1. VARIEDADES DIFERENCIABLES

§1.1. Introducción.

En cursos anteriores se ha estudiado el cálculo diferencial sobre el espacio vectorial euclídeo. Este cálculo ha sido una de las herramientas más potentes utilizadas para comprender las propiedades matemáticas (geométricas y analíticas) del espacio euclídeo, sobre todo cuando se trataba de estudiar objetos no lineales y no directamente accesibles a técnicas puramente algebraicas. Si el espacio que se quiere estudiar es, él mismo, no lineal (i.e., no tiene estructura de espacio vectorial), no es de esperar que las técnicas del álgebra lineal, solas, sirvan para estudiarlo, y, si es posible definir un cálculo diferencial sobre ese espacio, será la herramienta natural para comprenderlo. Las variedades diferenciables son los espacios para los que todavía es posible extender, con cierta facilidad, el cálculo diferencial conocido para $\mathbb{R}^n$. Se emplea entonces este cálculo para estudiar las propiedades de esos espacios. La mayoría de los lectores de estas notas ya se han encontrado alguna vez con las variedades diferenciables. En algunos cursos se introdujo el concepto de d-variedad de $\mathbb{R}^n$ para explicar los máximos y mínimos condicionados. Otros han tenido un segundo encuentro con las variedades al estudiar superficies el cuatrimestre pasado, pues vieron una definición de superficie que es equivalente a la de 2-variedad de $\mathbb{R}^3$ y, además, definida de un modo muy semejante a como introduciremos aquí el concepto de variedad. Estas d-variedades son, en efecto, ejemplos de variedades diferenciables. Ocurre incluso (hablaremos de ello más adelante) que toda variedad diferenciable es una d-variedad de algún $\mathbb{R}^n$ (para n suficientemente grande). A pesar de esta última afirmación, introduciremos las variedades diferenciables como espacios abstractos no necesariamente contenidos en ningún $\mathbb{R}^n$. La razón para ello es que en muchas ocasiones estos espacios se conocen primero directamente por ellos mismos, sin conocerlos como subconjunto de ningún $\mathbb{R}^n$ (el establecer en que $\mathbb{R}^n$ pueden meterse es ya un problema interesante). Además, en muchos casos es más cómodo trabajar con ellos de esta manera abstracta.

La idea que está en la base de la definición de variedad diferenciable es muy sencilla (aunque esta sencillez parezca desmentida por la historia, pues se suele citar un libro de Veblen y Whitehead, de 1932, como el primero que contiene una definición rigurosa de variedad diferenciable, y ya se llevaba unos cuantos años trabajando con ellas). Puesto que sabemos hacer cálculo diferencial en $\mathbb{R}^n$, si podemos establecer biyecciones entre trozos U de un espacio M y abiertos de $\mathbb{R}^n$, podremos trasladar, para cada trozo, el cálculo diferencial de $\mathbb{R}^n$ a través de esa biyección. Este cálculo diferencial se aplicaría a las funciones diferenciables. ¿Cuáles serían éstas?. Si $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una de las biyecciones de que hablábamos, es natural decir que que $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable si lo es $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Pero es natural también que exijamos que el concepto de diferenciable para f no dependa de la biyección elegida. Así, si tenemos $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ otra biyección tal que $U \cap V \neq \emptyset$, de acuerdo con lo anterior, f será diferenciable en V sii lo es $f \circ \psi^{-1}$. Para que el concepto "f diferenciable en $U \cap V$ " no dependa de haber elegido (U, φ) o (V, ψ), nos interesa exigir que f sea diferenciable usando la biyección $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (i.e. $f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable) sii lo es usando la biyección $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (i.e. $f \circ \psi^{-1}$ es diferenciable). Para que sea así se exigirá que $\psi \circ \varphi^{-1}$ sea un difeomorfismo sobre el abierto de $\mathbb{R}^n$ sobre el que esté definida. En efecto, si $\psi \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo, se tiene que si $f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable, entonces $f \circ \psi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1})$ es diferenciable, y recíprocamente, como ilustra el diagrama

$$\begin{tikzcd}
U \cap V \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[drr, "\varphi"] & & \mathbb{R} \\
\psi(U \cap V) \arrow[urr, "f\circ\psi^{-1}"] \arrow[rr, shift left, "\varphi\circ\psi^{-1}"] & & \varphi(U \cap V) \arrow[u, "f\circ\varphi^{-1}"'] \arrow[ll, shift left, "\psi\circ\varphi^{-1}"]
\end{tikzcd} .$$

En la próxima sección daremos esta definición con toda precisión.

§1.2. Definición de variedad diferenciable

Comenzaremos definiendo las biyecciones de que hablábamos en la introducción.

1.2.1.Definición. *Se llama carta de dimensión n sobre un conjunto M a un par (U, φ) tal que $U \subset M$ y $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una biyección de U sobre un abierto $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^n$.*

Denotaremos por $r^i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ a la proyección canónica $r^i(a^1, ..., a^n) = a^i$. Dada una carta (U, φ), las funciones $x^i = r^i \circ \varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ se llaman *funciones coordenadas* de la carta (U, φ). Muchas veces la carta (U, φ) la escribiremos como $(U; x^1, ..., x^n)$.

En general, no es posible construir una carta adecuada para cada conjunto M cuyo dominio sea todo M. Ordinariamente, lo mejor que se puede hacer es definir una colección de cartas de dimensión n para M tales que la unión de sus dominios sea M. Exigimos entonces condiciones de compatibilidad cuya conveniencia (para la buena definición de función diferenciable) fue explicada en la introducción.

1.2.2.Definición. *Un atlas de clase C^k y dimensión n sobre un conjunto M es una colección $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de cartas de dimensión n que verifican:*
(AT1) $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.
(AT2) Para cualesquiera i, $j \in I$, $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$.
(AT3) Para cualesquiera i, $j \in I$, la aplicación

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

es un difeomorfismo de clase C^k.

Obsérvese que la propiedad (AT2) está para que (AT3) tenga sentido. La propiedad (AT3) se expresa diciendo que las cartas (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) son C^k-compatibles. Es esta propiedad la que se motivó al final de la introducción. La propiedad (AT1) es equivalente a decir que para todo $x \in M$ existe una carta (U_i, φ_i) de la familia $\mathcal{A}$ tal que $x \in U_i$, i.e., establece que para cada $x \in M$ existe un "trozo" U_i de M que contene a x y una biyección entre ese trozo y un abierto de $\mathbb{R}^n$

1.2.3. Nota. En principio, un conjunto puede aceptar más de un atlas de clase C^k y dimensión n. Supongamos que tenemos dos de tales atlas sobre un conjunto M. La unión de tales atlas no es necesariamente un atlas, como muestra el siguiente ejemplo. Sean

$$M = \mathbb{R}, \quad U = V = \mathbb{R}, \quad \varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}/\varphi(t) = t, \quad \psi : V \longrightarrow \mathbb{R}/\psi(t) = t^3.$$

Los pares (U, φ) y (V, ψ) son cartas de M. Cada una de ellas, por si sola, es un atlas, pero su unión no lo es, pues $\psi \circ \varphi^{-1}(t) = t^3$ tiene derivada 0 en $0 \in \varphi(U \cap V) = \mathbb{R}$ y, por lo tanto, no es un difeomorfismo.

Si la unión de dos atlas $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ no es un atlas, puede ocurrir que una función diferenciable (con la definición dada en la introducción) para el atlas $\mathcal{A}_1$ no lo sea para el $\mathcal{A}_2$ (de hecho estas funciones existen siempre, ver apéndice), y se considerarán, por tanto, como distintas las "estructuras diferenciables" definidas por $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ sobre M. En cambio, si la unión de $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ si que es un atlas, una función es diferenciable para el atlas $\mathcal{A}_1$ sii lo es para el $\mathcal{A}_2$, luego podríamos considerar que definen la misma "estructura diferenciable" sobre M. De ahí que para la definición del concepto de variedad diferenciable M (esto es, de una estructura diferenciable sobre M) sea necesario, o bien introducir una relación de equivalencia entre los atlas definidos sobre M, o bien introducir el concepto de atlas meximal (que es lo que haremos aquí), de tal manera que, dado un atlas $\mathcal{A}$ sobre M, consideraremos sobre M la estructura diferenciable definida por un atlas que contiene a $\mathcal{A}$ y a todos aquellos que, unidos a $\mathcal{A}$, siguen siendo un atlas (este será el atlas maximal que contine a $\mathcal{A}$).

1.2.4.Definición. *Un atlas de dimensión n y clase C^k se dice que es maximal o completo si no está contenido en ningún otro atlas de dimensión n y clase C^k.*

1.2.5.Proposición. *Todo atlas de dimensión n y clase C^k está contenido en un único atlas de dimensión n y clase C^k maximal.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ un atlas dimensión n y clase C^k sobre M. Sea $\widetilde{\mathcal{A}}$ la colección de todas las cartas (U, φ) sobre M de dimensión n y clase C^k tales que para todo $i \in I$ se tiene que $\varphi(U \cap U_i)$ y $\varphi_i(U \cap U_i)$ son abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\varphi \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U \cap U_i) \longrightarrow \varphi(U \cap U_i)$ es un C^k-difeomorfismo. $\widetilde{\mathcal{A}}$ es un atlas, pues cumple:

AT1) $\bigcup_{(U,\varphi) \in \widetilde{\mathcal{A}}} U \supset \bigcup_{i \in I} U_i = M$.

AT2) Para cualesquiera (U, φ), $(V, \psi) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ se tiene que, como φ es inyectiva,

$$\varphi(U \cap V) = \bigcup_{i \in I} \varphi(U \cap U_i \cap V) = \bigcup_{i \in I} \{\varphi(U \cap U_i) \cap \varphi(U_i \cap V)\},$$

que es un abierto de $I\!R^n$ por ser unión de abiertos.

AT3) Dadas (U,φ), $(V,\psi) \in \widetilde{\mathcal{A}}$, como φ y ψ son biyecciones sobre sus respectivas imágenes, se tiene que $\varphi\circ\psi^{-1} : \psi(U\cap V) \longrightarrow \varphi(U\cap V)$ es una biyección. Para ver que es un difeomorfismo, bastará con ver que para cada $z \in \psi(U\cap V)$ existe un abierto conteniendo a z tal que $\varphi\circ\psi^{-1}$ restringido a ese abierto es un difeomorfismo sobre su imagen. Ahora bien, dado ese z, como $\psi(U\cap V) = \bigcup_{i\in I} \psi(U\cap U_i\cap V)$ (porque $M = \cup_{i\in I} U_i$), existe un $i \in I$ tal que $z \in \psi(U \cap U_i \cap V)$, y se puede escribir $\varphi \circ \psi^{-1}|_{\psi(U\cap U_i\cap V)} = (\varphi \circ \varphi_i^{-1})|_{\varphi_i(U\cap U_i\cap V)} \circ (\varphi_i \circ \psi^{-1})|_{\psi(U\cap U_i\cap V)}$, es decir, sobre el abierto $\psi(U \cap U_i \cap V)$ que contiene a z, $\varphi \circ \psi^{-1}$ se puede escribir como composición de difeomorfismos y es, por lo tanto, un difeomorfismo.

Que $\widetilde{\mathcal{A}}$ es maximal y que es único son consecuencias del modo en que se ha definido $\widetilde{\mathcal{A}}$. $\square$

1.2.6.Definición. *Una variedad diferenciable de dimensión n y clase C^k es un par $(M,\mathcal{A})$, donde $\mathcal{A}$ es un atlas maximal de dimensión n y clase C^k sobre M.*

Una carta (o sistema de coordenadas) (U,φ) de la variedad M es una carta del atlas $\mathcal{A}$.

Ordinariamente (como acabamos de hacer) al referirnos a una variedad diferenciable $(M,\mathcal{A})$ escribiremos solamente M.

1.2.7. Para definir una estructura de variedad diferenciable sobre un conjunto M, bastará dar un atlas sobre M, aunque no sea maximal, pues, gracias a 1.2.5, automáticamente se define un atlas maximal sobre M.

Por otro lado, el ejemplo 1.2.3 muestra que sobre un mismo conjunto pueden definirse dos estructuras de variedad diferenciable distintas (veremos más adelante -final de la sección 1.5- que no siempre tan distintas).

§1.3. Ejemplos

1.3.1. El primer ejemplo trivial de variedad diferenciable es $I\!R^n$ con la estructura diferenciable definida por el atlas maximal que contiene a la carta ($I\!R^n$, identidad).

1.3.2. Para quienes han definido una superficie S como un subconjunto de $I\!R^3$ tal que existe una familia de pares $\{(U_i,x_i)\}_{i\in I}$ tales que U_i es un abierto de $I\!R^2$ y $x_i : U_i \longrightarrow S \subset I\!R^3$ es una aplicación diferenciable (como aplicación de un abierto de $I\!R^2$ en $I\!R^3$) verificando:

(a) $\bigcup_{i\in I} x_i(U_i) = S$,
(b) $x_i(U_i)$ es un abierto de S con la topología inducida por la de $I\!R^3$,
(c) $x_i : U_i \longrightarrow x_i(U_i)$ es un homeomorfismo, y
(d) $dx_i(u) : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^3$ es inyectiva para cada $u \in U_i$;

se tiene que las superficies de $I\!R^3$ son variedades diferenciables de dimensión 2. Para ver que es así basta con considerar sobre una superficie S definida como antes el atlas $\{(x_i(U_i), x_i^{-1})\}_{i\in I}$ y comprobar (usando teoremas vistos en el curso de superficies) que es realmente un atlas sobre M.

1.3.3. La esfera de dimensión n, $S^n = \{x \in I\!R^{n+1} \,/\, |x| = 1\}$ es una variedad diferenciable de dimensión n y clase C^∞. Vamos a verlo usando la proyección estereográfica. Sean $\mathcal{N} = (0,...,0,1)$ y $\mathcal{S} = (0,...,0,1)$ los polos norte y sur de S^n. Sean $I\!R^n \times \{1\}$ el hiperplano de $I\!R^{n+1}$ tangente a S^n en $\mathcal{N}$ y $I\!R^n \times \{-1\}$ el hiperplano de $I\!R^{n+1}$ tangente a S^n en $\mathcal{S}$. Sean $i_+ : I\!R^n \times \{1\} \longrightarrow I\!R^n$ e $i_- : I\!R^n \times \{-1\} \longrightarrow I\!R^n$ las aplicaciones definidas por $i_+(x^1,...,x^n,1) = (x^1,...,x^n)$ e $i_-(x^1,...,x^n,-1) = (x^1,...,x^n)$ Las proyecciones estereográficas desde $\mathcal{N}$ (que denotaremos $\pi_{\mathcal{N}}$) y desde $\mathcal{S}$ (que denotaremos $\pi_{\mathcal{S}}$) se definen por:

$\pi_{\mathcal{N}} : S^n - \{\mathcal{N}\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la aplicación que a cada $x \in S^n - \{\mathcal{N}\}$ le hace corresponder la imagen por i_- de la intersección de la recta que pasa por $\mathcal{N}$ y x con el hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ tangente a S^n en $\mathcal{S}$.

$\pi_{\mathcal{S}} : S^n - \{\mathcal{S}\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la aplicación que a cada $x \in S^n - \{\mathcal{S}\}$ le hace corresponder la imagen por i_+ de la intersección de la recta que pasa por $\mathcal{S}$ y x con el hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ tangente a S^n en $\mathcal{N}$.

Las ecuaciones para estas aplicaciones son:

$$\pi_{\mathcal{N}}(x^1, ..., x^{n+1}) = \frac{2}{1 - x^{n+1}}(x^1, ..., x^n),$$

$$\pi_{\mathcal{S}}(x^1, ..., x^{n+1}) = \frac{2}{1 + x^{n+1}}(x^1, ..., x^n).$$

Estas ecuaciones se obtienen de la siguiente manera:

La de $\pi_{\mathcal{N}}$: Dado $x = (x^1, ..., x^{n+1}) \in S^n$, la ecuación de la recta que pasa por $\mathcal{N} = (0, ..., 0, 1)$ es

$$\mathcal{N} + \lambda(x - \mathcal{N} \equiv (0, ..., 0, 1) + \lambda(x^1, ..., x^n, x^{n+1} - 1) \equiv (\lambda x^1, ..., \lambda x^n, 1 + \lambda(x^{n+1} - 1)),$$

y su intersección con el hiperplano $\mathbb{R}^n \times \{-1\}$, de ecuación $y^{n+1} = -1$, se calcula escribiendo $1 + \lambda(x^{n+1} - 1) = -1$, de donde

$$\lambda = \frac{-2}{x^{n+1} - 1}$$

y la intersección es el punto

$$(\frac{-2}{x^{n+1} - 1}x^1, ..., \frac{-2}{x^{n+1} - 1}x^n, -1),$$

de donde se tiene, tomando la imagen por i_-, la expresión que hemos dado para $\pi_{\mathcal{N}}$.

Para $\pi_{\mathcal{S}}$: Dado $x = (x^1, ..., x^{n+1}) \in S^n$, la ecuación de la recta que pasa por $\mathcal{S} = (0, ..., 0, -1)$ es

$$\mathcal{S} + \lambda(x - \mathcal{S} \equiv (0, ..., 0, -1) + \lambda(x^1, ..., x^n, x^{n+1} + 1) \equiv (\lambda x^1, ..., \lambda x^n, -1 + \lambda(x^{n+1} + 1)),$$

y su intersección con el hiperplano $I\!R^n \times \{1\}$, de ecuación $y^{n+1} = 1$, se calcula escribiendo $-1 + \lambda(x^{n+1}+1) = 1$, de donde

$$\lambda = \frac{2}{x^{n+1}+1}$$

y la intersección es el punto

$$(\frac{2}{x^{n+1}+1}x^1, ..., \frac{2}{x^{n+1}+1}x^n, 1),$$

de donde se tiene, tomando la imagen por i_+, la expresión que hemos dado para $\pi_{\mathcal{N}}$.

Evidentemente $\pi_{\mathcal{N}}(S^n - \{\mathcal{N}\}) = I\!R^n$, $\pi_{\mathcal{S}}(S^n - \{\mathcal{S}\}) = I\!R^n$, $(S^n - \{\mathcal{N}\}) \cap (S^n - \{\mathcal{N}\}) = S^n - \{\mathcal{N}, \mathcal{S}\}$, y $\pi_{\mathcal{N}}(S^n - \{\mathcal{N}, \mathcal{S}\}) = I\!R^n - \{0\}$ y $\pi_{\mathcal{S}}(S^n - \{\mathcal{N}, \mathcal{S}\}) = I\!R^n - \{0\}$ son abiertos de $I\!R^n$, luego se cumplen (AT1) y (AT2). Para ver que se cumple (AT3) hay que calcular

$$\pi_{\mathcal{S}} \circ \pi_{\mathcal{N}}^{-1}(y^1, ...y^n) = \frac{4}{(y^1)^2 + ... + (y^n)^2}(y^1, ..., y^n),$$

y

$$\pi_{\mathcal{N}} \circ \pi_{\mathcal{S}}^{-1}(y^1, ...y^n) = \frac{4}{(y^1)^2 + ... + (y^n)^2}(y^1, ..., y^n),$$

que prueba que $\pi_{\mathcal{S}} \circ \pi_{\mathcal{N}}^{-1}$ es un difeomorfismo de $I\!R^n - \{0\}$ en si mismo.

El cálculo de $\pi_{\mathcal{S}} \circ \pi_{\mathcal{N}}^{-1}$ y de $\pi_{\mathcal{N}} \circ \pi_{\mathcal{S}}^{-1}$ puede hacerse como sigue.

De la definición de $\pi_{\mathcal{N}}$ se deduce que la aplicación $\pi_{\mathcal{N}}^{-1}$ puede describirse como sigue: dado $y = (y^1, ..., y^n) \in I\!R^n$, se toma $y_- = i_-^{-1}(y) = (y^1, ..., y^n, -1)$, entonces $\pi_{\mathcal{N}}^{-1}(y)$ es la intersección con S^n (distinta de $\mathcal{N}$) de la recta que pasa por $\mathcal{N}$ y por y_-. Calculemos $\pi_{\mathcal{N}}^{-1}(y)$ usando esta descripción de $\pi_{\mathcal{N}}^{-1}$. La recta que pasa por $\mathcal{N}$ y por y_- tiene por ecuación

$$\mathcal{N} + \lambda(y_- - \mathcal{N}) = (0, ..., 0, 1) + \lambda(y^1, ..., y^n, -1-1) = (\lambda y^1, ..., \lambda y^n, 1 - 2\lambda).$$

La intersección con S^n son los puntos de esta recta que verifican la ecuación de S^n:

$$(\lambda y^1)^2 + ... + (\lambda y^n)^2 + (1-2\lambda)^2 = 1,$$

i.e.

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^n (y^i)^2 + 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = 1, \quad \text{i.e.} \quad \lambda^2(\sum_{i=1}^n (y^i)^2 + 4) - 4\lambda = 0,$$

y los valores de λ que satisfacen esta ecuación son

$$\lambda = 0 \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{4}{4 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2},$$

el primero corresponde al punto $\mathcal{N}$, y el segundo a

$$\pi_{\mathcal{N}}^{-1}(y) = (\frac{4}{4 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2}y^1, ..., \frac{4}{4 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2}y^n, \frac{-4 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2}{4 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2}),$$

obtenemos ahora la imagen de $\pi_{\mathcal{N}}^{-1}(y)$ por $\pi_{\mathcal{S}}$ usando la expresión que vimos antes para $\pi_{\mathcal{S}}$, y resulta así la expresión de $\pi_{\mathcal{S}} \circ \pi_{\mathcal{N}}^{-1}$ que dimos antes.

