos u, a \sin u - v \cos(u/2) \sin u, \sin(u/2))$. Se tiene, por tanto, que $c' + v w' = (-(1+v)a \sin u, (1+v)a \cos u, b)$ y $w = (a \cos u, a \sin u, 0)$, que son linealmente independientes en todos los puntos (se pueden ver los cálculos detallados en la hoja de Mathematica de las superficies regladas). La superficie es, pues, regular en todos sus puntos.



5.4. Superficies tubulares

Definición 5.5 Una superficie tubular de radio r alrededor de una curva $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la superficie que se obtiene por unión de los círculos de centro en un punto de la curva $c(u)$ y radio $r > 0$, contenidos en el plano normal a c en el punto $c(u)$. Se tiene, por tanto, que $F : I \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(u, v) = c(u) + r \cos v e_2(u) + r \sin v e_3(u)$.



La dF viene dada por

$$\begin{aligned} dF_{(u,v)}(1, 0) &= \frac{\partial F}{\partial u} = c' + r \cos v (-\kappa e_1 + \tau e_3) + r \operatorname{sen} v (-\tau e_2) \\ &= (1 - r\kappa \cos v)e_1 - r\tau \operatorname{sen} v e_2 + r\tau \cos v e_3, \text{ y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dF_{(u,v)}(0, 1) &= \frac{\partial F}{\partial v} \\ &= -r \operatorname{sen} v e_2 + r \cos v e_3, \end{aligned}$$

Estos vectores son linealmente independientes sii el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} (1 - r\kappa \cos v) & -r\tau \operatorname{sen} v & r\tau \cos v \\ 0 & -r \operatorname{sen} v & r \cos v \end{pmatrix}$$

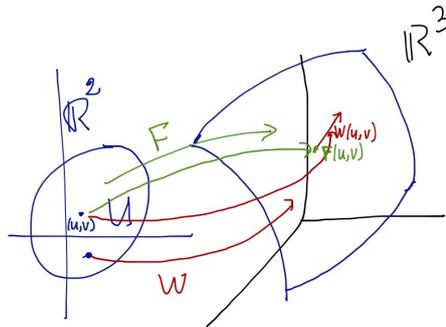
es 2, lo que ocurre sii $\begin{cases} (1 - r\kappa \cos v)r \operatorname{sen} v \neq 0 \\ (1 - r\kappa \cos v)r \cos v \neq 0 \end{cases}$. Como seno y coseno no se anulan simultaneamente, esto es equivalente a $1 - r\kappa \cos v \neq 0$. Por lo tanto una superficie tubular será regular si $r < \frac{1}{\max\{\kappa(u)\}}$

Obsérvese que los toros de revolución estudiados anteriormente son tubos de radio r alrededor de una circunferencia de radio R . Los tubos alrededor de otras curvas cerradas simples son ejemplos sencillos superficies con la topología de un toro que son geoméricamente muy distintas del toro de revolución.

5.5. Plano tangente

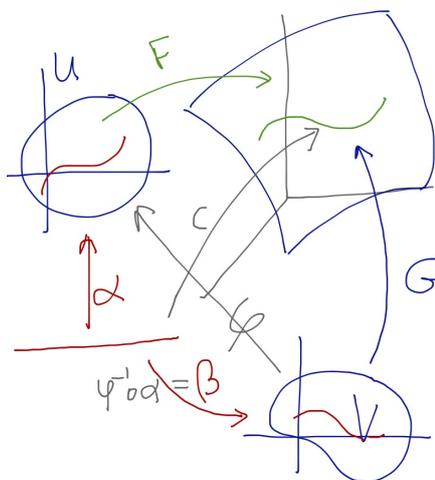
Definición 5.6 *Un campo vectorial a lo largo de (o sobre) una superficie parametrizada regular $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación (diferenciable) $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$. Para cada $(u, v) \in U$, el vector $X(u, v)$ se considera con origen en $F(u, v)$.*

Si $G : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ es otra parametrización de la misma superficie F anterior, sabemos que existe $\varphi : V \rightarrow U$ tal que $G = F \circ \varphi$. Diremos que el campo vectorial $\tilde{W} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ sobre la superficie G es “el mismo” que (o equivalente a) el campo vectorial W si $\tilde{W} = W \circ \varphi$.

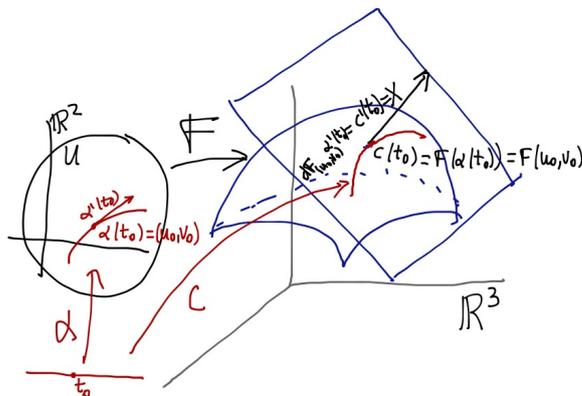


Definición 5.7 Una curva de una superficie parametrizada $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ que se puede escribir como $c(t) = F \circ \alpha(t)$ para una curva $\alpha : I \rightarrow U$. A las coordenadas de la curva α las llamaremos coordenadas de c en la parametrización F de la superficie.

Observación 5.8 Obsérvese que el concepto de curva no depende de la parametrización, pues si $c = F \circ \alpha$ y G es otra parametrización de la misma superficie. $G = F \circ \varphi$ para un difeomorfismo φ , y $c = F \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \alpha = G \circ \beta$, siendo las coordenadas de $\beta = \varphi^{-1} \circ \alpha$ las coordenadas de c en la parametrización G .



Definición 5.9 Llamaremos vector tangente a una superficie $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ en un punto $F(u_0, v_0)$ a un vector tangente a una curva de la superficie en el punto $c(t_0) = F(u(t_0), v(t_0))$ con $u(t_0) = u_0$ y $v(t_0) = v_0$. Llamaremos plano tangente a la superficie F en $F(u_0, v_0)$ al conjunto de los vectores tangentes a la superficie en $F(u_0, v_0)$. Lo denotaremos por $T_{(u_0, v_0)}F$, o, también, por T_pM , siendo $p = F(u_0, v_0)$ y $M = F(U)$.



Proposición 5.10 Si $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie parametrizada regular, $T_{(u_0, v_0)}F = dF_{(u_0, v_0)}(\mathbb{R}^2)$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 de dimensión 2.

Demostración Observemos primero que todo vector tangente $X \in T_{(u_0, v_0)}F$ se puede escribir de la forma $X = dF_{(u_0, v_0)}(x)$ para $x \in \mathbb{R}^2$. En efecto, por definición de vector tangente, existe una curva $c(t) = F(\alpha(t))$ tal que $c'(t_0) = X$. Por la regla de la cadena $X = c'(t_0) = dF(\alpha'(t_0)) = dF(v)$ si $v = \alpha'(0)$. Esto prueba que $T_{(u_0, v_0)}F \subset dF_{(u_0, v_0)}(\mathbb{R}^2)$. La otra inclusión resulta de que si $x \in \mathbb{R}^2$, existe $\alpha : I \rightarrow U$ tal que $\alpha'(t_0) = x$, luego $dF_{(u_0, v_0)}(x) = dF_{(u_0, v_0)}\alpha'(t_0) = (F \circ \alpha)'(t_0) = c'(t_0) \in T_{(u_0, v_0)}F$. \square

Obsérvese que la condición de F regular en un punto es equivalente a que el plano tangente en ese punto sea realmente un espacio vectorial de dimensión 2.

Dada una superficie $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, una base natural del plano tangente $T_{(u_0, v_0)}F$ asociada a la parametrización F es

$$\left\{ dF_{(u_0, v_0)}(1, 0) = \frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0), \right. \\ \left. dF_{(u_0, v_0)}(0, 1) = \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0) \right\}.$$

Se llama *base canónica del plano tangente a la superficie asociada a la parametrización F* .

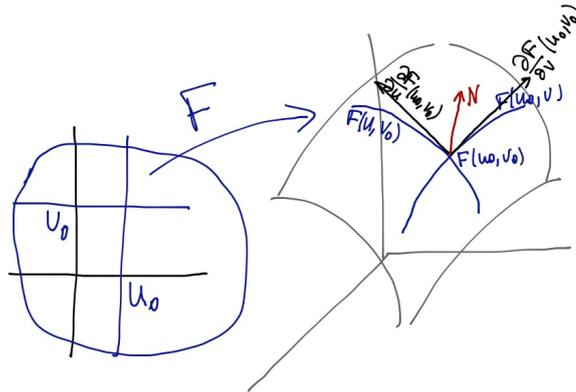
De los comentarios anteriores resulta evidente que la regularidad de F es equivalente a que $\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}$ sean vectores linealmente independientes.

Se tiene también como consecuencia inmediata que

Proposición 5.11 *Las componentes de $X \in T_{(u_0, v_0)}F$ en la base canónica asociada a F coinciden con las componentes del vector $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $dF_{(u_0, v_0)}(x) = X$. Es decir:*

$$dF_{(u_0, v_0)}(x^1, x^2) = x^1 \frac{\partial F}{\partial u} + x^2 \frac{\partial F}{\partial v}$$

Como base que son del plano tangente en cada punto, el producto vectorial $\frac{\partial F}{\partial u} \wedge \frac{\partial F}{\partial v}$ es un campo vectorial sobre F que, en cada punto, es ortogonal al plano tangente. Al vector unitario en esta dirección se le llama *vector unitario normal* a la superficie:

$$N(u, v) = \frac{\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial F}{\partial v}(u, v)}{\left| \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \right|}.$$


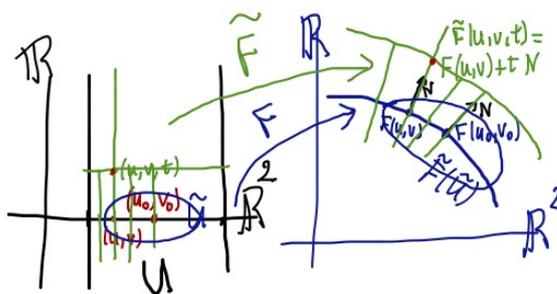
El campo vectorial unitario normal nos ayudará a demostrar formalmente algo que intuitivamente parecía evidente:

Proposición 5.12 *Si $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie regular y (u_0, v_0) es un punto del interior de U , existen un abierto \tilde{U} de \mathbb{R}^3 que contiene a $(u_0, v_0, 0)$ y un abierto \tilde{W}*

de \mathbb{R}^3 que contiene a $F(u_0, v_0)$ y una extensión \tilde{F} de F a \tilde{U} tales que $\tilde{F} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{W}$ es un difeomorfismo.

Como consecuencia inmediata se tiene que $F : \pi(\tilde{U} \cap (U \times \{0\})) \rightarrow \tilde{F}(\tilde{U} \cap (U \times \{0\})) \subset \tilde{W}$ (donde $\pi : U \times \mathbb{R} \rightarrow U$ es la proyección canónica de un producto sobre uno de sus factores) es un homeomorfismo con la topología inducida sobre $\tilde{F}(\tilde{U} \cap (U \times \{0\}))$ (y, por lo tanto, biyectiva).

Demostración



Definimos $\tilde{F}(u, v, t) = F(u, v) + tN(u, v)$. La matriz de $d\tilde{F}$ en el punto (u_0, v_0) es

$$\begin{aligned} dF_{(u_0, v_0)} \\ = \left(\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0) \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0) \quad N(u_0, v_0) \right) \end{aligned}$$

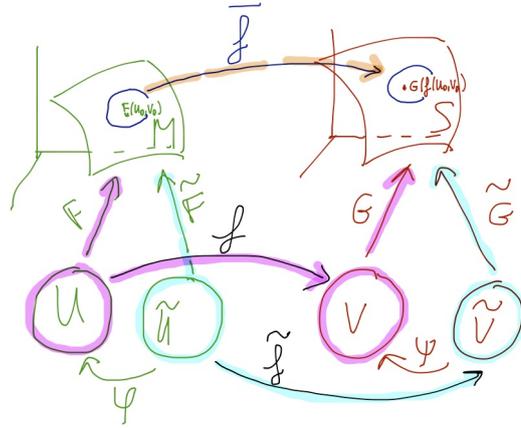
que tiene rango 3 por ser linealmente independientes los vectores $\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0)$, $\frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0)$, $N(u_0, v_0)$. Por el teorema de la función inversa se tienen los abiertos del enunciado de la proposición. \square

5.6. Aplicaciones diferenciables

Definición 5.13 Sean $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $G : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos superficies parametrizadas regulares.

-Una aplicación de clase C^k de la superficie F en \mathbb{R}^n es una aplicación $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^k .

-Una aplicación de clase C^k de la superficie F en la superficie G es una aplicación $f : U \rightarrow V$ de clase C^k .



Cuando las parametrizaciones son biyectivas, una tal aplicación $f : U \rightarrow V$ induce una aplicación entre las imágenes $M = F(U)$ y $S = G(V)$ dada por $\bar{f} : M \rightarrow S$, $\bar{f} = G \circ f \circ F^{-1}$. Por la Proposición 5.12, eso ocurre siempre localmente.

Como ocurría con los campos vectoriales, si las parametrizaciones de M y S cambian, i. e., si $\tilde{F} : \tilde{U} \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ y $\tilde{G} : \tilde{V} \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ definen las mismas superficies que F y G respectivamente, entonces existen $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$ y $\psi : \tilde{V} \rightarrow V$ tales que $\tilde{F} = F \circ \varphi$, diremos que $f : U \rightarrow V$ y $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ definen la misma aplicación entre superficies si $\tilde{f} = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$.

f se llama expresión de la aplicación que representa en la parametrizaciones (o coordenadas) $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $G : V \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Para cada $(a, b) \in U$, la aplicación \bar{f} definida en un entorno A de (a, b) por $\bar{f} = G \circ f \circ F^{-1}$ no depende de las parametrizaciones. En efecto, si $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ define la misma aplicación que f , entonces $\tilde{G} \circ \tilde{f} \circ \tilde{F}^{-1} = G \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ F^{-1} = \bar{f}$

5.6.1. Sobre el concepto de diferencial de una aplicación entre superficies

Tal y como hemos definido una aplicación entre superficies, se trata de una aplicación entre los subconjuntos de \mathbb{R}^2 usados para definir las parametrizaciones, y su diferencial dependería de la parametrización. Para evitar ese problema, podemos tener en cuenta que el concepto de diferencial es puramente local, y que una aplicación entre superficies f define, localmente, una aplicación \bar{f} que no depende de la parametrización usada. Usaremos esa aplicación para definir la diferencial en un punto.

Definición 5.14 Sean $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $G : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos superficies parametrizadas regulares. Sean $f : U \rightarrow V$ una aplicación entre las superficies y $(a, b) \in U$. Sea $\bar{f} : A \subset F(U) \rightarrow \bar{f}(A) \subset G(V)$ la aplicación definida por f en un entorno A de $F(a, b)$. La diferencial de f en $p = F(a, b)$ es la aplicación lineal $d\bar{f}_{(a,b)} : T_{(a,b)}F \rightarrow T_{\bar{f}(a,b)}G$ definida por

$$d\bar{f}_{(a,b)}X = \frac{d(\bar{f} \circ c)}{dt}(t_0) \tag{5.3}$$

para todo $X = c'(t_0)$, $c(t) = F \circ \alpha(t)$, $\alpha : I \rightarrow F^{-1}A \subset U$, $\alpha(t_0) = (a, b)$.

Observación 5.15 - Obsérvese que hemos escrito $d\bar{f}_{(a,b)}$ y no f porque la diferencial no depende de f , sino que es la misma para cualquier aplicación equivalente entre estas superficies, y (a, b) y no $F(a, b)$ porque si F no es biyectiva $F(a, b)$ puede representar una imagen de dos puntos distintos con distinto plano tangente y/o distinta diferencial de la aplicación.

- Esta definición no depende de las parametrizaciones F y G elegidas, pues \bar{f} no depende de la parametrización y , según vimos en la observación 5.8, c tampoco.

Que la aplicación es realmente lineal resulta de la siguiente manera de calcular: puesto que localmente $\bar{f} = G \circ f \circ F^{-1}$ y que $dF_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{(a,b)}F$ y $dG_{f(a,b)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{f(a,b)}G$ son isomorfismos, y que si $X = c'(t_0)$, entonces $dF_{(a,b)} \left(\frac{dF^{-1} \circ c}{dt}(t_0) \right) = X$, tenemos

$$\begin{aligned} d\bar{f}_{(a,b)}X &= \frac{d(\bar{f} \circ c)}{dt}(t_0) \\ &= \frac{d(G \circ f \circ F^{-1} \circ c)}{dt}(t_0) \end{aligned} \quad (5.4)$$

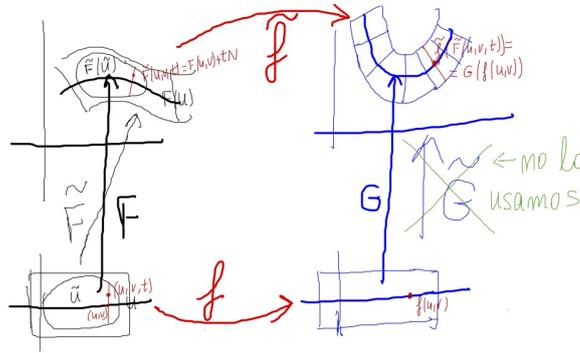
$$\begin{aligned} &= d(G \circ f) \left(\frac{d(F^{-1} \circ c)}{dt}(t_0) \right) \\ &= d(G \circ f)(X^1, X^2) \\ &= d(G \circ f) \circ (dF)^{-1}X \end{aligned} \quad (5.5)$$

5.6.2. Otra manera equivalente de definir la diferencial de una aplicación entre superficies

Este enfoque se basa en usar más a fondo la Proposición 5.12. La idea sigue siendo aprovechar que el concepto de diferencial es un concepto local. Pero ahora usamos que la proposición 5.12 no sólo dice que las parametrizaciones F y G de las superficies son localmente biyectivas, sino que, además, se extienden localmente a aplicaciones definidas sobre abiertos de \mathbb{R}^3 . Usando esas extensiones, podemos usar el concepto de diferencial en \mathbb{R}^3 y restringir luego la diferencial al plano tangente a la superficie. Veamos los detalles de como hacerlo.

Partimos de dos superficies parametrizadas regulares $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $G : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ y de una aplicación $f : U \rightarrow V$ de clase C^k . Dado $(a, b) \in U$, por la Proposición 5.12 existe un abierto $\tilde{U} \subset U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ tal que $(a, b, 0) \in \tilde{U}$, y la aplicación $\tilde{F} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{F}(\tilde{U})$ definida por $\tilde{F}(u, v, t) = F(u, v) + tN(u, v)$ es un difeomorfismo del abierto \tilde{U} sobre su imagen $\tilde{F}(\tilde{U})$, que es otro abierto de \mathbb{R}^3 . Sobre $\tilde{F}(\tilde{U})$ definimos la siguiente extensión de \bar{f} :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{F}(u, v)) &= G(f(u, v)), \\ \text{donde } \tilde{F}(u, v) &= F(u, v) + tN(u, v). \end{aligned}$$



De este modo \tilde{f} es una aplicación definida sobre un abierto de \mathbb{R}^3 , para la que ya tenemos un concepto de diferencial. Definimos entonces

Definición 5.16

$$d\bar{f}_{(a,b)} : T_{(a,b)}F \longrightarrow T_{f(a,b)}G \text{ por} \tag{5.6}$$

$$d\bar{f}_{(a,b)} = d\tilde{f}_{\tilde{F}(a,b,0)}|_{T_{(a,b)}F} \tag{5.7}$$

que, evidentemente, es una aplicación lineal.

Veamos que esta definición coincide con la dada en la subsección anterior mostrando que da lugar a la misma fórmula cuando se usan parametrizaciones. En efecto, observemos primero, de su definición se deduce que $\tilde{f} = G \circ f \circ \pi \circ \tilde{F}^{-1}$, donde $\pi : U \times \mathbb{R} \rightarrow U$ es la proyección canónica de un producto sobre uno de sus factores. Con las mismas notaciones del final de la subsección anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} d\bar{f}_{(a,b)}X &= d\tilde{f}_{\tilde{F}(a,b)}X = \frac{d(\tilde{f} \circ c)}{dt}(t_0) \\ &= \frac{d(G \circ f \circ \pi \circ \tilde{F}^{-1} \circ c)}{dt}(t_0). \end{aligned}$$

Ahora bien, como $c(t) \in \tilde{F}(U \times \{0\} \cap \tilde{U})$, $\tilde{F}^{-1}(c(t)) \in \pi(\tilde{U}) \times \{0\}$ y, por eso, $\pi \circ \tilde{F}^{-1} \circ c(t) = F^{-1} \circ c(t)$, luego

$$\begin{aligned} d\bar{f}_{(a,b)}X &= \frac{d(G \circ f \circ F^{-1} \circ c)}{dt}(t_0) \\ &= d(G \circ f) \left(\frac{d(F^{-1} \circ c)}{dt}(t_0) \right) \end{aligned} \tag{5.8}$$

que es la misma expresión que teníamos en la subsección anterior.

5.6.3. Expresión de la diferencial en coordenadas

Proposición 5.17 Dadas dos superficies parametrizadas regulares $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $G : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ y de una aplicación $f : U \rightarrow V$ de clase C^k , si (X^1, X^2) son

las componentes de $X \in T_{(a,b)}F$ en la base canónica asociada a F , las componentes (Y^1, Y^2) de $d\bar{f}_{(a,b)}X$ en la base canónica asociada a G son

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial u} & \frac{\partial f^1}{\partial v} \\ \frac{\partial f^2}{\partial u} & \frac{\partial f^2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Es decir, la matriz de $d\bar{f}_{(a,b)}$ respecto de esas bases coincide con la matriz de $df_{(a,b)}$.

Demostración Por la fórmula (5.8) se tiene que, si $c(t) = F(\alpha(t))$, como $c'(t) = df(\alpha'(t))$,

$$\begin{aligned} d\bar{f}_{(a,b)}X &= dG \circ df \left(\frac{d(F^{-1} \circ c)}{dt}(t_0) \right) \\ &= dG \circ df(\alpha'(t_0)). \end{aligned} \quad (5.10)$$

De donde sale la expresión (5.5) si se tiene en cuenta que $\alpha'(t_0) = (X^1, X^2)$ y que dG lleva (Y^1, Y^2) en $Y^1 \frac{\partial F}{\partial u} + Y^2 \frac{\partial F}{\partial v}$. \square

Corolario de la demostración: Si $(a, b) = c(t_0)$, $X = c'(t_0)$, entonces

$$d\bar{f}_{(a,b)}X = \frac{d(\bar{f} \circ c)}{dt}(t_0).$$

En efecto:

$$\begin{aligned} d\bar{f}_{(a,b)}X &= dG \circ df \left(\frac{d(F^{-1} \circ c)}{dt}(t_0) \right) \\ &= \frac{d(G \circ f \circ F^{-1} \circ c)}{dt}(t_0) \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$= \frac{d(\bar{f} \circ c)}{dt}(t_0). \quad (5.12)$$

5.7. Primera forma fundamental

A partir de ahora, con frecuencia denotaremos por u los elementos de $U \subset \mathbb{R}^2$, y sus dos coordenadas por u^1 y u^2 , es decir, $u = (u^1, u^2) \in U$.

Definición 5.18 Dada una superficie $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, la primera forma fundamental I de la superficie es la restricción del procluro escalar de \mathbb{R}^3 a los planos tangentes $T_u F$, para todo $u \in U$, i.e., para $X, Y \in T_u F$, $I(X, Y) = \langle X, Y \rangle$. Resulta así que I es una forma bilineal simétrica definida positiva (es decir, una métrica o producto escalar) sobre cada $T_u F$. Cuando sea conveniente resaltar el punto u de la superficie sobre cuyo plano tangente actúa I , usaremos la notación I_u .

Si en cada $T_u F$ usamos su base canónica, la matriz de I_u en esa base es $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$, donde $g_{ij} = \langle \frac{\partial F}{\partial u^i}, \frac{\partial F}{\partial u^j} \rangle$, $1 \leq i, j \leq 2$.

Si usamos esta terminología-notación, para calcular la **longitud de una curva** $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ sobre la superficie $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $c(t) = (u^1(t), u^2(t))$, podemos escribir:

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{I(c'(t), c'(t))} dt \quad (5.13)$$

$$= \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} u^i u^j} dt \quad (5.14)$$

Naturalmente, también puede usarse la matriz de I para obtener el parámetro longitud de arco y una curva sobre la superficie, y para calcular el ángulo que forman dos vectores tangentes a la superficie en un mismo punto.

Ejercicios: Obtener la expresión de la matriz de la primera forma fundamental para las parametrizaciones naturales de: (a) las superficies que son gráficas de funciones, (b) las superficies de revolución, (c) las superficies regladas, (d) las superficies tubulares.

La matriz de la primera forma fundamental cambia, cuando se cambia la parametrización de la superficie, como lo hace, en general, la matriz de un producto escalar cuando se cambia de base. Con detalle:

Proposición 5.19 Si F y $\tilde{F} = F \circ \varphi$ son dos parametrizaciones de la misma superficie, g_{ij} son los coeficientes de la primera forma fundamental en la parametrización F y \tilde{g}_{ij} los correspondientes coeficientes en la parametrización \tilde{F} , se tiene que sus matrices están relacionadas por la fórmula

$$(\tilde{g}_{ij}) = (d\varphi)^T (g_{ij}) (d\varphi) \quad (5.15)$$

Demostración La definición de los g_{ij} se puede escribir, en forma matricial, como:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \cdot (F_1 \quad F_2) \quad (5.16)$$

$$= (dF)^T \cdot (dF), \quad (5.17)$$

donde el \cdot entre las matrices indica que sus elementos se han de multiplicar usando el producto escalar. Usando esta escritura para la parametrización \tilde{F} , tenemos:

$$(\tilde{g}_{ij}) = (d\tilde{F})^T \cdot (d\tilde{F}) \quad (5.18)$$

$$= (d(F \circ \varphi))^T \cdot (d(F \circ \varphi)) \quad (5.19)$$

$$= (d\varphi)^T (d(F))^T \cdot d(F)(d\varphi) \quad (5.20)$$

$$= (d\varphi)^T (g_{ij}) (d\varphi), \quad (5.21)$$

que es la fórmula que buscábamos. \square

Un producto escalar definido sobre un plano vectorial induce una definición de área para regiones de ese plano, porque el producto escalar permite definir los elementos básicos que entran en la definición de área: los rectángulos. De modo análogo, la primera forma fundamental permite definir una noción de área para regiones de una superficie. Daremos una definición y luego la justificaremos intuitivamente. Para una noción más rigurosa poniendo el área en el contexto de la teoría de la medida, veanse, por ejemplo, el libro de Montiel-Ros.

Definición 5.20 Sea $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada, $R \subset U$. Se llama *área (con multiplicidad) de la región $F(R)$ de la superficie F* al número real positivo

$$\int_R |F_1 \wedge F_2| du^1 du^2 = \int_R \sqrt{g} du^1 du^2, \quad (5.22)$$

donde $F_1 := \frac{\partial F}{\partial u^1}$, $F_2 := \frac{\partial F}{\partial u^2}$, $g := \det(g_{ij})$.

Esta definición coincide con el área de $F(R)$ cuando F es inyectiva. Cuando no lo es, e, área de R es la de $F(R)$ contando con la multiplicidad (las zonas de $F(R)$ recorridas varias veces por F suman área cada vez que se recorren).

Demostración de que $|F_1 \wedge F_2| = \sqrt{g}$.

$$\begin{aligned} |F_1 \wedge F_2| &= |F_1| |F_2| \operatorname{sen} \theta \\ &= \sqrt{|F_1|^2 |F_2|^2 (1 - \cos^2 \theta)} \\ &= \sqrt{|F_1|^2 |F_2|^2 - |F_1|^2 |F_2|^2 \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{|F_1|^2 |F_2|^2 - \langle F_1, F_2 \rangle^2} = \sqrt{g}. \end{aligned}$$

Nota 5.21 La definición no depende de la parametrización: Si $G : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ es otra parametrización definiendo la misma superficie y $\varphi : V \rightarrow U$ es el difeomorfismo que da la equivalencia, el área (con multiplicidad) de $F(R)$ es la misma calculada con ambas parametrizaciones.

Demostración Por la fórmula (3.2), si (\tilde{g}_{ij}) es la matriz de la primera forma fundamental de la superficie en la parametrización G , se tiene: $\tilde{g} = \det(\tilde{g}_{ij}) = \det((d\varphi)^T (g_{ij}) (d\varphi)) = \det(d\varphi)^2 g$. Por lo tanto, aplicando la fórmula del cambio de variable para la integral,

$$\int_R \sqrt{g} du^1 du^2 = \int_{\varphi^{-1}(R)} \sqrt{g} |\det d\varphi| d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2 \quad (5.23)$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(R)} \sqrt{g(\det d\varphi)^2} d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2 \quad (5.24)$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(R)} \sqrt{\tilde{g}} d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2, \quad (5.25)$$

que es la expresión del área de $F(R) = F \circ \varphi(\varphi^{-1}(R)) = G(\varphi^{-1}(R))$ en la parametrización G . \square

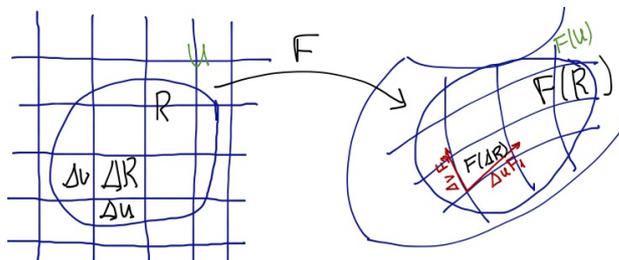
Justificación intuitiva de la definición de área. Sea ΔR un pequeño rectángulo contenido en U de lados $\Delta u, \Delta v$. $F(\Delta R)$ es una región de $F(U)$ cuyo borde está constituido por cuatro curvas coordenadas.

El segmento de recta de $F(u, v)$ a $F(u, v) + \Delta u F_1$ es una aproximación lineal del segmento de curva coordenada entre $F(u, v)$ y $F(u + \Delta u, v)$ (en efecto:, empleando el desarrollo de Taylor, $F(u + \Delta u, v) = F(u, v) + \Delta u F_1 + O(\Delta u)$), Además, la longitud de la curva $c(t) = F(u+t, v)$ entre $t = 0$ y $t = \Delta u$ viene aproximada, tomando el desarrollo de Taylor de g_{11} , por $s(\Delta u) = \int_0^{\Delta u} \sqrt{g_{11}} du = \sqrt{g_{11}(u)} \Delta u + O(\Delta u) = |\Delta u F_1| + O(\Delta u)$.

Análogamente se aproxima el segmento de curva coordenada entre $F(u, v)$ y $F(u, v + \Delta v)$ por el segmento de recta entre $F(u, v)$ a $F(u, v) + \Delta v F_2$.

Parece natural también que el área de la región $F(\Delta R)$ quede aproximada por el paralelogramo de TuF con un vértice en $F(u)$ y lados determinados por los segmentos de recta anteriores. Pero el área de un tal paralelogramo viene dada por $|(\Delta u F_1) \wedge (\Delta v F_2)| = \Delta u \Delta v \sqrt{g}$.

El área de la superficie vendrá aproximada por el límite de las áreas de estos paralelogramos cuando $\Delta u, \Delta v \rightarrow 0$, lo que corresponde intuitivamente a la definición (5.26).



Integral de una función. La definición anterior lleva implícita la siguiente definición:

Definición 5.22 Sea $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada, $R \subset U$. Se llama integral de una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre la superficie a

$$\int_R f |F_1 \wedge F_2| du^1 du^2 = \int_R f \sqrt{g} du^1 du^2. \quad (5.26)$$

Como en el caso del área, se comprueba que si $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ es la función f correspondiente a otra parametrización $G : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ (es decir, $h = f \circ \varphi$), entonces $\int_R f \sqrt{g} du^1 du^2 = \int_{\varphi^{-1}(R)} h \sqrt{\tilde{g}} d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2$.

Capítulo 6

Las curvaturas de una superficie

6.1. Las aplicaciones de Gauss y Weingarten

Después de haber estudiado el concepto de superficie parametrizada en el capítulo anterior, vamos a comenzar ahora con la geometría local de superficies. Así como en el estudio de curvas la idea era encontrar unos invariantes geométricos (curvatura y torsión) cuyo valor nos diera una idea aproximada (en realidad exacta gracias al teorema de existencia y unicidad de curvas con curvatura y torsión dada) de la forma de la curva, aquí vamos también a buscar invariantes geométricos de la superficie cuyo valor nos dé una idea de la forma de la superficie.

El primer invariante geométrico de una curva, la curvatura, se obtenía viendo la variación del vector unitario tangente a una curva, porque esta variación es un modo de medir lo que la curva se separa de ser una recta.

Del mismo modo que una recta se caracteriza por tener vector unitario tangente constante, un plano se caracteriza por tener vector normal unitario constante. Por lo tanto, la variación del vector normal unitario nos dará una idea de lo que la superficie se aparta de ser plana. Esa variación dará lugar a la aplicación de Weingarten. Se trata de una aplicación lineal, y sus invariantes algebraicos son las distintas funciones curvatura (o curvaturas) que se definen en una superficie.

Definición 6.1 *Dada una superficie $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, se llama aplicación de Gauss de la superficie a la aplicación definida por el vector unitario normal a la superficie $N : U \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$, considerando $N(u)$ con origen en $0 \in \mathbb{R}^3$ y, por lo tanto, contenido en la esfera unidad centrada en el origen.*

Definición 6.2 *Dada una superficie $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, La aplicación lineal $L_u = -d\bar{N}_u : T_u F \rightarrow T_u F$ se llama aplicación de Weingarten u operador forma de la superficie en u .*

La definición anterior requiere una comprobación antes de ser considerada como una buena definición. De acuerdo con la definición de diferencial, $d\bar{N}_u$ es una aplicaciónn definida de $T_u F$ en \mathbb{R}^3 . Lo que hemos escrito antes requiere, pues, comprobar que

$d\bar{N}_u(T_u F) \subset T_u F$, lo que es equivalente a comprobar que $d\bar{N}_u(X)$ es ortogonal a $N(u)$ para todo $u \in U$. Pero esto sale de calcular: si $X = c'(t)$, $c = F \circ \alpha$, $\langle d\bar{N}_u(X), N \rangle = \left\langle \frac{d(\bar{N} \circ c)}{dt}(t), N \right\rangle = \left\langle \frac{d(N \circ \alpha)}{dt}(t), N \right\rangle = 0$, porque la derivada de un campo vectorial unitario es siempre ortogonal al campo vectorial unitario. Luego la definición dada tiene sentido.

Observación 6.3 *La aplicación de Weingarten depende de la dirección de N , por lo tanto depende de la orientación definida por la base canónica asociada a la parametrización F usada para definir N .*

Proposición 6.4 $L_u : T_u F \rightarrow T_u F$ es una aplicación lineal autoadjunta.

Demostración Solo falta probar que es autoadjunta. Para los vectores de la base canónica F_1, F_2 asociada a la parametrización, se tiene,

$$\begin{aligned} \langle L_u F_i, F_j \rangle &= \left\langle -\frac{\partial N}{\partial u^i}, \frac{\partial F}{\partial u^j} \right\rangle \\ &= -\frac{\partial}{\partial u^i} \left\langle N, \frac{\partial F}{\partial u^j} \right\rangle + \left\langle N, \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j} \right\rangle \\ &= \left\langle N, \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j} \right\rangle = \left\langle N, \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i} \right\rangle \\ &= \left\langle -\frac{\partial N}{\partial u^j}, \frac{\partial F}{\partial u^i} \right\rangle = \langle L_u F_j, F_i \rangle. \end{aligned}$$

y, de aquí se deduce que esta propiedad es cierta para cualesquiera vectores tangentes X e Y . \square

Esta propiedad permite dar la siguiente definición

Definición 6.5 *Se llama segunda forma fundamental Π de una superficie a la forma bilineal simétrica asociada a la aplicación de Weingarten*

$$\Pi_u(X, Y) = \langle L_u X, Y \rangle.$$

Como consecuencia de la demostración de la proposición 6.4 se tiene que la matriz de la segunda forma fundamental Π tiene por componentes, en la base canónica asociada a una parametrización de la superficie:

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \Pi(F_i, F_j) = \langle L F_i, F_j \rangle \\ &= \left\langle -\frac{\partial N}{\partial u^i}, \frac{\partial F}{\partial u^j} \right\rangle = \left\langle N, \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i} \right\rangle \end{aligned} \quad (6.1)$$

Además, calculando para cualesquiera vectores $X = \sum X^i F_i$, $Y = \sum X^j F_j$, usando que Π es bilineal simétrica

$$\begin{aligned} \Pi(X, Y) &= \sum X^i Y^j h_{ij} \\ &= \sum X^i Y^j \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}, N \right\rangle \\ &= \left\langle \sum X^i Y^j \frac{\partial F}{\partial u^j \partial u^i}, N \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \sum X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} \frac{\partial F}{\partial u^j}, N \right\rangle \\ &= \langle D_X D_Y F, N \rangle \end{aligned}$$

Por otro lado, si L_i^j son las componentes de la matriz de L respecto de la base canónica, estas están relacionadas con las componentes de la matriz de Π como lo están las de una aplicación lineal autoadjunta y las de su forma bilineal asociada. Vamos a recordar esa relación porque es muy sencilla de demostrar. Usaremos el convenio de suma de Einstein:

$$h_{ij} = \Pi(F_i, F_j) = \langle L F_i, F_j \rangle \quad (6.2)$$

$$= \left\langle L_i^k F_k, F_j \right\rangle = L_i^k g_{kj} \quad (6.3)$$

y, si queremos obtener L_i^k en función de h_{ij} , solo tenemos que multiplicar en la expresión anterior por la matriz inversa de (g_{ij}) , que denotaremos por (g^{jk}) .