De la definición de $\pi_{\mathcal{S}}$ se deduce que la aplicación $\pi_{\mathcal{S}}^{-1}$ puede describirse como sigue: dado $y = (y^1, ..., y^n) \in I\!R^n$, se toma $y_+ = i_+^{-1}(y) = (y^1, ..., y^n, 1)$, entonces $\pi_{\mathcal{S}}^{-1}(y)$ es la intersección con S^n

(distinta de $\mathcal{S}$) de la recta que pasa por $\mathcal{S}$ y por y_+. Para calcular $\pi_{\mathcal{S}}^{-1}(y)$ obtenemos primero la ecuación de la recta que pasa por $\mathcal{S}$ y por y_+

$$\mathcal{S} + \lambda(y_+ - \mathcal{S}) = (0, ..., 0, -1) + \lambda(y^1, ..., y^n, 1 + 1) = (\lambda y^1, ..., \lambda y^n, -1 + 2\lambda).$$

La intersección con S^n son los puntos de esta recta cuyo parámetro λ verifica la ecuación

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} (y^i)^2 + (2\lambda - 1)^2 = 1, \quad \text{i.e.} \quad \lambda^2 (\sum_{i=1}^{n} (y^i)^2 + 4) - 4\lambda = 0,$$

que tiene por soluciones

$$\lambda = 0 \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{4}{4 + \sum_{i=1}^{n} (y^i)^2},$$

la primera corresponde al punto $\mathcal{S}$, y la segunda a

$$\pi_{\mathcal{S}}^{-1}(y) = (\frac{4}{4 + \sum_{i=1}^{n} (y^i)^2} y^1, ..., \frac{4}{4 + \sum_{i=1}^{n} (y^i)^2} y^n, \frac{4 - \sum_{i=1}^{n} (y^i)^2}{4 + \sum_{i=1}^{n} (y^i)^2}),$$

y usando ahora la expresión que vimos para $\pi_{\mathcal{N}}$, calculamos $\pi_{\mathcal{N}} \circ \pi_{\mathcal{S}}^{-1}(y)$ y obtenemos la exprsión que dimos antes.

1.3.4. El espacio proyectivo real $I\!\!RP^n$. Recordemos que se definía como el conjunto de las rectas vectoriales de $I\!\!R^{n+1}$. Vamos a definir un atlas de dimensión n sobre él.

Consideremos sobre $I\!\!RP^n$ el sistema de coordenadas homogéneas asociado a la base canónica de $I\!\!R^{n+1}$. Definamos primero los subconjuntos V_i

$$V_i = \{[(x^1, ..., x^{n+1})]\} \,/\, x^i \neq 0\}, \quad i = 1, ..., n+1,$$

donde $(x^1, ..., x^{n+1})$ son coordenadas homogéneas del punto $[(x^1, ..., x^{n+1})]$ de $I\!\!RP^n$. Obsérvese que la condición $x^i \neq 0$ no depende de las coordenadas elegidas para representar el punto, pues si $[(x^1, ..., x^{n+1})] = [(x'^1, ..., x'^{n+1})]$, existe un $\lambda \neq 0$ tal que $x'^i = \lambda x^i$ y, por lo tanto, $x'^i \neq 0$ si y solo si $x^i \neq 0$.

Definamos ahora la aplicación:

$$\varphi_i : V_i \longrightarrow I\!\!R^n \,/\, \varphi([(x^1, ..., x^{n+1})]) = (\frac{x^1}{x^i}, ..., \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, ..., \frac{x^{n+1}}{x^i}).$$

Se comprueba que esta definición no depende de las coordenadas homogéneas elegidas del punto $[(x^1, ..., x^{n+1})]$, y es biyectiva porque si $\frac{x^j}{x^i} = \frac{x'^j}{x'^i}$ para todo j, entonces, como $x^i \neq 0$, $x'^j = \frac{x'^i}{x^i} x^j$ para todo j y, por tanto $[(x'^1, ..., x'^{n+1})] = [(x^1, ..., x^{n+1})]$. Además $\varphi_i(V_i) = I\!\!R^n$ (pues para todo $(y^1, ... y^n) \in I\!\!R^n$ se tiene $\varphi_i(y^1, ..., y^{i-1}, 1, y^i, ..., y^n) = (y^1, ..., y^n)$), luego los pares (V_i, φ_i) son cartas de $I\!\!RP^n$. Vamos a ver que cumplen las condiciones de atlas:

AT1) $\bigcup_{i=1}^{n+1} V_i = I\!\!RP^n$, ya que no hay ningún punto de $I\!\!RP^n$ que tenga nulas todas sus coordenadas homogéneas.

AT2) Supongamos, por comodidad de escritura, que $i < j$,

$$\varphi_i(V_i \cap V_j) = \varphi_i(\{[(x^1, ..., x^{n+1})] \,/\, x^i \neq 0 \neq x^j\}$$

$$= \{(\frac{x^1}{x^i}, ..., \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, ..., \frac{x^j}{x^i}, ..., \frac{x^{n+1}}{x^i}) \,/\, x^j \neq 0\},$$

que es el conjunto de puntos de $I\!R^n$ cuya coordenada $(j-1)$-ésima es no nula, que es un abierto de $I\!R^n$. (Si fuese $j < i$, simplemente x^j se escribiría delante de x^{i-1}, si $i = j$, simplemente $\varphi_i(V_i \cap V_i) = \varphi_i(V_i)$).

AT3) Supongamos (de nuevo por comodidad de escritura) que $i < j$,

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(y^1, ...y^{i-1}, y^{i+1}, ..., y^{n+1}) = (\frac{y^1}{y^j}, ..., \frac{y^{i-1}}{y^j}, \frac{1}{y^j}, \frac{y^{i+1}}{y^j}, ..., \frac{y^{j-1}}{y^j}, \frac{y^{j+1}}{y^j} ..., \frac{y^{n+1}}{y^j}).$$

1.3.5. Variedades producto. Si M y N son variedades diferenciables con atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ y $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ de dimensiones m y n respectivamente y ambas de clase C^k, entonces $M \times N$ es una variedad diferenciable de dimensión $m+n$ y clase C^k definida por el atlas $\{(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j)\}_{(i,j) \in I \times J}$. Se deja como ejercicio el comprobarlo.

§1.4. Topología de una variedad.

1.4.1.Proposición-Definición. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y clase C^k. M está dotada de una topología cuyos abiertos son las uniones arbitrarias de dominios de las cartas de un atlas maximal. A esta topología se la llama topología canónica de la variedad M.*

Demostración. Veamos en primer lugar que si U y V son dominios de cartas de un atlas maximal, también lo es $U \cap V$. En efecto, si (U, φ) y (V, ψ) son las cartas correspondientes a estos dominios, vamos a ver qu $(U \cap V, \zeta \equiv \psi|_{U \cap V})$ es otra carta del atlas maximal. En efecto, por AT2), $\zeta(U \cap V)$ es un abierto de $I\!R^n$ y ζ es, evidentemente, una biyección sobre su imagen. Además, para una carta arbitraria (W, ϕ) del atlas maximal, $\zeta(U \cap V \cap W) = \psi(U \cap V) \cap \psi(V \cap W)$ es también un abierto de $I\!R^n$, y $\phi \circ \zeta^{-1}$ definido sobre $\zeta(U \cap V \cap W)$ es la restricción a este abierto de $\phi \circ \psi^{-1}$, que es un difeomorfismo, y esto acaba la demostración de que $(U \cap V, \zeta)$ es una carta del atlas maximal.

Vamos a comprobar ahora que la familia de abiertos dada en el enunciado define realmente una topología. En efecto, si $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ es un atlas maximal, se cumple:

i) $M = \cup_{i \in I} U_i$ es un abierto y $\emptyset = \cup_{i \in \emptyset} U_i$ es un abierto.

ii) Si $\{A_k\}_{k \in K}$ es una familia de los conjuntos definidos como abiertos, entonces cada $A_k = \cup_{i \in I_k} U_i$ $(I_k \subset I)$, y $\cup_{k \in K} A_k = \cup_{k \in K} \cup_{i \in I_k} U_i$, que es un abierto.

iii) Si A y B son dos de los conjuntos definidos como abiertos, entonces existen J, $K \subset I$ tales que $A = \cup_{j \in J} U_j$ y $B = \cup_{k \in K} U_k$, de modo que $A \cap B = \cup_{j \in J} \cup_{k \in K} (U_j \cap U_k)$, que, por la observación hecha al comienzo de la demostración, es un abierto. □

Si se tiene una variedad M dada por un atlas no maximal, se puede saber si un conjunto es abierto en la topología canónica aplicando la siguiente

1.4.2.Proposición. *Sea $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ un atlas de dimensión n y clase C^k sobre M. Un subconjunto U de M es un abierto en la topología canónica de M si y solo si para toda carta (U_i, φ_i) del atlas se tiene que $\varphi_i(U \cap U_i)$ es un abierto de $I\!R^n$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ la familia de los conjuntos verificando esta condición. Veremos que: (a) $\mathcal{U}$ define una topología, y (b) esta topología coincide con la topología canónica.

(a) Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{U}$. Se tiene que, como φ_i es biyectiva para toda carta (U_i, φ_i) del atlas dado, entonces

$$\varphi_i((\cup_{\alpha\in A}U_\alpha) \cap U_i) = \varphi_i(\cup_{\alpha\in A}(U_\alpha \cap U_i)) = \cup_{\alpha\in A}\varphi_i(U_\alpha \cap U_i),$$

que es abierto por ser unión de abiertos.

Además, dados U y V de $\mathcal{U}$, se tiene

$$\varphi_i(U \cap V \cap U_i) = \varphi_i(U \cap U_i) \cap \varphi_i(V \cap U_i),$$

que es un abierto por ser intersección de abiertos.

(b) Sea $\mathcal{T}$ la topología canónica. Vamos a ver primero que $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$. En efecto, si $U \in \mathcal{U}$, se puede escribir $U = \cup_{i\in I}(U \cap U_i)$. El par $(U \cap U_i, \psi_i \equiv \varphi_i|_{U\cap U_i})$ es una carta del atlas maximal engendrado por $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$, puesto que, por definición de $\mathcal{U}$, $\psi_i(U \cap U_i)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$, lo mismo ocurre con $\psi_i(U \cap U_i \cap U_j) = \varphi_i(U \cap U_i) \cap \varphi_i(U_i \cap U_j)$ y con $\varphi_j(U \cap U_i \cap U_j) = \varphi_j(U \cap U_j) \cap \varphi_j(U_i \cap U_j)$ y además $\varphi_j \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(U \cap U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U \cap U_i \cap U_j)$ es la restricción del difeomorfismo $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ al abierto $\varphi_i(U \cap U_i \cap U_j)$ que es, por lo tanto, un difeomorfismo. Esto prueba que $U \cap U_i \in \mathcal{T}$ y, por tanto, $U \in \mathcal{T}$.

Veamos ahora que $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}$. Si $V \in \mathcal{T}$, entonces $V = \cup_{j\in J}V_j$ para una familia $\{V_j\}_{j\in J}$ de dominios de cartas del atlas maximal engendrado por $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$, y se tiene que $V \cap U_i = \cup_{j\in J}(V_j \cap U_i)$, con $\varphi_i(V_j \cap U_i)$ abierto de $\mathbb{R}^n$ por definición de atlas maximal, luego $\varphi_i(V \cap U_i) = \cup_{j\in J}\varphi_i(V_j \cap U_i)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y, por lo tanto, $V \in \mathcal{U}$. □

1.4.3.Corolario. *Para toda carta (U, φ) de una variedad diferenciable M, la aplicación $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ es un homeomorfismo cuando se dota a M de la topología canónica.*

Demostración. Sea V un abierto de $\varphi(U)$, entonces $\varphi_i(\varphi^{-1}(V) \cap U_i) = \varphi_i(\varphi^{-1}(V) \cap U \cap U_i) = \varphi_i \circ \varphi^{-1}(V \cap \varphi(U \cap U_i)$, pero V es una bierto de $\varphi(U)$, que es un abierto de $\mathbb{R}^n$, y, como (U, φ) y (U_i, φ_i) forman parte de un mismo atlas maximal, $\varphi(U \cap U_i)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ (axioma AT2), luego $V \cap \varphi(U \cap U_i)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y, como φ_i^{-1} es un difeomorfismo y, por lo tanto, un homeomorfismo, se sigue que $\varphi_i(\varphi^{-1}(V) \cap U_i)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$, luego, por la proposición anterior, $\varphi^{-1}(V)$ es un abierto de M en la topología canónica. Recíprocamente, si W es un abierto de M -en la topología canónica- que está contenido en U, entonces $\varphi(W) = \varphi(W \cap U)$ es un abierto en $\varphi(U)$ por la proposición anterior. □

Este corolario permite dar como definición equivalente de variedad diferenciable la siguiente:

1.4.4. Definición segunda. *Una variedad diferenciable M de dimensión n y clase C^k es un espacio topológico M junto con una familia de pares $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ que verifican:*

(i) U_i son subconjuntos abiertos de M y $\cup_{i\in I}U_i = M$.

(ii) Para todo $i \in I$, φ_i es una aplicación de U_i en $\mathbb{R}^n$ tal que $\varphi_i(U_i)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\varphi_i : U_i \longrightarrow \varphi_i(U_i)$ es un homeomorfismo.

(iii) Para cualesquiera $i, j \in I$, la aplicación $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ es de clase C^k.

Obsérvese que la familia de pares $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ define una estructura de variedad diferenciable en el sentido de la definición 1.2.6 (de acuerdo con lo dicho en la nota 1.2.7), y se deduce de 1.4.2 y 1.4.3 que la topología canónica inducida por esta estructura diferenciable y la topología de partida que posee M en la definición 1.4.4 coinciden. Esto establece la equivalencia entre ambas definiciones de variedad diferenciable.

Vamos a ver la equivalencia de las definiciones de que acabamos de hablar con más detalle:

Supongamos que tenemos sobre un conjunto M una estructura de variedad diferenciable, en el sentido de la primera definición (1.2.6), definida por un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ (que, como vimos, está contenido en un único atlas maximal). Si consideramos sobre M la topología canónica definida por la estructura de variedad diferenciable, entonces se cumplen las propiedades de la definición 1.4.4. En efecto:

(i) por ser $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ un atlas, se verifica (AT1) que $\cup_{i\in I} U_i = M$, y, por la definición de topología canónica, los dominios U_i de las cartas son abiertos de M.

(ii) que $\varphi_i(U_i)$ sea un abierto se verifica por la definición de carta, y que $\varphi_i : U_i \longrightarrow \varphi_i(U_i)$ sea un homeomorfismo es lo que vimos en el último corolario (el 1.4.3).

(iii) esto no es mas que la propiedad AT3.

Recíprocamente, si tenemos un espacio topológico M con una estructura de variedad diferenciable en el sentido de la segunda definición, dada por una familia de pares $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ que verifican (i), (ii), y (iii), entonces cada par (U_i, φ_i) es una carta de M (def. 1.2.1) y, además, la familia anterior verifica:

AT1) $\cup_{i\in I} U_i = M$ como consecuencia de (i).

AT2) $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ es un abierto de $I\!R^n$ para todo $i, j \in I$, porque $\varphi_i U_i \longrightarrow \varphi_i(U_i) \subset I\!R^n$ es un homeomorfismo y, como U_j es un abierto de M, $U_i \cap U_j$ también lo es y, por lo tanto, $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ es un abierto de $\varphi_i(U_i)$, que lo es de $I\!R^n$.

AT3) es consecuencia de (iii) y de que $(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})^{-1} = \varphi \circ \varphi_j^{-1}$.

Además, la topología natural $\mathcal{U}$ de M inducida por la estructura de variedad diferenciable (según la primera definición) coincide con su topología inicial $\mathcal{T}$. En efecto, si $U \in \mathcal{U}$, de 1.4.2 se deduce que para todo $i \in I$, $\varphi_i(U \cap U_i)$ es un abierto de $I\!R^n$ y, como φ_i es un homeomorfismo para $\mathcal{T}$, $U \cap U_i \in \mathcal{T}$, luego $U = \cup_{i\in I}(U \cap U_i) \in \mathcal{T}$. Luego $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$. Recíprocamente : si $V \in \mathcal{T}$, como, para todo $i \in I$, $U_i \in \mathcal{T}$, se tiene que $V \cap U_i \in \mathcal{T}$, y como $\varphi_i : U_i \longrightarrow \varphi_i(U_i)$ es un homeomorfismo para $\mathcal{T}$, se tiene que $\varphi(U_i \cap V)$ es un abierto de $I\!R^n$. Entonces, como $\varphi_i : U_i \longrightarrow \varphi_i(U_i)$ es también un homeomorfismo para $\mathcal{U}$ (prop. 1.4.3), se tiene que $V \cap U_i$ es un abierto de U_i para $\mathcal{U}$, y $U_i \in \mathcal{U}$ por definición de $\mathcal{U}$, luego $V = \cup_{i\in I} V \cap U_i \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}$, lo que, unido a la inclusión anterior, da $\mathcal{U} = \mathcal{T}$.

Si hemos preferido comenzar con la definición 1.2.6 es: (a) para que se vea claramente que la propia estructura de variedad diferenciable define una topología, y (b) porque en muchos ejemplos no conoceremos previamente la topología de la variedad, sino que la deduciremos su estructura diferenciable.

El hecho de que una variedad diferenciable sea un espacio topológico permite obtener nuevos ejemplos triviales de variedades una vez que se conoce una:

1.4.5 Si M es una variedad diferenciable con un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{I\in I}$, y V es un abierto de M, entonces V es una variedad diferenciable con el atlas $\{(V \cap U_i, \varphi_i|_{V\cap U_i})\}_{I\in I}$, como se puede comprobar inmediatamente.

§1.5. Aplicaciones diferenciables. Difeomorfismos

En esta sección, M, N, P y Q denotarán variedades diferenciables de clase C^k y dimensiones m, n, p y q respectivamente.

1.5.1.Definición y comentario. *Una función $f : M \longrightarrow I\!R$ se dice que es de clase C^r ($r \leq k$) en $x \in M$ sii existe una carta (U, φ) en x (lo que quiere decir que $x \in U$) tal que $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow I\!R$ es de clase C^r en $\varphi(x)$.*

Esta definición no depende de la carta elegida con dominio conteniendo a x, es decir, la propiedad anterior se verifica para una carta (U,φ) en x sii se verifica para cualquier otra carta (V,ψ) en x. En efecto, como $x \in U\cap V$, se tiene que $\psi(x)\in\psi(U\cap V)\subset\psi(V)$, $\varphi(x)\in\varphi(U\cap V)\subset\varphi(U)$ y $f\circ\psi^{-1}=(f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\psi^{-1})$ es C^r en $\psi(x)$ sii $f\circ\varphi^{-1}$ lo es en $\varphi(x)$, ya que $\varphi\circ\psi^{-1}$ es un C^k-difeomorfismo.

Se dice que f es de clase C^r en M sii lo es en cada punto de M.

1.5.2.. *Una aplicación $f : M \longrightarrow N$ se dice que es de clase C^r en $x \in M$ sii existen cartas (U,φ) en x y (V,ψ) en $f(x)$ tales que $f(U)\subset V$ y $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ es de clase C^r en $\varphi(x)$.*

Esta definición no depende de las cartas elegidas: si (U',φ'), (V',ψ') son otras cartas verificando $x\in U'$, $f(x)\in V'$ y $f(U')\subset V'$, entonces, $\varphi'(x)\in\varphi'(U\cap U')$ y, sobre ese abierto, $\psi'\circ f\circ\varphi'^{-1}=(\psi'\circ\psi^{-1})\circ\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\circ(\varphi\circ\varphi'^{-1})$ que es de clase C^r en $\varphi'(x)$ sii $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ es de clase C^r en $\varphi(x)$, ya que $\psi'\circ\psi^{-1}$ y $\varphi\circ\varphi'^{-1}$ son C^k-difeomorfismos.

Se dice que f es de clase C^r en M sii lo es en cada punto de M.

1.5.3. Obsérvese que de la definición anterior se deduce que si f es C^r en x, entonces f es contínua en x, considerando M y N como espacios topológicos. En efecto. Sean U y V como antes. Para todo abierto W conteniendo a $f(x)$, $V\cap W$ es también un abierto que contiene a $f(x)$ y $\psi(V\cap W)$ es un abierto de $I\!R^n$. Como $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ es C^r entre abiertos de $I\!R^m$ y $I\!R^n$ y, por lo tanto, contínua en $\varphi(x)$, existe un abierto $\widetilde{U}\subset\varphi(U)$ de $I\!R^m$ tal que $\varphi(x)\in\widetilde{U}$ y $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(\widetilde{U})\subset\psi(V\cap W)$, y, por lo tanto, existe un abierto $\varphi^{-1}(\widetilde{U})$ de M conteniendo a x tal que $f(\varphi^{-1}(\widetilde{U}))\subset V\cap W$, luego f es contínua en x.

1.5.4.Proposición. *Una aplicación contínua $f : M \longrightarrow N$ es de clase C^r sii para cada aplicación $g : V \longrightarrow I\!R^n$ de clase C^r definida sobre un abierto V de N se tiene que $g\circ f : f^{-1}(V)\longrightarrow I\!R$ es de clase C^r.*

Demostración. Obsérvese primero que, como f es contínua, $f^{-1}(V)$ es un abierto de M y, por lo tanto, una variedad diferenciable (cfr. 1.4.5), lo que hace que tenga sentido decir que $g\circ f$ es de clase C^r.

Si se verifica la condición de la proposición, basta tomar, para cada $x\in M$, una carta (V_i,ψ_i) de N en $f(x)$ y tomar V_i como abierto V y las funciones $y_i^j=r^j\circ\psi_i$ como funciones g. Se tiene entonces que las funciones $y_i^j\circ f$ son C^r en x y, por definición, existe una carta (U,φ) en x tal que las funciones $y_i^j\circ f\circ\varphi^{-1}$ son C^r en $\varphi(x)$ y, por tanto, $\psi_i\circ f\circ\varphi^{-1}$ es C^r en $\varphi(x)$, i.e., f es C^r en x.

Supongamos ahora que f es C^r en M, sea V un abierto de N y $g : V\longrightarrow I\!R$. Como, según vimos en 1.5.3, f es contínua, para cada $x\in f^{-1}(V)$ existen una carta $(U\cap f^{-1}(V)\equiv\widetilde{U},\varphi|_{\widetilde{U}}\equiv\widetilde{\varphi})$ de $f^{-1}(V)$ en x y una carta $(V_i\cap V\equiv\widetilde{V}_i,\psi|_{\widetilde{V}_i}\equiv\widetilde{\psi})$ de V en $f(x)$ tales que $f(\widetilde{U})\subset\widetilde{V}_i$, y se verifica que $g\circ f\circ\widetilde{\varphi}^{-1}=(g\circ\widetilde{\psi}_i^{-1})\circ(\widetilde{\psi}_i\circ f\circ\widetilde{\varphi}^{-1})$ es C^r en $\widetilde{\varphi}(x)$ por ser composición de aplicaciones C^r entre abiertos de espacios euclídeos. □

1.5.5.Corolario. *Una aplicación contínua $f : M\longrightarrow N$ es de clase C^r sii para un atlas $\{(V_i,\psi_i)\}_{i\in I}$ de N se tiene que $y_i^j\circ f : f^{-1}(V_i)\longrightarrow I\!R$ es C^r para todo $i\in I$ y para $j=1,..,n$, donde $y_i^j=r^j\circ\psi_i$.*

1.5.6.Proposición. *Si $f : M\longrightarrow N$ y $g : N\longrightarrow P$ son aplicaciones C^r, entonces $g\circ f : M\longrightarrow P$ es de clase C^r.*

Demostración. Dado $x\in M$, por definición de clase C^r existen cartas (U,φ), $(V\psi)$ y (W,ζ) en x, $f(x)$ y $g(f(x))$ respectivamente tales que $f(U)\subset V$, $g(V)\subset W$ y $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$

y $\zeta \circ g \circ \psi^{-1}$ son C^r, luego $g \circ f(U) \subset W$ y $\zeta \circ g \circ f \circ \varphi^{-1} = \zeta \circ g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es C^r. $\square$

1.5.7.Proposición. *Sean $f : M \longrightarrow N$ y $g : P \longrightarrow Q$ aplicaciones de clase C^r. Entonces la aplicación $f \times g : M \times P \longrightarrow N \times Q$ definida por $(f \times g)(x, z) = (f(x), g(z))$ es de clase C^r.*

Demostración. Como f y g son de clase C^r, dado $(x, z) \in M \times P$, existen sistemas de coordenadas (U, φ) en x, (W, ζ) en z, (V, ψ) en $f(x)$ y (T, ϕ) en $g(z)$ tales que $f(U) \subset V$, $g(W) \subset T$, y $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ y $\phi \circ g \circ \zeta^{-1}$ son de clase C^r. Se tiene entonces que $f \times g(U \times W) \subset V \times T$ y que $(\psi \times \phi) \circ (f \times g) \circ (\varphi \times \zeta)^{-1} = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \times (\phi \circ g \circ \zeta^{-1})$ es de clase C^r. Por lo tanto $f \times g$ es de clase C^r. $\square$

1.5.8.Proposición. *Si $f : M \times N \longrightarrow P$ es diferenciable de clase C^r, para cada $x \in M$, la aplicación $f_x : N \longrightarrow P$ definida por $f_x(y) = f(x, y)$ es diferenciable de clase C^r.*

Demostración. Como f es de clase C^r, por la definición de variedad producto (cfr. 1.3.5) se tiene que, dado $y \in N$, existen cartas (U, φ) en x, (V, ψ) en y y (W, ζ) en $f(x, y)$ tales que $f(U \times V) \subset W$ y $\zeta \circ f \circ (\varphi \times \psi)^{-1}$ es de clase C^r en (x, y). Por una propiedad bien conocida de funciones de clase C^r entre espacios euclídeos, la aplicación $(\zeta \circ f \circ (\varphi \times \psi)^{-1})_{\varphi(x)} : \psi(V) \subset I\!R^n \longrightarrow \zeta(W) \subset I\!R^p$ definida por $\psi(y) \mapsto \zeta \circ f \circ (\varphi \times \psi)^{-1}(\varphi(x), \psi(y)) = \zeta \circ f(x, y) = \zeta \circ f_x \circ \psi^{-1}(\psi(y))$ es C^r, es decir, $\zeta \circ f_x \circ \psi^{-1}$ es de clase C^r y, por otro lado, $f(U \times V) \subset W$ implica que $f_x(V) \subset W$, lo que prueba que f_x es de clase C^r en y. $\square$

1.5.9.Proposición. *Las proyecciones canónicas $\pi_M : M \times N \longrightarrow M$ y $\pi_N : M \times N \longrightarrow N$ son aplicaciones diferenciables.*

Demostración. La daremos solo para π_M. Para π_N es igual. Dado $(x, y) \in M \times N$, sea $(U \times V, \varphi \times \psi)$ una carta en (x, y). Se tienen que $\varphi \circ \pi_M \circ (\varphi \times \psi)^{-1}(\varphi(p), \psi(q)) = \varphi(p)$, que es la proyección de $\varphi(U) \times \psi(V)$ sobre $\varphi(U)$, que es diferenciable. $\square$

1.5.10.Definición. *Una aplicación $f : M \longrightarrow N$ se dice que es un C^r-difeomorfismo sii es de clase C^r, biyectiva y con inversa de clase C^r.*

1.5.11. Nota: Anteriormente (en Nota 1.2.3) vimos que había dos estructuras distintas de variedad diferenciable sobre $I\!R$, una $I\!R_1$ dada por el atlas $(I\!R, \varphi = \mathrm{id})$ y otra $I\!R_2$ dada por el atlas $(I\!R, \psi)$ (con $\psi(t) = t^3$). Sin embargo, la aplicación

$$f : I\!R_1 \longrightarrow I\!R_2 \text{ tal que } f(t) = t^{1/3}$$

es un difeomorfismo, puesto que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(t) = t$ es la aplicación identidad, y también $\varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(t) = t$. A esto nos referíamos en 1.2.3 cuando decíamos que estas dos estructuras de variedad diferenciable no eran tan distintas.

Tanto φ como ψ son homeomorfismos de $I\!R$ en $I\!R$ con la topología usual, por tanto la topología la topología canónica de $I\!R_1$ y también la de $I\!R_2$ es la topología usual de $I\!R$. Es decir, sobre $I\!R$ tenemos dos estructuras diferenciables distintas con la misma topología (por lo tanto homeomorfas) que son, además, difeomorfas. Surge así la cuestión natural de si dos variedades homeomorfas son necesariamnete difeomorfas. Es conocido que eso es así para $I\!R^n$ con la topología usual y $n \neq 4$, mientras que para $I\!R^4$ se ha demostrado, después de 1982 (Donaldson y otros), que existe una cantidad infinita no numerable de estructuras diferenciables no difeomorfas con topología canónica la usual de $I\!R^4$. Para la esfera se ha demostrado que todas las S^n son difeomorfas para $n \leq 6$ (excepto para $n = 4$, donde no se sabe lo que pasa), pero hay 28 estructuras diferenciables no difeomorfas sobre S^7 y alrededor de 16 millones sobre S^{31}.

1.5.12. Nota. Obsérvese que si se consideran $I\!R^n$ y $I\!R^m$ con la estructura de variedad diferenciable inducida por la carta identidad, entonces $f : I\!R^n \longrightarrow I\!R^m$ es de calse C^r como aplicación entre variedades sii lo es $f = \mathrm{id} \circ f \circ \mathrm{id}^{-1} : I\!R^n \longrightarrow I\!R^m$ como aplicación entre espacios euclídeos. Resulta de aquí que si A y B son abiertos de $I\!R^n$, $f : U \longrightarrow V$ es un difeomorfismo como aplicación entre espacios euclídeos si y solo si lo es como aplicación entre variedades. También se tiene que una funcion $f : M \longrightarrow I\!R^m$ es diferenciable si y solo si lo es cada $f^i : M \longrightarrow I\!R$.

1.5.13. Nota. Para una carta (U, φ) de M, $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ es un difeomorfismo (Ej: comprobarlo aplicando la definición). Es más: si U es un abierto de M y $\varphi : U \longrightarrow I\!R^n$ es una aplicación tal que $\varphi(U)$ es un abierto de $I\!R^n$ y $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ es un difeomorfismo, entonces (U, φ) es una carta de M (i.e., una carta del atlas maximal que define la estructura diferenciable de M). En efecto, si $\varphi : U \to \varphi(U)$ es un difeomorfismo, U es un abierto de M y $\varphi(U)$ es un abierto de $I\!R^n$, entonces es evidente que (U, φ) satisface las exigencias de la definición de carta; si (V, ψ) es una carta del atlas maximal de M, es evidente que $U \cap V$ es un abierto de M y, por lo tanto, como φ y ψ son difeomorfismos, $\varphi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$ son abiertos de $I\!R^n$, y $\varphi \circ \psi^{-1}$ es un difeomorfismo por ser composición de difeomorfismos. Por lo tanto, (U, φ) es una carta del atlas maximal de M.

§1.6. Concepto de Grupo de Lie y ejemplos

1.6.0.Definición. *Un grupo es un conjunto G dotado de una ley de composición interna $*$ que verifica las propiedades:*

G1) asociativa: $(x * y) * z = x * (y * z)$ para todo $x, y, z \in G$

G2) existe un $e \in G$ (elemento neutro) tal que $x * e = e * x = x$ para todo $x \in G$.

G3) para todo $x \in G$ existe un $x^{-1} \in G$ (elemento inverso) tal que $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$.

1.6.0'.Definición. *Una aplicación $f : G \longrightarrow H$ entre dos grupos se dice que es un homomorfismo de grupos sii $f(x * y) = f(x) * f(y)$ para todo $x, y \in G$. Si f es un homomorfismo biyectivo y la aplicación inversa f^{-1} es un homomorfismo, entonces se dice que f es un isomorfismo de grupos.*

Un grupo de Lie es un grupo con una estructura de variedad diferenciable compatible con la estructura de grupo. Con más precisión:

1.6.1.Definición. *Un conjunto G con estructura de grupo con la ley $x * y \equiv xy$, con elemento neutro e, y con estructura de variedad diferenciable de clase C^∞ se dice que* *es un grupo de Lie si la aplicación*

$$\alpha : G \times G \longrightarrow G \quad \textit{tal que} \quad (x, y) \mapsto xy^{-1}$$

es diferenciable (de clase C^∞).

Obsérvese que esto es equivalente a decir que las aplicaciones $(x, y) \mapsto xy$ y $x \mapsto x^{-1}$ son diferenciables, puesto que $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ es la composición de $(x, y) \mapsto (x, y^{-1})$ (que es diferenciable por 1.5.7) con $(x, y^{-1}) \mapsto xy^{-1}$ y, recíprocamente, $x \mapsto x^{-1}$ es la aplicación $\alpha_e : G \to G$ tal que $x \mapsto \alpha(e, x) = ex^{-1} = x^{-1}$ que es C^∞ (recordar Prop. 1.5.8) y $(x, y) \mapsto xy$ es la composición de $(x, y) \mapsto (x, y^{-1})$ con $(x, y^{-1}) \mapsto xy$.

1.6.2.Ejemplos.

(a) Sea $\mathbb{R}^n$ con su estructura de grupo dada por la suma de vectores y su estructura de variedad diferenciable (de clase C^ω) dada por la aplicación identidad. Como la aplicación

$$\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ tal que } (x, y) \mapsto x - y$$

es de clase C^ω, se tiene que $\mathbb{R}^n$ es un grupo de Lie.

(b) $\mathbb{C}^* \equiv \mathbb{C} - \{0\}$ es una variedad diferenciable con la carta

$$(\mathbb{C}^*, \varphi), \text{ con } \varphi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\} \equiv \mathbb{R}^{2^*} \text{ definida por } \varphi(x + iy) = (x, y).$$

$\mathbb{C}^*$ es también un grupo con el producto de números complejos como ley interna. Usando la carta anterior se tiene que

$$\varphi \circ \alpha \circ (\varphi \times \varphi)^{-1}(x, y, z, w) = \varphi((x + iy)(z + iw)^{-1}) = \frac{1}{z^2 + w^2}(xz + yw, yz - xw),$$

que es una aplicación C^ω y, por tanto, α es C^ω y $\mathbb{C}^*$ es un grupo de Lie.

(c) Con la identificación natural de $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ (ya usada en el ejemplo anterior), la circunferencia de radio unidad S^1 de $\mathbb{R}^2$ puede considerarse como

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\} \subset \mathbb{C}.$$

Las cartas

$$\varphi : S^1 - \{1\} \longrightarrow]0, 2\pi[\text{ dada por } \varphi(e^{i\theta}) = \theta, \text{ y}$$

$$\psi : S^1 - \{i\} \longrightarrow]0, 2\pi[\text{ dada por } \psi(e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}) = \theta,$$

definen una estructura diferenciable sobre S^1 que es la misma que la definida en 1.3.3 cuando $n = 1$ (¿por qué?).

El producto de dos elementos de S^1 considerados como números complejos da de nuevo un elemento de S^1, y S^1 es un grupo con esta ley. Si vemos que α es C^∞, tendremos que S^1 es un grupo de Lie. Ahora bien: si $\iota : S^1 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ es la inyección canónica $\iota(z) = z$ y $\pi : \mathbb{C}^* \longrightarrow S^1$ es la aplicación definida por $\pi(z) = z/|z|$, consideremos la composición

$$S^1 \times S^1 \xrightarrow{\iota \times \iota} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}^* \xrightarrow{\pi} S^1,$$

como $\alpha \circ (\iota \times \iota) = \alpha : S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1, \mathbb{C}^*$ es un grupo de Lie, $\iota \times \iota$ es C^∞ y π también (comprobarlo -ver ejercicio 1.E.6-), se tiene que α es C^∞ c.q.d..

(d) Si G y H son dos grupos de Lie, entonces $G \times H$ con el producto $(x, y)(z, w) = (xz, yw)$ y la estructura diferenciable de variedad producto definida en 1.3.5 es un grupo de Lie. En efecto. Observemos primero que la aplicación $\xi : (G \times H) \times (G \times H) \longrightarrow (G \times G) \times (H \times H)$ definida por $\xi((x, y), (z, w)) = ((x, z), (y, w)))$ es C^∞ (comprobarlo mirando el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} (G \times H) \times (G \times H) & \xrightarrow{\xi} & (G \times G) \times (H \times H) \\ {\scriptstyle (\varphi\times\psi)\times(\varphi'\times\psi')}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle (\varphi\times\varphi')\times(\psi\times\psi')} \\ (U \times V) \times (U' \times V') & \xrightarrow{\widetilde{\xi}} & (U \times U') \times (V \times V'), \end{array}$$

donde $\widetilde{\xi}(a, b, a', b') = (a, a', b, b'))$. Tenidendo en cuenta ahora que la composición

$$(G \times H) \times (G \times H) \xrightarrow{\xi} (G \times G) \times (H \times H) \xrightarrow{\alpha\times\alpha} G \times H$$

da la aplicación $\alpha : (G \times H) \times (G \times H) \longrightarrow G \times H$, resulta que α es C^∞ y, por tanto, $G \times H$ es un grupo de Lie.

Por ejemplo, $S^1 \times S^1$ con el producto $(e^{i\theta}, e^{i\beta})(e^{is}, e^{it}) = (e^{i(\theta+s)}, e^{i(\beta+t)})$ es un grupo de Lie, que se llama toro abeliano por ser difeomorfo a un toro y ser un grupo abeliano.

(e) Sea $GL(n, \mathbb{R})$ el grupo de los isomorfismos de $\mathbb{R}^n$. Elegida una base (la canónica) de $\mathbb{R}^n$, cada elemento $A \in GL(n, \mathbb{R})$ viene representado de modo único por una matriz $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ de determinante no nulo, de modo que $GL(n, \mathbb{R})$ se puede identificar con el conjunto de estas matrices. Identificando ahora cada $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in GL(n, \mathbb{R})$ con $(a_{11}, ..., a_{1n}, a_{21}, ..., a_{n1}, ..., a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$, $GL(n, \mathbb{R})$ resulta ser el subconjunto de $\mathbb{R}^{n^2}$ definido como $\det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$, donde det es la aplicación que a cada matriz le hace corresponder su determinante. Como el determinante es una función contínua sobre $\mathbb{R}^{n^2}$ y $\mathbb{R} - \{0\}$ es un abierto de $\mathbb{R}$, se tiene que $GL(n, \mathbb{R})$ es un abierto de $\mathbb{R}^{n^2}$ y, por lo tanto, una variedad C^∞.

Si se considera como ley interna en $GL(n, \mathbb{R})$ la composicioón de isomorfismos (que se corresponde con el producto de matrices), $GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie, pues la aplicación $(A, B) \mapsto AB^{-1}$ es C^∞ como aplicación entre abiertos de $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$ y de $\mathbb{R}^{n^2}$.

La mayoría de los grupos de Lie (los grupos de Lie clásicos) son subgrupos de $GL(n, \mathbb{R})$.

§1.A. Apéndice: clases de equivalencia y espacios cociente.

1.A.1.Definición. *Dado un conjunto X, una relación binaria R sobre X es un subconjunto $\mathcal{R} \subset X \times X$, se escribe*

$$x \, R \, y \text{ si y solo si } (x, y) \in \mathcal{R}.$$

Si no es cierto que $x \, R \, y$, escribiremos $x \not\!R \, y$

1.A.2.Definición. *Una relación binaria de equivalencia (R.B.E.) sobre un conjunto X es una relación binaria R sobre X que cumple las propiedades*
-Reflexiva: $x\,R\,x$.
-Simétrica: $x\,R\,y$ *sii* $y\,R\,x$.
-Transitiva: $x\,R\,y$ *y* $y\,R\,z$ *implican* $x\,R\,z$.

1.A.3.Definición. *Una partición de un conjunto X es una familia $\{X_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X disjuntos y tales que $X = \cup_{i\in I} X_i$.*

1.A.4.Definición. *Si R es una relación binaria de equivalencia sobre X, y $x \in X$, se llama clase de equivalencia de x al conjunto $[x] = \{y \in X /\, x\,R\,y\}$.*

1.A.5.Proposición-Definición. *Dada una una relación binaria de equivalencia R sobre X, las clases de equivalencia de los elementos de X definen una partición de X. Al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia se le llama conjunto cociente de X por la relación de equivalencia R, y se denota por X/R.*

Demostración. Evidentemente $X = \cup_{x\in X}[x]$, luego, si vemos que

$$[x] \neq [y] \text{ sii } [x] \cap [y] = \emptyset, \tag{A.5.1}$$

las clases de equivalencia serán disjuntas y la familia de las clases de equivalencia será una partición de X. Vamos, pues, a probar (A.5.1). Si $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, existe un $z \in [x] \cap [y]$, (i.e., existe un z tal que $x\,R\,z$ y $y\,R\,z$) y, aplicando las propiedades simétrica y transitiva, $x\,R\,y$. Entonces, para cualquier $w \in [y]$, se tiene que $x\,R\,y$ y $y\,R\,w$, luego $x\,R\,w$ y $w \in [x]$, luego $[y] \subset [x]$. De la misma manera se ve que $[x] \subset [y]$. Hemos visto, por tanto, que $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ implica $[x] = [y]$, luego $[x] \neq [y]$ implica $[x] \cap [y] = \emptyset$. Recíprocamente, es evidente que $[x] = [y]$ implica $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, luego $[x] \cap [y] = \emptyset$ implica $[x] \neq [y]$, y (A.5.1) queda probado. □

1.A.6. Dada una relación de equivalencia R sobre un conjunto X, se define la *proyección canónica* $\pi : X \longrightarrow X/R$ como la aplicación definida por $\pi(x) = [x]$ para todo $x \in X$. Se tiene que $X/R = \{\pi^{-1}(p)/p \in X/R\}$, i.e., como conjuntos, $[x] = \pi^{-1}([x])$. En efecto, $\pi^{-1}([x]) = \{y \in X \,/\, \pi(y) = [x]\} = \{y \in X \,/\, [y] = [x]\} = \{y \in X \,/\, xRy\} = [x]$.

Además esto da también un procedimiento estándar para definir relaciones de equivalencia. Dada una función $f : X \longrightarrow Y$, la relación binaria xRy sii $f(x) = f(y)$ es de equivalencia, Y está en biyección con el cociente X/R, lo que permite identificar Y con X/R y, con esta identificación, f coincide con la proyección canónica.

Será bastante usual que cuando escribamos $[x]$, lo consideremos como un elemento (punto) de X/R, y cuando escribamos $\pi^{-1}([x])$ lo consideremos como un subconjunto de X. Pero, en general, habrá que atender al contexto para saber si $[x]$ se considera como un conjunto o como un elemento.

El espacio proyectivo $I\!\!RP^n$ puede describirse también usando relaciones de equivalencia. Vamos a hacerlo:

1.A.7.Proposición. *Sea $\sim$ la relación binaria sobre $I\!\!R^{n*} \equiv I\!\!R^n - \{0\}$ definida por*

$$x \sim y \text{ sii existe un } \lambda \in I\!\!R - \{0\} \text{ tal que } y = \lambda x.$$

$\sim$ es una relación binaria de equivalencia

Demostración. - $x \sim x$ porque $x = 1\,x$.