L y Π de algunas superficies

-La esfera. En la esfera de radio R centrada en el origen, $\bar{N}(p) = p/R$. De modo que $L_p X = -d\bar{N}(p)(X) = -\frac{d\bar{N} \circ c}{dt}(t_0) = -\frac{1}{R} \frac{dc}{dt}(t_0) = -\frac{1}{R} X$. Es decir:

$$L = -\frac{1}{R} Id \quad (6.4)$$

-Superficies definidas implícitamente. Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación, $d \in \mathbb{R}$ y verifica $\text{grad} f(p) \neq 0$ para todo $p \in f^{-1}(d) =: S$, por el teorema de la función implícita se tiene que para cada $p = (a, b, c) \in S$, existe un abierto de un plano coordenada que contiene a la proyección de (a, b, c) sobre ese plano y una función definida sobre ese abierto cuya gráfica está contenida en S , por lo que S es una unión de superficies parametrizadas. Para cada una de ellas se tiene que

$$N(p) = \frac{\text{grad} f}{|\text{grad} f|}$$

Para la aplicación de Weingarten tenemos (usando la notación $D_X f$ para la derivada

direccional de f en la dirección de X , y $\nabla f := \text{grad}f$):

$$\begin{aligned} L_p X &= -d\left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right)X = -D_X\left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right) \\ &= -D_X\left(\frac{1}{|\nabla f|}\right)\nabla f - \frac{1}{|\nabla f|}D_X\nabla f \end{aligned}$$

Y para la segunda forma fundamental, de la expresión anterior, usando que $\langle \nabla f, Y \rangle = 0$ para todo Y tangente a la superficie:

$$\begin{aligned} \Pi_p(X, Y) &= \langle L_p X, Y \rangle = -\frac{1}{|\nabla f|} \langle D_X \nabla f, Y \rangle \\ &= -\frac{1}{|\nabla f|} \left\langle D_X \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3} \right), Y \right\rangle \\ &= -\frac{1}{|\nabla f|} \left\langle \left(D_X \frac{\partial f}{\partial x^1}, D_X \frac{\partial f}{\partial x^2}, D_X \frac{\partial f}{\partial x^3} \right), Y \right\rangle \\ &= -\frac{1}{|\nabla f|} \left\langle \left(\sum_{i=1}^3 X^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^1}, \sum_{j=1}^3 X^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^2}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sum_{k=1}^3 X^k \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^3} \right), Y \right\rangle \\ &= -\frac{1}{|\nabla f|} \sum_{i,j=1}^3 X^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} Y^j. \end{aligned}$$

-Ejercicios Obtener expresiones para la aplicación de Weingarten y para la segunda forma fundamental de:

- Una superficie dada por la gráfica de una función
- Una superficie de revolución
- Una superficie reglada
- Una superficie tubular

Proposición 6.6 *La aplicación de Weingarten y la segunda forma fundamental de una superficie son invariantes por isometrías de \mathbb{R}^3 que conservan la orientación*

Demostración Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una isometría que conserva la orientación, entonces $f = T \circ R$, donde T es una traslación y R una rotación, y $df(p) = R$ para todo $p \in \mathbb{R}^3$.

Si $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie y $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es su vector unitario normal, entonces $df(F(u))N(u) = RN(u)$ define el campo vectorial unitario $RN : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ asociado a la parametrización $f \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la superficie imagen de F por la

isometría f , puesto que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f \circ F}{\partial u^1} \wedge \frac{\partial f \circ F}{\partial u^2} \\ &= df \left(\frac{\partial f \circ F}{\partial u^1} \right) \wedge df \left(\frac{\partial f \circ F}{\partial u^2} \right) \\ &= R \left(\frac{\partial f \circ F}{\partial u^1} \right) \wedge R \left(\frac{\partial f \circ F}{\partial u^2} \right) \\ &= R \left(\frac{\partial(f \circ F)}{\partial u^1} \wedge \frac{\partial(f \circ F)}{\partial u^2} \right), \end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de que 1) el producto escalar de dos vectores es el vector ortogonal al plano generados por esos dos vectores, en la dirección que convierte a los tres vectores en una base positivamente orientada, con módulo igual al producto de módulos multiplicado por el seno del ángulo que forman, y 2) una rotación conserva la orientación, el producto escalar y (por lo tanto) el ángulo.

De esta propiedad para N se deduce para L que, si L^f es la aplicación de Weingarten asociada a la superficie imagen $f \circ F$, entonces $L^f df(p)(X) = df(p)(LX)$. \square

6.2. Curvatura normal y curvaturas principales

La aplicación de Weingarten y su versión como forma bilineal simétrica, la segunda forma fundamental, se han introducido como unos operadores que desempeñan en la teoría de superficies un papel análogo al de la curvatura para una curva del plano.

Pero una aplicación lineal o una forma bilineal son difíciles de entender en sí mismos. Si lo que esperamos es que nos den una medida de lo que la superficie se desvía de ser un plano, nos resulta más cómodo pensar que la medida viene dada por un número y una aplicación. Como en álgebra a una forma bilineal o a un endomorfismo se le asocian varios números (invariantes algebraicos), vamos a estudiar esos números y a tratar de entender lo que significan como curvaturas.

La primera curvatura-número que vamos a introducir asociada a la segunda forma fundamental es la

Definición 6.7 Dado $X \in T_u F$, se llama curvatura normal en la dirección de X al número $k_N(X) := \Pi_u(X, X)/I_u(X, X)$.

La siguiente fórmula da una interpretación geométrica de la curvatura normal: sea c una curva parametrizada proporcionalmente a la longitud de arco con $c'(t_o) = X/|X|$

$$\begin{aligned} k_N(X) &= \Pi \left(\frac{X}{|X|}, \frac{X}{|X|} \right) = \left\langle D_{\frac{X}{|X|}} \frac{X}{|X|}, \bar{N} \right\rangle \\ &= \langle c'', \bar{N} \rangle = \kappa \langle e_2, \bar{N} \rangle \quad \text{i.e.} \end{aligned} \tag{6.5}$$

Proposición 6.8 *la curvatura normal en la dirección de X es la componente normal de la curvatura de una curva c sobre la superficie que es tangente al vector X .*

Como consecuencia, se tiene:

Corolario 6.9 1. *La curvatura normal de una superficie en un punto $p = F(u)$ en la dirección de un vector $X \in T_u F$ es la curvatura de la curva intersección de la superficie con el plano normal a la misma que pasa por p y está generado por los vectores X y N .*

2. *La curvatura κ de una curva plana intersección de la superficie con un plano que pasa por p , contiene al vector X y forma un ángulo α con el plano tangente, está relacionada con la curvatura normal de la superficie en la dirección de X por la fórmula $\kappa \cos \theta = k_N(X)$.*

Esta última es la llamada fórmula de Meusnier.

A partir de la curvatura normal vamos a definir, de un modo geométrico, otras curvaturas. Para una de ellas conviene introducir un concepto, ligado a la definición de longitud de una curva que dimos en el capítulo 1: Dada una curva $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ y una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, llamaremos *integral de f a lo largo de c* a la integral: $\int_c f := \int_I f(c(t))|c'(t)|dt$.

En particular, si tenemos una circunferencia de radio uno S^1 centrada en el origen de un plano con una base ortonormal ζ, η , la curva S^1 se puede parametrizar por $c(\theta) = \cos \theta \zeta + \sin \theta \eta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, de modo que $\int_{S^1} f := \int_0^{2\pi} f(\cos \theta \zeta + \sin \theta \eta) d\theta$.

Observemos también que, de la definición de k_N se deduce que $k_N(X)$ depende solo de la dirección de X y no de su módulo ni de su signo (es decir, $k_N(X) = k_N\left(\pm \frac{X}{|X|}\right)$).

Por ello, para cada punto p de la superficie, se puede considerar k_N restringida a S^1 (la circunferencia unidad en el plano tangente a la superficie en p). Como k_N es continua (por ser una forma cuadrática), su restricción a S^1 sigue siendo continua y, como S^1 es un compacto, k_N tiene al menos un máximo y un mínimo en S^1 .

Definición 6.10 ■ *Se llama curvaturas principales (k_1 y k_2) de una superficie en un punto a los valores máximo y mínimo de la curvatura normal en ese punto de la superficie. En este capítulo las ordenaremos de modo que $k_1 \geq k_2$.*

- *Se llama dirección principal a toda dirección en la que la curvatura normal toma uno de sus valores máximo (k_1) o mínimo (k_2).*
- *Se llama curvatura media H al valor medio de los valores de la curvatura normal, es decir, a*

$$\begin{aligned} H &:= \frac{1}{\text{Long}(S^1)} \int_{S^1} k_N \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_N(\cos \theta \zeta + \sin \theta \eta) d\theta \end{aligned}$$

La tercera definición de curvatura está ligada al área de la imagen de la aplicación de Gauss. Como la aplicación de Gauss está ligada con la aplicación de Weingarten, veremos después que, por esa razón, esta curvatura también está relacionada con la curvatura normal.

Definición 6.11 *Llamaremos curvatura de Gauss de una superficie en un punto $p = F(u)$ al cociente de los elementos de área de la aplicación de Gauss en u por elemento de área de la superficie en u , es decir: $K(F(u)) := \frac{\sqrt{\det(\langle N_i, N_j \rangle)}}{\sqrt{g}}$.*

Las curvaturas que acabamos de definir coinciden con los invariantes algebraicos de la aplicación de Weingarten que se describen en la siguiente proposición y que se toman en muchas ocasiones como definición de las curvaturas anteriores.

Proposición 6.12 *Sean I la primera forma fundamental, L la aplicación de Weingarten de una superficie en un punto $p = F(u)$ y II la segunda forma fundamental en el mismo punto. Se tiene:*

- *Las curvaturas principales son los vectores propios de L .*
- *Las direcciones principales son las de los vectores propios de L*
- *La curvatura media verifica*

$$H = \frac{1}{2} \text{tr} L = \frac{1}{2} (k_1 + k_2).$$

- *La curvatura de Gauss verifica*

$$K = \det L = k_1 k_2 = \frac{\det \text{II}}{\det I}.$$

Demostración Por ser $L : T_u F \rightarrow T_u F$ una aplicación lineal autoadjunta, $T_u F$ tiene una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de vectores propios de L que corresponden a valores propios λ_1, λ_2 respectivamente, es decir, $Le_1 = \lambda_1 e_1, Le_2 = \lambda_2 e_2$. Si ordenamos la base de modo que $\lambda_1 \geq \lambda_2$, dado un vector unitario $X \in T_u F$, se puede escribir de la forma $X = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$, por lo que

$$\begin{aligned} k_N(X) &= \langle L(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2), \\ &\quad \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \rangle \\ &= \lambda_1 \cos^2(\theta) + \lambda_2 \sin^2(\theta). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Como estamos suponiendo $\lambda_1 \geq \lambda_2$, podemos escribir $\lambda_1 = \lambda_2 + a$ con $a \geq 0$, de modo que

$$k_N(X) = k_2 + a \cos^2(\theta),$$

de donde se deduce que el valor máximo de $k_N(X)$ es λ_1 se alcanza para $\theta = 0$ y $X = e_1$ y el mínimo es λ_2 y se alcanza para $\theta = \pi/2$ y $X = e_2$. Resulta, por lo tanto, que $\lambda_i = k_i$, $1 \leq i \leq 2$, y que los vectores propios e_i dan las direcciones principales.

Probemos ahora la afirmación para H . Usando las mismas notaciones que antes,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_N(\cos \theta e_1 + \sen \theta e_2) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (k_1 \cos^2(\theta) + k_2 \sen^2(\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ((k_1 - k_2) \cos^2(\theta) + k_2) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} ((k_1 - k_2)\pi + k_2 2\pi) \\ &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2} \text{tr} L, \end{aligned}$$

donde la última igualdad proviene de las definiciones de traza y de valores propios de una aplicación lineal.

Vamos ahora con la expresión de K . Partiendo de la definición 6.11, lo primero que vamos a hacer es obtener una expresión para el numerador en la que aparezca la segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned} \det(\langle N_i, N_j \rangle) &= \det(\langle -dN(F_i), -dN(F_j) \rangle) \\ &= \det(\langle L(F_i), L(F_j) \rangle) \\ &= \det\left(\left\langle \sum_k L_i^k F_k, \sum_\ell L_j^\ell F_\ell \right\rangle\right) \\ &= \det\left(\sum_{k,\ell} L_i^k g_{k\ell} L_j^\ell\right) \\ &= \det\left(\left(L_i^k\right) (g_{k\ell}) \left(L_j^\ell\right)\right) \\ &= (\det L)^2 g : \end{aligned} \tag{6.7}$$

Susutituyendo esto en la expresión de K dada en la definición 6.11,

$$K = \frac{\sqrt{(\det L)^2 g}}{\sqrt{g}} = \det L = k_1 k_2. \tag{6.8}$$

Y la última igualdad del enunciado del teorema se demuestra a partir de la relación entre las componentes de L y de II , así $\det \text{II} = \det(h_{ij}) = \det\left(\sum_k g_{ik} L_j^k\right) = \det(g_{ik}) \det(L_i^k) = \det I \det L$. \square

6.3. Líneas de curvatura, curvas asintóticas y fórmulas para el cálculo

Definición 6.13 Si $c(t)$ es una curva sobre una superficie $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, llamaremos curvatura normal de la curva en un punto a la curvatura normal de la superficie en la dirección de un vector tangente a la curva en ese punto.

Definición 6.14 Llamaremos línea de curvatura de una superficie a una curva cuya recta tangente en cada punto es una dirección principal de la superficie en ese punto. Se tiene por tanto que la curvatura normal de una línea de curvatura es una curvatura principal.

Definición 6.15 Se llama dirección asintótica de un punto de una superficie a una dirección con curvatura normal cero.

Definición 6.16 Se llama línea asintótica de una superficie a una curva cuyas rectas tangente son todas direcciones asintóticas. Por tanto la curvatura normal de una línea asintótica es nula.

Vamos deducir algunas fórmulas que nos permitan encontrar direcciones asintóticas y direcciones principales.

Según acabamos de definir, un vector tangente X es una dirección asintótica sii $\Pi(X, X) = 0$, i.e., sii

$$\sum_{ij} h_{ij} X^i X^j = 0.$$

Luego bastará resolver esta ecuación de segundo grado para encontrar direcciones asintóticas. Si $c(t) = F(u^i(t), u^j(t))$ es una curva asintótica, deberán verificar la ecuación anterior sus componentes. Es decir las curvas asintóticas serán las soluciones de la ecuación diferencial

$$\sum_{ij} h_{ij} (u^i)' (u^j)' = 0, \quad u^i(0) = u_0^i$$

Por otro lado, un vector tangente X es una dirección principal sii $LX = kX$ para algún número real k . Escribiendo esta ecuación para cada componente, tenemos $\sum_j L_j^i X^j = kX^i$ o, lo que es lo mismo, teniendo en cuenta la relación entre las componentes de L y de Π , $\sum_{j,k} g^{ik} h_{kj} X^j = kX^i$ y, multiplicando por la matriz de I , $\sum_j h_{\ell j} X^j = k \sum_i g_{\ell i} X^i$ para $\ell = 1, 2$, por lo tanto

$$\frac{\sum_j h_{1j} X^j}{\sum_i g_{1i} X^i} = k = \frac{\sum_j h_{2j} X^j}{\sum_i g_{2i} X^i},$$

por lo tanto una dirección principal ha de ser solución de

$$\begin{aligned} \left(\sum_j h_{1j} X^j \right) \left(\sum_i g_{2i} X^i \right) \\ = \left(\sum_i g_{1i} X^i \right) \left(\sum_j h_{2j} X^j \right), \end{aligned}$$

que, desarrollando, se comprueba que es la misma ecuación que

$$\det \begin{pmatrix} (X^2)^2 & -X^1 X^2 & (X^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} = 0 \quad (6.9)$$

Por tanto, la ecuación diferencial para las líneas de curvatura es la ecuación (6.9) cambiando X^i por $(u^i)'$.

Vamos a acabar esta sección dando fórmulas para las curvaturas principales y la curvatura media. En primer lugar, puesto que $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ y $K = k_1 k_2$, despejando k_1 y k_2 de estas ecuaciones, tenemos:

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}, \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K} \quad (6.10)$$

Por otro lado, para la curvatura media tenemos:

$$H = \frac{1}{2} \text{tr} L = \frac{1}{2} \sum_i L_i^i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g^{ij} h_{ij},$$

pero las componentes de la matriz inversa (g^{ij}) de (g_{ij}) son

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = -\frac{g_{12}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g},$$

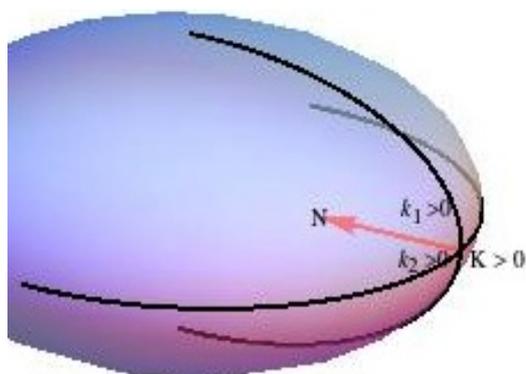
que, al sustituir las en la expresión anterior para H , dan

$$H = \frac{1}{2} \frac{h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11}}{g}. \quad (6.11)$$

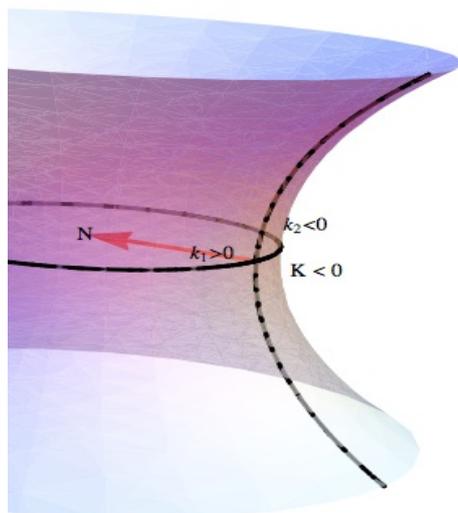
6.4. Clasificación de los puntos de una superficie

Atendiendo a los posibles signos de las curvaturas principales, los puntos de una superficie se clasifican en:

Puntos elípticos: Las dos curvaturas principales son no nulas y con el mismo signo. Equivalentemente, $K = k_1 k_2 > 0$ (i.e. $\det II > 0$).

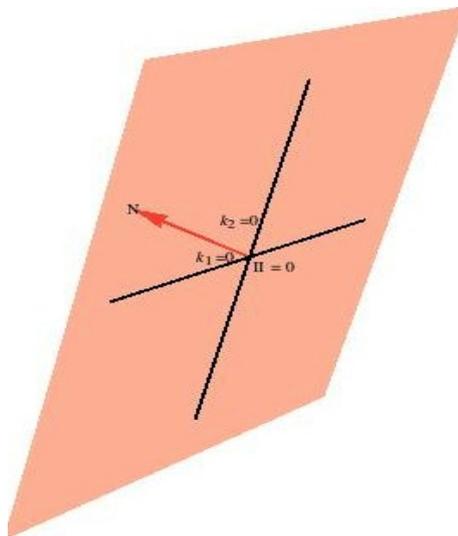


Puntos hiperbólicos: Las dos curvaturas principales son no nulas y de signo opuesto. Equivalentemente, $K = k_1 k_2 < 0$ (i.e. $\det II < 0$).



Puntos parabólicos: Una de las curvaturas principales es nula y la otra no. Equivalentemente, $K = k_1 k_2 = 0$ (i.e. $\det II = 0$), pero $II \neq 0$.

Puntos llanos o planos: Las dos curvaturas principales se anulan, o, lo que es lo mismo, $II = 0$.



Puntos umbilicales Las dos curvaturas principales son iguales, $k_1 = k_2$, o, equivalentemente, $\text{II} = kI$.

Proposición 6.17 *Atendiendo al número de direcciones asintóticas, se tiene que un punto de una superficie es: a) elíptico si no tiene ninguna dirección asintótica, b) parabólico si tiene una dirección asintótica, c) hiperbólico si tiene dos direcciones asintóticas y d) llano si toda dirección de su plano tangente es asintótica.*

Demostración Si e_1, e_2 es una base ortonormal del plano tangente formada por vectores propios de la aplicación de Weingarten, $Le_i = k_i e_i$, la fórmula de Euler (6.6) dice que si $X = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$, entonces la curvatura normal en la dirección de X es $k_N(\theta) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$, y esta curvatura normal se anula, por tanto, si y solo si $0 = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta = k_1 \cos^2 \theta - k_2 \cos^2 \theta + k_2 = (k_1 - k_2) \cos^2 \theta + k_2$. Es decir, cuando $k_1 \neq k_2$, X es una dirección asintótica si $\cos^2 \theta = -\frac{k_2}{k_1 - k_2}$, lo que es imposible si se trata de un punto elíptico, tiene una solución $\theta = \pi/2$ (i.e. $X = e_s$) si se trata de un punto parabólico, y tiene dos soluciones si se trata de un punto hiperbólico (pues en ese caso $0 < -\frac{k_2}{k_1 - k_2} < 1$). Por otro lado, es evidente que si $k_1 = k_2 \neq 0$ (punto umbilical no llano), no existen direcciones asintóticas, y si $k_1 = k_2 = 0$ (punto llano), toda dirección es asintótica. \square

Vamos ahora a dar una justificación (la razón histórica) del por qué de los nombres de los puntos de una superficie. Necesitamos el siguiente lema que tiene gran interés por sí mismo:

Lema 6.18 *Dada una superficie parametrizada $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $u_0 \in U$, existen abierto $U_0 \ni u_0$, y $V \ni 0$ de \mathbb{R}^2 , un difeomorfismo $\varphi : V \rightarrow U_0$, una afinidad $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y una aplicación $r : V \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $G = \psi \circ F \circ \varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ tiene la forma $\psi \circ F \circ \varphi(v) = (v, r(v))$.*

Demostración Elijamos una base $\{w_1, w_2\}$ de $T_{u_0}F$. Todo punto p de \mathbb{R}^3 define unívocamente tres coordenadas (p^1, p^2, p^3) por la expresión $p - F(u_0) = p^1 w_1 + p^2 w_2 + p^3 N(u_0)$. Definimos la afinidad ψ por $\psi(p) = (p^1, p^2, p^3)$, con los p^i definidos anteriormente. Es decir, ψ es la afinidad que lleva el origen de \mathbb{R}^3 a $F(u_0)$ y la base canónica de \mathbb{R}^3 a la base $\{w_1, w_2, N(u_0)\}$.

Sea $u \in U$. Podemos escribir $F(u) - F(u_0) = v^1(u)w_1 + v^2(u)w_2 + q(u)N(u_0)$ (obsérvese que de esta definición se deduce $v^i(u_0) = 0 = q(u_0)$). Por ser F diferenciable, también lo son las funciones $v^i(u)$ y $q(u)$. Derivando respecto de las coordenadas u^i de u , tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial u^i}(u) = \frac{\partial v^1}{\partial u^i}(u)w_1 + \frac{\partial v^2}{\partial u^i}(u)w_2 + \frac{\partial q}{\partial u^i}(u)N(u_0). \quad (6.12)$$

Como $\frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0)$ y $N(u_0)$ son ortogonales, la igualdad anterior implica que

$$\frac{\partial q}{\partial u^i}(u_0) = 0. \quad (6.13)$$

Resulta de ello y la expresión (6.12) que la matriz $\left(\frac{\partial v^i}{\partial u^j}\right)$ es una matriz de cambio de base, por lo tanto de determinante distinto de cero. Entonces, por el teorema de la función inversa, existen abiertos $U_0 \ni u_0$ y $V \ni 0$ tales que la aplicación $\varphi^{-1} : U_0 \rightarrow V$ definida por $\varphi^{-1}(u) = (v^1(u), v^2(u))$ es un difeomorfismo. Si definimos $r : V \rightarrow \mathbb{R}$ por $r = q \circ \varphi$, tenemos que $F(\varphi(v)) - F(u_0) = v^1 w_1 + v^2 w_2 + r(v^1, v^2)N(u_0)$, es decir, $\psi \circ F \circ \varphi(v) = (v, r(v))$. \square

Observación 6.19 *El interés en sí mismo del lema anterior radica en que expresa que toda superficie es, localmente, la gráfica de una función definida sobre su plano tangente.*

Si $\{w_1, w_2\}$ no es una b.o.n. de $T_{u_0}F$, entonces hay que tener en cuenta cuando se estudia la superficie $(v, r(v))$ de \mathbb{R}^3 que las coordenadas de v no son las coordenadas en una base ortonormal, y que la gráfica de r distorsionaría la forma de la superficie si la pensáramos como la gráfica en el \mathbb{R}^3 estándar en el que las líneas coordenadas x, y son ortogonales.

Si la base $\{w_1, w_2\}$ usada en la demostración del lema anterior es ortonormal, entonces la afinidad ψ es una isometría, cuya parte traslación es el vector $-f(u_0)$.

Corolario 6.20 *Cuando la afinidad ψ del lema 6.18 lleva el punto 0 en $F(u_0)$ y la base canónica de \mathbb{R}^3 en $F_1(u_0), F_2(u_0), N(u_0)$, los coeficientes $h_{ij}^G(0)$ de la Π^G de la superficie $G : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ en 0 y los coeficientes $h_{ij}^F(u_0)$ de la superficie $F : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ en u_0 coinciden, i.e., $h_{ij}^G(0) = h_{ij}^F(u_0)$.*

Demostración Con esta elección de la base de $T_{u_0}F$, resulta de (6.12) que

$$\frac{\partial v^i}{\partial v^j}(u_0) = \delta_j^i. \quad (6.14)$$

Calculamos primero $h_{ij}^F(u_0)$. Como los vectores $w_i = F_i(u_0)$ son fijos, derivando en (6.12) se ve que la componente normal de $\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u_0)$ es $\frac{\partial^2 q}{\partial u^i \partial u^j}(u_0)$, por lo que

$$\begin{aligned} h_{ij}^F(u_0) &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u_0), N(u_0) \right\rangle \\ &= \frac{\partial^2 q}{\partial u^i \partial u^j}(u_0). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Para calcular h_{ij}^G , observemos primero que ψ es la composición de una traslación de vector $-F(u_0)$ con un isomorfismo, por lo tanto, su diferencial será ese isomorfismo. Como antes para F , tenemos que la componente normal de $\frac{\partial^2 G}{\partial v^i \partial v^j}(0)$ es $\frac{\partial^2 r}{\partial v^i \partial v^j}(0)$. Si calculamos ahora usando la regla de la cadena para $r = q \circ \varphi$, teniendo en cuenta (6.14) y (6.13),

$$\begin{aligned} h_{ij}^G(0) &= \left\langle \frac{\partial^2 G}{\partial v^i \partial v^j}(0), N(u_0) \right\rangle \\ &= \frac{\partial^2 r}{\partial v^i \partial v^j}(0) = \frac{\partial}{\partial v^i} \left(\sum_{k=1}^2 \frac{\partial q}{\partial u^k} \frac{\partial u^k}{\partial v^j} \right) (0) \\ &= \sum_{k,\ell=1}^2 \left(\frac{\partial^2 q}{\partial u^k \partial u^\ell}(u_0) \frac{\partial u^\ell}{\partial v^i}(0) \frac{\partial u^k}{\partial v^j}(0) \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial q}{\partial u^k}(u_0) \frac{\partial^2 u^k}{\partial v^i \partial v^j}(0) \\ &= \frac{\partial^2 q}{\partial u^i \partial u^j}(u_0). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Y la igualdad que buscábamos resulta de (6.16) y (6.15) \square

Proposición 6.21 *La forma de la aproximación hasta el segundo orden de la intersección de la superficie con el plano tangente en un punto $F(u_0)$ desplazado en la dirección de la recta normal a la superficie en el mismo punto es la de las curvas $\{X \in T_{u_0}F; \text{II}(X, X) = \pm 1\}$. Estas curvas se llaman **indicatriz de Dupin** de la superficie F en el punto u_0 .*

Demostración Si desplazamos el plano tangente paralelamente a sí mismo en la dirección $\pm N(u_0)$ una distancia a , obtenemos el plano formado por los puntos $F(u_0) + x^1 F_1(u_0) + x^2 F_2(u_0) \pm aN(u_0)$, $x^i \in \mathbb{R}$. Puesto que hemos visto en la proposición anterior que los puntos de la superficie se pueden escribir de la forma $F \circ \varphi(v) = F(u_0) + v^1 F_1(u_0) + v^2 F_2(u_0) + r(v^1, v^2)N(u_0)$, la curva intersección viene dada en implícitas, en las coordenadas de los puntos del plano tangente correspondientes a la base F_1, F_2 , por la ecuación $r(v^1, v^2) = \pm a$. Para obtener la aproximación hasta segundo

orden de esta ecuación, hacemos el desarrollo en serie de r :

$$\begin{aligned}
r(v^1, v^2) &= r(0, 0) + \sum_i \frac{\partial r}{\partial v^i}(0) v^i \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 r}{\partial v^i \partial v^j}(0) v^i v^j + O((v^i)^2) \\
&= | \text{por el corolario 6.20, (6.16) y puesto que} \\
&\quad r(0, 0) = 0 \text{ y } \frac{\partial r}{\partial v^i}(0) = \sum_j \frac{\partial q}{\partial u^j}(u_0) \frac{\partial u^j}{\partial v^i}(0) = 0 | \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 r}{\partial v^i \partial v^j}(0) v^i v^j + O((v^i)^2) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j} h_{ij}^F(u_0) v^i v^j + O((v^i)^2). \tag{6.17}
\end{aligned}$$

Luego la aproximación hasta el segundo orden de la curva intersección es

$$\sum_{i,j} h_{ij}^F(u_0) v^i v^j = \pm a,$$

curva cuya forma es la misma para cualquier $a \neq 0$, por lo que tomamos $a = 1$ y tenemos así la indicatriz de Dupin del enunciado del teorema. \square

Corolario 6.22 *La indicatriz de Dupin de una superficie es:*

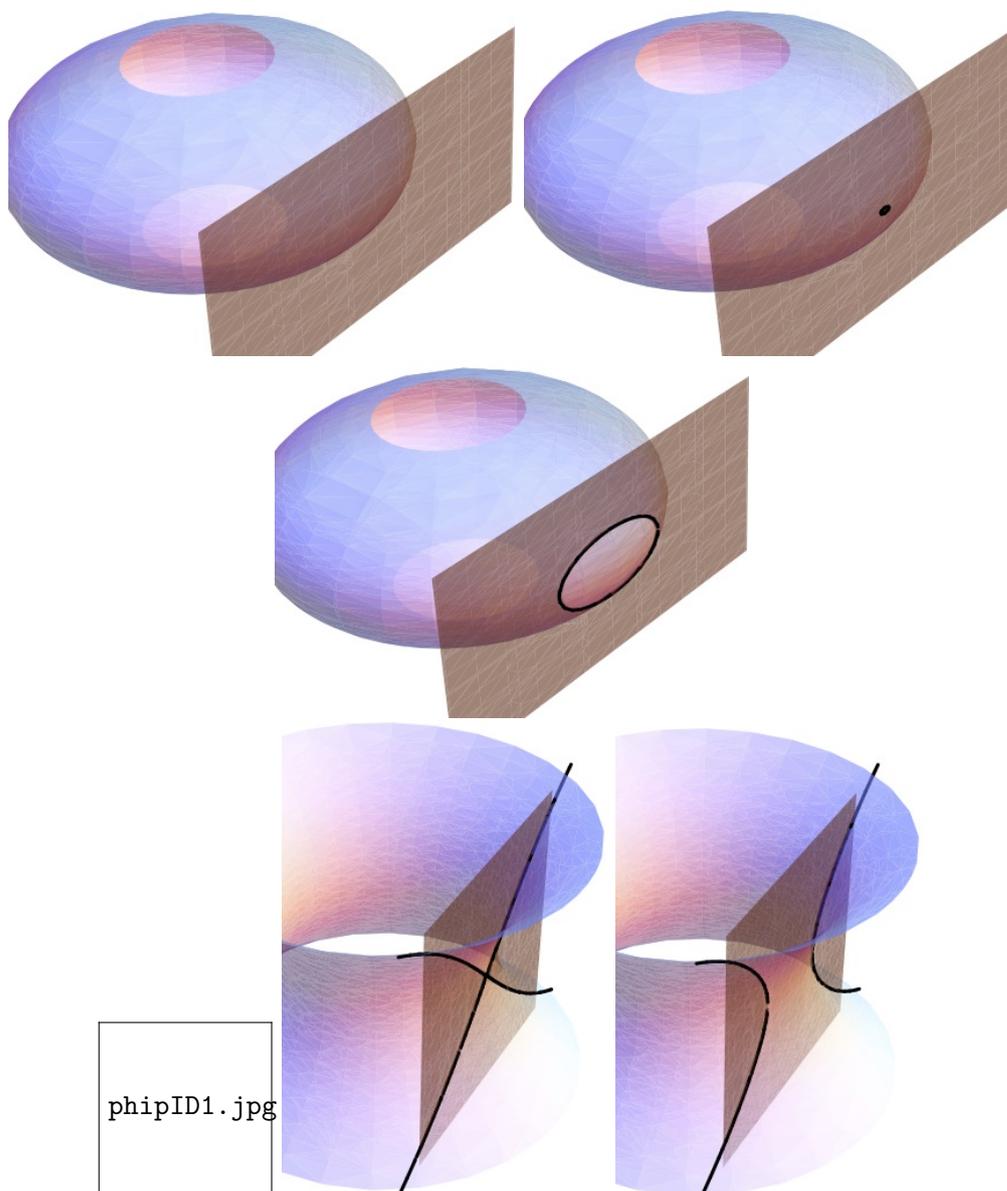
- una elipse en un punto elíptico
- dos hipérbolas conjugadas en un punto hiperbólico
- dos rectas paralelas en un punto parabólico

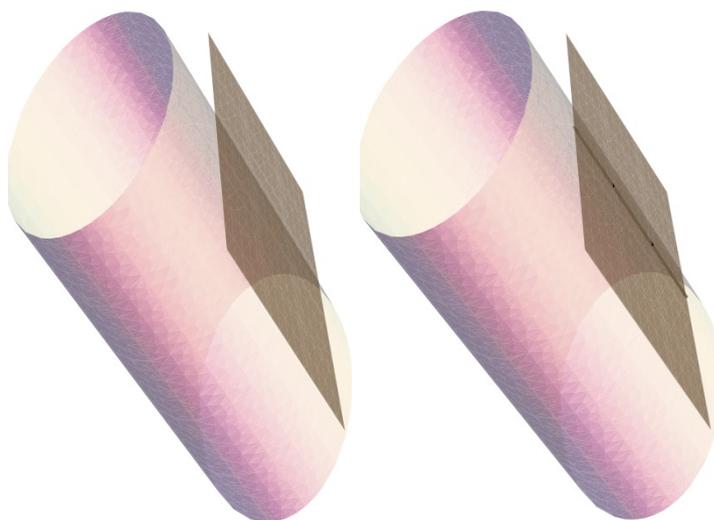
Demostración Para observar que es así, basta con escribir la ecuación $\text{II}(X, X) = \pm 1$ en una base ortonormal de vectores propios e_i de la aplicación de Weingarten. Usando esa base para escribir las coordenadas de X , la ecuación de la indicatriz de Dupin se convierte en

$$k_1(x^1)^2 + k_2(x^2)^2 = \pm 1,$$

donde es fácil reconocer las cónicas enunciadas en el teorema según que $k_1 k_2 > 0$, $k_1 k_2 < 0$ o $k_1 \neq 0$ y $k_2 = 0$. \square

Las siguientes figuras muestran casos en los que la semejanza entre la aproximación de la curva intersección del plano tangente desplazado con la superficie y la indicatriz de Dupin es muy visible. Para cada tipo de punto se muestran tres posiciones del plano tangente, la central es la del plano tangente original en el punto en que es tangente.





pparID3.jpg

6.5. Superficies con todos sus puntos umbilicales

Teorema 6.23 *Si U es conexo, y la superficie parametrizada $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tiene todos sus puntos umbilicales, entonces la superficie es parte de un plano o de una esfera.*

Demostración Si todo punto es umbilical se tiene que para todo $u \in U$ y todo $X \in T_u F$, $L_u X = k(X, u)X$. Primer recordemos que $k(X, u)$ no depende de X . En efecto, si e_1, e_2 es una base ortonormal de vectores propios de L_u con valores propios k_1, k_2 respectivamente, escribiendo un vector cualquiera X en esa base, $X = X^1 e_1 + X^2 e_2$, tenemos que $L_u X = X^1 k_1 e_1 + X^2 k_2 e_2$ y también que $L_u X = k(X, u)X = k(X, u)X^1 e_1 + k(X, u)X^2 e_2$. Comparando ambas expresiones de $L_u X$ obtenemos que $k_1 = k(X, u) = k_2$, de donde resulta que $k(X, u)$ no depende de X , por lo que escribiremos solo $k(u)$. Vamos a ver ahora que tampoco depende de u , es decir, que k es constante. Partimos

de la ecuación:

$$LF_i = -dN(F_i) = -\frac{\partial N}{\partial u^i} = kF_i$$

Derivamos ahora respecto de u^j en los dos miembros de la última igualdad

$$-\frac{\partial^2 N}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial k}{\partial u^j} F_i + kF_{ij} \quad (6.18)$$

Por la regla de las derivadas cruzadas, la expresión anterior da el mismo valor para $i = 1, j = 2$ que para $j = 1, i = 2$, y también $F_{12} = F_{21}$. Resulta, por lo tanto, que $\frac{\partial k}{\partial u^1} F_2 = \frac{\partial k}{\partial u^2} F_1$. Como f_1, F_2 son linealmente independientes, esto implica que $\frac{\partial k}{\partial u^1} = \frac{\partial k}{\partial u^2} = 0$ y, como U es conexo, resulta que k es constante.

- Si $k = 0$, esto implica $dN = 0$, luego N es constante, lo que implica que F es la parametrización de un plano. En efecto: si $f(u) = \langle F(u) - F(u_0), N \rangle$, se tiene que $\frac{\partial f}{\partial u^i}(u) = \langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u), N \rangle = 0$, luego f es constante, pero $f(u_0) = \langle F(u_0) - F(u_0), N \rangle = 0$, luego $\langle F(u) - F(u_0), N \rangle = 0$, por lo tanto $F(u)$ está en el plano que pasa por $F(u_0)$ y es ortogonal a N .

- Si $k \neq 0$, la superficie está contenida en una esfera de centro $p = F(u) + \frac{1}{k}N(u)$ y radio $\frac{1}{k}$. En efecto, veamos primero que p es un punto fijo calculando sus derivadas parciales: $\frac{\partial p}{\partial u^i} = F_i(u) + \frac{1}{k}N_i(u) = F_i(u) - \frac{1}{k}L_u(F_i) = F_i(u) - \frac{1}{k}k F_i = 0$. Luego p es fijo, y si calculamos la distancia de $F(u)$ a p , tenemos $|F(u) - p| = 1/k$, luego $f(U)$ está contenida en una esfera de centro p y radio $1/k$. \square

Observación 6.24 *Este teorema sigue siendo cierto para hipersuperficies de \mathbb{R}^{n+1} con $n > 2$. Naturalmente, no tiene sentido para $n = 1$. Un interés de este resultado es que, para demostrar que una superficie conexa y compacta es una esfera, basta con demostrar que es umbilical. Esto marca también una diferencia de método, un salto, en el modo de trabajar con curvas ($n = 1$) y con superficies o dimensión superior. En las últimas demostrar que algo es una esfera es solo demostrar que es umbilical. En las primeras el procedimiento no vale y hay que recurrir siempre a métodos distintos. Esto es una de las cosas que marca la diferencia entre trabajar con $n \geq 2$ y con $n = 1$.*

Capítulo 7

Variación del área y superficies minimales

7.1. Fórmula de la primera variación del área

Definición 7.1 Se llama *variación normal* de una superficie $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^r , $r \geq 2$, a una familia uniparamétrica de superficies $F^t : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definidas por $F^t(u) = F(u) + t \varphi(u) N(u)$, donde $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^{r-2} y t varía en algún intervalo $]a, b[$ que contiene al 0.

Lema 7.2 Sea $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ una aplicación diferenciable en el espacio de las matrices $n \times n$ reales simétricas de determinante distinto de cero. Se tiene la siguiente fórmula para la derivada del determinante de A :

$$(\det(A))' = \det(A) \operatorname{tr}(A^{-1}A'). \quad (7.1)$$

Demostración Sean $A = (a_{ij})$ y $A^{-1} = (a^{ij})$. Recordemos que el determinante se puede calcular eligiendo una fila i y calculando $\det A = \sum_j a_{ij} ad(a_{ij})$, donde $ad(a_{ij})$ es el adjunto del elemento a_{ij} de la matriz. Además, los elementos de la matriz inversa se calculan también usando los adjuntos así: $a^{ij} = \frac{1}{\det A} ad(a_{ji})$. En este caso, por ser la matriz simétrica, $ad(a_{ji}) = ad(a_{ij})$. De la expresión para $\det A$, y comparando con la expresión de los elementos de la matriz inversa, tenemos

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial a_{ij}} = ad(a_{ij}) = a^{ij} \det(A) \quad (7.2)$$

Calculamos ahora $(\det(A))'$ usando la regla de la cadena y (7.2)

$$\begin{aligned} \frac{d\det(A)}{dt} &= \sum_{i,j} \frac{\partial \det(A)}{\partial a_{ij}} \frac{da_{ij}}{dt} \\ &= \sum_{i,j} a^{ij} \det(A) \frac{da_{ij}}{dt} \\ &= \det(A) \sum_{i,j} a^{ij} \frac{da_{ij}}{dt} \\ &= \det(A) \operatorname{tr} \left(A^{-1} \frac{dA}{dt} \right). \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. \square

Teorema 7.3 (Fórmula de la primera variación del área) Sea $F^t : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F^t(u) = F(u) + t \varphi(u) N(u)$, $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ una variación normal de $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$. Sea $A(t)$ el área de la superficie F^t . Se tiene la siguiente fórmula para la derivada de A en $t = 0$:

$$A'(0) = - \int_U 2 H \varphi \, du^1 \, du^2. \quad (7.3)$$

Demostración Denotemos por I^t la primera forma fundamental de la superficie F^t y por g_{ij}^t los coeficientes de su matriz. Sabemos que $A(t) = \int_U \sqrt{g^t} \, du^1 \, du^2$. Por lo tanto,

$$\frac{dA}{dt} = \int_U \frac{1}{2\sqrt{g^t}} \frac{dg^t}{dt} \, du^1 \, du^2. \quad (7.4)$$

Usamos ahora la fórmula (7.1) (y el hecho de que $F^0 = F$) para calcular

$$\frac{dg^t}{dt}(0) = g^0 (g^0)^{ij} \frac{dg_{ij}^t}{dt}(0) = g^{ij} \frac{dg_{ij}^t}{dt}(0). \quad (7.5)$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} g_{ij}^t &= \left\langle F_i + t \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} N + t \varphi N_i, \right. \\ &\quad \left. F_j + t \frac{\partial \varphi}{\partial u^j} N + t \varphi N_j \right\rangle \\ &= g_{ij} - 2 t \varphi h_{ij} + O(t^2) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Derivando en esta expresión,

$$\frac{dg_{ij}^t}{dt}(0) = -2 \varphi h_{ij}, \quad (7.7)$$

y, sustituyendo en (7.5),

$$\frac{dg^t}{dt}(0) = -2 g^{ij} \varphi h_{ij} = -2 g \varphi H, \quad (7.8)$$

que, sustituido en (7.4) en $t = 0$, obtenemos (7.4). \square

Definición 7.4 *F se dice que es una superficie minimal si su curvatura media en cada punto es nula. (i.e. $H(u) = 0 \forall u \in U$).*

Corolario 7.5 *Si, para cualquier variación normal, F tiene área menor o igual que las de cualquier variación normal de F, entonces F es una superficie minimal*

Demostración La hipótesis del teorema significa que, para cada φ , $A(0) \leq A(t)$ para todo $t \in]a, b[$. Se trata, por lo tanto, de un mínimo para la función $A(t)$, por lo tanto $-\int_U 2 H \varphi du^1 du^2 = A'(0) = 0$. Como eso ha de ocurrir para toda variación, es decir, para toda $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$, tomando $\varphi = H$, tenemos $-\int_U 2 H^2 du^1 du^2 = 0$, lo que implica $H = 0$. \square

Nota 7.6 El corolario anterior es la razón histórica de que las superficies de curvatura media nula se llamen minimales. Como se ha visto en ese corolario, la condición minimal no es realmente equivalente a que la superficie tenga área mínima entre todas sus variaciones normales, es sólo una condición necesaria. Pero, de hecho, hay superficies minimales que no minimizan el área entre todas sus variaciones normales. Sin embargo, el resultado es cierto localmente: “Si F es una superficie minimal, para todo punto u_0 existe un entorno U_0 de u_0 tal que F restringida a U_0 minimiza el área entre todas las superficies de variaciones normales cuyas superficies coinciden con F en la frontera de U_0 (es decir, variaciones en las que $p = 0$ sobre la frontera de U_0)”. Este resultado es una consecuencia inmediata del Lema 6.18 y del siguiente teorema (cuya demostración no veremos porque requiere el teorema de Stokes): “Si F es una superficie minimal que viene dada por la gráfica de una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, entonces F minimiza el área entre todas las superficies de variaciones normales cuyas superficies coinciden con F en la frontera de U ”.

Nota 7.7 La fórmula (7.3) también permite ver la curvatura media como el gradiente del funcional área. No vamos a ser precisos tratando de explicar todas las estructuras que aparecen en las definiciones que veremos a continuación, sino que indicaremos simplemente las ideas.

Según la definición que hemos dado, el espacio de las variaciones normales está determinado por las funciones $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ (para ver por qué no hace falta considerar las t , basta con considerar que si φ es una función de U en \mathbb{R} , $t\varphi$ también lo es).

El área de una variación depende de la función φ , y podemos considerar el área como un funcional (una función definida sobre un espacio de funciones)

$$A : \{\psi : U \rightarrow \mathbb{R}\}; A(\psi) = \int_U \sqrt{g^\psi} du^1 du^2,$$

donde g^ψ es el determinante de la primera forma fundamental asociada a la superficie $F^\psi = F + \psi N$. Si, como ocurre en \mathbb{R}^n , aquí podemos pensar que los puntos del espacio de variaciones normales coinciden con los vectores de ese espacio, y si el cálculo diferencial es análogo al de \mathbb{R}^n , podemos hablar de derivada del funcional A en la dirección del “vector” $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ en el punto 0 y calcularla tomando una curva que pase por 0 con vector tangente φ , por ejemplo la curva $t\varphi$, de modo que

$$\begin{aligned} D_\varphi A(0) &= \frac{dA(t\varphi)}{dt}(0) \\ &= \int_U (-2H)\varphi\sqrt{g} \, du^1 du^2. \end{aligned} \quad (7.9)$$

(Obsérvese que la curva $t\varphi$ se corresponde con la variación normal $F + t\varphi N$ y que el punto 0 se corresponde con la superficie F).

Por otro lado, sobre el espacio de funciones φ se puede definir el “producto escalar”:

$$(\varphi, \psi) := \int_U \varphi \psi \, du^1 du^2, \quad (7.10)$$

y, consecuentemente, definir el gradiente de un funcional $B : \{\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}$ como el “vector” $\nabla B : U \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica

$$D_\varphi B = (\nabla B, \varphi) \quad \text{para toda } \varphi. \quad (7.11)$$

Este gradiente asídefinido tiene la misma propiedad que el gradiente de una función en \mathbb{R}^n : ∇B da la dirección de máxima variación de B .

Comparando (7.11) con (7.10) y (7.9), tenemos que *el gradiente del área es $-2H$* . Por lo tanto, *la curvatura media da la dirección de máxima variación del funcional área*. Una consecuencia de ello (o, si se prefiere ver así, una consecuencia de (7.3)) es que si F no es una superficie minimal, entonces la “evolución $F^t = F + tH N$ conduce a una superficie de menor área.

7.2. Clasificación de las superficies minimales de revolución

¿Cuántas superficies minimales hay?. En estos momentos se conocen muchísimas y el problema está más bien en ir buscando su clasificación. Las conocidas eran pocas hasta 1980. Pero, muchos años antes, sólo dos eran conocidas, las dos que vamos a ver en esta sección.

Teorema 7.8 *La única superficie minimal de revolución regular conexa distinta de un plano (o trozo de plano) es la catenoide (o un trozo de catenoide).*

Demostración Ya vimos que una superficie de revolución generada por una curva $(x(u), 0, z(u))$ admitía una parametrización de la forma $F(u, v) = (x(u) \cos(v), x(u) \sin(v), z(u))$

y que su curvatura media escrita en esta parametrización es (ver archivo de Mathematica)

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{z'(u)}{x(u)\sqrt{x'(u)^2 + z'(u)^2}} + \frac{(-z'(u)x''(u) + x'(u)z''(u))}{(x'(u)^2 + z'(u)^2)^{3/2}} \right) \quad (7.12)$$

-Si $z'(u) = 0$ en un intervalo, entonces $z(u) = \text{cte}$ en ese intervalo, y el pedazo de superficie generado por ese trozo de curva es un plano.

-Si $z'(u_0) \neq 0$ en un punto, existe un intervalo que contiene a u_0 en el que $z'(u) \neq 0$, por lo tanto es monótona y biyectiva, y tiene una inversa $u(z)$, y podemos escribir la curva generatriz en ese intervalo de la forma $(x(z), 0, z)$, donde $x(z) = x(u(z))$. Con esta expresión de la curva generatriz, la expresión de la curvatura media (7.12) queda

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x(z)\sqrt{x'(z)^2 + 1}} + \frac{-x''(z)}{(x'(z)^2 + 1)^{3/2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{x'(z)^2 + 1 - x(z)x''(z)}{x(z)(x'(z)^2 + 1)^{3/2}}, \quad (7.13)$$

que se anula si y solo si

$$x'(z)^2 + 1 - x(z)x''(z) = 0. \quad (7.14)$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden reducible a una de primer orden con el cambio de variable $y = x'$, de modo que $\dot{y} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{x''}{x'}$, de donde $x'' = \dot{y} x'$. Sustituyendo en (7.14), tenemos la ecuación de variables separables $y^2 + 1 - x y \dot{y} = 0$, de donde $\frac{y \dot{y}}{1 + y^2} = \frac{1}{x}$. Integrando en cada miembro de la igualdad, $\frac{1}{2} \ln(1 + y^2) = \ln x + C$. Quitando los logaritmos, $(1 + y^2)^{1/2} = ax$, deshaciendo el cambio de variable, obtenemos la ecuación diferencial de primer orden $1 + (x')^2 = a^2 x^2$. Despejando: $x' = \pm \sqrt{a^2 x^2 - 1}$. Separando variables,

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 x^2 - 1}} dx = dt. \quad (7.15)$$

Para hacer la integral del primer miembro de la igualdad, hacemos el cambio de variable a $x = \text{chw}$, con lo que $a dx = \text{shw} dw$ y la integral queda

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 x^2 - 1}} dx = \int \frac{1 \text{shw}}{a \text{shw}} dw = \frac{1}{a} w = \frac{1}{a} \text{arch}(a x),$$

que, al sustituir en la ecuación diferencial (7.15) da $\frac{1}{a} \text{arch}(a x) = t + \delta$, de donde $\text{arch}(a x) = a t + a \delta$ y

$$x = \frac{1}{a} \text{ch}(at + b), \quad (7.16)$$

que es la ecuación de una catenaria por cuya rotación se obtiene una catenoide.

Resulta de esto que la superficie de revolución minimal ha de estar generada por una curva con trozos de catenaria sobre el eje z , trozos de recta perpendicular al eje z y quizás puntos u_0 en los que $z'(u_0) = 0$ sin que se z' se anule en un entorno de u_0 . La existencia de estos tres casos juntos es imposible en una curva C^1 y conexa, por lo tanto la curva ha de ser o un trozo de recta o un trozo de catenaria, y la superficie de revolución ha de ser un trozo de plano o un trozo de catenoide. \square

7.3. Clasificación de las superficies minimales regladas

Una superficie reglada $F(u, v) = c(u) + v w(u)$ se dice que es no cilíndrica si $w'(u) \neq 0$ para todo u . Una superficie reglada no cilíndrica $F(u, v) = c(u) + v w(u)$ puede tomarse con $|w| = 1$ y $|w'| = 1$ sin que cambie la superficie. En efecto, si no es así, consideremos $\varphi(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v)$ definiendo su inversa φ^{-1} por $\bar{v} = v |w(u)|$ y $\bar{u} = \int_0^u \left| \left(\frac{w}{|w|} \right)' \right| du$. Se tiene entonces que $\bar{F}(\bar{u}, \bar{v}) = F(\varphi(\bar{u}, \bar{v})) = \bar{c}(\bar{u}) + \bar{v} \bar{w}(\bar{u})$ con $|\bar{w}(\bar{u})| = 1$ y $|\bar{w}'(\bar{u})| = 1$.

Notación 7.9 *En esta sección supondremos, por comodidad permitida por la observación anterior y salvo indicación en contra, que si F es una superficie reglada no cilíndrica, $|w| = 1$ y $|w'| = 1$.*

Si F no es “no cilíndrica”, seguiremos suponiendo $|w| = 1$, pero, obviamente, no $|w'| = 1$.

Definición 7.10 *Dada una superficie reglada no cilíndrica $F(u, v) = c(u) + v w(u)$, se llama línea de estricción de la superficie a una curva $\alpha(u) = c(u) + v(u) w(u)$ sobre la superficie que verifica $\langle \alpha'(u), w'(u) \rangle = 0$. (Observación: la condición $|w'| = 1$ no es necesaria en esta definición, en realidad es equivalente el enunciar la definición con esta restricción o sin ella).*

Nota 7.11 *La línea de estricción de una superficie reglada no cilíndrica $F(u, v) = c(u) + v w(u)$ contiene todos los puntos donde F no es regular (este conjunto de puntos puede ser vacío en unos casos, y también toda la línea de estricción en otros). En efecto, dada una curva $\alpha(u) = c(u) + v(u) w(u)$ sobre la superficie, $\alpha'(u) = c'(u) + v'(u) w(u) + v(u) w'(u)$, y $\langle \alpha', w' \rangle = 0$ si $v = -\langle c', w' \rangle$. Pero F no es regular donde w y $c' + v w'$ son linealmente dependientes, i.e., $c'(u) + v w'(u) = \lambda(u) w(u)$, y, multiplicando escalarmente por w' , tenemos la misma expresión que antes para v , luego ese punto donde F no es regular está en la línea de estricción.*

Lema 7.12 *Toda superficie reglada no cilíndrica puede escribirse de la forma $\alpha + v w$, donde α es la línea de estricción.*

Demostración Como $w' \neq 0$, podemos reparametrizar w respecto de su longitud de arco y la curva $\alpha(u) = c(u) - \langle c', w' \rangle w$ es la línea de estricción, y podemos escribir

$F(u, v) = c(u) + v w(u) = \alpha(u) + (v + \langle c', w' \rangle)w$, que es la expresión que buscamos tomando $\bar{v} = v + \langle c', w' \rangle$ como nuevo parámetro v . \square

Teorema 7.13 *La única superficie minimal reglada regular conexa con $K \neq 0$ o que se anula sólo en puntos aislados es el helicoides (o un trozo de helicoides).*

Demostración Una superficie reglada generada por un campo vectorial $w(u)$ que se mueve a lo largo de una curva $c(u)$ admite una parametrización de la forma $F(u, v) = c(u) + w(u)v$ y la condición de regularidad (ver (5.2)) equivale a $(c' + vw') \wedge w \neq 0$.

Sus curvaturas media y de Gauss escritas en esta parametrización son (ver archivo de Mathematica)

$$H = \frac{1}{2} \frac{2 \langle w', (c' + vw') \wedge w \rangle \langle w, c' + vw' \rangle - |w|^2 \langle c'' + vw'', (c' + vw') \wedge w \rangle}{|(c' + vw') \wedge w| (\langle c' + vw', w \rangle^2 - |w|^2 |c' + vw'|^2)}$$

$$K = \frac{\langle w', c' \wedge w \rangle^2}{|(c' + vw') \wedge w|^2 (\langle c' + vw', w \rangle^2 - |w|^2 |c' + vw'|^2)} \quad (7.17)$$

De la fórmula para la curvatura de Gauss resulta que si $w'(u_0) = 0$, entonces $K(u_0, v) = 0$ para todo v , en contra de la hipótesis de que K solo puede anularse en puntos aislados. Por lo tanto la superficie es no cilíndrica y, por el Lema 7.12, podemos suponer que c es la línea de estricción de la superficie.

Si ahora hacemos uso de lo indicado en Notación 7.9, la expresión para H queda

$$H = \frac{1}{2} \frac{2 \langle w', c' \wedge w \rangle \langle w, c' \rangle - \langle c'' + vw'', (c' + vw') \wedge w \rangle}{|(c' + vw') \wedge w| (\langle c', w \rangle^2 - |c' + vw'|^2)}, \quad (7.18)$$

de modo que $H = 0$ sii se anula el numerador de la expresión anterior, i.e. sii

$$\begin{aligned} & 2 \langle w', c' \wedge w \rangle \langle w, c' \rangle - \langle c'', c' \wedge w \rangle \\ & + v (\langle w'', c' \wedge w \rangle + \langle c'', w' \wedge w \rangle) \\ & + v^2 \langle w'', w' \wedge w \rangle = 0, \end{aligned}$$

lo que ocurre sii se anulan los coeficientes de este polinomio en v , i.e. sii

$$2 \langle w', c' \wedge w \rangle \langle w, c' \rangle - \langle c'', c' \wedge w \rangle = 0 \quad \text{y} \quad (7.19)$$

$$\langle w'', c' \wedge w \rangle + \langle c'', w' \wedge w \rangle = 0 \quad \text{y} \quad (7.20)$$

$$\langle w'', w' \wedge w \rangle = 0. \quad (7.21)$$

Además, por

De $|w| = 1$ y $|w'| = 1$ resulta $\langle w, w' \rangle = 0$ (que ya hemos usado para la expresión de H) y $\langle w', w'' \rangle = 0$. Derivando la primera de estas igualdades, $|w'|^2 + \langle w, w'' \rangle = 0$, luego $\langle w, w'' \rangle = -1$. Por otro lado, (7.21) implica que w'' es combinación lineal de w' y w . Por lo tanto,

$$w'' = -w \quad (7.22)$$

Si κ es la curvatura de la curva w y e_i su referencia de Frenet, resulta de (7.22) que $\kappa e_2 = -w$ lo que implica (al ser $|w| = 1$) que $e_2 = -w$, $\kappa = 1$ y $-w' = e_2' = -\kappa e_1 + \tau e_3 = -1 w' + \tau e_3$, de donde $\tau = 0$. Por lo tanto w es una circunferencia de centro $c + (1/\kappa)e_2 = c - w$ y radio 1. Después de un cambio de coordenadas de \mathbb{R}^3 , podemos escribir

$$w(u) = (\cos u, \sin u, 0). \quad (7.23)$$

Por (7.22), la igualdad (7.20) da $\langle c'', w' \wedge w \rangle = 0$, c'' está en el plano generado por w y w' , que, puesto que $w(u) = (\cos u, \sin u, 0)$, es el plano XY del nuevo sistema de coordenadas elegido, i.e., $c'' = (c_1'', c_2'', 0)$, de donde se deduce que $c = (c_1, c_2, a u + b)$ con a y b constantes.

Como c es la línea de estricción, $\langle c', w' \rangle = 0$. En el abierto en el que K no se anula, de (7.17) resulta que $\langle w', c' \wedge w \rangle \neq 0$ y, por lo tanto, $c' \wedge w \neq 0$. Como c' y w son ortogonales a w' , $c' \wedge w$ está en la dirección de w' , luego $c' \wedge w = \langle c' \wedge w, w' \rangle w'$ y la fórmula (7.19) se puede escribir como

$$\langle w', c' \wedge w \rangle (2 \langle w, c' \rangle - \langle c'', w' \rangle) = 0 \quad (7.24)$$

y, como, al ser $K \neq 0$, ha de ser $\langle w', c' \wedge w \rangle \neq 0$, tenemos que

$$2 \langle w, c' \rangle = \langle c'', w' \rangle. \quad (7.25)$$

Por otro lado, derivando en $\langle c', w' \rangle = 0$ obtenemos $\langle c'', w' \rangle = -\langle c', w'' \rangle = |\text{por (7.22)}| = \langle c', w \rangle$ que, sustituido en (7.25), da

$$\langle w, c' \rangle = \langle c'', w' \rangle = 0. \quad (7.26)$$

Tenemos, por tanto, que $\langle w, c' \rangle = 0$ y que $\langle w', c' \rangle = 0$. Sustituyendo en estas expresiones la igualdad (7.23);

$$\begin{aligned} c_1' \cos u + c_2' \sin u &= 0 \text{ para todo } u \\ -c_1' \sin u + c_2' \cos u &= 0 \text{ para todo } u \end{aligned}$$

y de estas dos igualdades resulta que $c_1' = c_2' = 0$, luego c_1 y c_2 son constantes, y la curva c es de la forma $c = (c_1, c_2, a u + b)$ y la superficie F es $F(u, v) = c(u) + v w(u) = (c_1 + v \cos u, c_2 + v \sin u, a u + b)$. Una traslación de \mathbb{R}^3 de vector $(-c_1, -c_2, -b)$ transforma esta parametrización F en la parametrización canónica del helicoido dada en el capítulo 5. Por continuidad, los puntos con $K = 0$ no existen \square

Nota 7.14 Un teorema clásico que no demostramos en este curso por requerir técnicas más avanzadas establece que en una superficie minimal no llana la curvatura de Gauss sólo puede tener ceros aislados, lo que implica que el teorema anterior se podría enunciar diciendo que *una superficie minimal reglada y conexa es parte de un plano o parte de un helicoido*.

Capítulo 8

Isometrías. Derivada covariante. Teorema egregio de Gauss

8.1. Isometrías entre superficies

La geometría euclídea se basa en el concepto de isometría, y las propiedades geométricas en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 son las que se conservan por isometrías. En las superficies, vamos a ver un concepto de isometría análogo al que se definió en \mathbb{R}^n . Análogamente a la relación entre isometrías y geometría euclídea en \mathbb{R}^3 , la geometría intrínseca de una superficie es el estudio de las propiedades que se conservan por isometrías.

En el \mathbb{R}^n euclídeo hay dos modos de introducir las isometrías: a) como aplicaciones que conservan el producto escalar y b) como aplicaciones que conservan la distancia. Se demuestra que ambos conceptos coinciden. En el caso de superficies, introduciremos las isometrías siguiendo el procedimiento a). Cuando definamos un concepto de superficie global (y no solo superficies parametrizadas) definiremos la distancia intrínseca entre dos puntos en una superficie, y entonces podremos introducir las isometrías siguiendo el modelo b) y comprobar que ambos conceptos son equivalentes.

Definición 8.1 *Una isometría entre dos superficies parametrizadas $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $G : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación diferenciable y biyectiva entre las superficies $f : U \rightarrow V$ que conserva la primera forma fundamental, o, lo que es equivalente, que conserva el producto escalar de los vectores tangentes a la superficie en cada punto. Es decir, $d\bar{f}_u : T_u F \rightarrow T_u G$ verifica $\langle d\bar{f}_u X, d\bar{f}_u Y \rangle = \langle X, Y \rangle$, o, equivalentemente, $I_{f(u)}(d\bar{f}_u X, d\bar{f}_u Y) = I_u(X, Y)$. Si no se exige la propiedad de que f sea biyectiva, pero se mantienen las restantes, entonces f se dice que es una isometría local.*

Nota 8.2 *Obsérvese que si f es una isometría local, entonces $d\bar{f}_u(X) = 0$ sii $X = 0$, luego $d\bar{f}_u$ es un isomorfismo, luego (cfr. Proposición 5.17) $df(u)$ también es un isomorfismo, y, por el teorema de la función inversa, f es un difeomorfismo local.*

De la definición de isometría y del hecho de que la longitud de una curva en una superficie se calcula usando la primera forma fundamental (cfr. (5.13)), y que lo mismo ocurre para calcular áreas, se deduce inmediatamente que:

Proposición 8.3 Una isometría entre superficies conserva la longitud de las curvas y las áreas de regiones de la superficie. Es decir, con la notación anterior, si $c = F \circ \alpha$ es una curva sobre $F(U)$ y $B = F(A)$, $A \subset U$, entonces $L_a^b(c) = L_a^b(\bar{f} \circ c)$ y $\text{Area}(B) = \text{Area}(\bar{f}(B))$.

Proposición 8.4 $f : U \rightarrow V$ es una isometría local entre las superficies parametrizadas $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $G : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ si y solo si para cada $u \in U$ existe un abierto $U_1 \subset U$ que contiene a u tal que $f|_{U_1} : U_1 \rightarrow f(U_1) \subset V$ es un difeomorfismo y los coeficientes de la primera forma fundamental de las dos superficies parametrizadas por $F|_{U_1}$ y $G \circ f|_{U_1}$ coinciden.

Demostración Sean g_{ij} y g'_{ij} los coeficientes de las primeras formas fundamentales de F y $G \circ f$ respectivamente. La proposición es consecuencia de que si f es una isometría es un difeomorfismo local, y del siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} g'_{ij} &= \left\langle \frac{\partial(G \circ f)}{\partial u^i}, \frac{\partial(G \circ f)}{\partial u^j} \right\rangle = | \text{como } G \circ f = \bar{f} \circ F | \\ &= \left\langle \frac{\partial(\bar{f} \circ F)}{\partial u^i}, \frac{\partial(\bar{f} \circ F)}{\partial u^j} \right\rangle = \left\langle d\bar{f} \frac{\partial F}{\partial u^i}, d\bar{f} \frac{\partial F}{\partial u^j} \right\rangle \\ &= | \text{condición de isometría} | = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}, \frac{\partial F}{\partial u^j} \right\rangle = g_{ij}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

□

Proposición 8.5 Si $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) es una isometría de espacios vectoriales, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^n$ y $G : V \rightarrow \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^n$ son dos superficies parametrizadas y ϕ restringida a F da G , es decir, $\phi \circ F = G \circ f$ para alguna f (o, equivalentemente, $\phi|_{F(U)} = \bar{f}$ donde \bar{f} esté definida), entonces f es una isometría local de superficies. Si F y G son inyectivas, entonces f es una isometría.

Demostración Como ϕ es una isometría de espacios euclídeos, $\phi = T \circ R$, T una traslación y R una aplicación lineal ($R \in O(\mathbb{R}^n)$). La condición $\phi|_{F(U)} = \bar{f}$ implica que $d\bar{f}_u(X) = d\phi_{F(u)}(X) = R(X)$, luego $\langle d\bar{f}_u(X), d\bar{f}_u(XY) \rangle = \langle RX, RY \rangle = \langle X, Y \rangle$ y \bar{f} es una isometría local. Si F y G son inyectivas, entonces $f = G^{-1} \circ \phi \circ F$ es biyectiva. □

Ejemplo 8.6 de superficies isométricas que no proceden de isometrías extrínsecas (es decir, que no proceden de aplicar la Proposición 8.5 con $n = 3$). Consideremos la superficie parametrizada catenoide $F :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$; $F(u, v) = (a \operatorname{ch}(v/a) \cos u, a \operatorname{ch}(v/a) \sin u, v)$ y el helicoides $G :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$; $G(u, v) = (v \sin u, v \cos u, a u)$. La aplicación $f :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$; $f(u, v) = (-u, a \operatorname{sh}(v/a))$ define una isometría entre las superficies que no procede de ninguna isometría de \mathbb{R}^3 .

Demostración Puesto que la aplicación f es biyectiva, para probar que es una isometría bastará con probar que es una isometría local aplicando la Proposición 8.4. Calculamos: $G \circ f(u, v) = (-a \operatorname{sh}(v/a) \operatorname{sen} u, a \operatorname{sh}(v/a) \operatorname{cos} u, -a u)$,

$$\begin{aligned} g'_{uu} &= \left\langle \frac{\partial(G \circ f)}{\partial u}, \frac{\partial(G \circ f)}{\partial u} \right\rangle \\ &= \langle (-a \operatorname{sh}(v/a) \operatorname{cos} u, -a \operatorname{sh}(v/a) \operatorname{sen} u, -a), (-a \operatorname{sh}(v/a) \operatorname{cos} u, -a \operatorname{sh}(v/a) \operatorname{sen} u, -a) \rangle \\ &= a^2(\operatorname{sh}(v/a)^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'_{uv} &= \left\langle \frac{\partial(G \circ f)}{\partial u}, \frac{\partial(G \circ f)}{\partial v} \right\rangle \\ &= \langle (-a \operatorname{sh}(v/a) \operatorname{cos} u, -a \operatorname{sh}(v/a) \operatorname{sen} u, -a), (-\operatorname{ch}(v/a) \operatorname{sen} u, \operatorname{ch}(v/a) \operatorname{cos} u, 0) \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'_{vv} &= \left\langle \frac{\partial(G \circ f)}{\partial v}, \frac{\partial(G \circ f)}{\partial v} \right\rangle \\ &= \langle (-\operatorname{ch}(v/a) \operatorname{sen} u, \operatorname{ch}(v/a) \operatorname{cos} u, 0), (-\operatorname{ch}(v/a) \operatorname{sen} u, \operatorname{ch}(v/a) \operatorname{cos} u, 0) \rangle = \operatorname{ch}(v/a)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{uu} &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u} \right\rangle \\ &= \langle (-a \operatorname{ch}(v/a) \operatorname{sen} u, a \operatorname{ch}(v/a) \operatorname{cos} u, 0), (-a \operatorname{ch}(v/a) \operatorname{sen} u, a \operatorname{ch}(v/a) \operatorname{cos} u, 0) \rangle \\ &= a^2 \operatorname{ch}(v/a)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{uv} &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v} \right\rangle \\ &= \langle (-a \operatorname{ch}(v/a) \operatorname{sen} u, a \operatorname{ch}(v/a) \operatorname{cos} u, 0), (\operatorname{sh}(v/a) \operatorname{cos} u, \operatorname{sh}(v/a) \operatorname{sen} u, 1) \rangle = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{vv} &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial F}{\partial v} \right\rangle \\ &= \langle (\operatorname{sh}(v/a) \operatorname{cos} u, \operatorname{sh}(v/a) \operatorname{sen} u, 1), (\operatorname{sh}(v/a) \operatorname{cos} u, \operatorname{sh}(v/a) \operatorname{sen} u, 1) \rangle = \operatorname{sh}(v/a)^2 + 1. \end{aligned}$$

Y de esta coincidencia de g_{ij} con g'_{ij} se deduce la isometría local. Si esta isometría procediera de la restricción de una isometría de \mathbb{R}^3 , también deberían de coincidir (quizás salvo el signo) los coeficientes de la segunda forma fundamental, lo que se puede comprobar que es falso revisando los cálculos que hicimos en capítulos anteriores para la segunda forma fundamental de las superficies regladas y las superficies de revolución. \square

Nota 8.7 El ejemplo anterior es parte de una familia de superficies parametrizadas que son todas localmente isométricas entre sí. Se trata de la familia $F_t :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$; $F_t(u, v) = \operatorname{cost} F(u, v) + \operatorname{sent} t G \circ f(u, v)$, donde F , G y f son las aplicaciones definidas en el ejemplo anterior, y $t \in [0, \pi/2]$. F_0 coincide con la catenoide y $F_{\pi/2}$ coincide con el helicoido. Para cada $s < t \in [0, \pi/2]$ la aplicación $f_{st}(u, v) = (u, v)$ es una isometría de F_s en F_t .

Demostración Calculamos los coeficientes g_{ij}^t de la primera forma fundamental para la superficie F_t . Para ello, primero observamos que

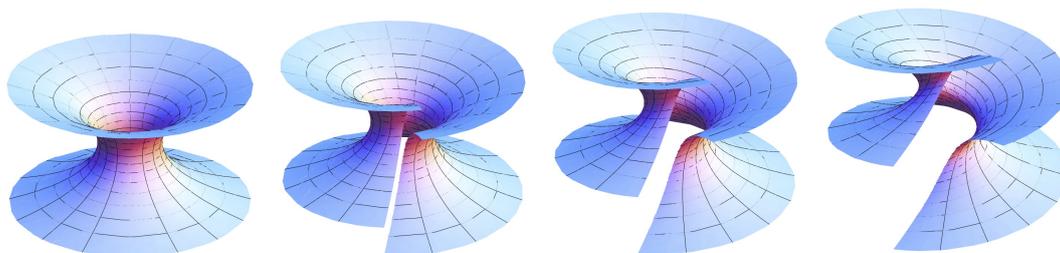
$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial(G \circ f)}{\partial u} \right\rangle &= 0 \\ \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial(G \circ f)}{\partial v} \right\rangle &= a \operatorname{ch}^2(v/a) \\ \left\langle \frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial(G \circ f)}{\partial u} \right\rangle &= -a(1 + \operatorname{sh}^2(v/a)) \\ \left\langle \frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial(G \circ f)}{\partial v} \right\rangle &= 0,\end{aligned}$$

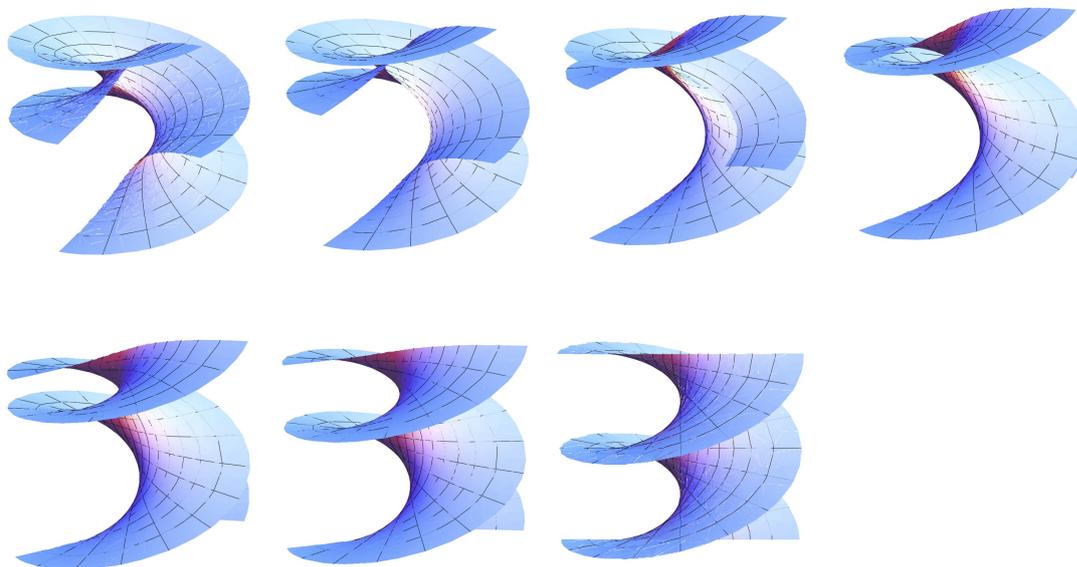
que, aplicado al cálculo de los coeficientes g_{ij} da

$$\begin{aligned}g_{uu}^t &= \left\langle \frac{\partial F_t}{\partial u}, \frac{\partial F_t}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \cos t \frac{\partial F}{\partial u} + \operatorname{sen} t \frac{\partial(G \circ f)}{\partial u}, \cos t \frac{\partial F}{\partial u} + \operatorname{sen} t \frac{\partial(G \circ f)}{\partial u} \right\rangle \\ &= \cos(t)^2 a^2 \operatorname{ch}(v/a)^2 + \operatorname{sen}(t)^2 a^2 \operatorname{ch}(v/a)^2 = a^2 \operatorname{ch}(v/a)^2 \\ g_{uv}^t &= \left\langle \frac{\partial F_t}{\partial u}, \frac{\partial F_t}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \cos t \frac{\partial F}{\partial u} + \operatorname{sen} t \frac{\partial(G \circ f)}{\partial u}, \cos t \frac{\partial F}{\partial v} + \operatorname{sen} t \frac{\partial(G \circ f)}{\partial v} \right\rangle \\ &= 0 + \cos t \operatorname{sen} t a \operatorname{ch}(v/a)^2 + \operatorname{sen} t \cos t (-a \operatorname{ch}(v/a)^2) + 0 = 0 \\ g_{vv}^t &= \left\langle \frac{\partial F_t}{\partial v}, \frac{\partial F_t}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \cos t \frac{\partial F}{\partial v} + \operatorname{sen} t \frac{\partial(G \circ f)}{\partial v}, \cos t \frac{\partial F}{\partial v} + \operatorname{sen} t \frac{\partial(G \circ f)}{\partial v} \right\rangle \\ &= \cos(t)^2 a^2 \operatorname{ch}(v/a)^2 + \operatorname{sen}(t)^2 a^2 \operatorname{ch}(v/a)^2 = a^2 \operatorname{ch}(v/a)^2,\end{aligned}$$

que coincide con las expresiones de los coeficientes de la primera forma fundamental de la catenoide y del helicoido. \square

Los siguientes dibujos muestran algunas de las superficies de la familia F_t e indican intuitivamente como permiten pasar de manera continua de la catenoide al helicoido por isometrías:





8.2. La derivada covariante

En el estudio de la geometría extrínseca introdujimos conceptos geométricos locales con el auxilio del cálculo de derivadas. Aquí vamos a operar de modo análogo, pero para ello necesitamos, en primer lugar, un cálculo de derivadas intrínseco. Para intuir como puede ser este cálculo diferencial intrínseco, podemos pensar del siguiente modo: un habitante bidimensional de la superficie puede tener una idea, como aproximación de lo no lineal, de los objetos lineales tangentes a la superficie (de modo análogo a como un terrestre puede pensar que un trozo del planeta Tierra es plano), pero es incapaz de observar cualquier cosa, aunque sea lineal, que se salga del plano tangente al punto de la superficie desde el que observa ese habitante. Esta consideración nos lleva a:

- 1) derivar solo campos vectoriales tangentes a la superficie;
- 2) como la derivada direccional de un campo tangente no tiene por qué ser tangente, tomaremos como su derivada sólo su componente tangencial (que sería la única parte “observable” de la derivada). Esta será la que llamaremos derivada covariante.