-$x \sim y$ implica que existe $\lambda \in I\!\!R - \{0\}$ tal que $y = \lambda x$, luego existe $\lambda^{-1} \in I\!\!R - \{0\}$ tal que $x = \lambda^{-1} y$, luego $y \sim x$.

- $x \sim y$ y $y \sim z$ implican que existen λ y μ en $I\!\!R - \{0\}$ tales que $y = \lambda x$ y $z = \mu y$, de donde resulta que existe $\lambda\mu \in I\!\!R - \{0\}$ tal que $z = \lambda\mu y$ y, por tanto, $x \sim z$. □

1.A.8.Proposición. *$I\!\!RP^n$ está en biyección con $I\!\!R^{n*}/\sim$.*
Por ello, de ahora en adelante se identificarán ambos conjuntos.

Demostración. Dado $[x]$, $\pi^{-1}([x]) = \{\lambda x \,/\, \lambda \neq 0\}$, luego los elementos de $I\!\!R^{n*}/\sim$ son las rectas vectoriales de $I\!\!R^n$ privadas del origen, y la aplicación
$\phi : I\!\!R^{n*}/\sim \longrightarrow I\!\!RP^n$ tal que $\phi([v]) = \{\lambda v : \lambda \in I\!\!R\}$
asigna a cada recta menos el 0 esa misma recta con el 0 incluido. Esta aplicación es, evidentemente, biyectiva. $\square$

1.A.9. A través de esta biyección se puede transportar la estructura diferenciable de $I\!\!RP^n$ a $I\!\!R^{n*}/\sim$ de manera obvia (las cartas de $I\!\!R^{n*}/\sim$ serás de la forma $(U, \varphi \circ \phi^{-1})$, para cada carta (U, φ) de $I\!\!RP^n$).

Vamos a ver otro modelo equivalente del espacio proyectivo.

Sea $|\ |$ la norma canónica de $I\!\!R^{n+1}$, es decir, dado $x = (x^1, ..., x^{n+1}) \in I\!\!R^{n+1}$, $|x|^2 = (x^1)^2 + ... + (x^{n+1})^2$. La esfera de radio 1 en $I\!\!R^{n+1}$ es el conjunto $S^n = \{x \in I\!\!R^{n+1} : |x| = 1\}$.

La relación de equivalencia $\sim$ definida sobre $I\!\!R^{n+1} - \{0\}$ como en 1.A.7 se puede restringir a S^n dando una nueva relación de equivalencia, que seguiremos denotando por $\sim$. Obsérvese que: si $x, y \in S^n$, $x \sim y$ sii $y = x$ ó $y = -x$, puesto que $x \sim y$ sii $y = \lambda x$, y $y \in S^n$ implica $1 = |\lambda x| = |\lambda||x| = |\lambda|$.

1.A.10.Proposición. *$I\!\!RP^n$ está en biyección con $S^n/\sim$.*

Demostración. La aplicación

$$\xi : (I\!\!R^{n+1} - \{0\})/\sim \longrightarrow S^n/\sim \ \text{ dada por } \xi([x]) = \left[\frac{x}{|x|}\right]$$

está bien definida y es una biyección. En efecto: si $y \in [x]$, $y = \lambda x$, luego

$$\frac{y}{|y|} = \frac{\lambda x}{|\lambda||x|} = \frac{\lambda}{|\lambda|}\frac{x}{|x|} \text{ lo que implica } \frac{x}{|x|} \sim \frac{y}{|y|},$$

luego ξ no depende del elemento de $[x]$ elegido. Además se comprueba fácilmente que la aplicación de $S^n/\sim$ en $(I\!\!R^{n+1} - \{0\})/\sim$ definida por $[u] \mapsto [u]$ es su inversa, luego ξ es una biyección, y esto prueba la proposición. $\square$

La última proposición da la imagen de $I\!\!RP^n$ como una semiesfera de S^n en la que se han identificado los puntos opuestos del ecuador. En los casos $n = 1, 2$ tenemos los siguientes dibujos

En el caso n=1 se ve que $I\!\!RP^1$ está en biyección con (es incluso difeomorfo a) S^1.

§1.E. Ejercicios

1.E.1. Comprobar que la estructura de variedad diferenciable sobre la esfera S^n definida por el atlas dado en 1.3.3 y la definida por el atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{1\leq i\leq 2(n+1)}$ en el que, para $1 \leq i \leq n+1$, $U_i = \{(x^1, ..., x^{n+1}) \,/\, x^i > 0\}$ y $\varphi_i(x^1, ..., x^{n+1}) = (x^1, ..., x^{1-1}, x^{i+1}, ..., x^{n+1})$, y para $n+2 \leq i \leq 2(n+1)$, $U_i = \{(x^1, ..., x^{n+1}) \,/\, x^{i-(n+1)} < 0\}$ y $\varphi_i(x^1, ..., x^{n+1}) = (x^1, ..., x^{i-(n+1)-1}, x^{i-(n+1)+1}, ..., x^{n+1})$, son la misma.

1.E.2. Demostrar 1.3.5.

1.E.3. Comprobar 1.4.5.

1.E.4. Ver que, si se tienen dos atlas de dimensión n y clase C^k sobre un espacio topológico M que inducen una estructura diferenciable sobre M para las que las cartas son homeomorfismos con respecto a la topología inicial de M, para comprobar que los dos atlas definen la misma estructura diferenciable no es necesario probar la propiedad $\varphi(U \cap V)$ abierto de $\mathbb{R}^n$ para (U, φ) carta de un atlas y (V, ψ) carta del otro.

1.E.5. Probar que la estructura de variedad diferenciable sobre S^1 definida en 1.6.2(c) coincide con la dada en 1.3.3.

1.E.6. Probar que la aplicación $\pi : \mathbb{C}^* \longrightarrow S^1$ definida (en el ejemplo 1.6.2.(c)) por $\pi(z) = z/|z|$ es C^∞. Se sugiere hacerlo siguiendo los pasos:

(i) Probar que $\{(U, \phi), (V, \Phi)\}$ (con $U = \mathbb{C}^* - \lambda{\cdot}1;\ \lambda \in \mathbb{R}^+\}$, $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^+_* \times]0, 2\pi[$ definida por $\phi(z = |z|e^{i\theta}) = (|z|, \theta)$, $V = \mathbb{C}^* - \lambda{\cdot}i;\ \lambda \in \mathbb{R}^+\}$, $\Phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^+_* \times]0, 2\pi[$ definida por $\Phi(z = |z|e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}) = (|z|, \theta))$ es un atlas para $\mathbb{C}^*$ que define la misma estructura diferenciable que la carta $(\mathbb{C}^*, \varphi)$ definida en el ejemplo 1.6.2.(b).

(ii) Usar el atlas anterior para probar que π es C^∞.

1.E.7. Dar una demostración directa (sin usar que $\mathbb{C}^*$ es un grupo de Lie) de que S^1 es un grupo de Lie.

1.E.8. Dotar de una estructura de variedad diferenciable al toro de revolución de $\mathbb{R}^3$ (cfr. 1.3.2) y comprobar que es difeomorfo a $S^1 \times S^1$.

1.E.9. Completar los detalles de la demostración de que la aplicación ξ definida en 1.6.2(d) es un difeomorfismo de clase C^∞.

1.E.10. Probar que la topología canónica de S^n inducida por la estructura diferenciable dad en 1.3.3 o 1.E.1 coincide con la topología usual de S^n. Probar lo mismo para la topología producto de dos variedades diferenciables y la topología canónica inducida por la estructura diferenciable producto.

2. ESPACIO TANGENTE

§2.1. Introducción.

Para definir la diferencial de una aplicación entre superficies era necesario definir primero el plano tangente en cada punto, un espacio vectorial de dimensión 2 que, en cada punto, era una aproximación de un entorno del punto en la superficie por un espacio vectorial. Para definirlo se consideraban las curvas pasando por ese punto, que eran, a su vez, curvas de $\mathbb{R}^3$, y el espacio tangente en ese punto era el espacio de los vectores tangente a esas curvas en $\mathbb{R}^3$. En variedades diferenciables también es necesaria la noción de espacio vectorial tangente para poder definir la diferencial de una función. La idea para definir este espacio vectorial es la misma que para superficies: el espacio tangente a una variedad M en un punto p es el conjunto de los vectores tangentes a las curvas pasando por p. El problema es que, ahora, las curvas no son curvas en $\mathbb{R}^m$ y, por lo tanto, no tenemos definido lo que es el vector tangente a una curva. Hay que definirlo. La idea para hacerlo es identificar el concepto de vector tangente con el de la derivada direccional en la dirección de ese vector. En $\mathbb{R}^n$, dados un vector v y un punto p de $\mathbb{R}^n$, para cualquier función f definida en un entorno de p está definida la derivada direccional $D_v f$ de f en p en la dirección de v. Si $\alpha(t)$ es una curva de $\mathbb{R}^n$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, por la regla de la cadena se tiene que $D_v f = \frac{d(f\circ\alpha)}{dt}(0)$. Esta es la fórmula que servirá para definir el vector tangente a una curva $c(t)$ de una variedad diferenciable M en un punto $p = c(0)$: se definirá como el operador $v = c'(0)$ que, a cada función diferenciable f definida en un entorno de p, le hace corresponder el número $vf = \frac{d(f\circ c)}{dt}(0)$. Una vez definido esto comprobaremos que el espacio de esos vectores tangentes es un espacio vectorial de la misma dimensión que la variedad. Veremos, a la vez, que un vector tangente en p es una derivación, es decir, un operador sobre el espacio de las funciones definidas en un entorno de p que verifica las mismas reglas formales de actuación que la derivada direccional. Cabe entonces preguntarse si todas las derivaciones son vectores tangentes o no. Veremos que para el caso de las variedades C^∞ el espacio tangente y el espacio vectorial de las derivaciones coinciden.

En todo este capítulo, I denotará un intervalo abierto y t_0 será un punto de I.

§2.2. Definición de espacio tangente

2.2.1. Definición. *Sea $c : I \longrightarrow M$ una curva de clase C^r $(k \geq r \geq 1)$ sobre una variedad diferenciable M de clase C^k, con $c(t_0) = p \in M$, y se $\mathcal{F}_p$ el conjunto de las* *funciones definidas en algún entorno de p (que puede ser distinto para cada función) que son de clase C^k en p. El vector tangente a la curva c en p es la aplicación:*

$$c'(t_0) : \mathcal{F}_p \longrightarrow I\!R \quad \text{definida por} \quad c'(t_0)f = \frac{d(f \circ c)}{dt}(t_0) \text{ para toda } f \in \mathcal{F}_p.$$

Un vector tangente a M en p es un vector tangente a una curva $c : I \longrightarrow M$ de clase C^r que pasa por p (i.e. $c(t_0) = p$).

El conjunto de los vectores tangentes a M en p lo denotaremos indistintamente por T_pM ó M_p.

2.2.2.Definición y Proposición. *Una derivación de $\mathcal{F}_p$ es una aplicación $D : \mathcal{F}_p \longrightarrow I\!R$ que verifica las propiedades*

(i) $D(f + g) = Df + Dg$,

(ii) $D(\lambda f) = \lambda Df$ para todo $\lambda \in I\!R$,

(iii) $D(fg) = (Df)g(p) + f(p)(Dg)$.

Denotaremos por $\mathcal{D}_p$ el conjunto de las derivaciones de $\mathcal{F}_p$. Es un espacio vectorial real con las leyes $(\lambda D)f = \lambda(Df)$ y $(D+E)f = Df+Ef$ para todo $\lambda \in I\!R$ y cualesquiera $D, E \in \mathcal{D}$.

Se tiene que $T_pM \subset \mathcal{D}_p$.

Demostración. Es fácil ver que $T_pM \subset \mathcal{D}_p$. Si $v = c'(t_0) \in T_pM$ y $f, g \in \mathcal{F}_p$, entonces

$$\begin{aligned} v(f+g) &= \frac{d((f+g)\circ c)}{dt}(t_0) = \frac{d(f\circ c)}{dt}(t_0) + \frac{d(g\circ c)}{dt}(t_0) = vf + vg, \qquad \text{y} \\ v(fg) &= \frac{d((fg)\circ c)}{dt}(t_0) = \frac{d((f\circ c)(g\circ c))}{dt}(t_0) \\ &= \frac{d(f\circ c)}{dt}(t_0)(g\circ c)(t_0) + (f\circ c)(t_0)\frac{d(g\circ c)}{dt}(t_0) = (vf)g(p) + f(p)vg. \end{aligned}$$

□

2.2.2'. Obsérvese que de (iii) se deduce que $D1 = D(1 \times 1) = 1D1 + (D1)1 = 2D1$, y, por tanto, $D1 = 0$. De aquí , junto con (ii), se deduce que para toda función constante λ, $D\lambda = D(\lambda\, 1) = \lambda D(1) = 0$.

2.2.3. Dado un sistema de coordenadas (U, φ) de M en p ($p \in U$), se considera la curva $\alpha_i(t) : I \longrightarrow U$ (con $0 \in I$) definida por $\alpha_i(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + t(0, ..., 0, 1, 0, ...0))$ con 1 ocupando el lugar i-ésimo. Se definen los vectores

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \alpha_i'(0), \quad i = 1, ..., n.$$

Estos vectores actúan sobre las funciones $f \in \mathcal{F}_p$ (como se ve aplicando la regla de la cadena, recordando que $x^j = r^j \circ \varphi$ y usando que $f \circ \alpha_i = f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha_i$) de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p f = \frac{d(f\circ\alpha_i)}{dt}(0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r^j}(\varphi(p))\frac{d(x^j\circ\alpha_i)}{dt}(0) \tag{2.2.3.1}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r^j}(\varphi(p))\delta_i^j = \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(p)).$$

2.2.4. Teorema. *T_pM es el subespacio vectorial de dimensión n de $\mathcal{D}_p$ generado por los vectores*

$$\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots \frac{\partial}{\partial x^n}|_p, \tag{2.2.4.1}$$

que son, además, una base de T_pM.

Demostración. Dada una carta (U,φ) de M en p, una curva arbitaria $c(t)$ de M de clase C^r con $c(t_0)=p$ y una función cualquiera f de clase C^r definida sobre un abierto V de M que contiene a p, se puede escribir

$$f\circ c(t) = f\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ c(t) \quad \text{para} \quad t\in c^{-1}(U\cap V), \qquad \text{y}$$

$$c'(t_0)f = \frac{d(f\circ c)}{dt}(t_0) = d(f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(p)}\left(\frac{d(\varphi\circ c)}{dt}(t_0)\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(p))\frac{d(x^i\circ c)}{dt}(t_0) = \sum_{i=1}^{n}\frac{d(x^i\circ c)}{dt}(t_0)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p f,$$

lo que da que todo vector $c'(t_0)\in T_pM$ se puede escribir como la combinación lineal

$$c'(t_0) = \sum_{i=1}^{n}\frac{d(x^i\circ c)}{dt}(t_0)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p, \tag{2.2.4.2}$$

y, para ver que los vectores (2.2.4.1) generan T_pM, falta ver que toda combinación lineal de esos vectores (considerada como elemento de $\mathcal{D}_p$) es el vector tangente a alguna curva. Veámoslo: sea $\sum_{i=1}^n v^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$, con $v^i\in\mathbb{R}$. Definamos la curva $\alpha(t)=\varphi^{-1}(\varphi(p)+(tv^1,\ldots,tv^n))$, que verifica $\alpha(0)=p$; aplicando la fórmula (2.2.4.2) se tiene

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n}\frac{d(x^i\circ\alpha)}{dt}(0)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \sum_{i=1}^{n} v^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_p,$$

luego $\sum_{i=1}^n v^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_p \in T_pM$.

Por lo tanto, para acabar la demostración del teorema solo falta ver que los vectores $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$ son linealmente independientes, pero esto es consecuencia de que

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p x^j = \frac{\partial(x^j\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(p)) = \frac{\partial(r^j\circ\varphi\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(p)) = \delta_i^j,$$

y, por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p = 0 \text{ implica } 0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p x^j = \lambda^j$$

para todo $j \in \{1, ..., n\}$. $\square$

2.2.5. Nota. Obsérvese que la fórmula (2.2.4.2) significa que todo vector $v \in T_pM$ se puede escribir en la forma

$$v = \sum_{i=1}^{n} vx^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p, \tag{2.2.5.1}$$

puesto que, por definición, v es el vector tangente a una curva $c(t)$ en p y $vx^i = \frac{d(x^i \circ c)}{dt}(t_0)$.

2.2.6.Nota. Sea $(I\!R^n, \mathrm{id})$ la carta identidad de $I\!R^n$. Con ella $x^i = r^i \circ \mathrm{id}$ y $\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial r^i}$.
Para cada $x \in I\!R^n$ se define el isomorfismo canónico

$$\Phi_x : T_x I\!R^n \longrightarrow I\!R^n \text{ tal que } \Phi_x(\sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial r^i}|_x) = (v^1, ..., v^n).$$

Con este isomorfismo se tiene que, si $c(t)$ es una curva de $I\!R^n$, su vector tangente en t_0 considerando $I\!R^n$ como variedad diferenciable con el atlas definido por la carta identidad y su derivada en t_0 en el sentido visto en los cursos de análisis están relacionados por:

$$c'(t_o) = \Phi_{c(t_0)}(c'(t_0)),$$

donde el $c'(t_0)$ del miembro de la izquierda de la igualdad es la derivada en el sentido del análisis y el $c'(t_0)$ de la derecha es el vector tangente a $c(t)$ en t_0 como curva de la variedad $I\!R^n$. En efecto: de (2.2.4.2) se deduce que

$$\Phi_{c(t_0)}(c'(t_0)) = \Phi_{c(t_0)}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{d(r^i \circ c)}{dt}(t_0) \frac{\partial}{\partial r^i}|_{c(t_0)}\right) = \left(\frac{d(r^1 \circ c)}{dt}(t_0), ..., \frac{d(r^n \circ c)}{dt}(t_0)\right) = c'(t_0).$$

2.2.7.Teorema. *Si M es una variedad C^∞, para todo $p \in M$ se verifica que $T_pM = \mathcal{D}_p$.*

Demostración. Para la demostración de este teorema usaremos el siguiente

Lema. *Sea (U, φ) una carta centrada en p ($p \in U$ y $\varphi(p) = 0$). Para cada $f \in \mathcal{F}_p$, existen funciones $f_1, ..., f_n \in \mathcal{F}_p$ tales que*

$$f_i(p) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p f \quad y \quad f = f(p) + \sum_{i=1}^{n} x^i f_i \text{ en un entorno de } p\ .$$

Demostración del lema. Sean $F = f \circ \varphi^{-1}$, y $r \in I\!R^+$ tal que $B(0,r) \subset \varphi(U)$. Para cada $(a^1, ..., a^n) \in B(0,r)$ se tiene

$$\begin{aligned}
F(a^1,...,a^n) &= F(a^1,...,a^n) - F(a^1,...,a^{n-1},0) + F(a^1,...,a^{n-1},0) - ... \\
&\quad - F(a^1,0,...,0) + F(a^1,0,...,0) - F(0,...,0) + F(0,...,0) \\
&= F(0,...,0) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{dF}{dt}(a^1,...,a^{i-1},ta^i,0,...,0)\,dt \\
&= F(0,...,0) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r^i}(a^1,...,a^{i-1},ta^i,0,...,0)\,a^i\,dt \\
&= F(0,...,0) + \sum_{i=1}^{n} a^i\,F_i,
\end{aligned} \tag{2.2.7.1}$$

donde F_i es la función

$$F_i = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r^i}(a^1,...,a^{i-1},ta^i,0,...,0)\,dt.$$

Escribiendo (2.2.7.1) en forma funcional

$$F = F(0,...,0) + \sum_{i=1}^{n} r^i F_i. \tag{2.2.7.2}$$

Componiendo con φ y definiendo $f_i = F_i \circ \varphi$, se tiene

$$\begin{aligned}
f_i(p) = F_i \circ \varphi(p) = F_i(0,...,0) &= \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r^i}(0,...,0)\,dt \\
= \frac{\partial F}{\partial r^i}(0,...,0) &= \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}(0,...,0) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p f,
\end{aligned}$$

lo que prueba la primera afirmación del lema. Para la segunda usamos (2.2.7.2) para ver que:

$$f = f\circ\varphi^{-1}\circ\varphi = F\circ\varphi = F(0,...,0) + \sum_{i=1}^{n}(r^i\circ\varphi)(F_i\circ\varphi) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} x^i f_i,$$

lo que acaba la demostración del lema. $\square$

Vamos ahora con la demostración del teorema. Dada una carta cualquiera (U,ψ) en p, sea $\varphi = \psi - \psi(p)$, entonces (U,φ) verifica las condiciones del lema. Puesto que ya vimos que $T_pM \subset \mathcal{D}_p$, bastará probar ahora la inclusión contraria y, para ello, gracias al teorema 2.2.4, bastará con probar que para toda derivación $A \in \mathcal{D}_p$ se tiene que

$$A = \sum_{i=1}^{n} A(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p.$$

Vamos a probar que esta expresión es correcta. Dada $f \in \mathcal{F}_p$, usando el lema tenemos que $f = f(p) + \sum_{i=1}^n f_i x^i$, luego

$$Af = A(f(p)+\sum_{i=1}^{n} f_i x^i) = \sum_{i=1}^{n} A(x^i)f_i(p) + \sum_{i=1}^{n} x^i(p)Af_i = \sum_{i=1}^{n} A(x^i)f_i(p) = \sum_{i=1}^{n} A(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p f,$$

que es la fórmula que queríamos demostrar. $\square$

Aunque no es necesario para la demostración del teorema anterior, es interesante observar que para las cartas usadas en esa demostración se tiene que $x^j = y^j - y^j(p)$, de donde resulta que $\frac{\partial x^i}{\partial y^j} = \delta^i_j$ y, por lo tanto (ver (2.3.1) a continuación), $\frac{\partial}{\partial y^i}|_p = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$. Además, como una derivación actuando sobre una función da 0 (ver 2.2.2'), se tiene que $Ax^i = Ay^i$.