Naturalmente, después de dar la definición siguiendo la intuición anterior, comprobaremos que realmente se trata de un concepto intrínseco mostrando su invariancia por isometrías.

Definición 8.8 Sea Y un campo vectorial tangente de una superficie $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$. Para cada $u \in U$, $X \in T_u F$, se define la derivada covariante $\nabla_X Y$ de Y en la dirección de X por

$$\nabla_X Y = D_X Y - \langle D_X Y, N \rangle N \quad (\text{i.e. } \nabla_X Y = \text{parte tangencial de } D_X Y). \quad (8.2)$$

Proposición 8.9 Fórmula de Gauss

$$\nabla_X Y = D_X Y - \langle LX, Y \rangle N. \quad (8.3)$$

Demostración Como $-\langle D_X Y, N \rangle = -D_X \langle Y, N \rangle + \langle Y, D_X N \rangle = -\langle Y, LX \rangle$, de la definición (8.2) de $\nabla_X Y$ resulta la expresión anterior (8.3) llamada fórmula de Gauss. \square

Resulta de esta definición que si X e Y son campos vectoriales diferenciables, también lo es $\nabla_X Y$ (por serlo $D_X Y$). Para el estudio de las propiedades formales de la derivada covariante será útil la siguiente:

Definición 8.10 Si X, Y son dos campos vectoriales sobre una superficie $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, su corchete de Lie $[X, Y]$ es el campo vectorial sobre la misma superficie definido por $[X, Y] = D_X Y - D_Y X$.

Proposición 8.11 Si X e Y son campos vectoriales tangentes, entonces $[X, Y]$ también lo es.

Demostración En efecto: $\langle [X, Y], N \rangle = \langle D_X Y - D_Y X, N \rangle = D_X \langle Y, N \rangle - \langle Y, D_X N \rangle - D_Y \langle X, N \rangle + \langle X, D_Y N \rangle = \langle Y, LX \rangle - \langle X, LY \rangle = 0. \quad \square$

Proposición 8.12 Sean $W, X \in T_u F$, Y, Z campos vectoriales definidos sobre la superficie, f una función diferenciable sobre la superficie. Se verifica que:

- a) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- b) $\nabla_{X+W} Y = \nabla_X Y + \nabla_W Y$
- c) $\nabla_{f(u)X} Y = f(u) \nabla_X Y$
- d) $\nabla_X (fY) = f(u) \nabla_X Y + (D_X f)(u) Y$
- e) $\nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y, Z]$
- f) $D_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$

Demostración Dejamos para el lector la demostración de las propiedades a) a d). Hacemos las otras dos:

- e) $\nabla_Y Z - \nabla_Z Y = D_Y Z - \langle LY, Z \rangle - D_Z Y + \langle LZ, Y \rangle = [Y, Z],$
- f) $D_X \langle Y, Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle = |\text{usando la fórmula de Gauss}| = \langle \nabla_X Y + \langle LX, Y \rangle N, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z + \langle LX, Z \rangle N \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle. \quad \square$

Vamos a ver ahora la expresión de la derivada covariante en coordenadas, es decir, usando la base canónica del plano tangente asociada a una parametrización de la superficie.

Consideremos la base canónica $\{F_1, F_2\}$ asociada a una parametrización. La derivada covariante $\nabla_{F_i} F_j$ es un campo vectorial tangente, por lo tanto en cada $u \in U$ se podrá poner como combinación lineal de F_1, F_2 . Denotemos por $\Gamma_{ij}^k(u)$ a las componentes de $\nabla_{F_i} F_j(u)$ en la base $\{F_1, F_2\}$.

Definición 8.13 Las funciones reales Γ_{ij}^k definidas sobre la superficie $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ se llaman **símbolos de Christoffel** de la superficie parametrizada F .

Usando coordenadas de la superficie y los símbolos de Christoffel, las derivadas covariantes se calculan de acuerdo con las fórmulas siguientes:

Proposición 8.14

$$a) \nabla_X Y = \sum_{k,i=1}^2 \left(X^i \frac{\partial Y^k}{\partial u^i} + X^i Y^j \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \right) F_k$$

$$b) F_{ij} = \Gamma_{ij}^k F_k + h_{ij} N$$

Demostración Aplicando las reglas de derivación dadas en la Proposición 8.12,

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_{i,j=1}^2 X^i \nabla_{F_i} (Y^j F_j) = \sum_{i,j=1}^2 (X^i (D_{F_i} Y^j) F_j + X^i Y^j \nabla_{F_i} F_j) = \sum_{i,j=1}^2 (X^i (D_{F_i} Y^j) F_j + \\ &X^i Y^j \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k F_k) = \sum_{i,k=1}^2 \left(X^i \frac{\partial Y^k}{\partial u^i} + X^i Y^j \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \right) F_k. \end{aligned}$$

La segunda expresión sale de la fórmula de Gauss y la definición de símbolo de Christoffel: $F_{ij} = D_{F_i} F_j = \nabla_{F_i} F_j + \langle L F_i, F_j \rangle N = \sum_k \Gamma_{ij}^k F_k + h_{ij} N$. \square

Como consecuencia de estos cálculos se tiene que los símbolos de Christoffel están determinados por la primera forma fundamental y que la derivada covariante es invariante por asimetrías locales. Ese será el contenido de las dos proposiciones siguientes.

Proposición 8.15 Los símbolos de Christoffel vienen dados, en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental, por $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^2 g^{k\ell} \left(\frac{\partial g_{\ell i}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{\ell j}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\ell} \right)$

Demostración Usando la fórmula b) de la Proposición 8.14,

$$\langle F_{ij}, F_\ell \rangle = \sum_{r=1}^2 \Gamma_{ij}^r \langle F_r, F_\ell \rangle = \sum_{r=1}^2 \Gamma_{ij}^r g_{r\ell},$$

de donde, multiplicando por la matriz inversa de (g_{ij}) ,

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{r,\ell=1}^2 \Gamma_{ij}^r g_{r\ell} g^{\ell k} = \sum_{\ell=1}^2 \langle F_{ij}, F_\ell \rangle g^{\ell k}. \quad (8.4)$$

Por otra parte,

$$\langle F_{ij}, F_\ell \rangle = \frac{\partial}{\partial u^j} \langle F_i, F_\ell \rangle - \langle F_i, F_{\ell j} \rangle = \frac{\partial}{\partial u^j} \langle F_i, F_\ell \rangle - \frac{\partial}{\partial \ell} \langle F_i, F_j \rangle + \langle F_{i\ell}, F_j \rangle$$

$$\text{y } \langle F_{ij}, F_\ell \rangle = \langle F_{ji}, F_\ell \rangle = \frac{\partial}{\partial u^i} \langle F_j, F_\ell \rangle - \langle F_j, F_{\ell i} \rangle, \text{ de donde } \langle F_{i\ell}, F_j \rangle = -\langle F_{ij}, F_\ell \rangle + \frac{\partial}{\partial u^i} \langle F_j, F_\ell \rangle$$

que sustituido en la primera expresión de $\langle F_{ij}, F_\ell \rangle$ da

$$\langle F_{ij}, F_\ell \rangle = \frac{\partial}{\partial u^j} \langle F_i, F_\ell \rangle - \langle F_i, F_{\ell j} \rangle = \frac{\partial}{\partial u^j} \langle F_i, F_\ell \rangle - \frac{\partial}{\partial u^\ell} \langle F_i, F_j \rangle - \langle F_{ij}, F_\ell \rangle + \frac{\partial}{\partial u^i} \langle F_j, F_\ell \rangle,$$

y despejando $\langle F_{ij}, F_\ell \rangle$,

$$\langle F_{ij}, F_\ell \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \langle F_i, F_\ell \rangle - \frac{\partial}{\partial u^\ell} \langle F_i, F_j \rangle + \frac{\partial}{\partial u^i} \langle F_j, F_\ell \rangle \right),$$

que, sustituido en (8.4) da la fórmula buscada. \square

Proposición 8.16 *La derivada covariante es invariante por isometrías locales. Es decir: Si f es una isometría local entre dos superficies $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $G : V \rightarrow \mathbb{R}^3$, ∇ denota la derivada covariante en F y ∇' en G , entonces $df_u(\nabla_X Y) = \nabla'_{df_u(X)} df(Y)$.*

Demostración Como f es una isometría local, f es un difeomorfismo local, luego, dado $u \in U$, f es sobre un difeomorfismo un abierto de U que contiene a u , y, sobre ese abierto, la parametrización $G \circ f$ es equivalente a la parametrización G y, por la Proposición 8.4, $g_{ij} = g'_{ij}$, donde g_{ij} son los coeficientes de la primera forma fundamental de $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ y g'_{ij} los de $G \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ (observase el abuso de notación de seguir usando U en lugar del abierto de U que contiene a u del que acabamos de hablar). Resulta de esta igualdad y de la fórmula dada en la Proposición 8.15 que los correspondientes símbolos de Christoffel en ambas superficies parametrizadas son iguales, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma'_{ij}^k$. Además, para la imagen por la isometría f de un campo vectorial

$$Z = \sum_{i=1}^2 Z^i F_i \text{ es } d\bar{f}_u(Z) = \sum_{i=1}^2 Z^i(u) d\bar{f}_u(F_i) = \sum_{i=1}^2 Z^i(u) \frac{\partial(\bar{f} \circ F)}{\partial u^i} = \sum_{i=1}^2 Z^i(u) \frac{\partial(G \circ f)}{\partial u^i}.$$

Aplicamos ahora la fórmula a) de la Proposición 8.14 y obtenemos

$$\begin{aligned}
\nabla'_{df_u(X)} df(Y) &= \nabla'_{\sum_i X^i (G \circ f)_i} \left(\sum_j Y^j (G \circ f)_j \right) \\
&= \sum_{i,j} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} (G \circ f)_j + \sum_{i,j,k} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k (G \circ f)_k \\
&= \sum_{i,j} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} (\bar{f} \circ F)_j + \sum_{i,j,k} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k (\bar{f} \circ F)_k \\
&= d\bar{f}_u \left(\sum_{i,j} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} F_j + \sum_{i,j,k} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k F_k \right) = d\bar{f}_u(\nabla_X Y).
\end{aligned}$$

□

8.3. Teorema “egregium” de Gauss

El teorema con el que acabamos este capítulo tiene nombre de teorema “excepcional” (egregio). Sin embargo, como veremos, su demostración no es muy atractiva: sólo un cálculo. ¿Qué tiene, pues de egregio?, el resultado. Dice que la curvatura de Gauss es una cantidad intrínseca. Y eso es un resultado fantástico, porque la curvatura de Gauss K es un invariante algebraico de la segunda forma fundamental, y la segunda forma fundamental es, por definición, la codificación algebraica de la geometría extrínseca de la superficie. Lo sorprendente del resultado es que algo definido de modo extrínseco resulta ser intrínseco.

En realidad Gauss llegó a esta conclusión por procedimientos más “bonitos”, interpretando la curvatura de Gauss en términos del área, que es intrínseca. Pero la demostración que encontró de esa interpretación no era totalmente rigurosa, así es que se esperó a tener el cálculo que reproducimos a continuación, que es tedioso, pero riguroso, y entonces es cuando publicó el resultado.

Teorema 8.17 Teorema Egregium de Gauss *La curvatura de Gauss de una superficie depende solo de la primera forma fundamental y, por lo tanto, es invariante por isometrías locales. Su expresión concreta en términos de la primera forma fundamental es:*

$$K = \frac{1}{g} \sum_{m=1}^2 g_{2m} \left(\Gamma_{11,2}^m - \Gamma_{12,1}^m + \sum_{\ell=1}^2 \left(\Gamma_{11}^\ell \Gamma_{\ell 2}^m - \Gamma_{12}^\ell \Gamma_{\ell 1}^m \right) \right), \text{ donde } \Gamma_{ij,\ell}^k := \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^\ell}. \quad (8.5)$$

Demostración Partimos de la expresión b) de la Proposición 8.14, lo que da:

$$\begin{aligned}
F_{ijk} &= \sum_{\ell=1}^2 \left(\Gamma_{ij,k}^{\ell} F_{\ell} + \Gamma_{ij}^{\ell} F_{\ell k} \right) + h_{ij,k} N - h_{ij} L F_k \\
&= \sum_{\ell=1}^2 \left(\Gamma_{ij,k}^{\ell} F_{\ell} + \Gamma_{ij}^{\ell} \left(\sum_{m=1}^2 \Gamma_{\ell k}^m F_m + h_{\ell k} N \right) \right) + h_{ij,k} N - h_{ij} \sum_{m=1}^2 L_k^m F_m \\
&= \sum_{\ell=1}^2 \left(\Gamma_{ij,k}^{\ell} + \sum_{m=1}^2 \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^{\ell} - h_{ij} L_k^{\ell} \right) F_{\ell} + \left(\sum_{m=1}^2 \Gamma_{ij}^m h_{mk} + h_{ij,k} \right) N
\end{aligned}$$

El mismo cálculo para F_{ikj} da

$$F_{ikj} = \sum_{\ell=1}^2 \left(\Gamma_{ik,j}^{\ell} + \sum_{m=1}^2 \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^{\ell} - h_{ik} L_j^{\ell} \right) F_{\ell} + \left(\sum_{m=1}^2 \Gamma_{ik}^m h_{mj} + h_{ik,j} \right) N$$

Y, como $F_{ijk} = F_{ikj}$, igualando los coeficientes de F_{ℓ} de ambas expresiones, tenemos

$$\Gamma_{ij,k}^{\ell} + \sum_{m=1}^2 \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^{\ell} - h_{ij} L_k^{\ell} = \Gamma_{ik,j}^{\ell} + \sum_{m=1}^2 \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^{\ell} - h_{ik} L_j^{\ell}$$

Agrupando los términos con los símbolos de Christoffel a un lado y los que llevan h o L al otro, multiplicando ambos miembros de la igualdad anterior por $g_{\ell r}$, sumando a lo largo de ℓ , y tomando $i = j = 1$, $k = r = 2$ (y cambiando ℓ por m), obtenemos la expresión (8.5). \square

Capítulo 9

Transporte paralelo. Geodésicas

9.1. Derivada covariante de un campo vectorial a lo largo de una curva

Definición 9.1 Sea $c = F \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable sobre una superficie $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha : I \rightarrow U$. Un campo vectorial tangente diferenciable X a lo largo de c (o “sobre c ”) es un campo vectorial diferenciable $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ a lo largo de c que verifica $X(t) \in T_{\alpha(t)}F$.

Proposición 9.2 Un campo vectorial tangente Y a lo largo de c es diferenciable si las funciones $Y^i(t)$ definidas por $Y(t) = \sum_i Y^i(t)F_i(u(t))$, son diferenciables.

Demostración Es evidente que si $Y^i(t)$ son funciones diferenciables, entonces $Y(t)$ es diferenciable. Recíprocamente, si $Y(t)$ es diferenciable, entonces $Y^i(t) = \sum_j g^{ij} \langle Y(t), F_j(\alpha(t)) \rangle$ es diferenciable (el cálculo anterior es: $\sum_j g^{ij} \langle Y(t), F_j(\alpha(t)) \rangle = \sum_j g^{ij} \langle Y^k(t)F_k(\alpha(t)), F_j(\alpha(t)) \rangle = \sum_j g^{ij} g_{jk} Y^k = Y^i$). \square

Nota 9.3 Sea $X \in T_uF$, $c = F \circ \alpha$, una curva en la superficie F tangente a X en $t = 0$, $c'(0) = X$. Para todo campo vectorial Y sobre la superficie se tiene que

$$\nabla_X Y = D_X Y - \langle D_X Y, N \rangle N = \frac{dY \circ \alpha}{dt}(0) - \left\langle \frac{dY \circ \alpha}{dt}(0), N(c(0)) \right\rangle N(c(0)),$$

de donde se deduce que $\nabla_X Y$ depende sólo de los valores que Y toma a lo largo de una curva α tal que $c = F \circ \alpha$ es tangente a X en $u = c(0)$, y que es independiente de la curva elegida cumpliendo estas condiciones.

Por lo tanto, para que $\nabla_X Y$ esté bien definida basta Y sea un campo vectorial tangente a lo largo de una curva c de la superficie tangente a X .

Esto permite dar la siguiente definición.

Definición 9.4 Sea X un campo vectorial tangente a lo largo de una curva diferenciable c de una superficie $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$. Se llama derivada covariante de X en la dirección de c a

$$\frac{\nabla X}{dt} := \frac{dX}{dt} - \left\langle \frac{dX}{dt}, N \right\rangle N = \frac{dX}{dt} - \Pi(c', X). \quad (9.1)$$

Nota 9.5 Si c es una curva regular, la definición anterior coincide esencialmente con $\nabla_{c'} X$. La única diferencia es que con la segunda manera de escribir (i.e. $\nabla_{c'} X$) pensamos en la definición de derivada covariante 8.8, que requiere que X esté definido en un entorno abierto de u , mientras que en la segunda sólo exigimos que X esté definido a lo largo de la curva c .

Se puede quitar la palabra “esencialmente” y decir que coinciden en sentido estricto en el caso de que X sea un campo vectorial tangente si se considera su campo vectorial a lo largo de c asociado $X \circ \alpha$, se tiene entonces que $\nabla_{c'} X = \frac{\nabla X \circ \alpha}{dt}$.

Sin embargo, si c no es regular, los resultados pueden ser muy diferentes. En efecto, supongamos que c es una curva constante: $c(t) = F(u_0)$ y que X es un campo vectorial $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $X(t) \in T_{u_0} F$ para todo t tal que $\frac{dY}{dt} \neq 0$ para todo t . Para este caso la definición 8.8 no tiene sentido, porque Y no se puede considerar nunca como un campo vectorial tangente a la superficie, no hay ninguna posible extensión de $X(t)$ a un campo vectorial tangente a la superficie definido en un entorno de u_0 , pues su valor sólo está definido en el punto $F(u_0)$. Sin embargo tiene perfecto sentido calcular $\frac{\nabla X}{dt} = \frac{dX}{dt}$. (Obsérvese que, al ser siempre $X(t) \in T_{u_0} F$, se tiene que también $\frac{dX}{dt} \in T_{u_0} F$, por lo que $\left\langle \frac{dX}{dt}, N \right\rangle = 0$. También se llega al mismo resultado usando la segunda igualdad de (9.1), ya que la curva c es constante y, por lo tanto, $c' = 0$).

De la definición (9.1) y la definición de los símbolos de Christoffel se deduce que:

Proposición 9.6 a) Se siguen verificando las propiedades análogas a a), d) y f) de la Proposición 8.12, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{\nabla(Y + Z)}{dt} &= \frac{\nabla Y}{dt} + \frac{\nabla Z}{dt}, \\ \frac{\nabla(fY)}{dt}(t) &= f(\alpha(t)) \frac{\nabla Y}{dt} + \frac{df}{dt}(\alpha(t)) Y(t), \\ \frac{d}{dt} \langle Y, Z \rangle &= \left\langle \frac{\nabla Y}{dt}, Z \right\rangle + \left\langle Y, \frac{\nabla Z}{dt} \right\rangle. \end{aligned}$$

b) Si $c(t) = F \circ \alpha(t)$, $\alpha(t) = (u^1(t), u^2(t))$, $Y(t) = \sum_{i=1}^2 y^i(t) F_i(\alpha(t))$, entonces

$$\frac{\nabla Y}{dt} = \sum_{k=1}^2 \left(\frac{dY^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt} Y^j(t) \right) F_k(\alpha(t)). \quad (9.2)$$

Demostración La demostración de a) es exactamente la misma que la de los correspondientes apartados para ∇_X .

La demostración de b) es exactamente igual que la de 8.14 a) si se tiene en cuenta que $\frac{\nabla F_i \circ \alpha}{dt} = \nabla_{c'} F_i$ como se indicó en la nota 9.5. \square

9.2. Transporte paralelo a lo largo de una curva

Definición 9.7 *Un campo vectorial tangente X a lo largo de una curva $c = F \circ \alpha$, $\alpha : I \rightarrow U$ en una superficie $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ se dice que es paralelo si $\frac{\nabla X}{dt} = 0$ para todo $t \in I$.*

Si F es un plano, X paralelo a lo largo de cualquier curva en el plano equivale a que X sea un campo vectorial constante, i.e., un campo paralelo (en el sentido de la geometría elemental) a sí mismo. De ahí procede el nombre de la Definición 9.7.

En el plano, un campo vectorial es paralelo (i.e. constante) si tiene módulo constante y forma un ángulo constante con una dirección dada. Esto, en una superficie, se traduce por la siguiente propiedad:

Proposición 9.8 : *Sean X, Y campos vectoriales paralelos a lo largo de una curva c de una superficie F . Entonces $\langle X, Y \rangle(t)$ es constante. En particular, $|X(t)|$, $|Y(t)|$ son constantes y el ángulo formado por X e Y es constante.*

Demostración $\frac{d}{dt} \langle X, Y \rangle = \left\langle \frac{\nabla X}{dt}, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{\nabla Y}{dt} \right\rangle = 0$, luego $\langle X, Y \rangle = \text{cte}$. Tomando $X = Y$ sale que $|X|$ e $|Y|$ son constantes. Resulta de todo esto que $\cos(\angle(X, Y)) = \frac{\langle X, Y \rangle}{|X||Y|} = \text{cte}$. \square

Teorema 9.9 *Sea $c = F \circ \alpha$ una curva diferenciable sobre la superficie F definida sobre un intervalo $[a, b]$. Sea $Y_0 \in T_{\alpha(a)}F$. Entonces existe un único campo vectorial paralelo Y a lo largo de c tal que $Y(a) = Y_0$.*

Demostración De (9.2) resulta que $Y(t)$ es paralelo a lo largo de c si y sólo si se verifica el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dY^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt} Y^j(t) = 0,$$

y la condición $Y(a) = Y_0$ es el conjunto de condiciones iniciales $Y^k(a) = Y_0^k$ para el sistema de ecuaciones diferenciales anterior. Por los teoremas de existencia, unicidad y prolongación de las soluciones de E.D.O, existen únicas funciones $Y^k(t)$ soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales en el intervalo $[a, b]$ verificando las condiciones iniciales dadas. \square

Este teorema permite dar la siguiente:

Definición 9.10 Se llama transporte paralelo a lo largo de una curva diferenciable c de F desde $c(a)$ hasta $c(t)$ a la aplicación $P_0^t : T_{\alpha(a)}F \rightarrow T_{\alpha(t)}F$ tal que $P_0^t(Y_0) = Y(t)$, siendo $Y(t)$ el único campo paralelo a lo largo de c que verifica $Y(0) = Y_0$.

Proposición 9.11 P_0^t es una isometría.

Demostración Comprobemos primero que P_0^t es lineal: si $P_0^t(X_0) = X(t)$ y $P_0^t(Y_0) = Y(t)$, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se verifica que $\frac{\nabla}{dt}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \frac{\nabla X}{dt} + \mu \frac{\nabla Y}{dt} = 0$ y $(\lambda X + \mu Y)(0) = \lambda X_0 + \mu Y_0$. Aplicando de nuevo el teorema de unicidad de la solución de una E.D.O. tenemos que $P_0^t(\lambda X_0 + \mu Y_0) = \lambda P_0^t X_0 + \mu P_0^t Y_0$.

Que P_0^t conserva el producto escalar es consecuencia inmediata de la Proposición 9.8. \square

9.3. Geodésicas y curvatura geodésica

Las rectas en el plano pueden ser caracterizadas de dos formas: como aquellas curvas que minimizan la distancia entre cualesquiera dos de sus puntos y como aquellas curvas que pueden ser recorridas sin aceleración. El concepto que generaliza el de recta en las superficies es el de geodésica. Para definir esa generalización usaremos la segunda caracterización de recta, restringiendo incluso un poco más el concepto. Las geodésicas de una superficie serán no sólo las curvas que pueden recorrerse sin aceleración, sino las curvas recorridas sin aceleración. Con esta definición resultará que el concepto de geodésica está ligado no solo a la curva geométrica, sino también a la parametrización de la misma, de modo que para que una curva sea geodésica ha de tener una parametrización especial.

Definición 9.12 Una curva regular $c = F \circ \alpha$, $\alpha : I \rightarrow U$ es una geodésica de una superficie $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ si $c'(t)$ es un campo vectorial paralelo a lo largo de c , i.e. $\frac{\nabla c'}{dt}(t) = 0$ para todo $t \in I$.

Proposición 9.13 Si $c(t)$ es una geodésica, entonces $|c'(t)| = cte$ y $t = as + b$, donde s es el parámetro longitud de arco de c , y a, b son constantes reales. .

Demostración Si $c(t) = F \circ \alpha$, $\alpha : [d, \delta] \rightarrow U$ es geodésica, $c'(t)$ es paralelo a lo largo de c y, por 9.8, $a := |c'(t)|$ es constante. Entonces el parámetro longitud de arco s de c viene dado por $s(t) = \int_d^t |c'(t)| dt = a(t - d) = at - ad = at - b$, con $b = ad$. \square

Nota 9.14 Si $t = \varphi(s)$ es una reparametrización de una curva $c(t)$ sobre una superficie y hacemos la misma reparametrización del campo vectorial $X(t)$ tangente a la misma superficie a lo largo de esa curva, i.e., consideramos $X \circ \varphi(s)$ tenemos que $\frac{\nabla(X \circ \varphi)}{ds} = \frac{d(X \circ \varphi)}{ds} - \left\langle \frac{d(X \circ \varphi)}{ds}, N \right\rangle N = \frac{dX}{dt} \circ \varphi \dot{\varphi}(s) - \dot{\varphi} \left\langle \frac{dX}{dt} \circ \varphi, N \right\rangle N =$

$\dot{\varphi} \frac{\nabla X}{dt} \circ \varphi$. Por lo tanto, si se trata de derivar el propio vector tangente a la curva $c \circ \varphi(s) := \frac{d(c \circ \varphi)}{ds} = \dot{\varphi}(s) \frac{dc}{dt}(\varphi(s)) =: \dot{\varphi}(s) c'(\varphi(s))$, tenemos que

$$\frac{\nabla c \circ \varphi}{ds}(s) = \frac{\nabla(\dot{\varphi}(s) c' \circ \varphi)}{ds}(s) = \ddot{\varphi}(s) c' \circ \varphi(s) + \dot{\varphi}(s)^2 \frac{\nabla c'}{dt} \circ \varphi(s). \quad (9.3)$$

Resulta de ello que si el cambio de parámetro no es lineal (de la forma $t = a s + b$), la anulaci3n de una derivada covariante no es equivalente a la de la otra, de acuerdo con la observaci3n anterior de que para que $c(t)$ sea geodésica el parámetro t ha de ser una funci3n lineal de s .

Nota 9.15 En el plano $\frac{\nabla X}{dt} = \frac{dX}{dt}$, luego $c(t)$ es una geodésica sii $c(t) = tX_0 + Y_0$, i.e., si $c(t)$ una recta parametrizada por un parámetro $t = as + b$, siendo s la longitud de arco de c ($|c'| = |X_0| = a$, $b = ad$).

En el plano las rectas son tambi3n las curvas de curvatura cero. Para caracterizar de igual modo las geodésicas vamos a definir una curvatura intrínseca para las curvas en una superficie.

Definici3n 9.16 Dada una curva regular $c = F \circ \alpha$, $\alpha : I \rightarrow U$, llamaremos referencia de Frenet (intrínseca) de c en F a los campos vectoriales tangentes $\bar{e}_1(t), \bar{e}_2(t)$ definidos a lo largo de la curva c por $\bar{e}_1(t) = c'(t)/|c'(t)|$, y $\bar{e}_2(t)$ elegido de modo que $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ sea una base ortonormal de $T_{\alpha(t)}F$ con la misma orientaci3n que la base can3nica $\{F_1, F_2\}$.

Esta definici3n es equivalente a la siguiente:

Proposici3n 9.17 Dada una superficie parametrizada $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ y el campo vectorial unitario normal $N = \frac{F_1 \wedge F_2}{|F_1 \wedge F_2|}$, y una curva de la superficie c , la referencia de Frenet de $c(t)$ en F est3 formada por los campos vectoriales $\bar{e}_1(t) = c'(t)/|c'(t)|$ y $\bar{e}_2(t) = N(\alpha(t)) \wedge \bar{e}_1(t)$.

Demostraci3n Basta con comprobar que las bases $\{F_1, F_2\}$ y $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2 = N \wedge \bar{e}_1\}$ definen la misma orientaci3n, lo que es consecuencia de que $\bar{e}_1 \wedge (N \wedge \bar{e}_1) = N$. \square

Nota 9.18 La derivada covariante comparte la siguiente propiedad con la derivada ordinaria: "Si X es un campo vectorial unitario tangente a una superficie a lo largo de una curva, entonces $\left\langle \frac{\nabla X}{dt}, X \right\rangle = 0$ ". En efecto, por ser $1 = \langle X, X \rangle$, derivando $0 = 2 \left\langle X, \frac{\nabla X}{dt} \right\rangle = 0$.

Esta propiedad tiene como consecuencia que $\frac{\nabla \bar{e}_1}{dt}$ es ortogonal a \bar{e}_1 y, por lo tanto, está en la dirección de \bar{e}_2 , lo que permite definir la curvatura geodésica de una curva de una superficie de modo completamente análogo a como definíamos la curvatura de una curva en el plano del siguiente modo

Definición 9.19 *La curvatura geodésica de una curva c sobre una superficie F es la función definida en cada punto de la curva por la expresión:*

$$\frac{\nabla \bar{e}_1}{dt} = |c'(t)| k_g(t) \bar{e}_2(t). \quad (9.4)$$

O, lo que es equivalente:

$$k_g(t) = \frac{1}{|c'(t)|} \left\langle \frac{\nabla \bar{e}_1}{dt}, \bar{e}_2(t) \right\rangle. \quad (9.5)$$

Nota 9.20 *Obsérvese que la expresión (9.4) confirma que la referencia de Frenet es intrínseca (como corresponde a su definición) a pesar de que se calcula usando el vector unitario normal.*

Proposición 9.21 *Sea c una curva regular en una superficie F , κ su curvatura como curva de \mathbb{R}^3 , k_g su curvatura geodésica y k_N su curvatura normal en la superficie F . Entonces $\kappa e_2 = k_g \bar{e}_2 + k_N N$. Es decir, la curvatura geodésica de una curva en una superficie es la componente tangencial de la curvatura de la curva en \mathbb{R}^3 .*

Demostración Por las fórmulas de Frenet de una curva en \mathbb{R}^3 , $|c'| \kappa e_2 = \frac{de_1}{dt} = \frac{\nabla e_1}{dt} + \langle Lc', e_1 \rangle N = |c'| k_g \bar{e}_2 + |c'| \langle Le_1, e_1 \rangle N = |c'| (k_g \bar{e}_2 + k_N(c')N)$. \square

A partir de ahora vamos a hacer un estudio de las propiedades de la curvatura geodésica de una curva sobre una superficie que tienen su correspondencia perfecta con las propiedades de la curvatura de una curva en el plano. Es interesante que el lector estudie estas propiedades recordando las propiedades en el plano \mathbb{R}^2 y comparando con ellas.

Proposición 9.22 *k_g no cambia por un cambio de parámetro de c que conserve la orientación. Cambia de signo con un cambio de parámetro que cambie la orientación. Cambia de signo con un cambio de la orientación de la superficie, es decir, con una reparametrización de la superficie que cambie la orientación de la base canónica.*

Demostración De 9.21 resulta que $k_g = \kappa \langle e_2, \bar{e}_2 \rangle$. Si se hace un cambio de parámetro de c conservando la orientación, no varían ni κ , ni e_2 , ni \bar{e}_2 , luego no varía k_g .

Si se hace un cambio de parámetro de c invirtiendo la orientación, κ no varía, e_1 cambia de signo, por lo tanto \bar{e}_2 cambia de signo, mientras que e_2 no cambia de signo, luego k_g cambia de signo.

Si se cambia la orientación de $\{F_1, F_2\}$ cambia el signo de N , luego cambia el signo de \bar{e}_2 , sin que cambien κ ni e_2 , por lo tanto k_g cambia de signo. \square

Proposición 9.23 Caracterización de las geodésicas por k_g : Una curva regular $c : I \rightarrow F(U)$ sobre una superficie F es una geodésica si y solo si tiene curvatura geodésica cero y está parametrizada con un parámetro $t = a s + b$, donde s es la longitud de arco de c y $a, b \in \mathbb{R}$.

Demostración Si c es una geodésica, se deduce la Proposición 9.13 y de la definición de k_g que $t = a s + b$ y que $k_g = 0$. Recíprocamente, si se cumplen esas condiciones, como, por (9.4), $k_g = 0$ equivale a $\frac{\nabla \bar{e}_1}{dt} = 0$ y $\bar{e}_1 = \frac{c'}{|c'|} = \frac{1}{a} c'$, se tiene que $\frac{1}{a} \frac{\nabla c'}{dt} = 0$ y, por lo tanto $c(t)$ es una geodésica. \square

Proposición 9.24 Ecuaciones de Frenet para una curva en una superficie. Si c es una curva sobre la superficie:

$$\frac{\nabla \bar{e}_1}{ds} = |c'| k_g \bar{e}_2 \quad \frac{\nabla \bar{e}_2}{ds} = -|c'| k_g \bar{e}_1. \quad (9.6)$$

Demostración La primera ecuación es la definición de k_g . Para obtener la segunda partimos de la Nota 9.18 por la cual $\langle \frac{\nabla \bar{e}_2}{ds}, \bar{e}_2 \rangle = 0$, por lo que $\frac{\nabla \bar{e}_2}{ds} = \left\langle \frac{\nabla \bar{e}_2}{ds}, \bar{e}_1 \right\rangle \bar{e}_1 = \left(\frac{d}{ds} \langle \bar{e}_2, \bar{e}_1 \rangle - \left\langle \bar{e}_2, \frac{\nabla \bar{e}_1}{ds} \right\rangle \right) \bar{e}_1 = -\langle \bar{e}_2, |c'| k_g \bar{e}_2 \rangle \bar{e}_1 = -|c'| k_g \bar{e}_1$. \square

Vamos a ver ahora una interpretación geométrica de la curvatura geodésica semejante a la que se dio para la curvatura de una curva plana:

Proposición 9.25 La curvatura geodésica de una curva es (salvo la parametrización) la derivada del ángulo que la tangente a la curva forma con una dirección paralela a lo largo de la curva. Con más precisión: Sea $c : I \rightarrow F(U)$ una curva sobre la superficie $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $c = F \circ \alpha$, $Y(s)$ un campo paralelo a lo largo de c . Sea $\varphi(s)$ es el ángulo que forma $Y(s)$ con $c'(s) = |c'(s)| e_1(s)$, entonces $\varphi'(s) = -|c'(s)| k_g(s)$

Demostración Puesto que $Y(s)$ está en el plano generado por $e_1(s)$ y $\bar{e}_2(s)$, podemos escribir $Y(s) = \cos \varphi(s) \bar{e}_1(s) + \sin \varphi(s) \bar{e}_2(s)$, de donde:

$$0 = \frac{\nabla Y}{ds}(s) = -\sin(\varphi) \varphi' \bar{e}_1 + \cos(\varphi) |c'| k_g \bar{e}_2 + \cos(\varphi) \varphi' \bar{e}_2 - \sin(\varphi) |c'| k_g \bar{e}_1 \quad (9.7)$$

$$= -\sin(\varphi)(\varphi' + |c'| k_g) \bar{e}_1 + \cos(\varphi)(k_g + |c'| \varphi') \bar{e}_2, \quad (9.8)$$

de donde se deduce que $\varphi'(s) = -|c'| k_g(s)$. \square

Nota 9.26 Obsérvese que esta propiedad ($k_g = -\varphi'(s)$) da un método práctico para calcular el transporte paralelo a lo largo de una curva.

En el plano, por un punto y en una dirección pasa una única recta. El resultado análogo para las geodésicas es el siguiente:

Proposición 9.27 : Dado un punto $u \in U$, $Y \in T_{u_0}F$, $Y \neq 0$, existe un $\varepsilon > 0$ y existe una única geodésica $c = F \circ \alpha$, $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow U$, tal que $\alpha(0) = u_0$, $c'(0) = Y$.

Demostración Por la definición de geodésica 9.12 y la expresión (9.2) que da el cálculo de la derivada covariante en coordenadas resulta que $c(t)$ es una geodésica de F con las condiciones iniciales dada antes si sus coordenadas $u^i(t)$ (definidas por $\alpha(t) = (u^1(t), u^2(t))$) verifican el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0, \quad k = 1, 2 \tag{9.9}$$

$$u^k(0) = u_0^k, \quad \text{donde } u_0 = (u_0^1, u_0^2) \tag{9.10}$$

$$\frac{du^k}{dt}(0) = Y^k, \quad \text{donde } Y = Y^1 F_1 + Y^2 F_2. \tag{9.11}$$

Entonces la proposición resulta del teorema del teorema de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales. \square

9.4. Ejemplos de geodésicas y de cálculos de transporte paralelo

Ejemplo 9.28 En la esfera las geodésicas son las circunferencias máximas. En efecto: tales circunferencias se obtienen por intersección de la esfera con planos pasando por el origen. El vector normal e_2 de una tal circunferencia en un punto está en la dirección del radio de la esfera que, a su vez, está en la dirección del vector normal a la esfera N . Por lo tanto, resulta de la Proposición 9.21 que la curvatura geodésica de una tal circunferencia es cero y, por I9.23, es una geodésica cuando se parametriza respecto de su longitud de arco.

Por otra parte, para todo punto p de la esfera y todo vector X , el plano que pasa por el centro de la esfera y contiene a p y $p + X$ corta a la esfera en una circunferencia máxima c que pasa por p y tiene X como vector tangente. Por 9.27 y por lo que acabamos de ver, esta circunferencias c es la única geodésica que pasa por p y con X como vector tangente. Por lo tanto las circunferencias máximas son todas las geodésicas de la esfera.

Ejemplo 9.29 En el cilindro los mismos argumentos utilizados en 9.28 muestran que las circunferencias que se obtienen por intersección del cilindro con planos perpendiculares al eje del cilindro son geodésicas del cilindro. También lo son las rectas generatrices, pues en ellas $k_g = k = 0$.

Si queremos obtener todas las geodésicas habremos de enfocar el problema de otro modo. Observemos que el cilindro $F(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$ es localmente isométrico al plano mediante una isometría f de la forma $f(u, v) = F(\frac{u}{r}, v)$. Como las geodésicas del plano son de la forma $c(s) = (\delta + a s, d + b s)$, las del cilindro son localmente de la

forma $f \circ c(s) = F\left(\frac{1}{r}(\delta + a s), d + b s\right) = \left(r \cos\left(\frac{1}{r}(\delta + a s)\right), r \sin\left(\frac{1}{r}(\delta + a s)\right), d + b s\right)$, que son hélices apoyadas en el cilindro, que se convierten en circunferencias cuando $b = 0$ y en rectas cuando $a = 0$ (las dos familias de geodésicas obtenidas antes por otro razonamiento).

Ejemplo 9.30 Transporte paralelo a lo largo de un paralelo de la esfera.

Consideremos la esfera S^2 con la parametrización $F(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$, $(u, v) \in]-\pi/2, \pi/2[\times]0, 2\pi[$. Sea $c(t)$ el paralelo de S^2 dado por $c(t) = F(a, t)$ (i.e. $u(t) = a, v(t) = t$). El vector unitario normal "hacia afuera" de S^2 a lo largo de c es: $N \circ c(t) = c'(t) = (\cos a \cos t, \cos a \sin t, \sin a)$.

De la expresión de c (un paralelo obtenido cortando la esfera por el plano $z = \sin a$) se deduce que c es una circunferencia de radio $\cos a$, vector unitario normal e_2 dirigido hacia el eje z dado por $e_2(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$, vector unitario tangente $e_1 = (-\sin t, \cos t, 0)$ y curvatura $\kappa = \frac{1}{\cos a}$. Por otro lado $\bar{e}_2(t) = N \circ c(t) \wedge e_1(t) = (-\sin a \cos t, -\sin a \sin t, \cos a)$. Se deduce de todo ello que $k_g = \kappa \langle e_2, \bar{e}_2 \rangle = \frac{1}{\cos a} \sin a$. Usamos ahora la nota 9.26 para calcular el transporte paralelo del vector $Y_0 = c'(0)$ a lo largo de c desde $t = 0$ hasta $t = \pi$. Primero reparametrizamos c respecto de su longitud de arco $s(t) = \int_0^t |c'(t)| dt = \cos(a)t$, $c(t(s)) = c\left(\frac{1}{\cos a}s\right)$, $\varphi'(s) = -k_g(t(s)) = -\operatorname{tg} a$, $\varphi(s) = \varphi(0) + \int_0^s (-\operatorname{tg} a) ds = \varphi(0) - \operatorname{tg}(a)s$. Como $Y(0) = c'(0) = \cos(a)e_1(0)$, $\varphi(0) = 0$. En $t = \pi$, $s = \cos(a)\pi$, y el transportado paralelo de $c'(0)$ de $c(0)$ a $c(\pi)$ es

$$\begin{aligned} Y(\cos(a)\pi) &= \cos(a) (\cos(\varphi(\cos(a)\pi))e_1(\pi) + \sin(\varphi(\cos(a)\pi))\bar{e}_2(\pi)) \\ &= \cos(a) (\cos(-\sin(a)\pi)(0, -1, 0) + \sin(-\sin(a)\pi)(\sin a, 0, \cos a)) \\ &= \cos(a) (\sin(-\sin(a)\pi) \sin a, -\cos(-\sin(a)\pi), \sin(-\sin(a)\pi) \cos a). \end{aligned}$$

9.5. Caracterización variacional de las geodésicas

Una variación de una curva $c_0(s)$ es una familia de curvas $c(\cdot, t) : I \rightarrow F(U)$, $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ tal que $c(s, 0) = c_0(s)$. Sea $L(t) = \int_a^b \left| \frac{\partial c}{\partial s}(s, t) \right| ds$ la longitud de la curva $c(\cdot, t)$. Una condición necesaria para que la curva c_0 tenga longitud menor que todas las demás de la variación es que $\frac{dL}{dt}(0) = 0$. Vamos a ver que esa condición se traduce en

Proposición 9.31 Una curva $c_0(s) = F \circ \alpha_0(s)$, $\alpha_0 : [a, b] \rightarrow U$, sobre una superficie tiene curvatura geodésica 0 si y solo si para toda variación $\alpha : [a, b] \times]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow U$ que verifica $\alpha(a, t) = \alpha_0(a)$, $\alpha(b, t) = \alpha_0(b)$ para todo $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ y $\alpha(s, 0) = \alpha_0(s)$ para todo $s \in [a, b]$, la derivada de la longitud de arco de la variación en c_0 es 0.

Demostración $\frac{dL}{dt}(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_a^b \left| \frac{\partial c}{\partial s}(s, t) \right| ds$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \frac{1}{|\frac{\partial c}{\partial s}(s, t)|} \left\langle \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial c}{\partial s}(s, t), \frac{\partial c}{\partial s}(s, t) \right\rangle ds \\
&= \int_a^b \frac{1}{|\frac{\partial c}{\partial s}(s, t)|} \left\langle \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial c}{\partial t}(s, t), \frac{\partial c}{\partial s}(s, t) \right\rangle ds \\
&= \int_a^b \frac{1}{|\frac{\partial c}{\partial s}(s, t)|} \left(\frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial c}{\partial t}(s, t), \frac{\partial c}{\partial s}(s, t) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial c}{\partial t}(s, t), \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial c}{\partial s}(s, t) \right\rangle \right) ds
\end{aligned}$$

Si c_0 tiene longitud mínima para toda variación, $\frac{dL}{dt}(0) = 0$ para toda variación, en particular para variaciones normales (i.e. tales que $\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}(s, t), \frac{\partial c}{\partial s}(s, t) \right\rangle(s, 0) = 0$ para todo $s \in I$) para las cuales la igualdad $\frac{dL}{dt}(0) = 0$ implica que $\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial c}{\partial s}(s, 0)$ está en la dirección de $\frac{\partial c}{\partial s}(s, 0)$, lo que significa que vale 0 si $c_0(s)$ está parametrizada por la longitud de arco, que es lo mismo que decir que es una geodésica cuando se parametriza por la longitud de arco o, equivalentement, que tiene $k_g = 0$. \square

Capítulo 10

Variedades diferenciables

A partir de ahora pondremos en azul las cosas que se dejan a la curiosidad del lector y que no habrá preocupación de explicar en clase, aunque quizás se haga alguna mención de ello

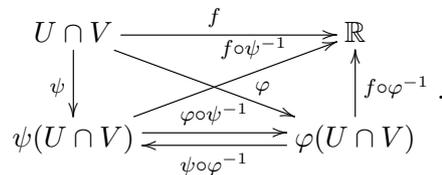
10.1. Introducción

En cursos anteriores se ha estudiado el cálculo diferencial sobre el espacio vectorial euclídeo. Este cálculo ha sido una de las herramientas más potentes utilizadas para comprender las propiedades matemáticas (geométricas y analíticas) del espacio euclídeo, sobre todo cuando se trataba de estudiar objetos no lineales y no directamente accesibles a técnicas puramente algebraicas. Si el espacio que se quiere estudiar es, él mismo, no lineal (i.e., no tiene estructura de espacio vectorial), no es de esperar que las técnicas del álgebra lineal, solas, sirvan para estudiarlo, y, si es posible definir un cálculo diferencial sobre ese espacio, será la herramienta natural para comprenderlo. Las variedades diferenciables son los espacios para los que todavía es posible extender, con cierta facilidad, el cálculo diferencial conocido para \mathbb{R}^n . Se emplea entonces este cálculo para estudiar las propiedades de esos espacios. La mayoría de los lectores de estas notas ya se han encontrado alguna vez con las variedades diferenciables. En algunos cursos se introdujo el concepto de k -superficie de \mathbb{R}^n para explicar los máximos y mínimos condicionados y en el Análisis Vectorial. Otros han tenido un segundo encuentro con las variedades al estudiar superficies el cuatrimestre pasado, que, en muchos casos, son variedades definidas por una sola carta. Además, al final del curso de Topología se han estudiado las variedades topológicas, e incluso se ha visto la clasificación completa de las 2-variedades topológicas compactas.

Ocurre (hablaremos de ello más adelante) que toda variedad diferenciable es una k -variedad de algún \mathbb{R}^n (para n suficientemente grande). A pesar de esta última afirmación, introduciremos las variedades diferenciables como espacios abstractos no necesariamente contenidos en ningún \mathbb{R}^n . La razón para ello es que en muchas ocasiones estos espacios se conocen primero directamente por ellos mismos, sin conocerlos como subconjunto de ningún \mathbb{R}^n (el establecer en que \mathbb{R}^n pueden meterse es ya un proble-

ma interesante). Además, en muchos casos es más cómodo trabajar con ellos de esta manera abstracta.

La idea que está en la base de la definición de variedad diferenciable es muy sencilla (aunque esta sencillez parezca desmentida por la historia, pues se suele citar un libro de Veblen y Whitehead, de 1932, como el primero que contiene una definición rigurosa de variedad diferenciable, cuando ya se llevaba unos cuantos años trabajando con ellas). Puesto que sabemos hacer cálculo diferencial en \mathbb{R}^n , si podemos establecer biyecciones entre trozos U de un espacio M y abiertos de \mathbb{R}^n , podremos trasladar, para cada trozo, el cálculo diferencial de \mathbb{R}^n a través de esa biyección. Este cálculo diferencial se aplicaría a las funciones diferenciables. ¿Cuáles serían éstas?. Si $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una de las biyecciones de que hablábamos, es natural decir que $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable si lo es $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Pero es natural también que exijamos que el concepto de diferenciable para f no dependa de la biyección elegida. Así, si tenemos $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ otra biyección tal que $U \cap V \neq \emptyset$, de acuerdo con lo anterior, f será diferenciable en V si lo es $f \circ \psi^{-1}$. Para que el concepto “ f diferenciable en $U \cap V$ ” no dependa de haber elegido (U, φ) o (V, ψ) , nos interesa exigir que f sea diferenciable usando la biyección $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ (i.e. $f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable) si lo es usando la biyección $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ (i.e. $f \circ \psi^{-1}$ es diferenciable). Para que sea así se exigirá que $\psi \circ \varphi^{-1}$ sea un difeomorfismo sobre el abierto de \mathbb{R}^n sobre el que esté definida. En efecto, si $\psi \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo, se tiene que si $f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable, entonces $f \circ \psi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1})$ es diferenciable, y recíprocamente, como ilustra el diagrama



En la próxima sección daremos esta definición con toda precisión. Pero en lugar de empezar de cero, como hemos sugerido en esta introducción, empezaremos basándonos en el concepto de variedad topológica que se estudió en el curso anterior. La definición 10.1 consistirá, de hecho, en copiar (no palabra por palabra, pero si los conceptos) la definición de variedad topológica (condiciones (i) y (ii) de la definición) y añadirle la condición (iii) que es la que permite introducir un cálculo diferencial en la variedad.

10.2. Concepto de variedad diferenciable

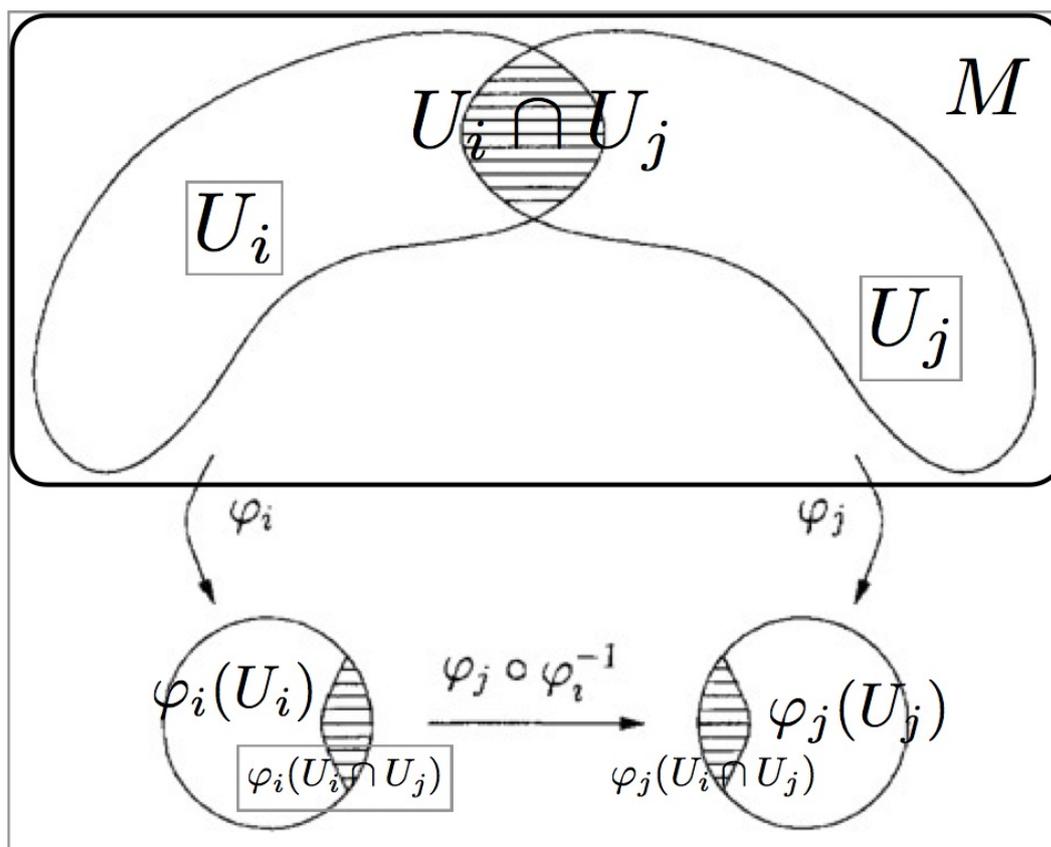
Definición 10.1 Una variedad diferenciable M de dimensión n y clase C^k es un espacio topológico M junto con una familia de pares $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ que verifican:

- (i) U_i son subconjuntos abiertos de M y $\cup_{i \in I} U_i = M$.
- (ii) Para todo $i \in I$, φ_i es una aplicación de U_i en \mathbb{R}^n tal que $\varphi_i(U_i)$ es un abierto de \mathbb{R}^n y $\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi_i(U_i)$ es un homeomorfismo.
- (iii) Para cualesquiera $i, j \in I$, la aplicación $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ es de clase C^k .

Los pares (U_i, φ_i) se llaman **cartas** de la variedad o, también, *bf* sistemas de coordenadas. A las coordenadas de $\varphi_i(x) \in \mathbb{R}^n$ se las llama también *bf* coordenadas de x en la carta φ_i .

A la familia de cartas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ que verifica la condición anterior se la llama **atlas**.

Un atlas sobre un espacio topológico M que convierte a M en una variedad diferenciable se dice que define una estructura diferenciable sobre M .



Nota 10.2 Al igual que se hizo en Topología, exigiremos, además, que el espacio topológico sea 2AN y Hausdorff, condiciones que se verificarán automáticamente si M es un subespacio topológico de \mathbb{R}^n (caso de las subvariedades estudiadas en Análisis). Por otro lado, la condición 2AN se verifica automáticamente si M es compacto.

Comparando esta definición con la de variedad topológica estudiada en Topología, el lector se dará cuenta inmediatamente de que una variedad diferenciable es una variedad topológica. La condición que se añade es que los “cambios de coordenadas” (análogos a los cambios de parametrización que estudiábamos en superficies) $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ sean difeomorfismos.

En realidad, no necesitamos partir de un espacio topológico. Un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ sobre un conjunto M que cumpla sólo las propiedades (ii) y (iii) de la Definición 10.1

(cambiando homeomorfismo por biyección en (ii)), define de por sí una topología sobre M . Si con esa topología M es 2AN y Hausdorff, entonces M y el atlas de partida verifican la Definición 10.1. Para el lector interesado, exponemos con más precisión esta definición alternativa y su equivalencia con la dada en el apéndice A.

Nota 10.3 *En principio, un conjunto puede aceptar más de un atlas de clase C^k y dimensión n . Supongamos que tenemos dos de tales atlas sobre un conjunto M . La unión de tales atlas no es necesariamente un atlas, como muestra el siguiente ejemplo. Sean*

$$M = \mathbb{R}, \quad U = V = \mathbb{R}, \quad \varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}/\varphi(t) = t, \quad \psi : V \longrightarrow \mathbb{R}/\psi(t) = t^3.$$

Los pares (U, φ) y (V, ψ) son cartas de M . Cada una de ellas, por sí sola, es un atlas, pero su unión no lo es, pues $\psi \circ \varphi^{-1}(t) = t^3$ tiene derivada 0 en $0 \in \varphi(U \cap V) = \mathbb{R}$ y, por lo tanto, no es un difeomorfismo.

Si la unión de dos atlas \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 no es un atlas, puede ocurrir que una función diferenciable (con la definición dada en la introducción) para el atlas \mathcal{A}_1 no lo sea para el \mathcal{A}_2 (de hecho estas funciones existen siempre, ver apéndice), y se considerarán, por tanto, como distintas las “estructuras diferenciables” definidas por \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 sobre M . En cambio, si la unión de \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 sí que es un atlas, una función es diferenciable para el atlas \mathcal{A}_1 si lo es para el \mathcal{A}_2 , luego podríamos considerar que definen la misma “estructura diferenciable” sobre M . De ahí que para la definición del concepto de variedad diferenciable M (esto es, de una estructura diferenciable sobre M) sea necesario, o bien introducir una relación de equivalencia entre los atlas definidos sobre M , o bien introducir el concepto de atlas maximal (que es lo que haremos aquí), de tal manera que, dado un atlas \mathcal{A} sobre M , consideraremos sobre M la estructura diferenciable definida por un atlas que contiene a \mathcal{A} y a todos aquellos que, unidos a \mathcal{A} , siguen siendo un atlas (este será el atlas maximal que contine a \mathcal{A}).

Definición 10.4 *Un atlas de dimensión n y clase C^k se dice que es maximal o completo si no está contenido en ningún otro atlas de dimensión n y clase C^k .*

Proposición 10.5 *Todo atlas de dimensión n y clase C^k está contenido en un único atlas de dimensión n y clase C^k maximal.*

Demostración Sea $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ un atlas dimensión n y clase C^k sobre M . Sea $\tilde{\mathcal{A}}$ la colección de todas las cartas (U, φ) sobre M de dimensión n y clase C^k tales que para todo $i \in I$ se tiene que $\varphi \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U \cap U_i) \longrightarrow \varphi(U \cap U_i)$ es un C^k -difeomorfismo. $\tilde{\mathcal{A}}$ es un atlas, **pues cumple las condiciones (i) y (ii) de modo automático, y para la (iii) se tiene:**

Dadas $(U, \varphi), (V, \psi) \in \tilde{\mathcal{A}}$, como φ y ψ son homeomorfismos sobre sus respectivas imágenes, se tiene que $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \varphi(U \cap V)$ es un homeomorfismo. Para ver que es un difeomorfismo, bastará con ver que para cada $z \in \psi(U \cap V)$ existe un abierto conteniendo a z tal que $\varphi \circ \psi^{-1}$ restringido a ese abierto es un difeomorfismo sobre su

imagen. Ahora bien, dado ese z , como $\psi(U \cap V) = \bigcup_{i \in I} \psi(U \cap U_i \cap V)$ (porque $M = \bigcup_{i \in I} U_i$), existe un $i \in I$ tal que $z \in \psi(U \cap U_i \cap V)$, y se puede escribir $\varphi \circ \psi^{-1}|_{\psi(U \cap U_i \cap V)} = (\varphi \circ \varphi_i^{-1})|_{\varphi_i(U \cap U_i \cap V)} \circ (\varphi_i \circ \psi^{-1})|_{\psi(U \cap U_i \cap V)}$, es decir, sobre el abierto $\psi(U \cap U_i \cap V)$ que contiene a z , $\varphi \circ \psi^{-1}$ se puede escribir como composición de difeomorfismos y es, por lo tanto, un difeomorfismo.

Que $\tilde{\mathcal{A}}$ es maximal y que es único son consecuencias del modo en que se ha definido $\tilde{\mathcal{A}}$. □

10.3. Ejemplos

Ejemplo 10.6 El primer ejemplo trivial de variedad diferenciable es el **espacio euclídeo** \mathbb{R}^n con la estructura diferenciable definida por el atlas maximal que contiene a la carta $(\mathbb{R}^n, \text{id})$.

Ejemplo 10.7 Las k -superficies regulares definidas en Análisis 3. $M \subset \mathbb{R}^3$ tales que existe una familia de pares $\{(A_i, x_i)\}_{i \in I}$ tales que A_i es un abierto de \mathbb{R}^k y $x_i : A_i \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ es una aplicación diferenciable (como aplicación de un abierto de \mathbb{R}^k en \mathbb{R}^n) verificando:

- (a) $\bigcup_{i \in I} x_i(A_i) = S$,
- (b) $x_i(A_i)$ es un abierto de M con la topología inducida por la de \mathbb{R}^n ,
- (c) $x_i : A_i \rightarrow x_i(A_i)$ es un homeomorfismo, y
- (d) $dx_i(a) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva para cada $a \in A_i$;

se tiene que las k -superficies de \mathbb{R}^n son variedades diferenciables de dimensión k . Para ver que es así basta con considerar sobre una superficie M definida como antes el atlas $\{(x_i(A_i), x_i^{-1})\}_{i \in I}$ y comprobar (usando teoremas vistos en el curso de Análisis 3) que es realmente un atlas sobre M .

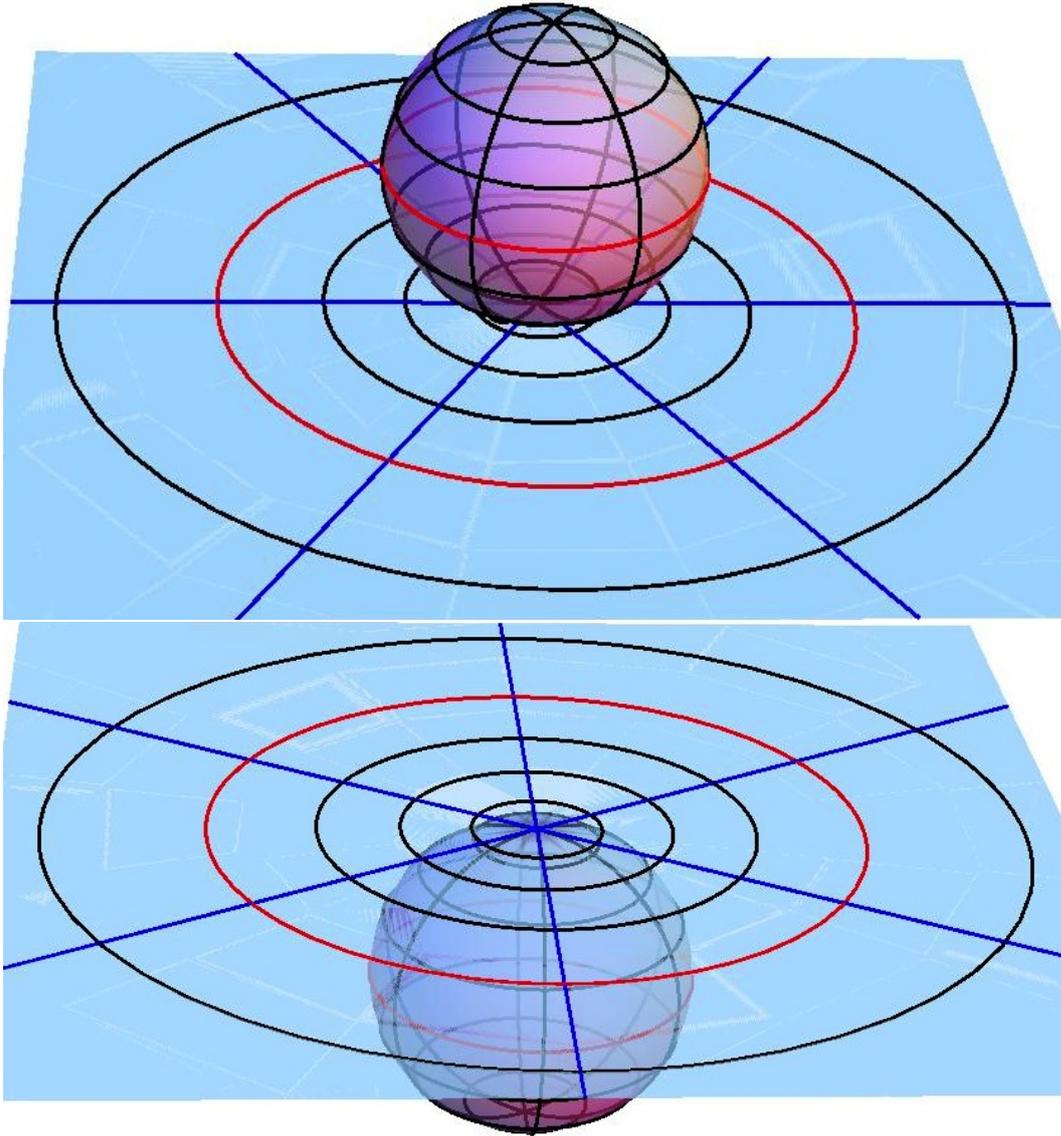
Ejemplo 10.8 Las superficies regulares parametrizadas $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, cuando U es un abierto del plano, F es biyectiva y un homeomorfismo sobre $F(U)$ (con la topología inducida por la de \mathbb{R}^3 , son variedades de dimensión 2 definidas por una sola carta (la inversa de la parametrización)).

Ejemplo 10.9 La esfera de dimensión n , $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / |x| = 1\}$ es una variedad diferenciable de dimensión n y clase C^∞ . Vamos a verla usando la proyección estereográfica (siguiendo casi el mismo modelo que se vió en topología, y también en la primera parte de este curso, pero para dimensión n y proyectando sobre los planos tangentes a los polos en lugar de proyectar sobre el plano del ecuador).

Sean $\mathcal{N} = (0, \dots, 0, 1)$ y $\mathcal{S} = (0, \dots, 0, -1)$ los polos norte y sur de S^n . Sean $\mathbb{R}^n \times \{1\}$ el hiperplano de \mathbb{R}^{n+1} tangente a S^n en \mathcal{N} y $\mathbb{R}^n \times \{-1\}$ el hiperplano de \mathbb{R}^{n+1} tangente a S^n en \mathcal{S} . Sean $i_+ : \mathbb{R}^n \times \{1\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $i_- : \mathbb{R}^n \times \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ las aplicaciones definidas por $i_+(x^1, \dots, x^n, 1) = (x^1, \dots, x^n)$ e $i_-(x^1, \dots, x^n, -1) = (x^1, \dots, x^n)$. Las proyecciones estereográficas desde \mathcal{N} (que denotaremos $\pi_{\mathcal{N}}$) y desde \mathcal{S} (que denotaremos $\pi_{\mathcal{S}}$) se definen por:

$\pi_{\mathcal{N}} : S^n - \{\mathcal{N}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la aplicación que a cada $x \in S^n - \{\mathcal{N}\}$ le hace corresponder la imagen por i_- de la intersección de la recta que pasa por \mathcal{N} y x con el hiperplano de \mathbb{R}^{n+1} tangente a S^n en \mathcal{S} .

$\pi_{\mathcal{S}} : S^n - \{\mathcal{S}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la aplicación que a cada $x \in S^n - \{\mathcal{S}\}$ le hace corresponder la imagen por i_+ de la intersección de la recta que pasa por \mathcal{S} y x con el hiperplano de \mathbb{R}^{n+1} tangente a S^n en \mathcal{N} .



Las ecuaciones para estas aplicaciones son:

$$\pi_{\mathcal{N}}(x^1, \dots, x^{n+1}) = \frac{2}{1 - x^{n+1}}(x^1, \dots, x^n),$$

$$\pi_{\mathcal{S}}(x^1, \dots, x^{n+1}) = \frac{2}{1 + x^{n+1}}(x^1, \dots, x^n).$$

Estas ecuaciones se obtienen de la siguiente manera:

La de $\pi_{\mathcal{N}}$: Dado $x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n$, la ecuación de la recta que pasa por $\mathcal{N} = (0, \dots, 0, 1)$ es

$$\mathcal{N} + \lambda(x - \mathcal{N} \equiv (0, \dots, 0, 1) + \lambda(x^1, \dots, x^n, x^{n+1} - 1) \equiv (\lambda x^1, \dots, \lambda x^n, 1 + \lambda(x^{n+1} - 1)),$$

y su intersección con el hiperplano $\mathbb{R}^n \times \{-1\}$, de ecuación $y^{n+1} = -1$, se calcula escribiendo $1 + \lambda(x^{n+1} - 1) = -1$, de donde

$$\lambda = \frac{-2}{x^{n+1} - 1}$$

y la intersección es el punto

$$\left(\frac{-2}{x^{n+1} - 1}x^1, \dots, \frac{-2}{x^{n+1} - 1}x^n, -1\right),$$

de donde se tiene, tomando la imagen por i_- , la expresión que hemos dado para $\pi_{\mathcal{N}}$.

Para $\pi_{\mathcal{S}}$: Dado $x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n$, la ecuación de la recta que pasa por $\mathcal{S} = (0, \dots, 0, -1)$ es

$$\mathcal{S} + \lambda(x - \mathcal{S} \equiv (0, \dots, 0, -1) + \lambda(x^1, \dots, x^n, x^{n+1} + 1) \equiv (\lambda x^1, \dots, \lambda x^n, -1 + \lambda(x^{n+1} + 1)),$$

y su intersección con el hiperplano $\mathbb{R}^n \times \{1\}$, de ecuación $y^{n+1} = 1$, se calcula escribiendo $-1 + \lambda(x^{n+1} + 1) = 1$, de donde

$$\lambda = \frac{2}{x^{n+1} + 1}$$

y la intersección es el punto

$$\left(\frac{2}{x^{n+1} + 1}x^1, \dots, \frac{2}{x^{n+1} + 1}x^n, 1\right),$$

de donde se tiene, tomando la imagen por i_+ , la expresión que hemos dado para $\pi_{\mathcal{N}}$.

Evidentemente $\pi_{\mathcal{N}}(S^n - \{\mathcal{N}\}) = \mathbb{R}^n$, $\pi_{\mathcal{S}}(S^n - \{\mathcal{S}\}) = \mathbb{R}^n$, $(S^n - \{\mathcal{N}\}) \cap (S^n - \{\mathcal{S}\}) = S^n - \{\mathcal{N}, \mathcal{S}\}$, y $\pi_{\mathcal{N}}(S^n - \{\mathcal{N}, \mathcal{S}\}) = \mathbb{R}^n - \{0\}$ y $\pi_{\mathcal{S}}(S^n - \{\mathcal{N}, \mathcal{S}\}) = \mathbb{R}^n - \{0\}$ son abiertos de \mathbb{R}^n , luego se cumplen (i) y la primera parte de (ii) de la definición 10.1. Es claro que $\pi_{\mathcal{N}}$ y $\pi_{\mathcal{S}}$ son biyectivas y continuas. Para ver que son homomorfismos, calculamos $\pi_{\mathcal{N}}^{-1}$ y $\pi_{\mathcal{S}}^{-1}$,

$$\pi_{\mathcal{N}}^{-1}(y) = \left(\frac{4}{4 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2}y^1, \dots, \frac{4}{4 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2}y^n, \frac{-4 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2}{4 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2}\right),$$

$$\pi_{\mathcal{S}}^{-1}(y) = \left(\frac{4}{4 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2}y^1, \dots, \frac{4}{4 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2}y^n, \frac{4 - \sum_{i=1}^n (y^i)^2}{4 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2}\right),$$

que prueban que $\pi_{\mathcal{N}}$ y $\pi_{\mathcal{S}}$ son homomorfismos. Para ver que se cumple la condición (iii) hay que calcular

$$\pi_{\mathcal{S}} \circ \pi_{\mathcal{N}}^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \frac{4}{(y^1)^2 + \dots + (y^n)^2}(y^1, \dots, y^n),$$

y

$$\pi_{\mathcal{N}} \circ \pi_{\mathcal{S}}^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \frac{4}{(y^1)^2 + \dots + (y^n)^2}(y^1, \dots, y^n),$$

que prueba que $\pi_{\mathcal{S}} \circ \pi_{\mathcal{N}}^{-1}$ es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ en si mismo.

El cálculo de $\pi_{\mathcal{N}}^{-1}$, $\pi_{\mathcal{S}}^{-1}$, $\pi_{\mathcal{S}} \circ \pi_{\mathcal{N}}^{-1}$ y de $\pi_{\mathcal{N}} \circ \pi_{\mathcal{S}}^{-1}$ puede hacerse como sigue.

De la definición de $\pi_{\mathcal{N}}$ se deduce que la aplicación $\pi_{\mathcal{N}}^{-1}$ puede describirse como sigue: dado $y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$, se toma $y_- = i_-^{-1}(y) = (y^1, \dots, y^n, -1)$, entonces $\pi_{\mathcal{N}}^{-1}(y)$ es la intersección con S^n (distinta de \mathcal{N}) de la recta que pasa por \mathcal{N} y por y_- . Calculemos $\pi_{\mathcal{N}}^{-1}(y)$ usando esta descripción de $\pi_{\mathcal{N}}^{-1}$. La recta que pasa por \mathcal{N} y por y_- tiene por ecuación

$$\mathcal{N} + \lambda(y_- - \mathcal{N}) = (0, \dots, 0, 1) + \lambda(y^1, \dots, y^n, -1 - 1) = (\lambda y^1, \dots, \lambda y^n, 1 - 2\lambda).$$

La intersección con S^n son los puntos de esta recta que verifican la ecuación de S^n :

$$(\lambda y^1)^2 + \dots + (\lambda y^n)^2 + (1 - 2\lambda)^2 = 1,$$

i.e.

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^n (y^i)^2 + 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = 1, \quad \text{i.e.} \quad \lambda^2 \left(\sum_{i=1}^n (y^i)^2 + 4 \right) - 4\lambda = 0,$$

y los valores de λ que satisfacen esta ecuación son

$$\lambda = 0 \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{4}{4 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2},$$

el primero corresponde al punto \mathcal{N} , y el segundo a

$$\pi_{\mathcal{N}}^{-1}(y) = \left(\frac{4}{4 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2} y^1, \dots, \frac{4}{4 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2} y^n, \frac{-4 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2}{4 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2} \right),$$

obtenemos ahora la imagen de $\pi_{\mathcal{N}}^{-1}(y)$ por $\pi_{\mathcal{S}}$ usando la expresión que vimos antes para $\pi_{\mathcal{S}}$, y resulta así la expresión de $\pi_{\mathcal{S}} \circ \pi_{\mathcal{N}}^{-1}$ que dimos antes.