§2.3. Cambios de coordenadas y variedad tangente.

2.3.1.Proposición. *Sean (U, φ) y (V, ψ) dos cartas en p. Si $y^j = r^j \circ \psi$ y $x^i = r^i \circ \varphi$, se tiene que*

$$\text{(2.3.1.1)} \qquad \frac{\partial}{\partial y^j}|_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(p) \frac{\partial}{\partial x^i}|_p, \quad donde \quad \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(p) \equiv \frac{\partial}{\partial y^j}|_p x^i.$$

Si $v \in T_pM$ y $v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \sum_{j=1}^n w^j \frac{\partial}{\partial y^j}|_p$, entonces se tiene

$$\text{(2.3.1.2)} \qquad w^j = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p), \quad donde \quad \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p) \equiv \frac{\partial}{\partial y^j}|_p x^i.$$

E abuso de notación (que cobrará más sentido cuando hablemos de campos vectoriales) usado en (2.3.1.1 y 2) se extiende a

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p f \equiv \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \quad para\ cualquier\ f \in \mathcal{F}_p.$$

Demostración. La fórmula (2.3.1.1) resulta inmediatamente de (2.2.5.1), y de (2.3.1.1) resulta que

$$\sum_{j=1}^n w^j \frac{\partial}{\partial y^j}|_p = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \sum_{i=1}^n v^i \sum_{j=1}^n (\frac{\partial}{\partial x^i}|_p y^j) \frac{\partial}{\partial y^j}|_p = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n v^i (\frac{\partial}{\partial x^i}|_p y^j)) \frac{\partial}{\partial y^j}|_p,$$

de donde se deduce la proposición. $\square$

2.3.2. Teorema. *Si M es una variedad de dimensión n y clase C^k, el conjunto TM unión de los espacios tangentes T_pM para $p \in M$ se puede dotar de una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$ y de clase C^{k-1}.*

Demostración. Sea $\pi : TM \longrightarrow M$ la aplicación canónica que a cada vector $v \in T_pM \subset TM$ le hace corresponder $\pi(v) = p$. Sea $\mathcal{A}$ un atlas sobre M. Construimos un atlas $\widetilde{\mathcal{A}}$ sobre TM de la siguiente manera. Para cada $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, se define la carta $(\pi^{-1}(U), \tau_\varphi)$ de TM de modo que $\tau_\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ es la aplicación $\tau_\varphi(v) = (\varphi(\pi(v)), v^1, ..., v^n)$, donde v^i son las componentes de v en la base $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_{\pi(v)}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}|_{\pi(v)}\}$

(i.e. $v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\pi(v)}$). Se tiene que $\tau_\varphi(\pi^{-1}(U)) = \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$, abierto de $\mathbb{R}^{2n}$, y es fácil comprobar que τ_φ es una biyección. Vamos a comprobar ahora que la familia de cartas $\widetilde{\mathcal{A}}$ así definida es un atlas sobre TM. Veamos que verifica los axiomas:

AT1) $\bigcup_{(U,\varphi)\in\mathcal{A}} \pi^{-1}(U) = \pi^{-1}(\bigcup_{(U,\varphi)\in\mathcal{A}} U) = \pi^{-1}(M) = TM$.

AT2) Si $(U,\varphi),(V,\psi) \in \mathcal{A}$, entonces $\tau_\varphi(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \tau_\varphi(\pi^{-1}(U \cap V)) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$, que es un abierto de $\mathbb{R}^{2n}$.

AT3) Usando las fórmula (2.3.1.2) se obtiene

$$\tau_\psi \circ \tau_\varphi^{-1}(\varphi(p), v^1, ..., v^n) = (\psi(p), \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial y^1}{\partial x^i}, ..., \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial y^n}{\partial x^i}),$$

que es una función diferenciable de clase C^{k-1}. $\square$

2.3.3. Definición y observación. *La variedad TM tal y como se ha definido en la demostración anterior se llama fibrado tangente de M o variedad tengente a M.*

Se puede probar que si M con su topología canónica es Hausdorff o verifica el segundo axioma de numerabilidad, entonces TM también es Hausdorff o verifica el segundo axioma de numerabilidad.

2.3.4. Proposición. *La aplicación $\pi : TM \longrightarrow M$ definida en la demostración de 2.3.3 es de clase C^{k-1}.*

Demostración. Para cada $z \in TM$, sea (U,φ) una carta en $\pi(z)$, entonces $\pi(\pi^{-1}(U)) = U$ y $\varphi \circ \pi \circ \tau_\varphi^{-1}(\varphi(x), v) = \varphi(x)$ es una aplicación de clase C^{k-1} (en realidad es C^∞), luego π es C^{k-1}. $\square$

§2.E. Ejercicio.

2.E.1. Dado un punto p de una variedad diferenciable M de dimensión n, sea $\mathcal{C}$ la familia de todas las cartas de M en p. En $\mathbb{R}^n \times \mathcal{C}$, se define la relación de equivalencia

$$(X,(U,\varphi)) \sim (Y,(V,\psi)) \text{ si y solo si } Y = d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}X.$$

Probar que se trata realmente de una relación de equivalencia y que el conjunto de las clases de equivalencia forma un espacio vectorial naturalmente isomorfo a T_pM.

NOTA: Si se escribe la relación anterior usando coordenadas, con $X = (X^1, ..., X^n)$, $Y = (Y^1, ..., Y^n)$, $x^i = r^i \circ \varphi$ e $y^j = r^j \circ \psi$, la relación de equivalencia anterior se escribe

$$Y^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p) X^i,$$

(con el convenio $\frac{\partial y^j}{\partial x^i} = \frac{\partial(r^j \circ \psi \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}$) que coincide con la fórmula (2.3.1.2) de cambio de coordenadas, y la definición de vector usando esta relación de equivalencia corresponde con la manera de los físicos clásicos de ver los vectores (contravariantes).

3. LA DIFERENCIAL DE UNA APLICACIÓN

§3.1. Introducción.

En este capítulo vamos a definir la diferencial de una aplicación. Hay, entre otras, dos maneras naturales de hacerlo de modo que sea una extensión del mismo concepto para aplicaciones entre espacios euclídeos.

El primero de ellos consiste en recordar que, si f es una aplicación de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$, p es un punto de $\mathbb{R}^m$, v un vector de $\mathbb{R}^m$, $D_v f$ denota la derivada direccional de f en p en la dirección de v y $df_p(v)$ denota la diferencial de f en p actuando sobre v, entonces se verifica que $df_p(v) = D_v f$. Como en una variedad diferenciable M un vector tangente $v \in T_pM$ se define como generalización de la derivada direccional, una definición natural de la diferencial de una aplicación $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ en p actuando sobre v sería $df_p(v) = vf$. Como la acción de v sobre f se había definido viendo v como el vector tangente a una curva y usando la regla de la cadena, para definir la diferencial de una aplicación $f : M \longrightarrow N$ entre variedades diferenciables es natural considerar que la acción de la diferencial f_{*p} de f en $p \in M$ sobre un vector $v \in T_pM$ tangente a una curva $c(t)$ (tal que $c(0) = p$) en p sea $f_{*p}(v) = \frac{d(f\circ c)}{dt}(0)$.

Otra manera natural de definir esta diferencial sería usando sistemas de coordenadas que dan lugar a un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U \subset M & \xrightarrow{f} & V \subset N \\ {\scriptstyle\varphi}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle\psi} \\ \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\psi\circ f\circ\varphi^{-1}} & \psi(V) \subset \mathbb{R}^n, \end{array}$$

y definiendo f_{*p} usando la diferencial de la aplicación $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, que es conocida por ser una aplicación entre espacios euclídeos, y las diferenciales de las aplicaciones φ y ψ que habrá que definir adecuadamente.

Veremos que esta segunda manera de definir la diferencial de una aplicación es consecuencia de la primera (en realidad, son equivalentes).

En toda esta lección todas las variedades diferenciables serán de clase C^k y todas las aplicaciones diferenciables de clase C^r $(r \leq k)$.

§3.2. Definición de la diferencial de una aplicación

3.2.1.Definición. *Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable, $p \in M$. La diferencial de f en p es la aplicación lineal*

$$f_{*p} : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N \text{ tal que } f_{*p}(v) = \frac{d(f \circ c)}{dt}(0),$$

siendo $c : I \longrightarrow M$ una curva de M tal que $c(0) = p$ y $c'(0) = v$.

Para que la definición sea correcta falta comprobar que la expresión dada para $f_{*p}(v)$ no depende de la curva c elegida verificando las condiciones $c(0) = p$ y $c'(0) = v$ y que es lineal. Todo ello es consecuencia de la siguiente proposición:

3.2.2.Proposición. *Para f como antes se tiene que, si (U, φ) es una carta en p y (V, ψ) es una carta en $f(p)$, y $v = \sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, entonces*

$$f_{*p}(v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{\partial (y^j \circ f)}{\partial x^i}(p) v^i \frac{\partial}{\partial y^j}|_{f(p)}.$$

Demostración. Por la expresión en coordenadas del vector tangente a una curva que vimos en la lección anterior (fórmula (2.2.4.2)), y aplicando la regla de la cadena y la fórmula (2.2.3.1) que dice como actúa $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ sobre una función real,

$$\frac{d(f \circ c)}{dt}(0) = \sum_{j=1}^n \frac{d(y^j \circ f \circ c)}{dt}(0) \frac{\partial}{\partial y^j}|_{f(p)}$$
$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{\partial (y^j \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(p)) \frac{d(x^i \circ c)}{dt}(0) \frac{\partial}{\partial y^j}|_{f(p)} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{\partial (y^j \circ f)}{\partial x^i}(p) v^i \frac{\partial}{\partial y^j}|_{f(p)},$$

que es la fórmula que buscábamos. □

Como en la expresión de $f_{*p}(v)$ recién dada no figura ninguna curva, se tiene que $f_{*p}(v)$ no depende de la curva tangente a v que se elija en la definición 3.2.1. Por otro lado, esta misma expresión dice que, en las bases de T_pM y de $T_{f(p)}N$ asociadas a las cartas elegidas, las componentes de $f_{*p}(v)$ se obtienen haciendo actuar la matriz

$$(3.2.2.1) \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1 \circ f}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^1 \circ f}{\partial x^m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y^n \circ f}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^n \circ f}{\partial x^m} \end{pmatrix} \text{ sobre el vector } \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix},$$

lo que indica que f_{*p} es lineal. La matriz (3.2.2.1) es *la matriz de f_{*p} en las coordenadas* (U, φ) y (V, ψ).

3.2.3.Nota. Dada una carta (U,φ) de una variedad diferenciable M, usando la fórmula de la proposición 3.2.2, se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi_{*p}(\sum_{i=1}^{m} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p) &= \sum_{i=1}^{m} v^i \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial(r^j\circ\varphi)}{\partial x^i}(p)\frac{\partial}{\partial r^j}|_{\varphi(p)} \\ &= \sum_{i=1}^{m} v^i \sum_{j=1}^{m} \delta_i^j \frac{\partial}{\partial r^j}|_{\varphi(p)} = \sum_{j=1}^{m} v^j \frac{\partial}{\partial r^j}|_{\varphi(p)}.\end{aligned} \tag{3.2.3.1}$$

3.2.4.Definición. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión m, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable, se llama (también) diferencial de f en $x \in M$ a la aplicación*

$df_x = \Phi_{f(x)} \circ f_{*x} : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *para recordar la definición de $\Phi_{f(x)}$ ver (2.2.6).*

De la definición de $\Phi_{f(x)}$ y la fórmula para f_{*x} resulta la fórmula

$$\begin{aligned}df_x(v) &= \Phi_{f(x)}(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(r^j\circ f)}{\partial x^i}(x)v^i\frac{\partial}{\partial r^j}|_{\varphi}(x)) \\ &= (\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(r^1\circ f)}{\partial x^i}(x)v^i, \dots, \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(r^n\circ f)}{\partial x^i}(x)v^i).\end{aligned} \tag{3.2.4.1}$$

De la definición de $d\varphi_p$ y de la fórmula (3.2.3.1) para φ_* se deduce que

$$d\varphi_p(\sum_{i=1}^{m} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = (v^1, \dots, v^m). \tag{3.2.4.2}$$

3.2.5.Nota. Cuando $n = 1$ en la definición anterior, denotaremos r^1 por r, que es, simplemente, la aplicación identidad de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, y usando (3.2.4.1), se tiene que, si $v = \sum_{i=1}^{m} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$, entonces

$$df_x(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} v^i = vf, \tag{3.2.5.1}$$

que es la expresión que, con frecuencia, se toma como definición de la diferencial de una función en un punto.

3.2.6.Proposición. *Si $f : M \longrightarrow N$ es una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables de dimensiones m y n respectivamente, $(U,\varphi = (x^1,\dots,x^n))$ es una carta de M en $x \in M$, y $(V,\psi = (y^1,\dots,y^n))$ es una carta de N en $f(x)$, entonces*

$$f_{*x} = (d\psi_{f(x)})^{-1} \circ d(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ d\varphi_x.$$

Demostración. De las fórmulas y definiciones anteriores resulta que

$$
\begin{aligned}
f_{*x}(v) &= \sum_{i,j} \frac{\partial(y^j \circ f)}{\partial x^i}(x) v^i \frac{\partial}{\partial y^j}|_{f(x)} = \sum_{i,j} \frac{\partial(y^j \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(x)) v^i \frac{\partial}{\partial y^j}|_{f(x)} \\
&= (d\psi_{f(x)})^{-1} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(y^1 \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(x)) v^i, \, \dots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(y^n \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(x)) v^i \right) \\
&= (d\psi_{f(x)})^{-1} \left(\frac{\partial(y^j \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(x)) \right)_{1\le i\le m, 1\le j\le n} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \\
&= (d\psi_{f(x)})^{-1} \circ d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ d\varphi_x (\sum_{i=1}^{m} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x).
\end{aligned}
$$

□

Obsérvese que el teorema anterior (al igual que la fórmula dada en la proposición 3.2.2) dice que la matriz de f_{*x} con respecto a las bases de T_xM y $T_{f(x)}N$ dadas por dos sistemas de coordenadas en x y en $f(x)$ se calcula (al escribir f usando esas coordenadas) igual que se hacía con las aplicaciones diferenciables de $I\!R^m$ en $I\!R^n$. Lo mismo ocurre para df_x cuando f es una función de M en $I\!R$.

Dada $f : M \longrightarrow I\!R$ diferenciable, como f_{*p} es lineal y $\Phi_{f(p)}$ es un isomorfismo, resulta que $df_p : T_pM \longrightarrow I\!R$ es una aplicación lineal, i.e. un elemento del espacio dual T_pM^* de T_pM.

3.2.7.Definición. *Se llama espacio cotangente a M en $p \in M$ al espacio dual de T_pM. Lo denotaremos por T_p^*M.*

3.2.8.Proposición. *Si (U, φ) es una carta de M en p, $\{dx_p^1, ..., dx_p^m\}$ es una base de T_p^*M.*

Demostración. Usando la proposición 3.2.2 y el cálculo que ya hicimos en la demostración de 2.2.4, resulta que

$$
dx_p^j(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = \delta_i^j, \tag{3.2.8.1}
$$

de donde resulta que $\{dx_p^1, ..., dx_p^m\}$ es la base de T_p^*M dual de $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x^m}|_p\}$. □

Como $df_p \in T_p^*M$, se podrá escribir como combinación lineal de las dx_p^i. De (3.2.5.1) y (3.2.8.1) se deduce que su expresión concreta es

$$
df_p = \sum_{i=1}^{m} df_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p \right) dx_p^i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx_p^i. \tag{3.2.8.2}
$$

3.2.9.Lema. *Sea $\beta : J \longrightarrow I$ un difeomorfismo de intervalos abiertos. Si se consideran las curvas $c : I \longrightarrow M$ y $\alpha = c \circ \beta : J \longrightarrow M$, entonces*

$$\alpha'(s) = c'(\beta(s))\beta'(s).$$

Demostración. Aplicando la definición de vector tangente a una curva y la regla de la cadena para aplicaciones entre intervalos de $I\!R$, se tiene que, para cualquier $f \in \mathcal{F}_{\alpha(s)}$,

$$\alpha'(s)f = \frac{d(f\circ\alpha)}{ds}(s) = \frac{d(f\circ c\circ\beta)}{ds}(s) = \frac{d(f\circ c)}{dt}(\beta(s))\frac{d\beta}{ds}(s) = \frac{d\beta}{ds}(s)\, c'(\beta(s))f.$$

□

3.2.10.Proposición. *Si $c : I \longrightarrow M$ es una curva diferenciable, entonces*

$$c'(t) = c_{*t}(\frac{d}{dr}|_t).$$

Demostración. Sea $\beta(s)$ una curva en I tal que $\beta'(0) = \frac{d}{dr}|_t$, por ejemplo $\beta(s) = t + s$. Usando la definición de c_* y el lema anterior, se tiene

$$c_{*t}(\frac{d}{dr}|_t) = (c\circ\beta)'(0) = \beta'(0)c'(t) = c'(t).$$

□

3.2.11.Proposición. *Si M es conexa y $f : M \longrightarrow N$ es diferenciable, entonces f es constante si y solo si $f_{*p} = 0$ para todo $p \in M$.*

Demostración. Si f es constante (i.e. $f(z) = x \in N$ para todo $z \in M$), para todo $p \in M$ y para todo $v = c'(t_0) \in T_pM$ se tiene que $f_{*p}(v) = (f\circ c)'(t_o) = 0$ porque para toda $g \in \mathcal{F}_x$ se tiene que $g\circ f\circ c(t) = g(x)$ para todo t y, por lo tanto, $(f\circ c)'(t_0)g = (g\circ f\circ c)'(t_0) = 0$. Luego $f_{*p} = 0$. Obsérvese que para esta parte del teorema no es neceario que M sea conexa. De paso, hemos visto también que el vector tangente a una curva constante es el vector 0.

Recíprocamente, supongamos que $f_{*p} = 0$ para todo $p \in M$. Sea $x \in f(M)$. Como f es contínua, $f^{-1}(x)$ es cerrado. Como M es conexa, solo falta ver que $f^{-1}(x)$ es abierto en M para ver que es igual a M y que, por tanto, f es constante. Par verlo, para cada $p \in f^{-1}(x)$, elijamos una carta (U,φ) de M en p y una carta (V,ψ) de N en $x = f(p)$ tales que $f(U) \subset V$. Se deduce de la proposición 3.2.6 que

$$d(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(p)} = d\psi_{f(p)}\circ f_{*p}\circ(d\varphi_p)^{-1} = 0,$$

luego $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ es constante (igual a $\psi(x)$) sobre $\varphi(U)$, luego $f = \psi^{-1}\circ(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ\varphi$ es constante (igual a x) sobre U, luego $p \in U \subset f^{-1}(x)$, luego $f^{-1}(x)$ es un abierto. □

3.2.12. Proposición (Regla de la cadena). *Si $f : M \longrightarrow N$ y $g : N \longrightarrow P$ son aplicaciones diferenciables, entonces*

$$(g \circ f)_{*x} = g_{*f(x)} \circ f_{*x}.$$

Demostración. Sea $v \in T_xM$, c una curva de M tal que $c(0) = x$ y $c'(0) = v$, resulta inmediatamente de aplicar la definición que

$$(g \circ f)_{*x}v = \frac{d(g \circ f \circ c)}{dt}(0) = g_{*f(c(0))}\frac{d(f \circ c)}{dt}(0) = g_{*f(x)}(f_{*x}v).$$

□

§3.3. Inmersiones y sumersiones

En este apartado M y N serán variedades diferenciables de dimensiones m y n respectivamente.

3.3.1. Definiciones. *Una aplicación diferenciable $f : M \longrightarrow N$ se dice que es una inmersión (o que (M, f) o $f(M)$ es una subvariedad de N) si para todo $x \in M$, el rango de f_{*x} es m (i.e. f_{*x} es inyectiva). Si, además, f es inyectiva, se dice que es un embebimiento (o que (M, f) o $f(M)$ es una subvariedad embebida de N). Si, además, f es un homeomorfismo cuando se considera sobre $f(M)$ la topología inducida por la de N, entonces se dice que (M, f) (o $f(M)$) es una subvariedad regular de N.*

Cuando $M \subset N$ y se dice que M es una subvariedad, subvariedad embebida o subvariedad regular de N, se sobreentiende que lo es el par (M, i), donde $i : M \to N$ es la aplicación llamada inclusión canónica, que se define por $i(x) = x$. Obsérvese que, entonces $i_{*x}T_xM \subset T_xN$ y, a menudo, se identifican, sin mención explícita, que es clara por el contexto, $i_{*x}T_xM$ y T_xM.

Hay que advertir que esta terminología no es unánime. Cada vez que uno coge un libro y lee estas palabras, antes de seguir adelante, hay que ver como las entiende ese autor.

Las superficies, tal y como se definieron en los grupos A y B en el curso 94-95, son subvariedades regulares de $I\!R^3$. Tal y como se definieron en el grupo C en el mismo curso son inmersiones de un abierto de $I\!R^2$ en $I\!R^3$.