De la definición de $\pi_{\mathcal{S}}$ se deduce que la aplicación $\pi_{\mathcal{S}}^{-1}$ puede describirse como sigue: dado $y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$, se toma $y_+ = i_+^{-1}(y) = (y^1, \dots, y^n, 1)$, entonces $\pi_{\mathcal{S}}^{-1}(y)$ es la intersección con S^n (distinta de \mathcal{S}) de la recta que pasa por \mathcal{S} y por y_+ . Para calcular $\pi_{\mathcal{S}}^{-1}(y)$ obtenemos primero la ecuación de la recta que pasa por \mathcal{S} y por y_+

$$\mathcal{S} + \lambda(y_+ - \mathcal{S}) = (0, \dots, 0, -1) + \lambda(y^1, \dots, y^n, 1 + 1) = (\lambda y^1, \dots, \lambda y^n, -1 + 2\lambda).$$

La intersección con S^n son los puntos de esta recta cuyo parámetro λ verifica la ecuación

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^n (y^i)^2 + (2\lambda - 1)^2 = 1, \quad \text{i.e.} \quad \lambda^2 \left(\sum_{i=1}^n (y^i)^2 + 4 \right) - 4\lambda = 0,$$

que tiene por soluciones

$$\lambda = 0 \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{4}{4 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2},$$

la primera corresponde al punto \mathcal{S} , y la segunda a

$$\pi_{\mathcal{S}}^{-1}(y) = \left(\frac{4}{4 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2} y^1, \dots, \frac{4}{4 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2} y^n, \frac{4 - \sum_{i=1}^n (y^i)^2}{4 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2} \right),$$

y usando ahora la expresión que vimos para $\pi_{\mathcal{N}}$, calculamos $\pi_{\mathcal{N}} \circ \pi_{\mathcal{S}}^{-1}(y)$ y obtenemos la expresión que dimos antes.

Ejemplo 10.10 El espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^n$. Recordemos que se definía como el conjunto de las rectas vectoriales de \mathbb{R}^{n+1} . Lo dotamos de la topología cociente, de modo que si $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ es la proyección canónica sobre el conujto cociente, V es un abierto de $\mathbb{R}P^n$ si y solo si $\pi^{-1}(V)$ es un abierto de \mathbb{R}^{n+1} . Vamos a definir un atlas de dimensión n sobre él.

Consideremos sobre $\mathbb{R}P^n$ el sistema de coordenadas homogéneas asociado a la base canónica de \mathbb{R}^{n+1} . Definamos primero los subconjuntos V_i

$$V_i = \{[(x^1, \dots, x^{n+1})] / x^i \neq 0\}, \quad i = 1, \dots, n+1,$$

donde (x^1, \dots, x^{n+1}) son coordenadas homogéneas del punto $[(x^1, \dots, x^{n+1})]$ de $\mathbb{R}P^n$. Obsérvese que la condición $x^i \neq 0$ no depende de las coordenadas elegidas para representar el punto, pues si $[(x^1, \dots, x^{n+1})] = [(x'^1, \dots, x'^{n+1})]$, existe un $\lambda \neq 0$ tal que $x'^i = \lambda x^i$ y, por lo tanto, $x'^i \neq 0$ si y solo si $x^i \neq 0$. Además, $\pi^{-1}(V_i) = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) / x^i \neq 0\}$, que es un abierto de \mathbb{R}^{n+1} , luego V_i es un abierto de $\mathbb{R}P^n$.

Definamos ahora la aplicación:

$$\varphi_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^n / \varphi_i([(x^1, \dots, x^{n+1})]) = \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right). \quad (10.1)$$

Se comprueba que esta definición no depende de las coordenadas homogéneas elegidas del punto $[(x^1, \dots, x^{n+1})]$, y es biyectiva porque si $\frac{x^j}{x^i} = \frac{x'^j}{x'^i}$ para todo j , entonces, como $x^i \neq 0$, $x'^j = \frac{x'^i}{x^i} x^j$ para todo j y, por tanto $[(x'^1, \dots, x'^{n+1})] = [(x^1, \dots, x^{n+1})]$. Además $\varphi_i(V_i) = \mathbb{R}^n$ (pues para todo $(y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$ se tiene $\varphi_i(y^1, \dots, y^{i-1}, 1, y^i, \dots, y^n) = (y^1, \dots, y^n)$). Además $\varphi_i \circ \pi$ tiene también la expresión dada por (10.1), luego es continua, por lo tanto φ_i es continua. Su inversa φ_i^{-1} se puede escribir de la forma $\varphi_i^{-1}(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n) = \pi(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^n)$, que es continua, luego $\varphi_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo, luego se cumple la condición (ii) de la definición 10.1 (i.e. (V_i, φ_i) son cartas de $\mathbb{R}P^n$). La condición (i) es consecuencia de que $\bigcup_{i=1}^{n+1} V_i = \mathbb{R}P^n$, ya que no hay ningún punto de $\mathbb{R}P^n$ que tenga nulas todas sus coordenadas homogéneas. Para probar la condición (iii), supongamos, por comodidad de escritura, que $i < j$, se tiene

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(y^1, \dots, y^{i-1}, y^{i+1}, \dots, y^{n+1}) = \left(\frac{y^1}{y^j}, \dots, \frac{y^{i-1}}{y^j}, \frac{1}{y^j}, \frac{y^{i+1}}{y^j}, \dots, \frac{y^{j-1}}{y^j}, \frac{y^{j+1}}{y^j}, \dots, \frac{y^{n+1}}{y^j} \right).$$

y

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(y^1, \dots, y^{j-1}, y^{j+1}, \dots, y^{n+1}) = \left(\frac{y^1}{y^i}, \dots, \frac{y^{i-1}}{y^i}, \frac{y^{i+1}}{y^i}, \dots, \frac{y^{j-1}}{y^i}, \frac{1}{y^i}, \frac{y^{j+1}}{y^i}, \dots, \frac{y^{n+1}}{y^i} \right).$$

que son, claramente, aplicaciones diferenciables.

Ejemplo 10.11 Vamos a ver **otro modelo equivalente del espacio proyectivo**.

Sea $\|\cdot\|$ la norma canónica de \mathbb{R}^{n+1} , es decir, dado $x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|x\|^2 = (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2$. La esfera de radio 1 en \mathbb{R}^{n+1} es el conjunto $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$.

La relación de equivalencia \sim definida sobre $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ como en 1.A.7 se puede restringir a S^n dando una nueva relación de equivalencia, que seguiremos denotando por \sim . Obsérvese que: si $x, y \in S^n$, $x \sim y$ sii $y = x$ ó $y = -x$, puesto que $x \sim y$ sii $y = \lambda x$, y $y \in S^n$ implica $1 = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| = |\lambda|$.

Proposición 10.12 $\mathbb{R}P^n$ está en biyección con S^n / \sim .

Demostración La aplicación

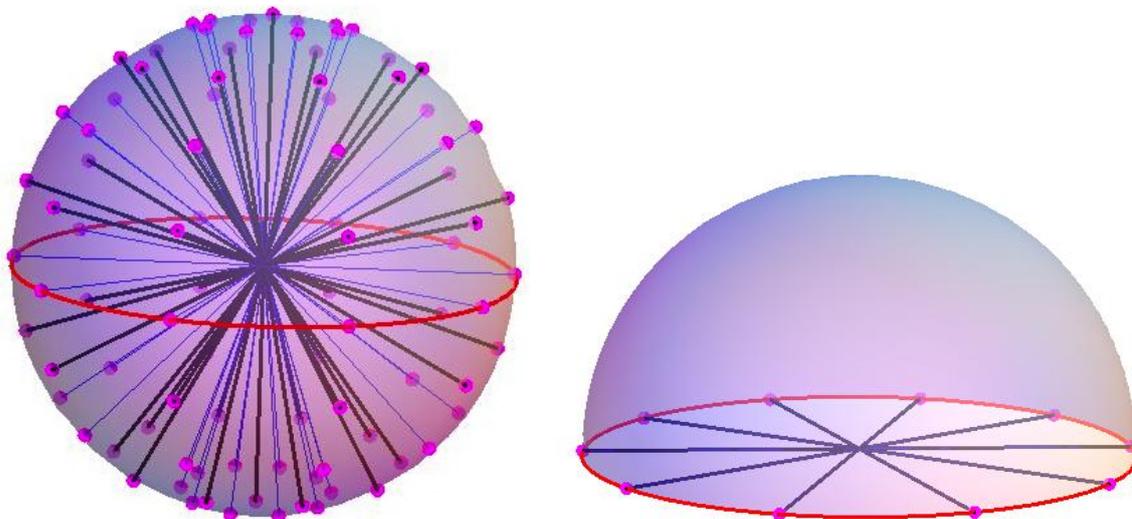
$$\xi : (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) / \sim \longrightarrow S^n / \sim \text{ dada por } \xi([x]) = \left[\frac{x}{\|x\|} \right]$$

está bien definida y es una biyección. En efecto: si $y \in [x]$, $y = \lambda x$, luego

$$\frac{y}{\|y\|} = \frac{\lambda x}{|\lambda| \|x\|} = \frac{\lambda}{|\lambda|} \frac{x}{\|x\|} \text{ lo que implica } \frac{x}{\|x\|} \sim \frac{y}{\|y\|},$$

luego ξ no depende del elemento de $[x]$ elegido. Además se comprueba fácilmente que la aplicación de S^n / \sim en $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) / \sim$ definida por $[u] \mapsto [u]$ es su inversa, luego ξ es una biyección, y esto prueba la proposición. \square

La última proposición da la imagen de $\mathbb{R}P^n$ como una semiesfera de S^n en la que se han identificado los puntos opuestos del ecuador. En el caso $n = 2$ tenemos los siguientes dibujos



Ejercicio ¿Qué variedad conocida es $\mathbb{R}P^1$?

Ejemplo 10.13 Variedades producto. Si M y N son variedades diferenciables con atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ y $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ de dimensiones m y n respectivamente y ambas de clase C^k , entonces $M \times N$ es una variedad diferenciable de dimensión $m + n$ y clase C^k definida por el atlas $\{(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j)\}_{(i,j) \in I \times J}$. Se deja como ejercicio el comprobarlo.

Un caso muy especial a conocer bien es $S^1 \times S^1$

El hecho de que una variedad diferenciable sea un espacio topológico permite obtener nuevos ejemplos triviales de variedades una vez que se conoce una:

Ejemplo 10.14 Si M es una variedad diferenciable con un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, y V es un abierto de M , entonces V es una variedad diferenciable con el atlas $\{(V \cap U_i, \varphi_i|_{V \cap U_i})\}_{i \in I}$, como se puede comprobar inmediatamente.

10.4. Aplicaciones diferenciables. Difeomorfismos

En esta sección, M , N , P y Q denotarán variedades diferenciables de clase C^k y dimensiones m , n , p y q respectivamente.

Denotaremos por $r^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a la proyección canónica $r^i(a^1, \dots, a^n) = a^i$. Dada una carta (U, φ) , las funciones $x^i = r^i \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ se llaman *funciones coordenadas* de la carta (U, φ) . Muchas veces la carta (U, φ) la escribiremos como $(U; x^1, \dots, x^n)$.

Definición 10.15 Se dice que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^r en M si lo es en cada punto de M .

Definición 10.16 Una aplicación $f : M \rightarrow N$ se dice que es de clase C^r en $x \in M$ si existen cartas (U, φ) en x y (V, ψ) en $f(x)$ tales que $f(U) \subset V$ y $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es de clase C^r en $\varphi(x)$.

Esta definición no depende de las cartas elegidas: si (U', φ') , (V', ψ') son otras cartas verificando $x \in U'$, $f(x) \in V'$ y $f(U') \subset V'$, entonces, $\varphi'(x) \in \varphi'(U \cap U')$ y, sobre ese abierto, $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ \varphi'^{-1})$ que es de clase C^r en $\varphi'(x)$ sii $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es de clase C^r en $\varphi(x)$, ya que $\psi' \circ \psi^{-1}$ y $\varphi \circ \varphi'^{-1}$ son C^k -difeomorfismos.

Definición 10.17 Se dice que $f : M \rightarrow N$ es de clase C^r en M sii lo es en cada punto de M .

Nota 10.18 Obsérvese que de la definición anterior se deduce que si f es C^r en x , entonces f es continua en x , considerando M y N como espacios topológicos. En efecto: Sean U y V como antes. Para todo abierto W conteniendo a $f(x)$, $V \cap W$ es también un abierto que contiene a $f(x)$ y $\psi(V \cap W)$ es un abierto de \mathbb{R}^n . Como $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es C^r entre abiertos de \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n y, por lo tanto, continua en $\varphi(x)$, existe un abierto $\tilde{U} \subset \varphi(U)$ de \mathbb{R}^m tal que $\varphi(x) \in \tilde{U}$ y $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\tilde{U}) \subset \psi(V \cap W)$, y, por lo tanto, existe un abierto $\varphi^{-1}(\tilde{U})$ de M conteniendo a x tal que $f(\varphi^{-1}(\tilde{U})) \subset V \cap W$, luego f es continua en x .

Definición 10.19 Una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es de clase C^r ($r \leq k$) en $x \in M$ si lo es como aplicación entre variedades diferenciables cuando sobre \mathbb{R}^n se considera la estructura diferenciable definida por la carta identidad.

Se tiene la definición análoga para $f : \mathbb{R}^m \rightarrow N$.

Es evidente de todo lo dicho que una aplicación $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en el sentido de variedades diferenciables i y solo si lo es en el sentido estándar de aplicación diferenciable de \mathbb{R}^m en \mathbb{R}^n .

También es evidente que las aplicaciones $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ de las cartas (U, φ_i) de una variedad diferenciable de dimensión n son aplicaciones diferenciables. Además

Proposición 10.20 Si $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow P$ son aplicaciones C^r , entonces $g \circ f : M \rightarrow P$ es de clase C^r .

Demostración Dado $x \in M$, por definición de clase C^r existen cartas (U, φ) , (V, ψ) y (W, ζ) en x , $f(x)$ y $g(f(x))$ respectivamente tales que $f(U) \subset V$, $g(V) \subset W$ y $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ y $\zeta \circ g \circ \psi^{-1}$ son C^r , luego $g \circ f(U) \subset W$ y $\zeta \circ g \circ f \circ \varphi^{-1} = \zeta \circ g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es C^r . \square

La condición bien conocida en \mathbb{R}^n de que una aplicación es diferenciable sii lo son sus funciones coordenadas se traduce aquí en:

Proposición 10.21 Una aplicación continua $f : M \rightarrow N$ es de clase C^r sii para un atlas $\{(V_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ de N se tiene que $y_i^j \circ f : f^{-1}(V_i) \rightarrow \mathbb{R}$ es C^r para todo $i \in I$ y para $j = 1, \dots, n$, donde $y_i^j = r^j \circ \psi_i$.

Demostración Para cada $x \in M$, sea (V_i, ψ_i) una carta de N en $f(x)$. Si f es de clase C^r , $f^{-1}(V_i)$ es un abierto y f restringida a eses abierto sigue siendo diferenciable (ya que la definición de diferenciable se hace punto a punto). Como $\psi_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ y

$r^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son aplicaciones diferenciables, por la proposición 10.20 se tiene que la composición $r^j \circ \psi_i \circ f = y_i^j \circ f$ es diferenciable.

Recíprocamente, supongamos que las funciones $y_i^j \circ f$ son C^r . Para cada $x \in M$ existe una carta (V_i, ψ_i) tal que $f(x) \in V_j$ y, por definición de diferenciability de $y_i^j \circ f$, existe una carta (U, φ) en x tal que las funciones $y_i^j \circ f \circ \varphi^{-1}$ son C^r en $\varphi(x)$ y, por tanto, $\psi_i \circ f \circ \varphi^{-1}$ es C^r en $\varphi(x)$, i.e., f es C^r en x . \square

Para el producto de variedades y correspondiente producto de aplicaciones se tiene que

Proposición 10.22 Sean $f : M \rightarrow N$ y $g : P \rightarrow Q$ aplicaciones de clase C^r . Entonces la aplicación $f \times g : M \times P \rightarrow N \times Q$ definida por $(f \times g)(x, z) = (f(x), g(z))$ es de clase C^r .

Demostración Como f y g son de clase C^r , dado $(x, z) \in M \times P$, existen sistemas de coordenadas (U, φ) en x , (W, ζ) en z , (V, ψ) en $f(x)$ y (T, ϕ) en $g(z)$ tales que $f(U) \subset V$, $g(W) \subset T$, y $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ y $\phi \circ g \circ \zeta^{-1}$ son de clase C^r . Se tiene entonces que $f \times g(U \times W) \subset V \times T$ y que $(\psi \times \phi) \circ (f \times g) \circ (\varphi \times \zeta)^{-1} = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \times (\phi \circ g \circ \zeta^{-1})$ es de clase C^r . Por lo tanto $f \times g$ es de clase C^r . \square

Proposición 10.23 Si $f : M \times N \rightarrow P$ es diferenciable de clase C^r , para cada $x \in M$, la aplicación $f_x : N \rightarrow P$ definida por $f_x(y) = f(x, y)$ es diferenciable de clase C^r .

Demostración Como f es de clase C^r , por la definición de variedad producto (cfr. 10.13) se tiene que, dado $y \in N$, existen cartas (U, φ) en x , (V, ψ) en y y (W, ζ) en $f(x, y)$ tales que $f(U \times V) \subset W$ y $\zeta \circ f \circ (\varphi \times \psi)^{-1}$ es de clase C^r en (x, y) . Por una propiedad bien conocida de funciones de clase C^r entre espacios euclídeos, la aplicación $(\zeta \circ f \circ (\varphi \times \psi)^{-1})_{\varphi(x)} : \psi(V) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \zeta(W) \subset \mathbb{R}^p$ definida por $\psi(y) \mapsto \zeta \circ f \circ (\varphi \times \psi)^{-1}(\varphi(x), \psi(y)) = \zeta \circ f(x, y) = \zeta \circ f_x \circ \psi^{-1}(\psi(y))$ es C^r , es decir, $\zeta \circ f_x \circ \psi^{-1}$ es de clase C^r y, por otro lado, $f(U \times V) \subset W$ implica que $f_x(V) \subset W$, lo que prueba que f_x es de clase C^r en y . \square

Proposición 10.24 Las proyecciones canónicas $\pi_M : M \times N \rightarrow M$ y $\pi_N : M \times N \rightarrow N$ son aplicaciones diferenciables.

Demostración La daremos solo para π_M . Para π_N es igual. Dado $(x, y) \in M \times N$, sea $(U \times V, \varphi \times \psi)$ una carta en (x, y) . Se tienen que $\varphi \circ \pi_M \circ (\varphi \times \psi)^{-1}(\varphi(p), \psi(q)) = \varphi(p)$, que es la proyección de $\varphi(U) \times \psi(V)$ sobre $\varphi(U)$, que es diferenciable. \square

Definición 10.25 Una aplicación $f : M \rightarrow N$ se dice que es un C^r -difeomorfismo sii es de clase C^r , biyectiva y con inversa de clase C^r .

Nota 10.26 Anteriormente (en Nota 10.3) vimos que había dos estructuras distintas de variedad diferenciable sobre \mathbb{R} , una \mathbb{R}_1 dada por el atlas $(\mathbb{R}, \varphi = \text{id})$ y otra \mathbb{R}_2 dada por el atlas (\mathbb{R}, ψ) (con $\psi(t) = t^3$). Sin embargo, la aplicación

$$f : \mathbb{R}_1 \longrightarrow \mathbb{R}_2 \text{ tal que } f(t) = t^{1/3}$$

es un difeomorfismo, puesto que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(t) = t$ es la aplicación identidad, y también $\varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(t) = t$. A esto nos referíamos en 10.3 cuando decíamos que estas dos estructuras de variedad diferenciable no eran tan distintas.

Tanto φ como ψ son homeomorfismos de \mathbb{R} en \mathbb{R} con la topología usual, por tanto la topología canónica de \mathbb{R}_1 y también la de \mathbb{R}_2 (en el sentido que se define en el apéndice de este capítulo) es la topología usual de \mathbb{R} . Es decir, sobre \mathbb{R} tenemos dos estructuras diferenciables distintas con la misma topología (por lo tanto homeomorfas) que son, además, difeomorfas.

Surge así la cuestión natural de si dos variedades homeomorfas son necesariamente difeomorfas. Es conocido que eso es así para \mathbb{R}^n con la topología usual y $n \neq 4$, mientras que para \mathbb{R}^4 se ha demostrado, después de 1982 (Donaldson y otros), que existe una cantidad infinita no numerable de estructuras diferenciables no difeomorfas con topología canónica la usual de \mathbb{R}^4 . Para la esfera se ha demostrado que todas las S^n son difeomorfas para $n \leq 6$ (excepto para $n = 4$, donde no se sabe lo que pasa), pero hay 28 estructuras diferenciables no difeomorfas sobre S^7 y alrededor de 16 millones sobre S^{31} .

Nota 10.27 Obsérvese que si se consideran \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m con la estructura de variedad diferenciable inducida por la carta identidad, entonces $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es de clase C^r como aplicación entre variedades si y solo si lo es $f = \text{id} \circ f \circ \text{id}^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ como aplicación entre espacios euclídeos. Resulta de aquí que si A y B son abiertos de \mathbb{R}^n , $f : U \longrightarrow V$ es un difeomorfismo como aplicación entre espacios euclídeos si y solo si lo es como aplicación entre variedades. También se tiene que una función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable si y solo si lo es cada $f^i : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

Nota 10.28 Para una carta (U, φ) de M , $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ es un difeomorfismo (Ejercicio: comprobarlo aplicando la definición). Es más: si U es un abierto de M y $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación tal que $\varphi(U)$ es un abierto de \mathbb{R}^n y $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ es un difeomorfismo, entonces (U, φ) es una carta de M (i.e., una carta del atlas maximal que define la estructura diferenciable de M). En efecto, si $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ es un difeomorfismo, U es un abierto de M y $\varphi(U)$ es un abierto de \mathbb{R}^n , entonces es evidente que (U, φ) satisface las exigencias de la definición de carta; si (V, ψ) es una carta del atlas maximal de M , es evidente que $U \cap V$ es un abierto de M y, por lo tanto, como φ y ψ son difeomorfismos, $\varphi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$ son abiertos de \mathbb{R}^n , y $\varphi \circ \psi^{-1}$ es un difeomorfismo por ser composición de difeomorfismos. Por lo tanto, (U, φ) es una carta del atlas maximal de M .

Capítulo 11

Espacio tangente y diferencial de una aplicación

11.1. Introducción

Para definir la diferencial de una aplicación entre superficies era necesario definir primero el plano tangente en cada punto x de la superficie. Para definirlo se consideraban las curvas pasando por ese punto x , que eran, a su vez, curvas de \mathbb{R}^3 , y el espacio tangente en ese punto era el espacio de los vectores tangente a esas curvas en \mathbb{R}^3 .

En variedades diferenciables también es necesaria la noción de espacio vectorial tangente para poder definir la diferencial de una función. La idea para definir este espacio vectorial es la misma que para superficies: el espacio tangente a una variedad M en un punto p es el conjunto de los vectores tangentes a las curvas pasando por p .

El problema es que, ahora, las curvas no son curvas en \mathbb{R}^n y, por lo tanto, no tenemos definido lo que es el vector tangente a una curva. Hay que definirlo.

La idea para hacerlo es identificar el concepto de vector tangente con el de la derivada direccional en la dirección de ese vector. En \mathbb{R}^n , dados un vector v y un punto p de \mathbb{R}^n , para cualquier función f definida en un entorno de p está definida la derivada direccional $D_v f$ de f en p en la dirección de v . Si $\alpha(t)$ es una curva de \mathbb{R}^n tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, por la regla de la cadena se tiene que

$$D_v f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(0)$$

. Esta es la fórmula que servirá para definir el vector tangente a una curva $c(t)$ de una variedad diferenciable M en un punto $p = c(0)$: se definirá como el operador $v = c'(0)$ que, a cada función diferenciable f definida en un entorno de p , le hace corresponder el número $vf = \frac{d(f \circ c)}{dt}(0)$.

Una vez definido el vector tangente, comprobaremos que el espacio de esos vectores tangentes es un espacio vectorial de la misma dimensión que la variedad.

Veremos, de paso, que un vector tangente en p es una derivación, es decir, un operador sobre el espacio de las funciones definidas en un entorno de p que verifica

las mismas reglas formales de actuación que la derivada direccional. Cabe entonces preguntarse si todas las derivaciones son vectores tangentes o no. Aunque no lo veremos en este curso, para el caso de las variedades C^∞ el espacio tangente y el espacio vectorial de las derivaciones coinciden. Si la variedad solo es C^r el espacio de los vectores está estrictamente contenido en el de las derivaciones

En todo este capítulo, I denotará un intervalo abierto y t_0 será un punto de I .

11.2. Definición de espacio tangente

Definición 11.1 Sea $c : I \rightarrow M$ una curva de clase C^r sobre una variedad diferenciable M de clase C^k ($k \geq r \geq 1$), con $c(t_0) = p \in M$, y sea \mathcal{F}_p el conjunto de las funciones definidas en algún entorno de p (que puede ser distinto para cada función) que son de clase C^k en p . El vector tangente a la curva c en p es la aplicación:

$$c'(t_0) : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{definida por} \quad c'(t_0)f := \frac{d(f \circ c)}{dt}(t_0) \text{ para toda } f \in \mathcal{F}_p.$$

Un vector tangente a M en p es un vector tangente a una curva $c : I \rightarrow M$ de clase C^r que pasa por p (i.e. $c(t_0) = p$).

El conjunto de los vectores tangentes a M en p lo denotaremos indistintamente por T_pM ó M_p .

Definición 11.2 y Proposición Una derivación de \mathcal{F}_p es una aplicación $D : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica las propiedades

- (i) $D(f + g) = Df + Dg$,
- (ii) $D(\lambda f) = \lambda Df$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,
- (iii) $D(fg) = (Df)g(p) + f(p)(Dg)$.

Denotaremos por \mathcal{D}_p el conjunto de las derivaciones de \mathcal{F}_p . Es un espacio vectorial real con las leyes $(\lambda D)f = \lambda(Df)$ y $(D+E)f = Df + Ef$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y cualesquiera $D, E \in \mathcal{D}_p$.

Se tiene que $T_pM \subset \mathcal{D}_p$.

Demostración Es fácil ver que $T_pM \subset \mathcal{D}_p$. Si $v = c'(t_0) \in T_pM$ y $f, g \in \mathcal{F}_p$, entonces

$$\begin{aligned} v(f + g) &= \frac{d((f + g) \circ c)}{dt}(t_0) = \frac{d(f \circ c)}{dt}(t_0) + \frac{d(g \circ c)}{dt}(t_0) = vf + vg, \quad \text{y} \\ v(fg) &= \frac{d((fg) \circ c)}{dt}(t_0) = \frac{d((f \circ c)(g \circ c))}{dt}(t_0) \\ &= \frac{d(f \circ c)}{dt}(t_0)(g \circ c)(t_0) + (f \circ c)(t_0) \frac{d(g \circ c)}{dt}(t_0) = (vf)g(p) + f(p)vg. \end{aligned}$$

□

Nota 11.3 Obsérvese que de (iii) se deduce que $D1 = D(1 \times 1) = 1D1 + (D1)1 = 2D1$, y, por tanto, $D1 = 0$. De aquí, junto con (ii), se deduce que para toda función constante λ , $D\lambda = D(\lambda 1) = \lambda D(1) = 0$.

Definición 11.4 Dado un sistema de coordenadas (U, φ) de M en p ($p \in U$), se considera la curva $\alpha_i(t) : I \rightarrow U$ (con $0 \in I$) definida por $\alpha_i(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + t(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0))$ con 1 ocupando el lugar i -ésimo. Se definen los vectores

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \alpha_i'(0), \quad i = 1, \dots, n.$$

Estos vectores actúan sobre las funciones $f \in \mathcal{F}_p$ (como se ve aplicando la regla de la cadena, recordando que $x^j = r^j \circ \varphi$ y usando que $f \circ \alpha_i = f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha_i$) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f &= \frac{d(f \circ \alpha_i)}{dt}(0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^j}(\varphi(p)) \frac{d(x^j \circ \alpha_i)}{dt}(0) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^j}(\varphi(p)) \delta_i^j = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(p)). \end{aligned} \quad (11.1)$$

Proposición 11.5 $T_p M$ es el subespacio vectorial de dimensión n de \mathcal{D}_p generado por los vectores

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p. \quad (11.2)$$

Estos vectores son, además, linealmente independientes y, por lo tanto, una base de $T_p M$.

Demostración Dada una carta (U, φ) de M en p , una curva arbitraria $c(t)$ de M de clase C^r con $c(t_0) = p$ y una función cualquiera f de clase C^r definida sobre un abierto V de M que contiene a p , se puede escribir

$$f \circ c(t) = f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c(t) \quad \text{para } t \in c^{-1}(U \cap V), \quad y$$

$$c'(t_0)f = \frac{d(f \circ c)}{dt}(t_0) = d(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \left(\frac{d(\varphi \circ c)}{dt}(t_0) \right) \quad (11.3)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(p)) \frac{d(x^i \circ c)}{dt}(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{d(x^i \circ c)}{dt}(t_0) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f, \quad (11.4)$$

lo que da que todo vector $c'(t_0) \in T_p M$ se puede escribir como la combinación lineal

$$c'(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{d(x^i \circ c)}{dt}(t_0) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \quad (11.5)$$

y, para ver que los vectores (11.2) generan $T_p M$, falta ver que toda combinación lineal de esos vectores (considerada como elemento de \mathcal{D}_p) es el vector tangente a alguna curva. Veámoslo: sea $\sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$, con $v^i \in \mathbb{R}$. Definamos la curva $\alpha(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + (tv^1, \dots, tv^n))$, que verifica $\alpha(0) = p$; aplicando la fórmula (11.5) se tiene

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt}(0) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p,$$

luego $\sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_p \in T_p M$.

Por lo tanto, para acabar la demostración del teorema solo falta ver que los vectores $\frac{\partial}{\partial x^1} |_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} |_p$ son linealmente independientes, pero esto es consecuencia de que

$$\frac{\partial}{\partial x^i} |_p x^j = \frac{\partial(x^j \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(p)) = \frac{\partial(r^j \circ \varphi \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(p)) = \delta_i^j,$$

y, por lo tanto

$$\sum_{i=1}^n \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_p = 0 \text{ implica } 0 = \sum_{i=1}^n \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_p x^j = \lambda^j$$

para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. □

Nota 11.6 Obsérvese que la fórmula (11.5) significa que todo vector $v \in T_p M$ se puede escribir en la forma

$$v = \sum_{i=1}^n v x^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_p, \quad (11.6)$$

puesto que, por definición, v es el vector tangente a una curva $c(t)$ en p y $v x^i = \frac{d(x^i \circ c)}{dt}(t_0)$.

Nota 11.7 Sea $(\mathbb{R}^n, \text{id})$ la carta identidad de \mathbb{R}^n . Con ella $x^i = r^i \circ \text{id}$ y $\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial r^i}$. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ se define el isomorfismo canónico

$$\Phi_x : T_x \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ tal que } \Phi_x \left(\sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial r^i} |_x \right) = (v^1, \dots, v^n).$$

Con este isomorfismo se tiene que, si $c(t)$ es una curva de \mathbb{R}^n , su vector tangente en t_0 considerando \mathbb{R}^n como variedad diferenciable con el atlas definido por la carta identidad y su derivada en t_0 en el sentido visto en los cursos de análisis están relacionados por:

$$c'(t_0) = \Phi_{c(t_0)}(c'(t_0)),$$

donde el $c'(t_0)$ del miembro de la izquierda de la igualdad es la derivada en el sentido del análisis y el $c'(t_0)$ de la derecha es el vector tangente a $c(t)$ en t_0 como curva de la variedad \mathbb{R}^n . En efecto: de (11.5) se deduce que

$$\begin{aligned} \Phi_{c(t_0)}(c'(t_0)) &= \Phi_{c(t_0)} \left(\sum_{i=1}^n \frac{d(r^i \circ c)}{dt}(t_0) \frac{\partial}{\partial r^i} |_{c(t_0)} \right) \\ &= \left(\frac{d(r^1 \circ c)}{dt}(t_0), \dots, \frac{d(r^n \circ c)}{dt}(t_0) \right) = c'(t_0). \end{aligned}$$

11.3. La diferencial de una aplicación

A continuación vamos a definir la diferencial de una aplicación. Hay, entre otras, dos maneras naturales de hacerlo de modo que sea una extensión del mismo concepto para aplicaciones entre espacios euclídeos.

El primero de ellos consiste en recordar que, si f es una aplicación de \mathbb{R}^m en \mathbb{R}^n , p es un punto de \mathbb{R}^m , v un vector de \mathbb{R}^m , $D_v f$ denota la derivada direccional de f en p en la dirección de v y $df_p(v)$ denota la diferencial de f en p actuando sobre v , entonces se verifica que $df_p(v) = D_v f$. Como en una variedad diferenciable M un vector tangente $v \in T_p M$ se define como generalización de la derivada direccional, una definición natural de la diferencial de una aplicación $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ en p actuando sobre v sería $df_p(v) = v f$. Como la acción de v sobre f se había definido viendo v como el vector tangente a una curva y usando la regla de la cadena, para definir la diferencial de una aplicación $f : M \rightarrow N$ entre variedades diferenciables es natural considerar que la acción de la diferencial f_{*p} de f en $p \in M$ sobre un vector $v \in T_p M$ tangente a una curva $c(t)$ (tal que $c(0) = p$) en p sea $f_{*p}(v) = \frac{d(f \circ c)}{dt}(0)$.

Otra manera natural de definir esta diferencial sería usando sistemas de coordenadas que dan lugar a un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U \subset M & \xrightarrow{f} & V \subset N \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} & \psi(V) \subset \mathbb{R}^n, \end{array} \quad (11.7)$$

y definiendo f_{*p} usando la diferencial de la aplicación $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, que es conocida por ser una aplicación entre espacios euclídeos, y las diferenciales de las aplicaciones φ y ψ que habrá que definir adecuadamente.

Veremos que esta segunda manera de definir la diferencial de una aplicación es consecuencia de la primera (en realidad, son equivalentes).

Por otro lado, si consideramos que ya definimos la diferencial de una aplicación entre superficies parametrizadas, observemos que la primera definición sugerida coincide con la Definición 5.14 dada para superficies y la segunda con la Proposición 5.17

En lo que queda de este capítulo todas las variedades diferenciables serán de clase C^k y todas las aplicaciones diferenciables de clase C^r ($r \leq k$).

Definición 11.8 Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable, $p \in M$. La diferencial de f en p es la aplicación lineal

$$f_{*p} : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N \text{ tal que } f_{*p}(v) = \frac{d(f \circ c)}{dt}(0),$$

siendo $c : I \rightarrow M$ una curva de M tal que $c(0) = p$ y $c'(0) = v$.

Para que la definición sea correcta falta comprobar que la expresión dada para $f_{*p}(v)$ no depende de la curva c elegida verificando las condiciones $c(0) = p$ y $c'(0) = v$ y que es lineal. Todo ello es consecuencia de la siguiente proposición:

Proposición 11.9 Para f como antes se tiene que, si (U, φ) es una carta en p y (V, ψ) es una carta en $f(p)$, y $v = \sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, entonces

$$f_{*p}(v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{\partial(y^j \circ f)}{\partial x^i}(p) v^i \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{f(p)}.$$

Demostración Por la expresión en coordenadas del vector tangente a una curva que vimos en la sección anterior (fórmula (11.5)), y aplicando la regla de la cadena y la fórmula (11.1) que dice como actúa $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ sobre una función real,

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ c)}{dt}(0) &= \sum_{j=1}^n \frac{d(y^j \circ f \circ c)}{dt}(0) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{f(p)} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{\partial(y^j \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(p)) \frac{d(x^i \circ c)}{dt}(0) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{f(p)} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{\partial(y^j \circ f)}{\partial x^i}(p) v^i \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{f(p)}, \end{aligned}$$

que es la fórmula que buscábamos. \square

Como en la expresión de $f_{*p}(v)$ recién dada no figura ninguna curva, se tiene que $f_{*p}(v)$ no depende de la curva tangente a v que se elija en la definición 11.8. Por otro lado, esta misma expresión dice que, en las bases de $T_p M$ y de $T_{f(p)} N$ asociadas a las cartas elegidas, las componentes de $f_{*p}(v)$ se obtienen haciendo actuar la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y^1 \circ f}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1 \circ f}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^n \circ f}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n \circ f}{\partial x^m} \end{pmatrix} \text{ sobre el vector } \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix}, \quad (11.8)$$

lo que indica que f_{*p} es lineal. La matriz (11.8) es la matriz de f_{*p} en las coordenadas (U, φ) y (V, ψ) .

Nota 11.10 Dada una carta (U, φ) de una variedad diferenciable M , usando la fórmula de la proposición 11.9, se tiene que

$$\varphi_{*p} \left(\sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \sum_{i=1}^m v^i \sum_{j=1}^m \frac{\partial(r^j \circ \varphi)}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial r^j} \Big|_{\varphi(p)} \quad (11.9)$$

$$= \sum_{i=1}^m v^i \sum_{j=1}^m \delta_i^j \frac{\partial}{\partial r^j} \Big|_{\varphi(p)} = \sum_{j=1}^m v^j \frac{\partial}{\partial r^j} \Big|_{\varphi(p)}. \quad (11.10)$$

Definición 11.11 Sea M una variedad diferenciable de dimensión m , $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable, se llama (también) diferencial de f en $x \in M$ a la aplicación

$$df_x = \Phi_{f(x)} \circ f_{*x} : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ para recordar la definición de } \Phi_{f(x)} \text{ ver (11.7).}$$

De la definición de $\Phi_{f(x)}$ y la fórmula para f_{*x} resulta la fórmula

$$df_x(v) = \Phi_{f(x)}\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial(r^j \circ f)}{\partial x^i}(x) v^i \frac{\partial}{\partial r^j} \Big|_{\varphi(x)}\right) \quad (11.11)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial(r^1 \circ f)}{\partial x^i}(x) v^i, \dots, \sum_{i=1}^m \frac{\partial(r^n \circ f)}{\partial x^i}(x) v^i\right). \quad (11.12)$$

De la definición de $d\varphi_p$ y de la fórmula (11.10) para φ_* se deduce que

$$d\varphi_p\left(\sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p\right) = (v^1, \dots, v^m). \quad (11.13)$$

Nota 11.12 Cuando $n = 1$ en la definición anterior, denotaremos r^1 por r , que es, simplemente, la aplicación identidad de \mathbb{R} en \mathbb{R} , y usando (11.12), se tiene que, si $v = \sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$, entonces

$$df_x(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} v^i = v f, \quad (11.14)$$

que es la expresión que, con frecuencia, se toma como definición de la diferencial de una función en un punto.

Proposición 11.13 Si $f : M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables de dimensiones m y n respectivamente, $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$ es una carta de M en $x \in M$, y $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ es una carta de N en $f(x)$, entonces

$$f_{*x} = (d\psi_{f(x)})^{-1} \circ d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ d\varphi_x.$$

Demostración De las fórmulas y definiciones anteriores resulta que

$$\begin{aligned} f_{*x}(v) &= \sum_{i,j} \frac{\partial(y^j \circ f)}{\partial x^i}(x) v^i \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{f(x)} = \sum_{i,j} \frac{\partial(y^j \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(x)) v^i \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{f(x)} \\ &= (d\psi_{f(x)})^{-1} \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial(y^1 \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(x)) v^i, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial(y^n \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(x)) v^i \right) \\ &= (d\psi_{f(x)})^{-1} \left(\frac{\partial(y^j \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(x)) \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \\ &= (d\psi_{f(x)})^{-1} \circ d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ d\varphi_x \left(\sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x \right). \end{aligned}$$

□

Obsérvese que el teorema anterior (al igual que la fórmula dada en la proposición 11.9) dice que la matriz de f_{*x} con respecto a las bases de T_xM y $T_{f(x)}N$ dadas por dos sistemas de coordenadas en x y en $f(x)$ se calcula (al escribir f usando esas coordenadas) igual que se hacía con las aplicaciones diferenciables de \mathbb{R}^m en \mathbb{R}^n . Lo mismo ocurre para df_x cuando f es una función de M en \mathbb{R} . **Y, naturalmente, lo mismo ocurriría cuando calculáramos la diferencial de una aplicación entre superficies parametrizadas cuando la escribiéramos en términos de las parametrizaciones.**

Dada $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, como f_{*p} es lineal y $\Phi_{f(p)}$ es un isomorfismo, resulta que $df_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación lineal, i.e. un elemento del espacio dual T_pM^* de T_pM .

Definición 11.14 Se llama espacio cotangente a M en $p \in M$ al espacio dual de T_pM . Lo denotaremos por T_p^*M .

Proposición 11.15 Si (U, φ) es una carta de M en p , $\{dx_p^1, \dots, dx_p^m\}$ es una base de T_p^*M .

Demostración Usando la proposición 11.9 y el cálculo que ya hicimos en la demostración de 11.5, resulta que

$$dx_p^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = \delta_i^j, \quad (11.15)$$

de donde resulta que $\{dx_p^1, \dots, dx_p^m\}$ es la base de T_p^*M dual de $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \Big|_p \right\}$. \square

Como $df_p \in T_p^*M$, se podrá escribir como combinación lineal de las dx_p^i . De (11.14) y (11.15) se deduce que su expresión concreta es

$$df_p = \sum_{i=1}^m df_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) dx_p^i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx_p^i. \quad (11.16)$$

Lema 11.16 Sea $\beta : J \rightarrow I$ un difeomorfismo de intervalos abiertos. Si se consideran las curvas $c : I \rightarrow M$ y $\alpha = c \circ \beta : J \rightarrow M$, entonces

$$\alpha'(s) = c'(\beta(s))\beta'(s).$$

Demostración Aplicando la definición de vector tangente a una curva y la regla de la cadena para aplicaciones entre intervalos de \mathbb{R} , se tiene que, para cualquier $f \in \mathcal{F}_{\alpha(s)}$,

$$\alpha'(s)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{ds}(s) = \frac{d(f \circ c \circ \beta)}{ds}(s) = \frac{d(f \circ c)}{dt}(\beta(s)) \frac{d\beta}{ds}(s) = \frac{d\beta}{ds}(s) c'(\beta(s))f.$$

\square

Proposición 11.17 Si $c : I \rightarrow M$ es una curva diferenciable, entonces

$$c'(t) = c_{*t}\left(\frac{d}{dr}\Big|_t\right).$$

Demostración Sea $\beta(s)$ una curva en I tal que $\beta'(0) = \frac{d}{dr}\Big|_t$, por ejemplo $\beta(s) = t + s$. Usando la definición de c_* y el lema anterior, se tiene

$$c_{*t}\left(\frac{d}{dr}\Big|_t\right) = (c \circ \beta)'(0) = \beta'(0)c'(t) = c'(t).$$

□

Proposición 11.18 Si M es conexa y $f : M \rightarrow N$ es diferenciable, entonces f es constante si y solo si $f_{*p} = 0$ para todo $p \in M$.

Demostración Si f es constante (i.e. $f(z) = x \in N$ para todo $z \in M$), para todo $p \in M$ y para todo $v = c'(t_0) \in T_pM$ se tiene que $f_{*p}(v) = (f \circ c)'(t_0) = 0$ porque para toda $g \in \mathcal{F}_x$ se tiene que $g \circ f \circ c(t) = g(x)$ para todo t y, por lo tanto, $(f \circ c)'(t_0)g = (g \circ f \circ c)'(t_0) = 0$. Luego $f_{*p} = 0$. Obsérvese que para esta parte del teorema no es necesario que M sea conexa. **De paso, hemos visto también que el vector tangente a una curva constante es el vector 0.**

Recíprocamente, supongamos que $f_{*p} = 0$ para todo $p \in M$. Sea $x \in f(M)$. Como f es continua, $f^{-1}(x)$ es cerrado. Como M es conexa, solo falta ver que $f^{-1}(x)$ es abierto en M para ver que es igual a M y que, por tanto, f es constante. Par verlo, para cada $p \in f^{-1}(x)$, elijamos una carta (U, φ) de M en p y una carta (V, ψ) de N en $x = f(p)$ tales que $f(U) \subset V$. Se deduce de la proposición 3.2.6 que

$$d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} = d\psi_{f(p)} \circ f_{*p} \circ (d\varphi_p)^{-1} = 0,$$

luego $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es constante (igual a $\psi(x)$) sobre $\varphi(U)$, luego $f = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$ es constante (igual a x) sobre U , luego $p \in U \subset f^{-1}(x)$, luego $f^{-1}(x)$ es un abierto. □

Proposición 11.19 Regla de la cadena Si $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow P$ son aplicaciones diferenciables, entonces

$$(g \circ f)_{*x} = g_{*f(x)} \circ f_{*x}.$$

Demostración Sea $v \in T_xM$, c una curva de M tal que $c(0) = x$ y $c'(0) = v$, resulta inmediatamente de aplicar la definición que

$$(g \circ f)_{*x}v = \frac{d(g \circ f \circ c)}{dt}(0) = g_{*f(c(0))} \frac{d(f \circ c)}{dt}(0) = g_{*f(x)}(f_{*x}v).$$

□

11.4. Inmersiones y sumersiones

En este apartado M y N serán variedades diferenciables de dimensiones m y n respectivamente.

Definición 11.20 Una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ se dice que es una *inmersión* (o que (M, f) o $f(M)$ es una subvariedad de N) si para todo $x \in M$, el rango de f_{*x} es m (i.e. f_{*x} es inyectiva). Si, además, f es inyectiva, se dice que es un *embebimiento* (o que (M, f) o $f(M)$ es una subvariedad embebida de N). Si, además, f es un homeomorfismo cuando se considera sobre $f(M)$ la topología inducida por la de N , entonces se dice que (M, f) (o $f(M)$) es una *subvariedad regular* de N .

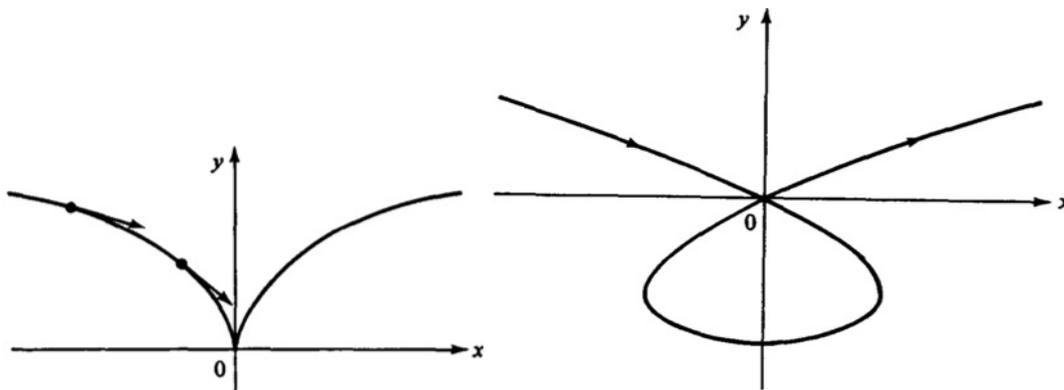
Cuando $M \subset N$ y se dice que M es una subvariedad, subvariedad embebida o subvariedad regular de N , se sobreentiende que lo es el par (M, i) , donde $i : M \rightarrow N$ es la aplicación llamada inclusión canónica, que se define por $i(x) = x$. Obsérvese que, entonces $i_{*x}T_xM \subset T_xN$ y, a menudo, se identifican, sin mención explícita, que es clara por el contexto, $i_{*x}T_xM$ y T_xM .

Hay que advertir que esta terminología no es unánime. Cada vez que uno coge un libro y lee estas palabras, antes de seguir adelante, hay que ver como las entiende ese autor.

Ejemplo 11.21 Las k -superficies, tal y como se han definido en *Análisis III* son subvariedades regulares de \mathbb{R}^n .

Las superficies regulares parametrizadas $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ que hemos definido en este curso, cuando U es un abierto de \mathbb{R}^2 , son inmersiones de U en \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 11.22 La curva $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (t^3, t^2)$ es una aplicación C^∞ , pero no es una inmersión, pues en $t = 0$, $f_{*0}(\frac{d}{dt}|_0) = f'(0) = 0$.



Ejemplo 11.23 $f(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ es una inmersión, pero no es un embebimiento, pues tiene una autointersección ($f(2) = f(-2) = (0, 0)$).

Ejemplo 11.24

$$f(t) = \begin{cases} (0, -(t+2)) & \text{para } t \in]-3, -1] \\ \text{una curva } C^\infty \text{ que une } (0, -1) \text{ con } (\frac{1}{\pi}, 0) & \text{para } t \in [-1, -\frac{1}{\pi}] \\ (-t, \text{sen}(\frac{1}{t})) & \text{para } t \in]-\frac{1}{\pi}, 0[\end{cases}$$

es un embebimiento. Sin embargo, no es una subvariedad regular porque, en la topología de $f(]-3, 0[)$ inducida por la de \mathbb{R}^2 , todo entorno de $p = f(-1)$ tiene una infinidad de componentes conexas, mientras que existen entornos de -1 que son intervalos abiertos y, por lo tanto, conexos.



Ejemplo 11.25 La aplicación $f(t) = (t, t)$ de \mathbb{R} en \mathbb{R}^2 hace de (\mathbb{R}, f) una subvariedad regular.

Ejemplo 11.26 Si $f : M \rightarrow N$ es una inmersión, embebimiento o subvariedad regular, U es un abierto de M , V un abierto de N y $f(U) \subset V$, entonces $f : U \rightarrow V$ es, respectivamente, una inmersión, embebimiento o variedad regular.

Nota: Es posible probar (ver, por ejemplo, Boothby, pag. 79) que si M es compacta un embebimiento $f : M \rightarrow N$ es una subvariedad regular.

Definición 11.27 Una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ se dice que es una sumersión si, para todo $x \in M$, el rango de f_{*x} es n (i.e. f_{*x} es suprayectiva).

Ejemplo 11.28 Las proyecciones $\pi_M : M \times N \rightarrow M$ y $\pi_N : M \times N \rightarrow N$ definidas por $\pi_M(x, y) = x$ y $\pi_N(x, y) = y$ son sumersiones.

En efecto: Vimos en el capítulo 1 (Proposición 1.5.9) que π_M y π_N son diferenciables. Por la fórmula que vimos en 3.2.6 para el cálculo de la diferencial, para cualquier aplicación $f : M \rightarrow N$ el rango de f_* es igual al de $d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}$. Particularizamos esto para la aplicación π_M (e igual se hace para π_N). Sabemos que si (U, φ) es un sistema de coordenadas de M en x y (V, ψ) lo es de N en y , entonces $(U \times V, \varphi \times \psi)$ lo es de (x, y) en $M \times N$. Se tiene entonces que

$$\text{rango } \pi_{M*(x,y)} = \text{rango } d(\varphi \circ \pi_M \circ (\varphi \times \psi)^{-1})_{(\varphi(x), \psi(y))},$$

y como $\varphi \circ \pi_M \circ (\varphi \times \psi)^{-1}(\varphi(z), \psi(w)) = \varphi \circ \pi_M(z, w) = \varphi(z)$, se tiene que $\text{rango}(\pi_{M^*(x,y)}) = \text{rango}(d\varphi_x) = m$, y π_M es una sumersión. *Todo esto puede resumirse diciendo que la aplicación proyección π_M leída en las cartas coincide con la proyección de $\mathbb{R}^{\dim M + \dim N}$ sobre $\mathbb{R}^{\dim M}$, que es lineal y supreyectiva, por lo tanto su diferencial, ella misma, también es lineal y supreyectiva y, por lo tanto, lo mismo le ocurre a la aplicación π_M .*

Lo dicho en el párrafo anterior en cursiva se puede expresar de modo más formal como sigue. $\varphi \circ \pi_M \circ (\varphi \times \psi)^{-1} : \varphi(U) \times \psi(V) \rightarrow \varphi(U)$ es la proyección sobre el primer factor, luego su diferencial (como aplicación de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ sobre \mathbb{R}^m) es ella misma (por ser lineal) y

$$\begin{aligned} \pi_{M^*(x,y)} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{(x,y)} &= (d\varphi_x)^{-1} \circ d(\varphi \circ \pi_M \circ (\varphi \times \psi)^{-1})_{(\varphi(x), \psi(y))} \circ d(\varphi \times \psi)_{(x,y)} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{(x,y)} \\ &= (d\varphi_x)^{-1} \circ d(\varphi \circ \pi_M \circ (\varphi \times \psi)^{-1})_{(\varphi(x), \psi(y))} (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \\ &= (d\varphi_x)^{-1} (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x, \end{aligned}$$

donde $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ lleva el 1 en el i -ésimo lugar, además

$$\begin{aligned} \pi_{M^*(x,y)} \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{(x,y)} &= (d\varphi_x)^{-1} \circ d(\varphi \circ \pi_M \circ (\varphi \times \psi)^{-1})_{(\varphi(x), \psi(y))} (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \\ &= (d\varphi_x)^{-1} (0, \dots, 0) = 0, \end{aligned}$$

donde, ahora, el 1 de $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ocupa el lugar $m + j$. Análogamente se ve que

$$\pi_{N^*(x,y)} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{(x,y)} = 0 \quad \text{y} \quad \pi_{N^*(x,y)} \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{(x,y)} = \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_y.$$

Por lo tanto,

Corolario 11.29 *si definimos la aplicación*

$$\iota : T_{(x,y)}M \times N \rightarrow T_xM \oplus T_yN \text{ tal que } \iota(X) = \pi_{M^*(x,y)}X + \pi_{N^*(x,y)}X,$$

ι lleva una base en otra, por lo tanto es un isomorfismo. Este isomorfismo permite decir que el espacio tangente a una variedad producto es la suma directa de los espacios tangentes a cada factor.

Ejemplo 11.30 *La proyección canónica $\pi : \mathbb{R}^{n+1*} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ tal que $\pi(x) = [x]$ es una sumersión.*

En efecto, para cada $x \in \mathbb{R}^{n+1*}$, sea (V_j, φ_j) una carta (de las definidas en 10.10) de $\mathbb{R}P^n$ en $\pi(x)$. Como en el ejemplo anterior, tenemos que (gracias a 3.2.6), el rango de π_{*x} coincide con el de $d(\varphi_j \circ \pi) : \mathbb{R}^{n+1*} \rightarrow \mathbb{R}^n$, pero

$$\varphi_j \circ \pi(x^1, \dots, x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{x^j}, \dots, \frac{x^{j-1}}{x^j}, \frac{x^{j+1}}{x^j}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^j} \right),$$

y la diferencial de esta aplicación tiene por matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{x^j} & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{x^1}{(x^j)^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^j} & 0 & \dots & 0 & -\frac{x^2}{(x^j)^2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{x^j} & -\frac{x^{j-1}}{(x^j)^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{x^{j+1}}{(x^j)^2} & \frac{1}{x^j} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{x^{n+1}}{(x^j)^2} & 0 & \dots & \frac{1}{x^j} \end{pmatrix},$$

y la submatriz que se obtiene de la anterior al quitarle la j -ésima columna tiene determinante $1/(x^j)^n \neq 0$, luego π_{*x} tiene rango n .

11.5. Comentario sobre inmersión de superficies compactas en \mathbb{R}^3 como subvariedades regulares

Capítulo 12

Campos vectoriales

12.1. Definición y primeras propiedades

Definición 12.1 *Un campo vectorial X sobre una variedad diferenciable M es una aplicación $X : M \rightarrow TM := \bigcap_{c \in M} T_x M$ que a cada $x \in M$ le asigna un vector $X_x \equiv X(x) \in T_x M$.*

Sea (U, φ) una carta (sistema de coordenadas) de M , $x^i = r^i \circ \varphi$. Las aplicaciones

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : U \rightarrow TU \equiv TM_U \text{ tal que } \frac{\partial}{\partial x^i}(x) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x \text{ para todo } x \in U$$

son campos vectoriales sobre el abierto U , se llaman campos vectoriales coordenados.

Para cada carta (U, φ) de M (de dimensión m), un campo vectorial X define unas funciones $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ por medio de la expresión

$$X(x) = \sum_{i=1}^m X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x, \quad (12.1)$$

que define unívocamente el valor de $X^i(x)$ para cada $x \in U$, por ser $X(x) \in T_x M$ y ser $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x \right\}_{i=1}^m$ una base de $T_x M$.

Si M es de clase C^k , diremos que X es de clase C^r ($r \leq k - 1$) si las funciones X^i de la expresión (12.1) son de clase C^r sobre U para cada carta (U, φ) de M .

Denotaremos por $\mathfrak{X}_r(M)$ la familia de los campos vectoriales sobre M de clase C^r .

Nota 12.2 *Obsérvese que si las funciones componentes X^i de un campo vectorial X en una carta (U, φ) son C^r y (V, ψ) es otra carta de M con $U \cap V \neq \emptyset$, entonces las componentes X^i de X en la carta (V, ψ) son también de clase C^r sobre $U \cap V$. Se tiene por lo tanto que un campo vectorial X sobre M es de clase C^r ($r \leq k - 1$) si y solo si para cada $x \in M$, existe una carta (U, φ) de M en x tal que las funciones X^i definidas sobre U por (12.1) son de clase C^r .*

Demostración La afirmación de esta nota es consecuencia del siguiente cálculo en el que se usa la regla de la cadena. Sea $x \in U \cap V$

$$\begin{aligned} X(x) &= \sum_{i=1}^m X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x = \sum_{i=1}^m X^i(x) \sum_j = 1^m \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_x \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m X^i(x) \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_x = \sum_{j=1}^m X'^j(x) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_x, \end{aligned}$$

de donde se deduce que $X'^j(x) = \sum_{i=1}^m X^i(x) \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$. Como $\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_{1 \leq i, j \leq m}$ es la matriz de $d(\psi \circ \varphi^{-1})$ y $\psi \circ \varphi^{-1}$ es un C^k -difeomorfismo, se sigue que X^i son C^r sii X'^i son C^r . \square

Denotaremos por $\mathcal{F}_r(M)$ el conjunto de las funciones $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^r . $\mathcal{F}_l(M)$ (para $1 \leq l \leq k$) es un \mathbb{R} -espacio vectorial.

Definición 12.3 y Proposición Dados $X, Y \in \mathfrak{X}_r(M)$ y $f \in \mathcal{F}_r(M)$, se definen $X + Y : M \rightarrow TM$ por $(X + Y)(x) = X(x) + Y(x)$ y $fX : M \rightarrow TM$ por $(fX)(x) = f(x)X(x)$.

Se tiene entonces que $X + Y \in \mathfrak{X}_r(M)$ y $fX \in \mathfrak{X}_r(M)$. Además, $\mathfrak{X}_r(M)$ con estas operaciones es un $\mathcal{F}_r(M)$ -módulo.

Demostración De la definición resulta evidente que $X + Y$ y fX son campos vectoriales. Para ver que son de clase C^r basta con fijarse en que, para cualquier sistema de coordenadas $(U; x^1, \dots, x^n)$ de M se tiene que si $X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $Y = \sum_{i=1}^m Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ (donde X^i y Y^i son las funciones definidas por (5.1.3.1)), entonces

$$X + Y = \sum_{i=1}^m (X^i + Y^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{y} \quad fX = \sum_{i=1}^m (fX^i) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Se deja al lector comprobar que, con estas operaciones, $\mathfrak{X}_r(M)$ es un $\mathcal{F}_r(M)$ -módulo. \square

Proposición 12.4 Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}_r(M)$, define una aplicación $X : \mathcal{F}_{r+1}(M) \rightarrow \mathcal{F}_r(M)$ dada por

$$(Xf)(x) = X_x f \quad \text{para toda} \quad f \in \mathcal{F}_{r+1}(M). \quad (12.2)$$

Demostración En efecto: Para toda carta (U, φ) de M , si $X \Big|_U = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, entonces

$$\begin{aligned} (Xf) \circ \varphi^{-1}(\varphi(x)) &= (Xf)(x) = X_x(f) = \sum_{i=1}^m X^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \\ &= \sum_{i=1}^m X^i \circ \varphi^{-1}(\varphi(x)) \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(x)), \quad (12.3) \end{aligned}$$

que es de clase C^r al ser $f \circ \varphi^{-1}$ de clase C^{r+1} . También hemos visto, de paso, que la suma y el producto de funciones de clase C^r de M en \mathbb{R} es de clase C^r . \square

Proposición 12.5 *Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}_r(M)$ (con la acción definida por (12.2)) es una derivación sobre $\mathcal{F}_{r+1}(M)$. La afirmación “es una derivación” significa que verifica las propiedades de la Definición 11.2, pero en este caso sobre $\mathcal{F}_r(M)$ en lugar de sobre \mathcal{F}_p*

Demostración La afirmación es consecuencia de (12.2) y del teorema 11.5 que establece que $T_x M \subset \mathcal{D}_x$ (pues $X(fg)(x) = X_x(fg) = (X_x f)g(x) + f(x)X_x g = (Xf)(x)g(x) + f(x)(Xg)(x) = ((Xf)g + f(Xg))(x)$). \square

12.2. El corchete de Lie

En este apartado nos restringiremos a campos vectoriales C^∞ . Usaremos $\mathfrak{X}(M) \equiv \mathfrak{X}_\infty(M)$, $\mathcal{F}(M) \equiv \mathcal{F}_\infty(M)$ y $\mathcal{D}(M) \equiv \mathcal{D}_\infty(M)$.

La proposición 12.5 permite definir la composición de campos vectoriales como actuación sucesiva sobre funciones. Sin embargo, si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, en general, $X \circ Y \notin \mathfrak{X}(M)$. Sin embargo, se tiene:

Definición 12.6 y Proposición Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M) \equiv \mathcal{D}(M)$. Se define el corchete de Lie $[X, Y]$ por

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \quad \text{para toda } f \in \mathcal{F}(M).$$

Se verifica que $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$.

Demostración Vamos a ver que, efectivamente, $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$. Es evidente que $[X, Y]$ es \mathbb{R} -lineal, para ver que es derivación, calculamos

$$\begin{aligned} [X, Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) = X((Yf)g + f(Yg)) - Y((Xf)g + f(Xg)) \\ &= (XYf)g + (Yf)(Xg) + (Xf)(Yg) + f(XYg) - (YXf)g - (Xf)(Yg) - (Yf)(Xg) - f(YXg) \\ &= ([X, Y]f)g + f([X, Y]g). \end{aligned}$$

\square

$\mathfrak{X}(M)$, con la operación suma de campos vectoriales definida en 5.1.5, y con la operación producto por un escalar definida por $(\lambda X)(x) = \lambda X(x)$ (que coincide con la operación producto por una función definida en 5.1.5 si esa función es constante) para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$, es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

Proposición 12.7 $\mathfrak{X}(M)$, con las operaciones que acabamos de mencionar y con la operación corchete de Lie es un álgebra de Lie, es decir, la aplicación corchete de Lie $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ es \mathbb{R} -bilineal y verifica, además, las propiedades

$$[X, Y] = -[Y, X] \text{ (antisimetría)}$$

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0 \text{ (identidad de Jacobi)}.$$

Demostración Es inmediato que se verifica la antisimetría y que $[\cdot, \cdot]$ es \mathbb{R} -bilineal. Para ver que se verifica la identidad de Jacobi, basta con calcular cada sumando actuando sobre una función f arbitraria y sumar después. \square

Nota 12.8 $[\cdot, \cdot]$ no es $\mathcal{F}(M)$ -bilineal, sino que (como el lector comprobará)

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

Del teorema de Schwartz de igualdad de las derivadas cruzadas se deduce que, si $(U; x^1, \dots, x^m)$ es una carta de M , entonces

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0.$$

De estas dos fórmulas resulta que si, en una carta, $X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $Y = \sum_{j=1}^m Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, entonces

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^m \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (12.4)$$

12.3. Campos f -relacionados

Definición 12.9 Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Se dice que X e Y están f -relacionados si $f_* \circ X = Y \circ f$, donde $f_* \circ X(x) = f_{*x}(X_x)$.

Lema 12.10 Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable, $v \in T_x M$. Se tiene que $(f_{*x}(v))g = v(g \circ f)$ para toda $g \in \mathcal{F}(N)$.

Demostración Sea c una curva de M tal que $c'(0) = v$. Por definición de diferencial se tiene que $(f_{*x}(v))g = (f \circ c)'(0)g = (g \circ f \circ c)'(0) = c'(0)(g \circ f) = v(g \circ f)$. \square

Proposición 12.11 Si $X, X' \in \mathfrak{X}(M)$ están f -relacionados con $Y, Y' \in \mathfrak{X}(N)$, entonces $[X, X']$ está f -relacionado con $[Y, Y']$.

Demostración Para ver que están f -relacionados, vamos a calcular la acción de $[Y, Y'] \circ f$ y de $f_*[X, X']$ sobre una función C^∞ arbitraria $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ y ver que el resultado es el mismo. Sea $x \in M$. Se tiene, aplicando el lema en la segunda igualdad, que

$$\begin{aligned} f_*[X, X'](x)(g) &= f_{*x}([X, X']_x)(g) = [X, X']_x(g \circ f) \\ &= X_x(X'(g \circ f)) - X'_x(X(g \circ f)) = X_x((f_*X')(g)) - X'_x((f_*X)(g)). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} [Y, Y'] \circ f(x)(g) &= [Y, Y']_{f(x)}(g) = Y_{f(x)}(Y'(g)) - Y'_{f(x)}(Y(g)) \\ &= (f_*X)(x)(Y'(g)) - (f_*X')(x)(Y(g)) = X_x(Y'(g) \circ f) - X'_x(Y(g) \circ f) \\ &= X_x((Y' \circ f)(g)) - X'_x((Y \circ f)(g)) = X_x((f_*X')(g)) - X'_x((f_*X)(g)). \end{aligned}$$

que son la misma expresión. \square

Capítulo 13

Teorema de Gauss Bonnet

Veremos varias versiones de este teorema, en sucesivas aproximaciones a la demostración de su enunciado más general. La versión más popular del teorema dice que, en una superficie, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor o menor que la correspondiente suma en el plano dependiendo de la integral de la curvatura de Gauss en la zona limitada por el triángulo. Puesto que los ángulos de un triángulo son, claramente, una cantidad intrínseca de la superficie, es claro que la medida de esos ángulos es una manera de averiguar si, intrínsecamente, la superficie difiere de un plano. Es, al mismo tiempo, una razón más para entender que la curvatura de Gauss es un invariante intrínseco de la superficie.

La demostración se va a basar en el teorema de Stokes (sobre la integración de formas que habéis visto en Análisis III), por eso recordaremos primero los conceptos básicos que habéis visto sobre formas diferenciales y su integración, en variedades. Es más, comenzaremos dando una definición de forma diferencial más abstracta, sobre variedades abstractas, y luego lo relacionaremos con el concepto de forma diferencial en \mathbb{R}^n y el usado en Análisis III.

13.1. Superficies de \mathbb{R}^3 “globales”

En este capítulo sobre el teorema de Gauss-Bonnet consideraremos subvariedades regulares de dimensión 2 (superficies regulares) de \mathbb{R}^3 .

Recordemos primero que si M es una 2-superficie de \mathbb{R}^3 de las que se han definido en Análisis, entonces M es una variedad diferenciable de dimensión 2 y la aplicación inclusión $i : M \rightarrow \mathbb{R}^3$: $i(x) = x$ es una subvariedad regular (es inmersión, inyectiva y la topología de $i(M) = M$ es la topología inducida por la de \mathbb{R}^3).

Por otra parte, si consideramos una superficie diferenciable abstracta M , un subvariedad regular de M en \mathbb{R}^3 es una inmersión inyectiva $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que, si se considera $f(M)$ con la topología inducida por la de \mathbb{R}^3 , f es un homeomorfismo. Resulta de ello y de la definición de atlas que si $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ es un atlas de M , entonces la familia $\{\varphi_i(U_i), f \circ \varphi_i^{-1}\}_{i \in I}$ verifica las condiciones de la Definición de 2-superficie dada en Análisis III (ver libro de Galbis-Maestre, Definición 3.1.1, pag. 75) y $f(M)$ es

una 2-superficie en el sentido del Análisis. Puesto que $f : M \rightarrow f(M)$ es un difeomorfismo de variedades, consideraremos siempre M dentro de \mathbb{R}^3 (i.e., identificaremos M con $f(M)$).

Por lo tanto, hablar de 2-superficies M de \mathbb{R}^3 en el sentido del Análisis y hablar de subvariedad regular \mathbb{R}^3 es lo mismo si (como haremos) identificamos M con $f(M)$ y consideramos como subvariedad regular la aplicación inclusión $i : M \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$.

Cuando M es compacta sin borde (i.e., una de las superficies clasificadas en el curso de Topología) tendremos las superficies con las que trabajaremos en el teorema de Gauss global, esas serán nuestras superficies “globales”.

Por comodidad, pues, consideraremos una superficie embebida como un subconjunto de \mathbb{R}^3 para el que la identidad es un embebimiento. Dada una carta (U, φ) de una tal superficie, la aplicación $F = \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie parametrizada en la que, además, F es inyectiva. En este caso, los vectores tangentes a las curvas de M tienen sentido tanto si se consideran como vectores de \mathbb{R}^3 como si se consideran como derivaciones (de hecho, $c'(t_0)$ como derivación es precisamente la derivada direccional en la dirección del vector $c'(t_0)$ como vector de \mathbb{R}^3), y se pueden identificar ambos conceptos de vector tangente.

Esto lleva a identificar los vectores $\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p$ de la base canónica de $T_p M$ asociada a la carta (U, φ) con los vectores $F_i = \frac{\partial F}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(p)}$ de la base canónica asociada a la parametrización $F = \varphi^{-1}$ porque se trata de vectores tangentes a las mismas curvas en el mismo punto. Es decir, identificaremos

$$\frac{\partial F}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(p)} \equiv \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p,$$

que verifican $\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p f = D_{\frac{\partial F}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(p)}} f$ para toda función real diferenciable f definida en un entorno de p en M .

13.2. Formas diferenciales

En cada punto p de una variedad diferenciable M , sobre el espacio tangente, podemos considerar el espacio vectorial de las k -formas lineales antisimétricas $\bigwedge^k T_p M$ (se puede recordar su definición y propiedades, por ejemplo, en las páginas 147 y siguientes del libro de Galbis y Maestre que se usa en Análisis III).

En 11.15 vimos que si x^i son las coordenadas asociadas a una carta de M cuyo dominio contiene a M , entonces dx_p^1, \dots, dx_p^n es una base de $T_p^* M$.

En general se tiene que si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de $T_p M$ y $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ es su base dual, entonces $\{\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$ es una base de $\bigwedge^k T_p M$, y que una k -forma $\alpha \in \bigwedge^k T_p M$ se escribe en una tal base de la forma

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_k}, \text{ donde } \alpha_{i_1 \dots i_k} = \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}). \quad (13.1)$$

En particular, cuando $k = n$,

$$\alpha = a \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n \text{ donde } a = \alpha(e_1, \dots, e_n). \quad (13.2)$$

De las observaciones anteriores se deduce que $\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$ es una base de $\bigwedge^k T_p M$ y $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ es una base de $\bigwedge^n T_p M$.

Definición 13.1 Una k -forma diferencial α de clase C^r es una aplicación $\alpha : M \rightarrow \bigwedge^k M := \cup_{p \in M} \bigwedge_p^k M$ tal que $\alpha(p) \in \bigwedge_p^k M$ para cada $p \in M$ y tal que, para cada carta (U, φ) de M , las funciones $\alpha_{i_1 \dots i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\alpha(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k}(x) dx_x^{i_1} \wedge \dots \wedge dx_x^{i_k}$ son de clase C^r .

Denotaremos por $E^k(M)$ el conjunto de las formas diferenciales de grado k (y clase C^r) sobre M .

Como es evidente, cuando $M = \mathbb{R}^n$, el concepto coincide exactamente con el de k -forma diferencial de clase C^r visto en Análisis III. Y las mismas operaciones con las mismas definiciones que se han visto en Análisis son válidas en este contexto. Vamos a recordarlas:

Definición 13.2 Recopilación de definiciones de operaciones con formas diferenciales vistas en Análisis y sus propiedades: Si $\theta^1, \dots, \theta^k$ son 1-formas diferenciales y

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad \beta = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n} \beta_{i_1 \dots i_\ell} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\ell}$$

son una k -forma y una ℓ -forma diferenciales expresadas en una carta (U, φ) , entonces

- $\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^k(v_1, \dots, v_k) = \det(\theta^i(v_j))$.
- $\alpha \wedge \beta = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k} \beta_{j_1 \dots j_\ell} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_\ell}$
(y no depende de la carta elegida)
- El producto exterior “ \wedge ” es $\mathcal{F}(M)$ -bilineal y asociativo.
- $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha$
- La diferencial exterior $d : E^k(M) \rightarrow E^\ell(M)$ se define por

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\alpha_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

(y tampoco depende de la carta elegida)

- - d es \mathbb{R} -lineal.
- Si $f \in \mathcal{F}(M)$, entonces $d(f\alpha) = df \wedge \alpha + f d\alpha$.
- $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$.
- $dd\alpha = 0$.

- Dada $f : M \rightarrow N$, se define la aplicación “pull back” $f^* : \bigwedge^k N \rightarrow \bigwedge^k M$ por

$$f_x^*((\alpha_{f(x)})(v_1, \dots, v_k)) = \alpha_{f(x)}(f_{*x}v_1, \dots, f_{*x}v_k)$$

que se extiende, por esta misma expresión, a $f^* : E^k(N) \rightarrow E^k(M)$.
Si $k = 0$, $E^0(M) = \mathcal{F}(M)$, y $f^*(g) = g \circ f$ para cualquier $g \in \mathcal{F}(N)$.

- f^* verifica las propiedades:
 - f^* es \mathbb{R} -lineal
 - $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$ (en particular, $f^*(g \alpha) = (g \circ f) f^*\alpha$ para toda $g \in \mathcal{F}(N)$).
 - $f^*(d\alpha) = d(f^*\alpha)$

13.3. Formas de conexión y curvatura en una superficie de \mathbb{R}^3

En este apartado M será una superficie regular de \mathbb{R}^3 . Recordemos que consideramos siempre una tal superficie como un subconjunto de \mathbb{R}^3 . Se tiene por lo tanto que para todo $p \in M$, T_pM se identifica con un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 y tiene un producto escalar inducido. Además, debido a que, para cada carta (U, φ) de M , $\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie parametrizada, se tiene que toda la geometría local de superficies que hicimos en los capítulos 6 a 9 vale para M . En particular, el producto escalar inducido sobre T_pM para cada $p \in M$ coincide con la primera forma fundamental I .

Para poder dar una demostración relativamente rápida del teorema de Gauss-Bonnet, vamos a escribir la derivada covariante y la curvatura usando formas diferenciales. Necesitamos algunas definiciones.

Definición 13.3 Diremos que $\{e_1, e_2\}$ es una referencia local ortonormal de M si e_1, e_2 son dos campos vectoriales tangentes diferenciables definidos en un abierto de M que, en cada punto p en que están definidos, forman una base ortonormal de T_pM

El concepto de superficie regular de \mathbb{R}^3 orientada se ha estudiado en Análisis III. Por brevedad, y para no repasar toda la teoría, vamos a dar aquí como definición de superficie orientada lo que en Análisis III se estudia como una caracterización (teorema 5.2.2 del libro de Galbis y Maestre):

Definición 13.4 Una superficie regular se dice que es orientable si existe un campo vectorial unitario normal diferenciable sobre la superficie. Se llama orientación de una superficie orientable a la elección de un campo vectorial unitario normal de entre los dos que posee. Una superficie orientada es una superficie orientable con una orientación dada.