3.3.2. Ejemplos.

3.3.2.1. La curva $f : I\!R \longrightarrow I\!R^2$ definida por $f(t) = (t^3, t^2)$ es una aplicación C^∞, pero no es una inmersión, pues en $t = 0$, $f_{*0}(\frac{d}{dr}|_0) = f'(0) = 0$.

3.3.2.2. $f(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ es una inmersión, pero no es un embebimiento, pues tiene una autointersección ($f(2) = f(-2) = (0, 0)$).

3.3.2.3.

$$f(t) = \begin{cases} (0, -(t+2)) \quad \text{para } t \in]-3,-1] \\ \text{una curva } C^\infty \text{ que une } (0,-1) \text{ con } (\frac{1}{\pi}, 0) \quad \text{para } t \in [-1, -\frac{1}{\pi}] \\ (-t, \operatorname{sen}(\frac{1}{t})), \quad \text{para } t \in]-\frac{1}{\pi}, 0[\end{cases}$$

es un embebimiento. Sin embargo, no es una subvariedad regular porque, en la topología de $f(]-3,0[)$ inducida por la de $\mathbb{R}^2$, todo entorno de $p = f(-1)$ tiene una infinidad de componentes conexas, mientras que existen entornos de -1 que son intervalos abiertos y, por lo tanto, conexos.

3.3.2.4. La aplicación $f(t) = (t,t)$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ hace de $(\mathbb{R}, f)$ una subvariedad regular.

3.3.2.5. Si $f : M \to N$ es una inmersión, embebimiento o subvariedad regular, U es un abierto de M, V un abierto de N y $f(U) \subset V$, entonces $f : U \to V$ es, respectivamente, una inmersión, embebimiento o variedad regular.

Nota: Es posible probar (ver, por ejmplo, Boothby, pag. 79) que si M es compacta un embebimiento $f : M \to N$ es una subvariedad regular.

3.3.3.Definición. *Una aplicación diferenciable $f : M \longrightarrow N$ se dice que es una sumersión si, para todo $x \in M$, el rango de f_{*x} es n (i.e. f_{*x} es suprayectiva).*

3.3.4.Ejemplos.

3.3.4.1. Las proyecciones $\pi_M : M \times N \longrightarrow N$ y $\pi_N : M \times N \longrightarrow N$ definidas por $\pi_M(x,y) = x$ y $\pi_N(x,y) = y$ son sumersiones. En efecto:

Vimos en el capítulo 1 (Proposición 1.5.9) que π_M y π_N son diferenciables. Por la fórmula que vimos en 3.2.6 para el cálculo de la diferencial, para cualquier aplicación $f : M \longrightarrow N$ el rango de f_* es igual al de $d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}$. Particularizamos esto para la aplicación π_M (e igual se hace para π_N). Sabemos que si (U, φ) es un sistema de coordenadas de M en x y (V, ψ) lo es de N en y, entonces $(U \times V, \varphi \times \psi)$ lo es de (x, y) en $M \times N$. Se tiene entonces que

$$\text{rango } \pi_{M*(x,y)} = \text{rango } d(\varphi \circ \pi_M \circ (\varphi \times \psi)^{-1})_{(\varphi(x),\psi(y))},$$

y como $\varphi \circ \pi_M \circ (\varphi \times \psi)^{-1}(\varphi(z), \psi(w)) = \varphi \circ \pi_M(z, w) = \varphi(z)$, se tiene que rango$(\pi_{M*(x,y)})$ $=$ rango$(d\varphi_x) = m$, y π_M es una sumersión.

De los cálculos anteriores resulta tambián que $\varphi \circ \pi_M \circ (\varphi \times \psi)^{-1} : \varphi(U) \times \psi(V) \longrightarrow \varphi(U)$ es la proyección sobre el primer factor, luego su diferencial (como aplicación de $I\!R^m \times I\!R^n$ sobre $I\!R^m$) es ella misma (por ser lineal) y

$$\begin{aligned}
\pi_{M*(x,y)} \frac{\partial}{\partial x^i}|_{(x,y)} &= (d\varphi_x)^{-1} \circ d(\varphi \circ \pi_M \circ (\varphi \times \psi)^{-1})_{(\varphi(x),\psi(y))} \circ d(\varphi \times \psi)_{(x,y)} \partial x^i|_{(x,y)} \\
&= (d\varphi_x)^{-1} \circ d(\varphi \circ \pi_M \circ (\varphi \times \psi)^{-1})_{(\varphi(x),\psi(y))}(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \\
&= (d\varphi_x)^{-1}(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_x,
\end{aligned}$$

donde $(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ lleva el 1 en el i-ésimo lugar, además

$$\begin{aligned}
\pi_{M*(x,y)} \frac{\partial}{\partial y^j}|_{(x,y)} &= (d\varphi_x)^{-1} \circ d(\varphi \circ \pi_M \circ (\varphi \times \psi)^{-1})_{(\varphi(x),\psi(y))}(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \\
&= (d\varphi_x)^{-1}(0, ..., 0) = 0,
\end{aligned}$$

donde, ahora, el 1 de $(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ ocupa el lugar $m + j$. Análogamente se ve que

$$\pi_{N*(x,y)} \frac{\partial}{\partial x^i}|_{(x,y)} = 0 \quad \text{y} \quad \pi_{N*(x,y)} \frac{\partial}{\partial y^j}|_{(x,y)} = \frac{\partial}{\partial y^j}|_y.$$

Por lo tanto, si definimnos la aplicación

$$\iota : T_{(x,y)}M \times N \longrightarrow T_xM \oplus T_yN \text{ tal que } \iota(X) = \pi_{M*(x,y)}X + \pi_{N*(x,y)}X,$$

ι lleva una base en otra, por lo tanto es un isomorfismo. Este isomorfismo permite decir que el espacio tangente a una variedad producto es la suma directa de los espacios tangentes a cada factor.

3.3.4.2. La proyección canónica $\pi : I\!R^{n+1*} \longrightarrow I\!RP^n$ tal que $\pi(x) = [x]$ es una sumersión. En efecto, para cada $x \in I\!R^{n+1*}$, sea (V_j, φ_j) una carta (de las definidas en la lección 1) de $I\!RP^n$ en $\pi(x)$. Como en el ejemplo anterior, tenemos que (gracias a 3.2.6), el rango de π_{*x} coincide con el de $d(\varphi_j \circ \pi) : I\!R^{n+1*} \longrightarrow I\!R^n$, pero

$$\varphi_j \circ \pi(x^1, ..., x^{n+1}) = (\frac{x^1}{x^j}, ..., \frac{x^{j-1}}{x^j}, \frac{x^{j+1}}{x^j}, ..., \frac{x^{n+1}}{x^j}),$$

y la diferencial de esta aplicación tiene por matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{x^j} & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{x^1}{(x^j)^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^j} & 0 & \dots & 0 & -\frac{x^2}{(x^j)^2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{x^j} & -\frac{x^{j-1}}{(x^j)^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{x^{j+1}}{(x^j)^2} & \frac{1}{x^j} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{x^{n+1}}{(x^j)^2} & 0 & \dots & \frac{1}{x^j} \end{pmatrix},$$

y la submatriz que se obtiene de la anterior al quitarle la j-ésima columna tiene determinante $1/(x^j)^n \neq 0$, luego π_{*x} tiene rango n.

§3.4. Las traslaciones en un grupo de Lie

3.4.1.Definición. *Sea G un grupo de Lie. Para cada $g \in G$, se definen las traslaciones a la derecha R_g y a la izquierda L_g como las aplicaciones*

$$R_g : G \longrightarrow G \textit{ tal que } R_g(h) = hg \textit{ y } L_g : G \longrightarrow G \textit{ tal que } L_g(h) = gh \textit{ para todo } h \in G.$$

Resulta de la definición de grupo de Lie y de la proposición 1.5.8 que R_g y L_g son aplicaciones C^∞, de inversas respectivas $R_{g^{-1}}$ y $L_{g^{-1}}$ y, por lo tanto, son C^∞-difeomorfismos. De estas observaciones y de la regla de la cadena 3.2.12 se deduce que R_{g*x} y L_{g*x} son isomorfismos para cada $x \in G$ (ejercicio 3.E.2).

§3.E. Ejercicios

3.E.1. En $I\!R^3$ se consideran las coordenadas polares (r, θ, z) definidas por

$$x_1 = r\cos\theta,\ x_2 = r\operatorname{sen}\theta,\ x_3 = z; \quad (r,\theta,z) \in]0,\infty[\times]0,2\pi[\times I\!R,$$

y las coordenadas esféricas (ρ, ϕ, φ) definidas por

$$x_1 = \rho\cos\varphi\cos\phi,\ x_2 = \rho\cos\varphi\operatorname{sen}\phi,\ x_3 = \rho\operatorname{sen}\varphi; \quad (\rho,\phi,\varphi) \in]0,\infty[\times]0,2\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[.$$

Definir una carta de $I\!R^3$ con cada uno de estos sistemas de coordenadas. Probar que estas cartas son compatibles con la carta identidad (i.e. definen un atlas con ella). Si (U, ζ) es la carta definida por las coordenadas polares y (V, ψ) la definida por las coordenadas esféricas, encontrar la matriz de cambio de base entre las bases canónicas (asociadas a esas cartas) del espacio tangente a $I\!R^3$ en un punto de $U \cap V$.

3.E.2. Si G es un grupo de Lie de dimensión n, calcular el rango de las diferenciales de las aplicaciones R_g y L_g definidas en 3.4.1.

3.E.3 En $S^1 \times S^1$, se considera la carta (U, φ) dada por $U = (S^1 - \{1\}) \times (S^1 - \{1\})$ y $\varphi(e^{iu}, e^{iv}) = (u, v)$, con $(u, v) \in]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$. Sea $g = (e^{i\pi}, i) \in S^1 \times S^1$. Calcular, para $w \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$L_{g*(e^{iw},i)} \frac{\partial}{\partial u}|_{(e^{iw},i)} \quad \text{y} \quad R_{g*(e^{iw},i)} \frac{\partial}{\partial u}|_{(e^{iw},i)}.$$

¿Te sugieren algún comentario los resultados?.

3.E.4. Sea $\pi : I\!R^{n+1*} \longrightarrow I\!RP^n$ la proyección canónica. Calcular

$$\pi_{*(1,0,\ldots,0)}(\sum_{i=1}^{n+1} v^i \frac{\partial}{\partial r^i}|_{(1,0,\ldots,0)}) \quad \text{y} \quad \pi_{*(v^1,\ldots,v^{n+1})}(\sum_{i=1}^{n+1} v^i \frac{\partial}{\partial r^i}|_{(v^1,\ldots,v^{n+1})}).$$

Comentar (quizás con un dibujo) los resultados.

4. TEOREMAS DE LA FUNCIÓN INVERSA Y DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

Las variedades y aplicaciones de este capítulo se considerarán todas de clase C^k.

§4.1. Teorema de la función inversa.

4.1.1. Teorema de la función inversa. *Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación entre variedades M y N y $x \in M$ tal que $f_{*x} : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N$ es un isomorfismo. Entonces existe un entorno abierto U de x en M tal que $f(U)$ es un abierto de N y $f|_U : U \longrightarrow f(U)$ es un difeomorfismo.*

Demostración. Observemos primero que, puesto que f_{*x} es un isomorfismo, se tiene que M y N tienen la misma dimensión. Sea n esta dimensión. Como f es diferenciable, existen cartas (U', φ) en x y (V, ψ) en $f(x)$ tales que $f(U') \subset V$. Como f_{*x} es un isomorfismo, $d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) = d\psi_{f(x)} \circ f_{*x} \circ (d\varphi_x)^{-1}$ es un isomorfismo de $I\!R^n$ sobre $I\!R^n$. Entonces, por el teorema de la función inversa que se vió en análisis, existe un abierto $\widetilde{U}$ de $I\!R^n$ que contiene a $\varphi(x)$ tal que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\widetilde{U})$ es un abierto de $I\!R^n$ (que contiene a $\psi(f(x))$) y $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \widetilde{U} \longrightarrow \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\widetilde{U})$ es un difeomorfismo. Entonces, si definimos $U = \varphi^{-1}(\widetilde{U})$, tenemos que $f(U) = \psi^{-1}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\widetilde{U}))$ es un abierto de N y $f : U \longrightarrow f(U)$ es un difeomorfismo. $\square$

§4.2. Consecuencias para la elección de cartas.

4.2.1. Definición. *Un conjunto de funciones $\{y^i\}$ definidas en un entorno de $x \in M$ se dice que son independientes si $\{dy^i_x\}$ es un conjunto de elementos linealmente independientes de T^*_xM.*

4.2.2. Definición. *Dada $f : M \longrightarrow N$, se define $f^*_x : T^*_{f(x)}N \longrightarrow T^*_xM$ como la aplicación dual de f_{*x} (i.e. $(f^*_x\theta)(v) = \theta(f_{*x}v)$).*

4.2.3. Lema. *Si $f : M \longrightarrow N$, para una $g : N \longrightarrow I\!R$ arbitraria se tiene que:*
a) $f^*_x(dg_{f(x)}) = d(g \circ f)_x$, y
b) $d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ f_{*x}$.

Demostración. Por definición de aplicación dual, y aplicando la regla de la cadena en variedades, se tiene que para todo $v \in T_xM$, $f^*_x(dg_{f(x)})(v) = dg_{f(x)}(f_{*x}(v)) = \Phi_{g(f(x))} \circ g_{*f(x)} \circ f_{*x}(v) = \Phi_{g(f(x))} \circ (g \circ f)_{*x}(v) = d(g \circ f)_x(v)$. $\square$

4.2.4. Corolario. *Si $f : M \longrightarrow N$, (U, φ) es una carta de M en x y (V, ψ) lo es de $f(x)$ en N, entonces*

$$f_x^*(dy^j_{f(x)}) = d(y^j \circ f)_x.$$

4.2.5. Proposición. *Sea $n = \dim M$, y sean $y^1, ..., y^n$ un conjunto de funciones independientes en $x \in M$. Entonces existe una carta de M en x cuyas funciones coordenadas son $y^1, ..., y^n$.*

Demostración. Sea $\widetilde{U}$ la intersección de los dominios de las funciones y^i, entonces $x \in \widetilde{U}$. Definimos $\widetilde{\varphi} : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por $\widetilde{\varphi}(p) = (y^1(p), ..., y^n(p))$ para todo $p \in \widetilde{U}$. Ahora bien, $\widetilde{\varphi}_x^*(dr^i_{\widetilde{\varphi}(x)}) = d(r^i \circ \widetilde{\varphi})_x = dy^i_x$, luego $\widetilde{\varphi}_x^*$ es un isomorfismo y, por tanto, su aplicación dual $\widetilde{\varphi}_{*x} : T_xM \longrightarrow T_{\widetilde{\varphi}(x)}\mathbb{R}^n$ también lo es. Aplicando a $\widetilde{\varphi}$ el teorema de la función inversa, se tiene que existe un abierto $U \subset \widetilde{U}$ tal que $\widetilde{\varphi}(U)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\varphi \equiv \widetilde{\varphi}|_U : U \longrightarrow \varphi(U)$ es un difeomorfismo, luego (U, φ) es una carta de M en x con $y^i = r^i \circ \varphi$. $\square$

4.2.6. Proposición. *Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación tal que $f_{*x} : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N$ es suprayectiva para un $x \in M$. Si $y^1, ..., y^n$ forman un sistema de coordenadas de N en un entorno de $f(x)$, entonces $y^1 \circ f, ..., y^n \circ f$ forman parte de un sistema de coordenadas de M en x.*

Demostración. Sea m la dimensión de M y n la de N. f_{*x} suprayectiva implica que f_x^* es inyectiva y, por lo tanto, $f_x^*(dy^j_{f(x)}) = d(y^j \circ f)_x$ son linealmente independientes, luego $y^j \circ f$ son independientes en x. Sea (U, φ) una carta de M en x con $x^i = r^i \circ \varphi$. Entonces $\{d(y^i \circ f)_x, dx^j_x\}$ generan T_x^*M, luego podemos extraer una base de la forma $\{d(y^1 \circ f)_x, ..., d(y^m \circ f)_x, dx^j_x\}$ con solo $m-n$ de los dx^j_x. Las correspondientes funciones $\{y^1 \circ f, ..., y^m \circ f, x^j\}$ son independientes en x y, aplicando la proposición anterior, se ve que son las funciones coordenadas de una carta. $\square$

4.2.7. Proposición. *Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación tal que $f_{*x} : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N$ es inyectiva para un $x \in M$. Si $y^1, ..., y^n$ forman un sistema de coordenadas de N en un entorno de $f(x)$, entonces existe un subconjunto de $\{y^1 \circ f, ..., y^n \circ f\}$ que forman un sistema de coordenadas de M en x.*

Demostración. Como f_{*x} es inyectiva, f_x^* es suprayectiva. Por lo tanto $\{f_x^*(dy^j_{f(x)}) = d(y^j \circ f)_x\}$ generan T_x^*M, y existe un subconjunto que es una base y las correspondientes funciones forman un sistema de coordenadas. $\square$

§4.3. Teorema de la función implícita.

4.3.1. Teorema. *Sean M y N de dimensiones m y n respectivamente, $f : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable, $y \in N$ y $P = f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Si, para todo $x \in P$, $f_{*x} : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N$ es suprayectiva, entonces P tiene una única estructura de variedad diferenciable tal que (P, i) (donde i es la inclusión canónica de P en M) es una* *subvariedad regular de M. Además,* $\dim(P) = m - n$ *y P es un subconjunto cerrado de M.*

Demostración. Sea (V, ψ) una carta de N centrada en y, y sean $y^j = r^j \circ \psi$. Como f_{*x} es suprayectiva, las funciones $x^j = y^j \circ f$ forman parte de un sistema de coordendadas de M en un entorno U de x tal que $f(U) \subset V$. Sea $\varphi = (x^1, ..., x^n, x^{n+1}, ..., x^m)$ el sistema de coordenadas completo sobre U. Como $x \in P$ sii $f(x) = y$, se tiene que $x \in P \cap U$ sii $y^j \circ f(x) = y^j(y) = 0$ para $j = 1, ..., n$ sii $x^j(x) = 0$ para $j = 1, ..., n$, luego $U \cap P = \{x \in U$ tales que $x^1(x) = ... = x^n(x) = 0\}$ y $\varphi(U \cap P) = (\{0\} \times I\!R^{m-n}) \cap \varphi(U)$, abierto de $\{0\} \times I\!R^{m-n}$. Si $\varphi' = (x^{n+1}, ..., x^m)$, se tiene que $\varphi'(U \cap P) = \pi_{I\!R^{m-n}}((\{0\} \times I\!R^{m-n}) \cap \varphi(U))$, que es un abierto de $I\!R^{m-n}$, y $\varphi' = \pi_{I\!R^{m-n}}|_{(\{0\} \times I\!R^{m-n})} \circ \varphi|_{U \cap P}$ es un homeomorfismo por ser composición de homeomorfismos. Entonces $(P \cap U; x^{m+1}, ..., x^n)$ es una carta sobre P. Se comprueba que estas cartas definidas en un entorno de cada $x \in P$ definen un atlas sobre P y, por lo tanto, una estructura diferenciable sobre P. Como las φ' son homeomorfismos con la topología inducida en P por la de M, la topología canónica de P como variedad diferenciable y la inducida coinciden, luego P es una subvariedad regular de M. Que P sea cerrado es consecuencia de que f es contínua. $\square$

4.3.2. Proposición. *El subespacio de $T_x P$ tangente a la subvariedad $P = f^{-1}(y)$ en $x \in P$ es el núcleo de f_{*x}.*

Demostración. Sea $i : P \longrightarrow M$ la inyección natural (o inclusión canónica). Entonces $f \circ i : P \longrightarrow N$ es constante, luego $f_{*x} \circ i_{*x} = 0$, luego $i_{*x}(T_x P) \subset \operatorname{Ker} f_{*x}$. Como estos dos espacios vectoriales tienen la misma dimensión, son iguales. $\square$

4.3.3. Proposición. *Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable, P una subvariedad regular de M y Q una subvariedad regular de N (ambas subconjuntos de M y N respectivamente). Se tiene que*

a) $f|_P$ es diferenciable y $(f|_P)_{*x} = f_{*x}|_{T_x P}$.

b) Si $f(M) \subset Q$, entonces $f : M \longrightarrow Q$ es diferenciable y su diferencial coincide con la de $f : M \longrightarrow N$.

c) Si $f(P) \subset Q$, entonces $f|_P : P \longrightarrow Q$ es diferenciable y $(f|_P)_{*x} = f_{*x}|_{T_x P}$.