Nota 13.5 a) Obsérvese que una orientación sobre una superficie regular de \mathbb{R}^3 define una orientación en cada plano tangente. Para cada $p \in M$, una base u, v de $T_p M$ está positivamente orientada si N, u, v es una base positivamente orientada de \mathbb{R}^3 .

b) Un campo vectorial tangente no nulo X sobre un abierto U de una superficie regular orientada M define una referencia ortonormal positivamente orientada $\{e_1, e_2\}$ sobre U tomando $e_1 = X/|X|$, $e_2 = N \wedge e_1$.

Definición 13.6 Dada una referencia local ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de M , denotaremos por $\{\theta^1, \theta^2\}$ su referencia dual (1-formas diferenciales definidas sobre el mismo abierto que las e_i tales que, en cada punto, son la base dual de $\{e_1, e_2\}$). Llamaremos forma de conexión asociada a la referencia $\{e_1, e_2\}$ a la 1-forma diferencial ω definidas por

$$\omega(X) = \theta^2(\nabla_X e_1) = -\theta^1(\nabla_X e_2),$$

es decir, $\omega(X)$ es la componente e_2 de $\nabla_X e_1$ (no puede haber otra componente de $\nabla_X e_1$, puesto que, por ser e_1 unitario, su derivada covariante ha de ser ortogonal a él).

En la definición anterior la segunda igualdad procede del cálculo siguiente:

$$\theta^2(\nabla_X e_1) = \langle e_2, \nabla_X e_1 \rangle = -\langle \nabla_X e_2, e_1 \rangle = -\theta^1(\nabla_X e_2).$$

Proposición 13.7 Sea M es una superficie orientable de \mathbb{R}^3 . Si $\{e_1, e_2\}$ y $\{u_1, u_2\}$ son dos referencias locales ortonormales positivamente orientadas y θ es el ángulo que forman u_1 y e_1 definido por

$$\begin{aligned} u_1 &= \cos \theta e_1 + \text{sen } \theta e_2, \\ u_2 &= -\text{sen } \theta e_1 + \cos \theta e_2, \end{aligned} \quad (13.3)$$

las 1-formas de conexión ω_e y ω_u asociadas a esas dos referencias están relacionadas por $\omega_u = \omega_e + d\theta$.

Demostración Para demostrarlo, calculemos

$$\begin{aligned} \omega_u(X) &= \langle \nabla_X u_1, u_2 \rangle = \langle \nabla_X (\cos \theta e_1 + \text{sen } \theta e_2), -\text{sen } \theta e_1 + \cos \theta e_2 \rangle \\ &= \langle (\cos \theta \nabla_X e_1 + \text{sen } \theta \nabla_X e_2), -\text{sen } \theta e_1 + \cos \theta e_2 \rangle \\ &\quad + X(\theta) \langle -\text{sen } \theta e_1 + \cos \theta e_2, -\text{sen } \theta e_1 + \cos \theta e_2 \rangle \\ &= \cos^2 \theta \omega_e(X) + \text{sen}^2 \theta \omega_e(X) + X(\theta) = \omega_e(X) + d\theta(X). \end{aligned}$$

□

Nota 13.8 La función θ de la proposición anterior puede no estar bien definida de modo global, pero lo está localmente y eso es suficiente para tener bien definida $d\theta$. No obstante, la fórmula $\omega_u = \omega_e + d\theta$ de la proposición anterior la vamos a aplicar

en una situación en la que el ángulo θ sí se puede definir como una aplicación diferenciable. Es la siguiente:

U es un abierto dominio de un sistema de coordenadas (U, F^{-1}) , $\{e_1, e_2\}$ es una referencia ortonormal bien definida sobre U (por ejemplo $e_1 = F_1/|F_1|$ y $e_2 = N \wedge e_1$). $c(t) : [0, L]$ es una curva regular cerrada simple contenida en U (o, equivalentemente, $c : S^1 \rightarrow U$ es una inmersión inyectiva) parametrizada respecto de su longitud de arco, $\{u_1(t) := c'(t), u_2(t)\}$ es una referencia ortonormal definida a lo largo de la curva c . Definimos θ de nuevo por la expresión (13.3). Si, para cada t consideramos el isomorfismo $T_{c(t)}M \rightarrow \mathbb{R}^2$; $(ae_1 + be_2) \mapsto (a, b)$, ese ángulo θ es el que forma la imagen $(\langle u_1, e_1 \rangle, \langle u_1, e_2 \rangle)$ de $u_1(t)$ por esa aplicación con el eje X de \mathbb{R}^2 . Vimos en el teorema 2.11 que se podía definir este ángulo $\theta(t)$ como una aplicación diferenciable.

Para la situación descrita en el párrafo anterior, $\{u_1(t) = c'(t), u_2(t)\}$ son campos vectoriales definidos sólo a lo largo de la curva c , por lo tanto sólo tiene sentido calcular la derivada covariante de esos campos vectoriales en la dirección del vector $c'(t)$. Repitiendo esos cálculos en esta situación, tenemos:

Proposición 13.9

$$\omega_u(c'(t)) = \omega_e(c'(t)) + \theta'(t) \quad (13.4)$$

Nota 13.10 En la teoría de superficies parametrizadas definimos el corchete de dos campos vectoriales tangentes X e Y como el campo vectorial $D_X Y - D_Y X$, y en variedades como el campo que actúa sobre funciones por la expresión $XY(f) - YX(f)$. Bajo la identificación Φ^{-1} que a un campo vectorial le hace corresponder la derivada direccional en la dirección de ese campo vectorial ambas definiciones de corchete coinciden. En efecto: Si $X = \sum X^i F_i$ y $Y = \sum Y^i F_i$, se tiene que:

$$\begin{aligned} D_X Y - D_Y X &= \sum_i X^i \sum_j (F_i(Y^j)F_j + Y^j D_{F_i} F_j) - \sum_i Y^i \sum_j (F_i(X^j)F_j + X^j D_{F_i} F_j) \\ &= \sum_j \sum_i (X^i F_i(Y^j) - Y^i F_i(X^j)) F_j + \sum_j \sum_i (X^i Y^j D_{F_i} F_j - Y^i X^j D_{F_i} F_j) \\ &= \sum_j \sum_i (X^i F_i(Y^j) - Y^i F_i(X^j)) F_j + \sum_j \sum_i (X^i Y^j D_{F_i} F_j - Y^j X^i D_{F_j} F_i) \\ &= \sum_j \sum_i (X^i F_i(Y^j) - Y^i F_i(X^j)) F_j \end{aligned}$$

que coincide con la expresión (12.4) para el corchete de Lie definido para las variedades en una base asociada a una carta (con la identificación $F_i \equiv \partial/\partial u^i$).

Lema 13.11 Para X, Y, Z campos vectoriales sobre una superficie, se tiene que $D_{[X, Y]} Z = [D_X, D_Y] Z$, siendo $[D_X, D_Y] Z = D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z)$.

Demostración En una parametrización F de la superficie, se pueden expresar $X =$

$\sum_{i=1}^2 X^i F_i$, $Y = \sum_{i=1}^2 Y^i F_i$, $Z = \sum_{i=1}^2 Z^i F_i$. Usando estas expresiones:

$$\begin{aligned}
[D_X, D_Y]Z &= D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) = \sum_{i,j,k} X^i D_{F_i}(Y^j D_{F_j}(Z^k F_k)) - Y^i D_{F_i}(X^j D_{F_j}(Z^k F_k)) \\
&= \sum_{i,j,k} \left\{ X^i D_{F_i}(Y^j) D_{F_j}(Z^k) F_k + X^i D_{F_i}(Y^j) Z^k D_{F_j} F_k \right. \\
&\quad + X^i Y^j D_{F_i}(D_{F_j}(Z^k)) F_k + X^i Y^j D_{F_j}(Z^k) D_{F_i} F_k \\
&\quad + X^i Y^j D_{F_i}(Z^k) (D_{F_j} F_k + X^i Y^j Z^k D_{F_i}(D_{F_j} F_k)) \\
&\quad - Y^i D_{F_i}(X^j) D_{F_j}(Z^k) F_k - Y^i D_{F_i}(X^j) Z^k D_{F_j} F_k \\
&\quad - Y^i X^j D_{F_i}(D_{F_j}(Z^k)) F_k - Y^i X^j D_{F_j}(Z^k) D_{F_i} F_k \\
&\quad \left. - Y^i X^j D_{F_i}(Z^k) (D_{F_j} F_k - Y^i X^j Z^k D_{F_i}(D_{F_j} F_k)) \right\} \\
&= \sum_{i,j,k} \left\{ X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} \frac{\partial Z^k}{\partial u^j} F_k + X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} Z^k \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^k} + X^i Y^j \frac{\partial^2 Z^k}{\partial u^i \partial u^j} F_k \right. \\
&\quad + X^i Y^j \frac{\partial Z^k}{\partial u^j} \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^k} + X^i Y^j \frac{\partial Z^k}{\partial u^i} \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^k} + X^i Y^j Z^k \frac{\partial^3 F}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k} \\
&\quad - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \frac{\partial Z^k}{\partial u^j} F_k - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} Z^k \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^k} - Y^i X^j \frac{\partial^2 Z^k}{\partial u^i \partial u^j} F_k \\
&\quad \left. - Y^i X^j \frac{\partial Z^k}{\partial u^j} \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^k} - Y^i X^j \frac{\partial Z^k}{\partial u^i} \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^k} - Y^i X^j Z^k \frac{\partial^3 F}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k} \right\} \\
&= \sum_{i,j,k} \left\{ X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} \frac{\partial Z^k}{\partial u^j} F_k + X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} Z^k \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^k} \right. \\
&\quad \left. - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \frac{\partial Z^k}{\partial u^j} F_k - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} Z^k \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^k} \right\},
\end{aligned}$$

donde hemos aplicado la igualdad de las derivadas cruzadas en la última igualdad.

Ahora usamos (12.4) (ver también nota 13.10) para calcular

$$\begin{aligned}
D_{[X,Y]}Z &= \sum_{i,j,k} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \frac{\partial(Z^k F_k)}{\partial u^j} \\
&= \sum_{i,j,k} \left\{ \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \frac{\partial Z^k}{\partial u^j} F_k + \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) Z^k \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^k} \right\},
\end{aligned}$$

que coincide con el resultado obtenido con la expresión anterior, luego son iguales ambas expresiones. \square

Lema 13.12 Usando una referencia ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de una superficie regular M de \mathbb{R}^3 , la curvatura de Gauss K se puede expresar como:

$$K = \langle -\nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_1 + \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_1 + \nabla_{[e_1, e_2]} e_1, e_2 \rangle$$

Demostración Por comodidad de escritura, cambiemos los nombres: $u := e_1$, $v = e_2$. Por definición del $[\cdot, \cdot]$ y de la derivada direccional en \mathbb{R}^3 , tenemos (usando Lema 13.11) que

$$\begin{aligned} D_{[u,v]}u &= [D_u, D_v]u = D_u D_v u - D_v D_u u \\ &= D_u(\nabla_v u + \text{II}(v, u)N) - D_v(\nabla_u u + \text{II}(u, u)N) \\ &= \nabla_u \nabla_v u + D_u(\text{II}(v, u))N - \text{II}(v, u)Lu - \nabla_v \nabla_u u \\ &\quad - D_v(\text{II}(u, u))N + \text{II}(u, u)Lv. \end{aligned} \quad (13.5)$$

Por otro lado,

$$D_{[u,v]}u = \nabla_{[u,v]}u + \text{II}([u, v], u)N. \quad (13.6)$$

Igualando las componentes tangenciales de los miembros de la derecha de las igualdades (13.5) y (13.6), tenemos

$$\begin{aligned} \nabla_{[u,v]}u &= \nabla_u \nabla_v u - \text{II}(v, u)Lu - \nabla_v \nabla_u u + \text{II}(u, u)Lv \\ &= \nabla_u \nabla_v u - \nabla_v \nabla_u u - \text{II}(v, u)Lu + \text{II}(u, u)Lv. \end{aligned}$$

Multiplicando escalarmente por v y agrupando términos:

$$\langle \nabla_{[u,v]}u - \nabla_u \nabla_v u + \nabla_v \nabla_u u, v \rangle = \langle -\text{II}(v, u)Lu + \text{II}(u, u)Lv, v \rangle = \det L = K.$$

Obsérvese que este lema es una nueva demostración del teorema egregio de Gauss. Los que sigan estudiando Geometría Riemanniana en dimensiones superiores verán que la fórmula para la curvatura que se obtiene con esta demostración del teorema egregio de Gauss sirve para la definición general del tensor curvatura en dimensiones superiores. \square

Definición 13.13 Se llama 2-forma curvatura a la 2-forma Ω definida por

$$\Omega = K \theta^1 \wedge \theta^2 \quad (13.7)$$

donde θ^1, θ^2 es la referencia local dual de una referencia local ortonormal e_1, e_2 de M .

Observación La definición anterior depende sólo de la orientación de la referencia $\{e_1, e_2\}$ y no de la referencia concreta dada, por lo que Ω es una 2-forma globalmente definida sobre una superficie regular orientada.

En efecto, si $\{u_1, u_2\}$ es otra referencia local ortonormal que define la misma orientación que $\{e_1, e_2\}$ y cuya base dual es $\{\varphi^1, \varphi^2\}$, se tiene que $\varphi^i = \sum_j \varphi_j^i \theta^j$, siendo $\left(\varphi_j^i\right)_{1 \leq i, j \leq 2}$ una matriz ortogonal (i.e., su inversa es igual a su traspuesta) de determinante 1 (por definir ambas bases la misma orientación), por lo tanto $\varphi^1 \wedge \varphi^2 = \sum_{j,k} \varphi_j^1 \varphi_k^2 \theta^j \wedge \theta^k = (\varphi_1^1 \varphi_2^2 - \varphi_2^1 \varphi_1^2) \theta^1 \wedge \theta^2 = \det \left(\varphi_j^i\right)_{1 \leq i, j \leq 2} \theta^1 \wedge \theta^2 = \theta^1 \wedge \theta^2$ porque, al ser $\{u_1, u_2\}$ y $\{e_1, e_2\}$ referencias ortonormales que definen la misma orientación, se tiene que $\det \left(\varphi_j^i\right)_{1 \leq i, j \leq 2} = 1$.

Lema 13.14 $d\omega = -\Omega$

Demostración Calculemos primero, para X, Y campos vectoriales arbitrarios definidos en el dominio de una carta, $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, si $\omega = \sum \omega_i dx^i$.

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y) &= \sum d\omega_i \wedge dx^i(X, Y) = \sum (d\omega_i(X)dx^i(Y) - d\omega_i(Y)dx^i(X)) \\ &= \sum (Y^i X(\omega_i) - X^i Y(\omega_i)) = \sum (X(\omega_i Y^i) - \omega_i X(Y^i) - Y(\omega_i X^i) + \omega_i Y(X^i)) \\ &= X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega \left(\sum (X(Y^i) - Y(X^i)) \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ &= X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \end{aligned} \quad (13.8)$$

Usando esta fórmula, se tiene que

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y) &= X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \\ &= X \langle \nabla_Y e_1, e_2 \rangle - Y \langle \nabla_X e_1, e_2 \rangle - \langle \nabla_{[X, Y]} e_1, e_2 \rangle \\ &= \langle \nabla_X \nabla_Y e_1, e_2 \rangle + \langle \nabla_Y e_1, \nabla_X e_2 \rangle - \langle \nabla_Y \nabla_X e_1, e_2 \rangle - \langle \nabla_X e_1, \nabla_Y e_2 \rangle - \langle \nabla_{[X, Y]} e_1, e_2 \rangle \\ & \text{|pero } \langle \nabla_Y e_1, \nabla_X e_2 \rangle = \langle \nabla_X e_1, \nabla_Y e_2 \rangle = 0 \text{ porque } \nabla_Y e_1 \text{ está en la dirección de } e_2 \text{ y} \\ & \quad \nabla_X e_2 \text{ está en la dirección de } e_1, \text{ y lo mismo se tiene para el otro producto escalar|} \\ &= \langle \nabla_X \nabla_Y e_1 - \nabla_Y \nabla_X e_1 - \nabla_{[X, Y]} e_1, e_2 \rangle. \end{aligned}$$

Si tomamos $X = e_1$, $Y = e_2$, tenemos $d\omega(e_1, e_2) = -K = -\Omega(e_1, e_2)$. \square

13.4. Teorema de Gauss-Bonnet local

Lema 13.15 Si (u, v) son coordenadas locales de una superficie en un abierto, $\{e_1, e_2\}$ es una referencia local ortonormal definida en el mismo abierto y $\{\theta^1, \theta^2\}$ su referencia dual, se tiene que $\sqrt{g} du \wedge dv = \theta^1 \wedge \theta^2$.

Demostración Usaremos la notación $u \equiv x^1$, $v \equiv x^2$, $F_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\alpha = \angle(F_1, e_1)$, $\beta = \angle(F_2, e_1)$, $\theta = \angle(F_1, F_2) = \beta - \alpha$.

$$\begin{aligned} \theta^1 \wedge \theta^2 &= \theta^1 \wedge \theta^2(F_1, F_2) dx^1 \wedge dx^2 = \begin{vmatrix} \langle F_1, e_1 \rangle & \langle F_2, e_1 \rangle \\ \langle F_1, e_2 \rangle & \langle F_2, e_2 \rangle \end{vmatrix} dx^1 \wedge dx^2 \\ &= |F_1| |F_2| (\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) dx^1 \wedge dx^2 = |F_1| |F_2| \sin(\alpha - \beta) dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \sqrt{|F_1|^2 |F_2|^2 (1 - \cos^2 \theta)} dx^1 \wedge dx^2 = \sqrt{|F_1|^2 |F_2|^2 (1 - |F_1|^2 |F_2|^2 \cos^2 \theta)} dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \sqrt{|F_1|^2 |F_2|^2 - \langle F_1, F_2 \rangle^2} dx^1 \wedge dx^2 = \sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned}$$

\square

Recordemos la siguiente definición de Análisis III:

Definición 13.16 Sea M una superficie de \mathbb{R}^3 orientada por un vector unitario normal N . Sea D un subconjunto de M con interior no vacío y su frontera una curva $c(t)$. Sea ξ un vector unitario tangente a M , normal a la frontera de D y apuntando hacia afuera de D . Diremos que c está positivamente orientada si $\{N, \xi, c'(t)\}$ es una base positivamente orientada de \mathbb{R}^3 en cada $c(t)$.

Recordemos la definición de integral de una 2-forma diferencial sobre una superficie (cfr. libro de Galbis-Maestre, Def.7.1.1 y Teor. 7.1.):

Definición 13.17 Si η es una 2-forma diferencial sobre una superficie M , $(U, \varphi = F^{-1})$ una carta de M . En esa carta sabemos que $\eta = \eta_{12} du^1 \wedge du^2$, y que $\eta_{12} = \eta(F_1, F_2)$. Si $A \subset U$, se define

$$\int_A \eta = \int_{\varphi(A)} \eta_{12} \circ F \, du^1 du^2 \quad (13.9)$$

Recordemos también el teorema de Stokes, que escribiremos aquí sólo en su versión para formas diferenciales definidas en dominios de superficies:

Teorema 13.18 Stokes theorem for surfaces Sea n M , D , y c como antes. Sea ω una 1-forma diferencial definida sobre M , y consideremos sobre c la orientación definida por la de M . Se tiene:

$$\int_D d\omega = \int_c \omega \quad (13.10)$$

Teorema 13.19 de Gauss-Bonnet local sin ángulos. Sea U un abierto simplemente conexo de una superficie regular M , cuya frontera Γ es la imagen una curva c diferenciable cerrada y simple (lo que se da automáticamente si la clausura de U es una superficie con borde de las estudiadas en Análisis III). Se tiene que

$$\int_U K \, dA = - \int_{\Gamma} k_g \, ds + 2\pi. \quad (13.11)$$

Demostración Tomemos como $\{u_1, u_2\}$ la referencia ortonormal a lo largo de la curva positivamente orientada tal que $u_1 = c'(t)$. Usando el lema anterior, el lema 13.15, el teorema de Stokes, la definición de $\theta(t)$ indicada en la nota 13.8 y la fórmula (13.4),

$$\begin{aligned} \int_U K \, dA &= \int_{\varphi(U)} (K\sqrt{g}) \circ \varphi^{-1} \, du \, dv = \int_U K\sqrt{g} \, du \wedge dv \\ &= \int_U \Omega = - \int_U d\omega_e = - \int_{\Gamma} \omega_e = - \int_{\Gamma} \omega_u + \int_{\Gamma} \theta'(t) \\ &= - \int_0^L \langle \nabla_{c'(t)} c'(t), u_2(t) \rangle dt + \theta(L) - \theta(0) = - \int_0^L k_g(t) dt + \theta(L) - \theta(0), \end{aligned}$$

Por ser $c(L)$ y $c(0)$ el mismo punto, es evidente que $\theta(L) - \theta(0)$ es un múltiplo entero de 2π . Si U fuese un trozo de plano, sería exactamente igual a 2π , por el teorema 2.18 del

índice de rotación de una curva cerrada simple plana. Ahora bien, se puede pasar de una superficie plana a la superficie $F(U)$ por una familia continua F_t de superficies, en cada una de las cuales $\theta_t(L) - \theta_t(0) = 2\pi n$, pero, por ser la familia continua, la función θ_t depende continuamente de t , luego lo mismo le ocurre a $\theta_t(L) - \theta_t(0)$, luego no puede dar saltos y, como en un extremo de la familia vale 2π , ha de valer siempre 2π . (Nota: el punto débil de esta demostración está en que no hemos demostrado la existencia de la familia F_t , para una demostración rigurosa que no supone que las superficies estén embebidas en \mathbb{R}^3 , véase Spivak volumen III, pag. 266). \square

Lo que acabamos de ver es el teorema de Gauss-Bonnet para un dominio simplemente conexo limitado por una curva cerrada simple diferenciable. Por ser diferenciable en todo punto, no se habla de ángulos en esta curva. Vamos a ver ahora como queda el teorema si se habla de ángulos. Necesitamos primero algunas definiciones. La primera es una versión diferenciable, y para polígonos, de la definición de triángulos en superficies que se vió en el tema 11 de Topología el curso pasado.

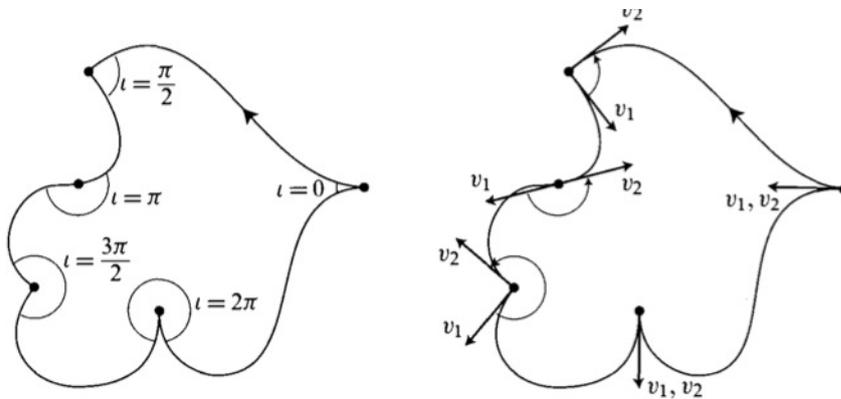
Definición 13.20 *Dada una superficie diferenciable M , un polígono de M es un homomorfismo $\phi : P \subset M \rightarrow P' \subset \mathbb{R}^2$ de un subconjunto P de M sobre un polígono P' de \mathbb{R}^2 que es un difeomorfismo del interior de P en el interior de P' y que, restringido a la frontera de P' , ϕ^{-1} es un difeomorfismo sobre cada uno de los interiores de los lados del polígono P' . Las antiimágenes por ϕ de los lados y vértices de P' se llaman, respectivamente, lados y vértices de P .*

Puesto que los lados del polígono P' son la imagen de una curva poligonal en el plano, la condición anterior sobre ϕ^{-1} restringida a los lados equivale a decir que ϕ^{-1} define una curva cerrada diferenciable a trozos cuya imagen es la frontera de P . La entera definición es equivalente a: "un subconjunto simplemente conexo P de M es un polígono si tiene interior no vacío y su frontera es una curva cerrada diferenciable a trozos con un número finito de puntos en que no es diferenciable. Los puntos de no diferenciable se llaman vértices del polígono, y los intervalos en que es diferenciable se llaman lados".

En este capítulo trabajaremos con polígonos P contenidos en la imagen de una parametrización $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ que son imagen por F de un polígono contenido en U (por lo tanto, $\phi = F^{-1}$).

Definición 13.21 *Sea P un polígono de M , $c : [0, L] \rightarrow M$ la curva cuya imagen es la frontera de P . Según la definición 13.16, la orientación de P define una orientación de su frontera. Además, existe una partición de $[0, L]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = L$ tal que $c'(t)$ existe para todo $t \neq t_i$ y están bien definidos los límites por la derecha y la izquierda de las derivadas $c'(t_i^+)$ y $c'(t_i^-)$. Además, parametrizaremos de modo que $c'(t_i^-) = c'(t_i^+)$, de modo que los vértices son t_1, \dots, t_n .*

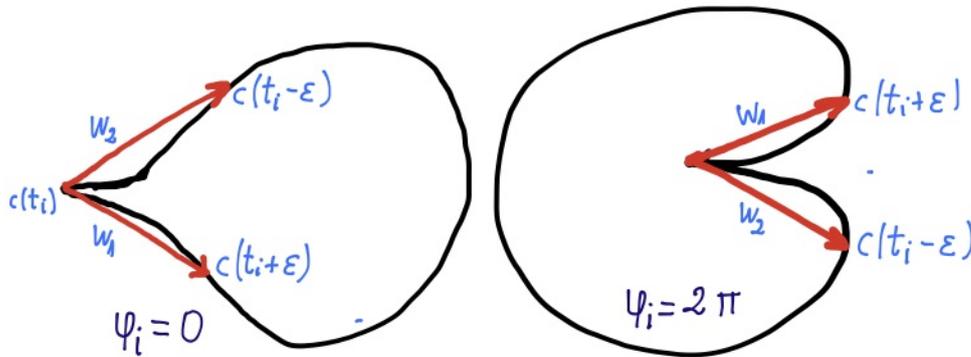
En cada vértice t_i definimos el ángulo interior φ_i como el ángulo orientado (entre 0 y 2π) que va de $v_1 = c'(t_i^+)$ a $v_2 = -c'(t_i^-)$



Nota 13.22 Al haber tomado $\varphi \in [0, 2\pi]$, la definición anterior resulta ambigua cuando $v_1 = v_2$. ¿Qué ángulo se le asigna, 0 o 2π ? Para decidirlo:

Sea $w_1(\varepsilon)$ el vector de \mathbb{R}^3 que va desde $c(t_i)$ hasta $c(t_i + \varepsilon)$, y sea $w_2(\varepsilon)$ el vector que va desde $c(t_i)$ hasta $c(t_i - \varepsilon)$. Por la hipótesis $v_1 = v_2$ se tiene, para ε suficientemente pequeño y distinto de 0, los vectores N , $w_1(\varepsilon)$ y $w_2(\varepsilon)$ son linealmente independientes y la orientación de $N(c(t_i))$, $\{w_1(\varepsilon), w_2(\varepsilon)\}$ no cambia para pequeñas variaciones de ε . Se define entonces

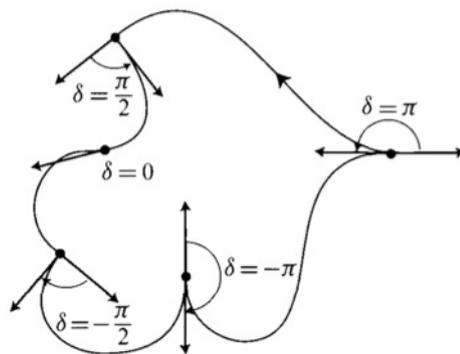
$$\varphi_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \{N(c(t_i)), w_1(\varepsilon), w_2(\varepsilon)\} \text{ está positivamente orientado} \\ 2\pi & \text{si } \{N(c(t_i)), w_1(\varepsilon), w_2(\varepsilon)\} \text{ está negativamente orientado} \end{cases}$$



Obsérvese que si hubiésemos introducido los $w_i(\varepsilon)$ al comienzo, podríamos haber definido los ángulos internos para todos los casos por

$$\varphi_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{ángulo orientado de } w_1(\varepsilon) \text{ a } w_2(\varepsilon)$$

Definición 13.23 El ángulo de discontinuidad o ángulo exterior en el vértice t_i es el suplementario del ángulo interior: $\delta_i = \pi - \varphi_i \in [-\pi, \pi]$



Lema 13.24 Con la notación usada en las definiciones anteriores, si θ es el ángulo que forma $c'(t_i^-)$ con un vector $u \in T_{c(t)}M$, entonces $\theta + \delta_i$ es el ángulo entre $c'(t_i^+)$ y u .

Teorema 13.25 de Gauss-Bonnet local con ángulos. Sea D un polígono de n vértices de una superficie regular M , cuya frontera es la curva diferenciable a trozos Γ , y contenido en el dominio de una carta de M . Se tiene que

$$\int_D K \, dA = - \int_{\Gamma} k_g \, ds - \sum_{i=1}^n \delta_i + 2\pi = - \int_{\Gamma} k_g \, ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i + (2-n)\pi. \quad (13.12)$$

Demostración Por el lema 13.24, podemos elegir $\theta_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que cada θ_i sea una elección continua del ángulo entre $u_1 = c'$ y e_1 (para una referencia local ortonormal $\{e_1, e_2\}$ prefijada sobre U) sobre el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ y

$$\theta_{i+1}(t_i) - \theta_i(t_i) = \delta_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Si aplicamos ahora el teorema de Stokes como en la demostración del Teorema 13.19, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_D K \, dA &= \int_{\varphi(D)} K \sqrt{g} \, du \, dv = \int_D \Omega = - \int_D d\omega_e = - \int_{\Gamma} \omega_e = - \int_{\Gamma} \omega_u + \int_{\Gamma} \theta'(t) dt \\ &= - \int_{\Gamma} \langle \nabla_{c'(t)} c'(t), u_2(t) \rangle dt + \int_0^L \theta'(t) dt \\ &= - \sum_{i=1}^{n+1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} k_g(t) dt + \sum_{i=1}^{n+1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \theta'_i(t) dt = - \int_{\Gamma} k_g(t) dt + \sum_{i=1}^{n+1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \theta'_i(t) dt, \\ &= - \int_{\Gamma} k_g(t) dt + \sum_{i=1}^{n+1} (\theta_i(t_i) - \theta_i(t_{i-1})) \\ &= - \int_{\Gamma} k_g(t) dt - \sum_{i=1}^n \delta_i + \theta_{n+1}(L) - \theta_1(0). \end{aligned} \quad (13.13)$$

Obsérvese que en la última igualdad (13.13) hemos usado que

$$\theta_{n+1}(L) - \theta_1(0) = \sum_{i=1}^{n+1} (\theta_i(t_i) - \theta_i(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^n \delta_i. \quad (13.14)$$

La demostración del teorema se acaba si probamos que $\theta_{n+1}(L) - \theta_1(0) = 2\pi$. Lo que será cierto usando los mismos argumentos que para el teorema 13.19 si vemos que el teorema del índice de rotación 2.18 para curvas planas diferenciables también vale para curvas diferenciales a trozos con un número finito de puntos singulares. Esto se puede hacer aproximando la curva diferenciable en el plano a trozos por una curva diferenciable \tilde{c} tal que $\tilde{c}(0) = c(0)$ cuya variación de ángulo 2π aproxima en una cantidad pequeña (menor que π por ejemplo) el miembro de la derecha de (13.14), y como $\theta_{n+1}(L) - \theta_1(0)$ ha de ser un múltiplo de 2π , la aproximación ha de ser exactitud $\theta_{n+1}(L) - \theta_1(0) = 2\pi$. Para detalles ver el tomo III de Spivak páginas 269-270. \square

Corolario 13.26 *Si los lados del polígono del teorema 13.25 son geodésicas, entonces*

$$\int_D K \, dA = - \sum_{i=1}^n \delta_i + 2\pi = \sum_{i=1}^n \varphi_i + (2-n)\pi. \quad (13.15)$$

En particular, para un triángulo geodésico se tiene

$$\int_D K \, dA = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \pi. \quad (13.16)$$

13.5. Teorema de Gauss-Bonnet global

Recordemos la noción de superficie triangulada vista en topología, pero ahora con triángulos (polígonos de 3 lados, def. 13.20) diferenciables (no solo continuos como en topología)

Definición 13.27 *Sea M una superficie compacta. Una triangulación diferenciable de M es una familia finita de triángulos (cf. Definición 13.20) $\mathcal{T} = \{\phi_i : T_i \subset M \rightarrow T' \subset \mathbb{R}^2\}_{1 \leq i \leq n}$ tales que:*

- 1) $M = T_1 \cup \dots \cup T_n$,
- 2) Si $T_i \neq T_j$, entonces, o bien $T_i \cap T_j = \emptyset$, o bien $T_i \cap T_j$ es un vértice común, o bien $T_i \cap T_j$ es un lado común.

Una superficie M se llama triangulable si existe una triangulación \mathcal{T} en M .

Por último, denominamos superficie triangulada al par (M, \mathcal{T}) .

Es importante conocer el siguiente teorema, aunque no veremos su demostración, por ser larga y no dar tiempo en este curso.

Teorema 13.28 *Toda superficie regular compacta de \mathbb{R}^3 es el conjunto de nivel de una función regular sobre un abierto de \mathbb{R}^3 que contiene a la superficie y, por lo tanto, es orientable.*

Vamos a dar el teorema de Gauss-Bonnet sobre superficies regulares compactas de \mathbb{R}^3 . Supondremos siempre que son orientables, pero, por el teorema anterior, es hipótesis no es ninguna restricción real.

Recordemos ahora un teorema visto (sin demostración) en topología de segundo. El teorema se enunció en ese curso para triangulaciones continuas, pero es igualmente válido para las triangulaciones diferenciables definidas en este capítulo.

Teorema 13.29 *Toda superficie regular compacta es triangulable. Además:*

a) *si la superficie es orientable, la orientación definida sobre cada una de las fronteras de los triángulos resulta compatible,*

b) *la característica de Euler $\chi(M) = C + V - A$ es un invariante topológico de la variedad que no depende de la triangulación (C = número de caras, V = número de vértices, A = número de aristas),*

c) *toda superficie compacta se obtiene añadiendo g asas a la esfera S^2 (g se llama género de la superficie) y $\chi = 2 - 2g$.*

Teorema 13.30 de Gauss-Bonnet global *Sea M una superficie regular compacta de \mathbb{R}^3 . Se tiene la siguiente “admirable” fórmula*

$$\int_M K dA = 2\pi \chi(M) = 2\pi(2 - 2g). \quad (13.17)$$

Demostración Sea $\mathcal{T} = \{\phi_i : T_i \subset M \rightarrow T' \subset \mathbb{R}^2\}_{1 \leq i \leq n}$ una triangulación de M , con la frontera de cada triángulo T_i orientada por la orientación inducida por la orientación de M . Para cada uno de estos triángulos tenemos

$$\int_{T_i} K dA = - \int_{\partial T_i} k_g ds - \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} + 2\pi = - \int_{\partial T_i} k_g ds + \sum_{j=1}^n \varphi_{ij} + (2 - 3)\pi. \quad (13.18)$$

Cada eje de cada triángulo está en dos triángulos y, por el convenio de orientaciones, recorrido en sentidos opuestos en cada triángulo. Por esa razón se tiene que $\sum_{i=1}^n \int_{T_i} k_g ds = 0$. Además, la suma de los ángulos interiores en cada vértice es 2π , por lo tanto $\sum_{j=1}^n \varphi_{ij} = 2\pi V$. Por otro lado, el número de caras es igual al número de triángulos, luego $n = C$ y, como cada arista está en dos caras y cada cara tiene tres aristas, $3C = 2A$, por lo tanto $\sum_{j=1}^n 2(2 - 3)\pi = C(2 - 3)\pi = (2C - 3C)\pi = (2C - 2A)\pi$. Juntando todas estas sumas resulta:

$$\int_M K dA = \sum_{i=1}^n \int_{T_i} K dA = 2\pi V + 2\pi(C - A) = 2\pi(C - A + V) = 2\pi\chi(M) \quad (13.19)$$

□

La fórmula (13.17) es admirable porque en el miembro de la izquierda de la igualdad aparece un invariante geométrico (de geometría intrínseca) y en el de la derecha un invariante topológico. Es una fórmula que relaciona geometría y topología. Dice que la geometría produce topología y que sobre una topología dada no se puede construir cualquier geometría. Las consecuencias más directas de esta relación y de la clasificación de superficies compactas estudiada en Topología II) las recogemos en el siguiente

Corolario 13.31 a) Una superficie compacta con $K > 0$ (basta $\int_M K dA > 0$) es homeomorfa (en realidad, difeomorfa) a una esfera S^2

b) Una superficie compacta con $K = 0$ (basta $\int_M K dA = 0$) es homeomorfa (en realidad, difeomorfa) a un toro $S^1 \times S^1$

c) Una superficie compacta con $K < 0$ (basta $\int_M K dA < 0$) es homeomorfa (en realidad, difeomorfa) a un "toro" con 2 o más agujeros (también llamado esfera con 2 o más asas o superficie de género $n \geq 2$).

d) M compacta es una superficie de género n si y solo si $\int_M K dA = 2\pi(2 - 2n)$.

Vamos a ver ahora otra consecuencia menos trivial, que relaciona la característica de Euler con el índice de un campo vectorial. Primero definamos este último concepto:

ya no lo damos, este año se acabará aquí el curso.