Demostración. a) Como $f|_P = f \circ i$, $f|_P$ es diferenciable por serlo f e i, y $(f|_P)_{*x} = f_{*x} \circ i_{*x} = f_{*x}|_{T_x P}$.

b) Sea $q = \dim(Q)$. Como f es diferenciable, para todo $x \in M$, existen cartas (U, φ) en x y (V, ψ) en $f(x)$ tales que $y^j \circ f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable para todo $j = 1, ..., n$. Como Q es una subvariedad de N, se deduce de 4.2.7 que existen un subconjunto $\{y^{j_1}, ..., y^{j_q}\} \subset \{y^1, ..., y^n\}$ y un abierto $V' \subset V$ tales que $(\widetilde{V} = V' \cap Q; y^{j_1}, ..., y^{j_q})$ es una carta de Q en $f(x)$. Tomando ahora $U' \subset U$ tal que $f(U') \subset V'$ y $\varphi' = \varphi|_{U'}$, se tiene que $y^{j_k} \circ f \circ \varphi'^{-1}$ es diferenciable, luego $f : M \longrightarrow Q$ es diferenciable en x para x arbitrario, luego es diferenciable como aplicación de M en Q.

c) es consecuencia de a) y b). $\square$

4.3.4. Ejemplo.

El conjunto de los endomorfismos $\mathcal{M}(n)$ (aplicaciones lineales) de $\mathbb{R}^n$ se identifica, una vez elegida una base de $\mathbb{R}^n$ (por ejemplo, la canónica), con $\mathbb{R}^{n^2}$ (ver lección 1), y es, por tanto, una variedad diferenciable. Dado $A \in \mathcal{M}(n)$, se definen L_A y R_A por $L_A(B) = AB$ y $R_A(B) = BA$ para todo $B \in \mathcal{M}(n)$. Estas aplicaciones son lineales, por lo tanto, para todo $X \in \mathcal{M}(n)$, y todo $v \in T_X\mathcal{M}(n)$, se tiene, teniendo en cuenta que, en $(\mathbb{R}^{n^2}, \mathrm{id})$, $d\,\mathrm{id}_X = \Phi_X$ y que, como R_A es lineal, $(dR_A)_X \Phi_X v = R_A(\Phi_X v))$,

$$R_{A*X}v = (d\,\mathrm{id}_{XA})^{-1} \circ d(\mathrm{id} \circ R_A \circ \mathrm{id}^{-1})_x \circ d\,\mathrm{id}_X\, v = \Phi_{XA}^{-1}(dR_A)_X \Phi_X v = \Phi_{XA}^{-1}((\Phi_X v)A).$$

De modo análogo se obtiene

$$L_{A*X}v = \Phi_{AX}^{-1}(A(\Phi_X v)).$$

En la práctica, los isomorfismos Φ_{AX} y Φ_X no se escriben, se sobreentienden. Dado que no influyen en los cálculos, es mejor no escribirlos para no liar la notación. Así los cálculos anteriores quedarían

$$R_{A*X}v = vA \quad \text{y} \quad L_{A*X}v = Av,$$

donde el v que hay a la izquierda de las igualdades es de $T_X\mathbb{R}^{n^2}$ y el que hay a la derecha es de $\mathbb{R}^{n^2}$, y la igualdad se entiende módulo el isomorfismo (o identificación) entre $\mathbb{R}^{n^2}$ y $T_X\mathbb{R}^{n^2}$.

Consideremos ahora el grupo lineal $GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(n)$ que, según vimos en la lección 1, es un abierto (y, por lo tanto una subvariedad regular) de $\mathcal{M}(n)$. Aplicando 4.3.3c) y los cálculos anteriores, se tiene que para todo $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$ y para todo $v \in T_B GL(n, \mathbb{R})$,

$$R_{A*B}v = vA \quad \text{y} \quad L_{A*B}v = Av.$$

§4.4. Uno de los grupos clásicos.

4.4.1. Proposición. *Si G es un grupo de Lie y H es un subgrupo de G que también es una subvariedad regular de G, entonces H es un grupo de Lie.*

Demostración. Como H es una subvariedad regular de G, la inyección canónica $i : H \times H \longrightarrow G \times G$ es C^∞. Si $\alpha_G : G \times G \longrightarrow G$ está definida por $\alpha_G(x, y) = xy^{-1}$ y $\alpha_H : H \times H \longrightarrow H$ por $\alpha_H(a, b) = ab^{-1}$, entonces $\widetilde{\alpha}_H = \alpha_G \circ i : H \times H \longrightarrow G$ es C^∞. Como H es subgrupo de G, $\widetilde{\alpha}_H(H \times H) \subset H$, y, aplicando 4.3.3c), se tiene que α_H es C^∞ y, por lo tanto, H es grupo de Lie. □

4.4.2. Ejemplo.

Se define $SL(n, \mathbb{R}) = \{X \in GL(n, \mathbb{R}) \,/\, \det X = +1\}$. De las propiedades $\det(XY) = \det X \det Y$ y $\det(X^{-1}) = (\det X)^{-1}$, resulta inmediatamente que $SL(n, \mathbb{R})$ es un subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$. Vamos a ver que también es una subvariedad. Consideremos la aplicación $\det : GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada matriz le hace corresponder su determinante. Esta aplicación es C^∞ por ser un polinomio en las componentes de la matriz. Además $SL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$. Vamos a calcular el rango de $\det_{*A}$ para cualquier $A \in SL(n, \mathbb{R})$. Sea $s(t)$ la matriz que se obtiene al multiplicar la primera fila de A por $1 + t$. Entonces $t \mapsto s(t)$ es una curva C^∞ tal que $s(0) = A$, luego $s'(0) \in T_A GL(n, \mathbb{R})$, y

$$\Phi_{s(0)} \circ \det_{*A} s'(0) = (\det s(t))'(0) = ((1 + t) \det A)'(0) = \det A = 1 \neq 0.$$

Por lo tanto el rango de $\det_{*A}$ es 1, luego, por el teorema de la función implícita, $SL(n, \mathbb{R})$ es una subvariedad regular de $GL(n, \mathbb{R})$ de dimensión n^2-1. De la proposición anterior se deduce que $SL(n, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie.

§4.E. Ejercicios

4.E.1. Sea $f : M \longrightarrow N$ una sumersión. Se llama fibra sobre $y \in N$ al conjunto $f^{-1}(y)$. Demuestra, usando el teorema de la función implícita, que las fibras de una sumersión son subvariedades regulares.

4.E.2. Probar que la aplicación $\pi : TM \longrightarrow M$ definida en 2.3.5 es una sumersión. Concluir de ello y del ejercicio anterior que el espacio tangente en cada punto de una variedad M es una subvariedad regular de TM.

4.E.3. Considérese la restricción de las coordenadas esféricas definidas en 3.E.1 sobre $\mathbb{R}^3$ a la esfera S^2. Mostrar, usando 4.2.5 ó 4.2.7, que esta restricción define una carta sobre S^2 con su estructura diferenciable canónica.

4.E.4 Probar que $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 4z^2 = 1\}$ y $N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + 4z^2 = 1\}$ son subvariedades regulares de $\mathbb{R}^3$. Probar que la aplicación $f : M \longrightarrow N$ definida por

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + 8z^2}}(x, y, z)$$

es diferenciable y calcular el rango de su diferencial en los puntos de la forma $(x, y, 0)$.

5. CAMPOS VECTORIALES

§5.1. Definición y primeras propiedades.

5.1.1. Definición. *Un campo vectorial X sobre una variedad diferenciable M es una aplicación $X : M \longrightarrow TM$ que a cada $x \in M$ le asigna un vector $X_x \equiv X(x) \in T_xM$ (i.e. $\pi \circ X = \mathrm{id}$). Se dice que X es diferenciable si y solo si lo es como aplicación entre las variedades diferenciables M y TM.*

Recordemos que si M es de clase C^k, entonces TM es de clase C^{k-1} (cfr.2.3.3), por lo tanto el grado máximo de diferenciabilidad de un campo vectorial definido sobre una variedad de clase C^k es $k-1$.

Denotaremos por $\mathfrak{X}_r(M)$ la familia de los campos vectoriales sobre M de clase C^r.

5.1.2. Ejemplo. Sea (U, φ) una carta (sistema de coordenadas) de M, $x^i = r^i \circ \varphi$. Las aplicaciones

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : U \longrightarrow TU \equiv TM_U \text{ tal que } \frac{\partial}{\partial x^i}(x) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x \text{ para todo } x \in U$$

son campos vectoriales sobre el abierto U, se llaman campos vectoriales coordenados.

5.1.3. Para cada carta (U, φ) de M (de dimensión m), un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}_r(M)$ define unas funciones $X^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ por medio de la expresión

$$X(x) = \sum_{i=1}^{m} X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x, \tag{5.1.3.1}$$

que define unívocamente el valor de $X^i(x)$ para cada $x \in U$, por ser $X(x) \in T_xM$ y ser $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_x\}_{i=1}^m$ una base de T_xM.

5.1.4. Proposición. *Un campo vectorial X sobre M es de clase C^r ($r \leq k-1$) si y solo si para cada $x \in M$, existe una carta (U, φ) de M en x tal que las funciones X^i definidas sobre U por (5.1.3.1) son de clase C^r.*

Demostración. Si X es de clase C^r, para todo sistema de coordenadas (U, φ) de M se tiene que $\tau_\varphi \circ X \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \tau_\varphi(\pi^{-1}(U)) = \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$ es de clase C^r. Usando la expresión (5.1.3.1) para X, se tiene que

$$\begin{aligned} \tau_\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}(\varphi(x)) &= \tau_\varphi(X(x)) = (\varphi(x), X^1(x), ..., X^m(x)) \\ &= (\varphi(x), X^1 \circ \varphi^{-1}(\varphi(x)), ..., X^m \circ \varphi^{-1}(\varphi(x))), \end{aligned} \tag{5.1.4.1}$$

y, como $\tau_\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}$ es de clase C^r, $X^i \circ \varphi^{-1}$ también lo es, y, por lo tanto, las aplicaciones X^i son de clase C^r.

Recíprocamente. Si las aplicaciones X^i definidas sobre U son C^r, entonces también lo son $X^i \circ \varphi^{-1}$, y se deduce de la expresión (5.1.4.1) que $\tau_\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}$ es C^r y, por lo tanto, X es de clase C^r.

Denotaremos por $\mathcal{F}_r(M)$ el conjunto de las funciones $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^r.

5.1.5. Definición-Proposición. *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}_r(M)$ y $f \in \mathcal{F}_r(M)$, se definen*
$X + Y : M \longrightarrow TM$ por $(X+Y)(x) = X(x) + Y(x)$ y
$fX : M \longrightarrow M$ por $(fX)(x) = f(x)X(x)$.
Se tiene entonces que $X + Y \in \mathfrak{X}_r(M)$ y $fX \in \mathfrak{X}_r(M)$. Además, $\mathfrak{X}_r(M)$ con estas operaciones es un $\mathcal{F}_r(M)$-módulo.

Demostración. De la definición resulta evidente que $X + Y$ y fX son campos vectoriales. Para ver que son de clase C^r basta con fijarse en que, para cualquier sistema de coordenadas $(U; x^1, ..., x^n)$ de M se tiene que si $X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $Y = \sum_{i=1}^m Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ (donde X^i y Y^i son las funciones definidas por (5.1.3.1)), entonces

$$X + Y = \sum_{i=1}^m (X^i + Y^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{y} \quad fX = \sum_{i=1}^m (fX^i) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Se deja al lector comprobar que, con estas operaciones, $\mathfrak{X}_r(M)$ es un $\mathcal{F}_r(M)$-módulo.

$\mathcal{F}_l(M)$ (para $1 \leq l \leq k$) es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Vamos a definir el conjunto de las derivaciones $\mathcal{D}_r(M)$ sobre $\mathcal{F}_{r+1}(M)$ de modo análogo a como definimos las derivaciones sobre $\mathcal{F}_p$ en la lección 2.

5.1.6. Definición. *Una derivación D sobre $\mathcal{F}_{r+1}(M)$ es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $D : \mathcal{F}_{r+1}(M) \longrightarrow \mathcal{F}_r(M)$ tal que $D(fg) = (Df)g + f(Dg)$.*

5.1.7. Como en la lección 2 (vale la misma demostración) se tiene que si c es la aplicación de M en $\mathbb{R}$ que a todo punto de M le hace corresponder el número real c, entonces $Dc = 0$.

5.1.8. Dado $X \in \mathfrak{X}_r(M)$, se define una acción de X sobre $\mathcal{F}_{r+1}(M)$ por

$$(Xf)(x) = X_x f \quad \text{para toda} \quad f \in \mathcal{F}_{r+1}(M). \tag{5.1.8.1}$$

Se tiene que $Xf \in \mathcal{F}_r(M)$. En efecto: Para toda carta (U, φ) de M, si $X\Big|_U = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, entonces

$$\begin{aligned}(Xf) \circ \varphi^{-1}(\varphi(x)) = (Xf)(x) = X_x(f) &= \sum_{i=1}^m X^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \\ &= \sum_{i=1}^m X^i \circ \varphi^{-1}(\varphi(x)) \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(x)),\end{aligned}$$

que es de clase C^r al ser $f \circ \varphi^{-1}$ de clase C^{r+1}. Hemos visto, por lo tanto, que X define una aplicación $X : \mathcal{F}_{r+1}(M) \longrightarrow \mathcal{F}_r(M)$. También hemos visto, de paso, que la suma y el producto de funciones de clase C^r de M en $\mathbb{R}$ es de clase C^r.)

5.1.9. Proposición. *Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}_r(M)$ (con la acción definida por (5.1.8.1)) es una derivación sobre $\mathcal{F}_{r+1}(M)$. Si $r = k = \infty$, entonces $\mathfrak{X}_\infty(M)$ coincide con el espacio de las derivaciones $\mathcal{D}(M)$ de $\mathcal{F}_\infty(M)$.*

Demostración. La primera afirmación es consecuencia de (5.1.8.1) y del teorema 2.2.4 que establece que $T_xM \subset \mathcal{D}_x$ (pues $X(fg)(x) = X_x(fg) = (X_xf)g(x) + f(x)X_xg = (Xf)(x)g(x) + f(x)(Xg)(x) = ((Xf)g + f(Xg))(x))$. La segunda afirmación resulta como consecuencia del teorema 2.3.2 que afirmaba que, si M es C^∞, entonces $T_pM = \mathcal{D}_p$. Para ver esto último necesitaremos los siguientes lemas. Los dos primeros los daremos sin demostración.

5.1.9.1. Lema. *Si U es un abierto de M, $x \in U$ y $f : U \longrightarrow I\!R$ es de clase C^r, entonces existe una función $\widetilde{f} : M \longrightarrow I\!R$ de clase C^r y un abierto V de M tales que $x \in V \subset U$ y $\widetilde{f}\Big|_V = f\Big|_V$.*

5.1.9.2. Lema. *Dado un abierto U de M, $x \in U$, existe una función $\theta : M \longrightarrow I\!R$ de clase C^∞ que es igual a 1 sobre un entorno cerrado de x contenido en U y es igual a 0 sobre $M - U$.*

5.1.9.3. Lema. *Sean $D \in \mathcal{D}_r(M)$, $f \in \mathcal{F}_{r+1}(M)$ y $x \in M$. $(Df)(x)$ depende solo de los valores que toma f en un entorno de x, es decir, si $g \in \mathcal{F}_{r+1}(M)$ y U es un entorno abierto de x en M tal que $f\Big|_U = g\Big|_U$, entonces $(Df)(x) = (Dg)(x)$.*

Demostración del lema. Sea $\theta : M \longrightarrow I\!R$ una función como la que se define en 5.1.9.2. Se tiene que $(f-g) = (f-g)(1-\theta)$, por lo tanto, $(Df)(x) - (Dg)(x) = D(f-g)(x) = D(f-g)(x)(1-\theta)(x) + (f-g)(x)D(1-\theta)(x) = 0$, porque $\theta(x) = 1$ y $f(x) = g(x)$.

Seguimos ahora con la demostración de la proposición. Dada $D \in \mathcal{D}_\infty(M)$, para cada $x \in M$, D define un elemento $D_x \in \mathcal{D}_x$ del siguiente modo: dada $f \in \mathcal{F}_x$, el lema 5.1.9.1 nos permite definir una función $\widetilde{f} : M \longrightarrow I\!R$ de clase C^∞ que coincide con f en un entorno de x. Definimos $D_xf = (D\widetilde{f})(x)$, que, por 5.1.9.3, no depende de la función $\widetilde{f}$ elegida. Es inmediato a partir de esta definición (ejercicio) que $D \in \mathcal{D}_\infty(M)$ implica que $D_x \in \mathcal{D}_x = T_xM$. Definamos ahora $X : M \longrightarrow TM$ por $X_x = D_x$. Este campo es C^∞ porque, para todo $x \in M$, dada una carta (U, φ) de M,

$$X_x = \sum_{i=1}^m (X_x x^i) \frac{\partial}{x^i}\Big|_x = \sum_{i=1}^m (D_x x^i) \frac{\partial}{x^i}\Big|_x = \sum_{i=1}^m (D\widetilde{x^i})(x) \frac{\partial}{x^i}\Big|_x,$$

donde $\widetilde{x^i}$ son extensiones de las funciones x^i que coinciden con x^i sobre un abierto V tal que $x \in V \subset U$, luego,como $D\widetilde{x^i}$ es C^∞ sobre el abierto V, de 5.1.4 resulta que X es C^∞ sobre V y, como V y x son arbitrarios, X es C^∞. Esto acaba la demostración de la proposición.

§5.2. El corchete de Lie.

En este apartado nos restringiremos a campos vectoriales C^∞. Usaremos $\mathfrak{X}(M) \equiv \mathfrak{X}_\infty(M)$, $\mathcal{F}(M) \equiv \mathcal{F}_\infty(M)$ y $\mathcal{D}(M) \equiv \mathcal{D}_\infty(M)$.

La proposición 5.1.9 permite definir la composición de campos vectoriales como actuación sucesiva sobre funciones. Sin embargo, si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, en general, $X \circ Y \notin \mathfrak{X}(M)$. Sin embargo, se tiene:

5.2.1. Proposición-Definición. *Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M) \equiv \mathcal{D}(M)$. Se define el corchete de Lie $[X, Y]$ por*

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \quad \text{para toda} \quad f \in \mathcal{F}(M).$$

Se verifica que $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$.

Demostración. Vamos a ver que, efectivamente, $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$. Es evidente que $[X, Y]$ es $\mathbb{R}$-lineal, para ver que es derivación, calculamos

$$\begin{aligned} [X, Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) = X((Yf)g + f(Yg)) - Y((Xf)g + f(Xg)) \\ &= (XYf)g+(Yf)(Xg)+(Xf)(Yg)+f(XYg)-(YXf)g-(Xf)(Yg)-(Yf)(Xg)-f(YXg) \\ &= ([X, Y]f)g + f([X, Y]g). \end{aligned}$$

$\mathfrak{X}(M)$, con la operación suma de campos vectoriales definida en 5.1.5, y con la operación producto por un escalar definida por $(\lambda X)(x) = \lambda\, X(x)$ (que coincide con la operación producto por una función definida en 5.1.5 si esa función es constante) para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

5.2.2. Proposición. $\mathfrak{X}(M)$, *con las operaciones que acabamos de mencionar y con la operación corchete de Lie es un álgebra de Lie, es decir, la aplicación corchete de Lie $[,] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ es $\mathbb{R}$-bilineal y verifica, además, las propiedades*

$[X, Y] = -[Y, X]$ *(antisimetría)*

$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$ *(identidad de Jacobi).*

Demostración. Es inmediato que se verifica la antisimetría y que $[\,,\,]$ es $\mathbb{R}$-bilineal. Para ver que se verifica la identidad de Jacobi, basta con calcular cada sumando actuando sobre una función f arbitraria y sumar despueés.

5.2.3. Nota $[\,,\,]$ no es $\mathcal{F}(M)$-bilineal, sino que (como el lector comprobará)

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

Del teorema de Schwartz de igualdad de las derivadas cruzadas se deduce que, si $(U; x^1, ..., x^m)$ es una carta de M, entonces

$$[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0.$$

De estas dos fórmulas resulta que si, en una carta, $X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $Y = \sum_{i=1}^m Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, entonces

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^m (X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

5.2.4. Definición. *Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Se dice que X e Y están f-relacionados sii $f_* \circ X = Y \circ f$, donde $f_* \circ X(x) = f_{*x}(X_x)$.*

5.2.5. Lema. *Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable, $v \in T_xM$. Se tiene que $(f_{*x}(v))g = v(g \circ f)$ para toda $g \in \mathcal{F}(N)$.*

Demostración. Sea c una curva de M tal que $c'(0) = v$. Por definición de diferencial se tiene que

$$(f_{*x}(v))g = (f \circ c)'(0)g = (g \circ f \circ c)'(0) = c'(0)(g \circ f) = v(g \circ f).$$

5.2.6. Proposición. *Si $X, X' \in \mathfrak{X}(M)$ están f-relacionados con $Y, Y' \in \mathfrak{X}(N)$, entonces $[X, X']$ está f-relacionado con $[Y, Y']$.*

Demostración. Para ver que están f-relacionados, vamos a calcular la acción de $[Y, Y'] \circ f$ y de $f_*[X, X']$ sobre una función C^∞ arbitraria $g : N \longrightarrow I\!R$ y ver que el resultado es el mismo. Sea $x \in M$. Se tiene, aplicando el lema en la segunda igualdad, que

$$\begin{aligned} f_*[X, X'](x)(g) &= f_{*x}([X, X']_x)(g) = [X, X']_x(g \circ f) \\ &= X_x(X'(g \circ f)) - X'_x(X(g \circ f)) = X_x((f_*X')(g)) - X'_x((f_*X)(g)). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} [Y, Y'] \circ f(x)(g) &= [Y, Y']_{f(x)}(g) = Y_{f(x)}(Y'(g)) - Y'_{f(x)}(Y(g)) \\ &= (f_*X)(x)(Y'(g)) - (f_*X')(x)(Y(g)) = X_x(Y'(g) \circ f) - X'_x(Y(g) \circ f) \\ &= X_x((Y' \circ f)(g)) - X'_x((Y \circ f)(g)) = X_x((f_*X')(g)) - X'_x((f_*X)(g)). \end{aligned}$$

que son la misma expresión.

§5.E. Ejercicios.

5.E.1. Ver que los vectores tangentes de $I\!R^n$ son “flechas”. Ver que también lo son los vectores tangentes a subvariedades de $I\!R^n$. Como consecuencia, un campo vectorial sobre una subvariedad es asignar una “flecha” a cada punto de la subvariedad.

5.E.2. Sobre $S^1 \subset \mathbb{C}$ se define la función $\theta : S^1 - \{1\} \longrightarrow]0, 2\pi[$ que a cada punto le hace corresponder el ángulo que forma con el punto 1. Sea $\frac{\partial}{\partial \theta}$ el campo vectorial que a cada $x \in S^1 - \{1\}$ le hace corresponder el vector dual de $d\theta_x$. Sobre $(S^1 - \{1\}) \times (S^1 - \{1\})$ se definen los campos vectoriales $\frac{\partial}{\partial \theta_i}$, $(i = 1, 2)$ por

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}(x, y) = \frac{\partial}{\partial \theta}\Big|_x + 0 \text{ y } \frac{\partial}{\partial \theta_2}(x, y) = 0 + \frac{\partial}{\partial \theta}\Big|_y,$$

donde se ha usado la identificación canónica $T_{(x,y)}S^1 \times S^1 \equiv T_xS^1 \oplus T_yS^1$. Si se definen $\theta_i : (S^1 - \{1\}) \times (S^1 - \{1\}) \longrightarrow I\!R$ por $\theta_1(x, y) = \theta(x)$ y $\theta_2(x, y) = \theta(y)$, probar que los campos vectoriales $X = \theta_2^2 \frac{\partial}{\partial \theta_1}$ e $Y = \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_2}$ son C^∞ sobre $(S^1 - \{1\}) \times (S^1 - \{1\})$, y calcular $[X, Y]$.

6. CURVAS INTEGRALES DE CAMPOS VECTORIALES

En esta lección y en las sucesivas (y también en las anteriores, aunque no lo hayamos usado) supondremos que toda variedad diferenciable, con su topología canónica, es un espacio Hausdorff.

§6.1. Definición de curva integral y de flujo.

6.1.1.Definición. *Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, una curva integral de X es una curva diferenciable $c :]a, b[\longrightarrow M$ tal que para todo $t \in]a, b[$ verifica $c'(t) = X_{c(t)}$.*

6.1.2.Problema. *Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, para cada $x \in M$, ¿existe una curva integral de X que pasa por x?. Si existe, ¿es única?.*

Para dar solución a este problema, vamos a expresarlo en coordenadas. Sea (U, φ) una carta de M. En esta carta se puede escribir

$$X|_U = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

siendo X^i funciones diferenciables sobre U. Si $c(t)$ es una curva integral de X que pasa por un punto de U, para todo t en el abierto $c^{-1}(U)$ se puede escribir (ver lección 2):

$$c'(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{d(x^i \circ c)}{dt}(t) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{c(t)}.$$

D estas expresiones se deduce que c es una curva integral de X si y solo si para cada $t_0 \in]a, b[$ existe una carta (U, φ) de M que contiene a $c(t_0)$ tal que para todo $t \in c^{-1}(U)$ se verifica

$$\text{(6.1.2.1)} \qquad \frac{d(x^i \circ c)}{dt}(t) = X^i(c(t)) = (X^i \circ \varphi^{-1})(x^1 \circ c(t), ..., x^m \circ c(t)),$$

que es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias definidas sobre el abierto $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^m$. Por lo tanto, el problema 6.1.2 de existencia y unicidad de curvas integrales queda reducido al de existencia y unicidad del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (6.1.2.1). Aplicando los teoremas conocidos de análisis para este problema se obtiene:

6.1.3.Teorema. *Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Para cada $p \in M$, existe un entorno abierto V de p en M, un intervalo $]-\delta,\delta[$, $\delta > 0$, y una aplicación diferenciable única $\phi :]-\delta,\delta[\times V \longrightarrow M$ tales que para cada $q \in V$, la curva $c_q :]-\delta,\delta[\longrightarrow M$ definida por $c_q(t) = \phi(t,q)$ es la única curva integral de X tal que $c_q(0) = q$, es decir, ϕ verifica las ecuaciones:*

$$\text{(6.1.3.1)} \qquad \frac{\partial\phi}{\partial t}(t,q) = X_{\phi(t,q)} \quad \text{y} \quad \phi(0,q) = q.$$

Cuando decimos que ϕ es única, queremos decir que si $\phi_1 :]-\delta_1,\delta_1[\times V_1 \to M$ es otra aplicación verificando las mismas condiciones que ϕ, entonces ϕ y ϕ_1 coinciden sobre la intersección de sus dominios.

Demostración. Sea (U,φ) una carta de M en p. Aplicando los teoremas de existencia, unicidad y dependencia diferenciable de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a (6.1.2.1), se tiene que existe un abierto $W \subset \varphi(U)$ y existe un $\delta > 0$ tales que $\varphi(p) \in W$ y existe una aplicación diferenciable única $\psi :]-\delta,\delta[\times W \longrightarrow I\!R^m$ tal que

(6.1.3.2)

$$\frac{\partial\psi^i}{\partial t}(t,\varphi(q)) = (X^i \circ \varphi^{-1})(\varphi(c(t))) \quad \text{y} \quad \psi(0,\varphi(q)) = \varphi(q) \quad \text{para todo } \varphi(q) \in W.$$

Pero $\frac{\partial\psi^i}{\partial t}(t,\varphi(q))$ son las componentes, en la base $\frac{\partial}{\partial x^i}$, del vector tangente a la curva

$$\text{(6.1.3.3)} \qquad t \mapsto \varphi^{-1}(\psi(t,\varphi(q))) = \phi(t,q),$$

que verifica

$$\phi(0,q) = \varphi^{-1}(\psi(0,\varphi(q))) = \varphi^{-1}(\varphi(q)) = q,$$

y, usando la expresión de $d\varphi$ que vimos en (3.2.4.2),

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,q) &= (d\varphi)^{-1}\left(\frac{\partial\psi(t,\varphi(q))}{\partial t}\right)\\ &= (d\varphi_{\phi(t,q)})^{-1}((X^1\circ\varphi^{-1})(\varphi(\phi(t,q))),...,(X^m\circ\varphi^{-1})(\varphi(\phi(t,q)))\\ &= \sum_{i=1}^m X^i(\phi(t,q))\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\phi(t,q))} = X.\end{aligned}$$

Luego, si $V = \varphi^{-1}(W)$, la aplicación ϕ definida por (6.1.3.3) verifica las condiciones del teorema. Y es única, porque si tenemos una ϕ_1 como la que dijimos en el enunciado, podemos considerar la aplicación ψ_1 definida sobre

$$I \times W' =]-\max(\delta,\delta_1),\min(\delta,\delta_1)[\times\varphi(V\cap V_1)$$

por $\psi_1(t,\varphi(q)) = \varphi\circ\phi_1(t,q)$, que verifica

$$\psi_1(0,\varphi(q)) = \varphi\circ\phi_1(0,q) = \varphi(q) = \psi(0,\varphi(q)) \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial\psi_1^i}{\partial t}(t,\varphi(q)) = \frac{\partial(\varphi\circ\phi_1)(t,q)}{\partial t} = x^i(\phi_1(t,q)) = (X^i\circ\varphi^{-1})(\psi_1^1(t,\varphi(q)),...,\psi_1^n(t,\varphi(q))),$$

y de la unicidad de ψ del teorema correspondiente de ecuaciones diferenciales ordinarias resulta que $\psi_1^i = \psi^i$ sobre $I\times W'$, y, de ahí, resulta que $\phi_1 = \phi$ sobre la intersección de los dominios en que están definidas. $\square$

6.1.4.Observación y Definición. *Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, la aplicación $\phi :]-\delta, \delta[\times V \longrightarrow M$ definida en el teorema anterior determina, para cada $t \in]-\delta, \delta[$, una aplicación $\phi_t : V \longrightarrow M$ dada por $\phi_t(q) = \phi(t, q)$ para cada $q \in V$. Tanto ϕ como la familia de las ϕ_t se llaman grupo local uniparamétrico asociado a X o, también, flujo local de X (el nombre de flujo procede de la mecánica de fluidos, y su significado es fácil de averiguar si se considera el campo vectorial X como el campo de velocidades de un fluido).*

Con todo esto hemos visto el aspecto local de la teoría de curvas integrales de un campo vectorial. Vamos a decir ahora algunas cosas sobre el aspecto global de la teoría:

6.1.5.Teorema. *Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, para cada $x \in M$, existen $a(x), b(x) \in I\!R \cup \{\pm\infty\}$ y una $\sigma_x :]a(x), b(x)[\to M$,curva integral de X, tales que:*

(a) $0 \in]a(x), b(x)[$ y $\sigma_x(0) = x$,

(b) si $\alpha :]c, d[\to M$ es otra curva integral de X con $\alpha(0) = x$, entonces $]c, d[\subset]a(x), b(x)[$ y $\alpha(t) = \sigma_x(t)$ para todo $t \in]c, d[$.

Demostración. Sea $]a(x), b(x)[$ la unión de todos los intervalos abiertos que contienen al 0 y que son dominios de curvas integrales β de X tales que $\beta(0) = x$. Por el teorema 6.1.3, $]a(x), b(x)[\neq \emptyset$. Definamos σ_x como la curva que a cada $t \in]a(x), b(x)[$ le hace corresponder el valor en t de una de las curvas integrales de X tomadas para construir $]a(x), b(x)[$ y que están definidas en t. σ_x está bien definida, En efecto, si α y β son dos de las curvas anteriores, sea $]c, d[$ la intersección de sus intervalos de definición. Evidentemente $0, t \in]c, d[$. Sea $J = \{s \in]c, d[\,/\, \alpha(s) = \beta(s)\}$. $J \neq \emptyset$ porque $\alpha(0) = x = \beta(0)$. J es cerrado porque α y β son contínuas y M es Hausdorff. J es abierto, como resulta de aplicar la unicidad del teorema 6.1.3 a las curvas α y β en un entorno de cada punto $s_0 \in J$. Por lo tanto, $J =]c, d[$, en particular, $\alpha(t) = \beta(t)$. La propiedad (b) es consecuencia inmediata de esto. $\square$

6.1.6. Más observaciones El teorema anterior permite extender el dominio de la aplicación ϕ (flujo) definida en 6.1.4 al conjunto $W = \{(t, x) \in I\!R \times M \,/\, a(x) < t < b(x)\}$. Es consecuencia de 6.1.3 que ϕ es diferenciable sobre W.

Para cada t, la aplicación ϕ_t está definida sobre $D_t = \{x \in M \,/\, (t, x) \in W\}$ (i.e., D_t es el dominio de ϕ_t), que es un subconjunto abierto de M, como puede deducirse de nuevo de 6.1.3. Sin embargo, pueden existir t para los que $D_t = \emptyset$.

Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ se dice que es completo si $W = I\!R \times M$, o, equivalentemente, si para todo $t \in I\!R$, $D_t = M$, o, equivalentemente, si para todo $x \in M$, la curva integral de X que pasa por x está definida sobre todo $I\!R$.

Además, se verifican las siguientes propiedades (los interesados en la demostración pueden consultar el libro de Warner [Wa]):

(a) $\cup_{t>0} D_t = \cup_{t<0} D_t = M$.

(b) $\phi_t(D_t) = D_{-t}$, y $\phi_t : D_t \to D_{-t}$ es un difeomorfismo de inverso ϕ_{-t}.

(c) Si $s, t \in I\!R$, se tiene que el dominio de $\phi_s \circ \phi_t$ está contenido en D_{s+t}, y si s y t tienen el mismo signo, se tiene la igualdad. En el dominio de $\phi_s \circ \phi_t$, se tiene que $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$.

Si X es completo, el dominio de $\phi_s \circ \phi_t$ es $D_{s+t} = I\!R$. En este caso, el flujo de X se llama, con pleno sentido, grupo uniparamétrico de X.

§6.2. El corchete de Lie y el flujo

6.2.1.Teorema. *Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Sea $p \in M$ y sea ϕ_t el flujo local de X en un entorno V de p. Entonces*

$$[X, Y]_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(Y_{\phi_t(p)} - \phi_{t*p} Y_p).$$

Obsérvese que

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(Y_{\phi_t(p)}-\phi_{t*p}Y_p)=\lim_{t\to 0}\phi_{-t*p}\left\{\frac{1}{t}(Y_{\phi_t(p)}-\phi_{t*p}Y_p)\right\}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\phi_{-t*p}Y_{\phi_t(p)}-Y_p).$$

Demostración. Para hacerla usaremos el siguiente lema:

Lema. *Sea $h:]-\delta,\delta[\times V\longrightarrow I\!R$ una aplicación diferenciable tal que $h(0,q)=0$ para todo $q\in V$. Entonces existe una aplicación diferenciable $g:]-\delta,\delta[\times V\longrightarrow I\!R$ tal que $h(t,q)=tg(t,q)$; en particular, $g(0,q)=\left.\frac{\partial h(t,q)}{\partial t}\right|_{t=0}$.*

Demostración del Lema. Definamos, para cada valor de t fijo,

$$g(t,q)=\int_0^1\frac{\partial h(ts,q)}{\partial(ts)}ds.$$

Haciendo un cambio de variables $s\mapsto ts$, se tiene

$$t\,g(t,q)=\int_0^t\frac{\partial h(ts,q)}{\partial(ts)}d(ts)=h(t,q).$$

□

Vamos ahora con la demostración del teorema. Vamos a ver que la acción de los dos miembros de la igualdad que queremos demostrar sobre una función arbitraria f diferenciable en un entorno de p da el mismo valor. Para ello, definamos $h(t,q)=f(\phi_t(q))-f(q)$. Aplicando el lema, y recordando la definición de la acción de un vector sobre una función, tenemos que existe una función diferenciable $g(t,q)$ tal que

$$f\circ\phi_t(q)=f(q)+tg(t,q)\qquad \text{y } g(0,q)=\frac{\partial(f(\phi_t(q))-f(q))}{\partial t}(0)=X_qf.$$

Se tiene por lo tanto (recordando el lema 6.2.5) que

$$(\phi_{t*p}Y_p)f=Y_p(f\circ\phi_t)=Y_pf+tY_pg(t,\ ),$$

donde $g(t,\ )$ es la aplicación $q\mapsto g(t,q)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(Y_{\phi_t(p)}-\phi_{t*p}Y_p)f&=\lim_{t\to 0}\frac{Y_{\phi_t(p)}f-(Y_pf+tY_pg(t,\ ))}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{Y_{\phi_t(p)}f-Y_pf}{t}-Y_pg(0,\ )=X_p(Yf)-Y_p(Xf)=[X,Y]_pf,\end{aligned}$$

donde se ha usado, en la penúltima igualdad, que $Y_{\phi_t(p)}(f)=(Yf)(\phi_t(p))$.. □

6.E. Ejercicios

6.E.1. Sea ϕ_t el flujo local de $X \in \mathfrak{X}(M)$. Probar que $\phi_{t*} \circ X \circ \phi_{-t} = X$. (Hay que usar que $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$).

6.E.2. Calcular las curvas integrales de

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3).$$

6.E.3. Sea $\phi_t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación dada por $\phi_t(x, y) = (xe^t, ye^t)$. Entonces las ϕ_t, $t \in \mathbb{R}$, constituyen el flujo de un cierto campo vectorial X. Hallar X.

7. CAMPOS TENSORIALES

§7.1. Fibrado tensorial.

Hemos visto que en cada punto p de una variedad diferenciable M de dimensión m están definidos el espacio vectorial tangente T_pM y su dual T_p^*M. Sobre el espacio vectorial T_pM podemos considerar el espacio vectorial

$$T_p^{(r,s)}M = T_pM \otimes \overset{r}{\ldots} \otimes T_pM \otimes T_p^*M \otimes \overset{s}{\ldots} \otimes T_p^*M$$

de los tensores sobre T_pM de tipo (r,s), i.e., r veces contravariantes y s veces covariantes. Se tiene en particular que $T_p^{(1,0)}M = T_pM$, $T_p^{(0,1)}M = T_p^*M$ y $T_p^{(0,0)}M = \mathbb{R}$.

El siguiente resultado es análogo en enunciado y demostración al Teorema 2.3.3 y la definición 2.3.4 (definición de fibrado tangente y demostración de que es una variedad diferenciable).

7.1.1.Definición y Teorema. *El conjunto $T^{(r,s)}M$ unión de los espacios $T_p^{(r,s)}M$ para todo $p \in M$ se llama fibrado tensorial de tipo (r,s) de M, y es una variedad diferenciable de dimensión $n + n^{r+s}$. La aplicación proyección canónica $\pi : T^{(r,s)}M \longrightarrow M$ que a cada tensor $t \in T_p^{(r,s)}M$ le hace corresponder el punto $p \in M$ es diferenciable.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ un atlas sobre M. Se define un atlas $\widetilde{\mathcal{A}}$ sobre $T^{(r,s)}M$ de modo análogo a como se hizo en 2.3.3. Para cada $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$, se define la carta $(\pi^{-1}(U), \tau_\varphi) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ por

$$\tau_\varphi(t) = (\varphi(\pi(t)), t_{i_1\ldots i_s}^{j_1\ldots j_r}) \qquad \text{si}$$

$$t = \sum_{i_1,\ldots,i_s,j_1,\ldots,j_s=1}^{m} t_{i_1\ldots i_s}^{j_1\ldots j_r} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\Big|_p \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_r}}\Big|_p \otimes dx_p^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx_p^{i_s}.$$

La comprobación de que se trata de un atlas es igual que en 2.3.3. Se tiene en particular que $T^*M = \cup_{p\in M} T_p^*M$ es una variedad diferenciable de dimensión $2n$ y que $T^{(0,0)}M$ es una variedad de dimensión $n+1$ (en realidad, se puede demostrar -ejercicio- que $T^{(0,0)}M$ es difeomorfa a $M \times \mathbb{R}$). $\square$

7.1.2. Un subespacio especialmente interesante de $T_p^{(0,s)}M$ es el de las formas s-lineales alternadas sobre T_pM, que denotaremos por $\bigwedge_p^s M$. Como antes, este espacio da lugar a una variedad diferenciable $\bigwedge^s M = \cup_{p\in M} \bigwedge_p^s M$ de dimensión $n + \binom{n}{s}$, que se llama fibrado de las s-formas sobre M.

7.2. Definión y caracterización de campos tensoriales y formas diferenciales.

7.2.1.Definición. *Un campo tensorial diferenciable t de tipo (r,s) (o r veces contravariante y s veces covariante o (r,s)-campo tensorial) sobre M es una aplicación diferenciable $t : M \longrightarrow T^{(r,s)}M$ que a cada $p \in M$ le asigna un $t_p \equiv t(p) \in T_p^{(r,s)}M$ (i.e., t es tal que $\pi \circ t = \mathrm{id}$). Una forma diferencial ω de grado s (o s-forma diferencial) sobre M es una aplicación diferenciable $\omega : M \longrightarrow \bigwedge^s M$ que a cada $p \in M$ le asigna un $\omega_p \equiv \omega(p) \in \bigwedge_p^s M$ (i.e., ω es tal que $\pi \circ \omega = \mathrm{id}$).*

7.2.2. Un (r,s)-campo tensorial t (resp. s-forma diferencial ω) define, sobre cada abierto U de M dominio de una carta (U,φ), una familia de aplicaciones $t_{i_1\dots i_s}^{j_1\dots j_r} : U \longrightarrow I\!R$ (resp. $\omega_{i_1\dots i_s} : U \longrightarrow I\!R$) definidas por

$$t_p = \sum_{i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_s=1}^{m} t_{i_1\dots i_s}^{j_1\dots j_r}(p)\, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_r}}\Big|_p \otimes dx_p^{i_1} \otimes \dots \otimes dx_p^{i_s}.$$

y

$$\omega_p = \sum_{i_1<\dots<i_s=1}^{m} \omega_{i_1\dots i_s}(p)\, dx_p^{i_1} \wedge \dots \wedge dx_p^{i_s}.$$

respectivamente.

7.2.3.Proposición. *Un campo tensorial t, de tipo (r,s), (resp. una forma diferencial ω de grado s) sobre M es diferenciable si y solo si para cada $x \in M$, existe una carta (U,φ) de M en x tal que las funciones $t_{i_1\dots i_s}^{j_1\dots j_r}$ (resp. $\omega_{i_1\dots i_s}$) definidas sobre U en 7.2.2 son diferenciables.*

Demostración. Se hace de modo análogo a la de 6.1.4. $\square$

7.2.4. Los campos tensoriales se pueden sumar y multiplicar tensorialmente entre sí, o multiplicarlos por números reales y funciones, y se les puede aplicar los operadores de contracción. Las formas diferenciales se pueden multiplicar exteriormente entre sí para dar nuevas formas diferenciales. El resultado de una cualquiera de esas operaciones consiste en el campo tensorial o forma diferencial cuyo valor en un punto es el resultado de la correspondiente operación sobre los valores de los campos tensoriales o formas diferenciales en ese mismo punto. Por ejemplo: $(K+L)_m = K_m + L_m$, $(K \otimes L)_m = K_m \otimes L_m$, etc.

Sobre el conjunto de los campos vectoriales $\mathfrak{X}(M)$ se pueden considerar :

El conjunto $\mathfrak{X}(M)^*$ de las aplicaciones $\mathcal{F}(M)$-lineales de $\mathfrak{X}(M)$ en $\mathcal{F}(M)$.

El conjunto $\overset{(r,s)}{\bigotimes}\mathfrak{X}(M)$ de las aplicaciones $\mathcal{F}(M)$-multilineales de $\mathfrak{X}(M)^* \times \overset{r}{\dots} \times \mathfrak{X}(M)^* \times \mathfrak{X}(M) \times \overset{s}{\dots} \times \mathfrak{X}(M)$ en $\mathcal{F}(M)$. Sobre la unión de los conjuntos $\overset{(r,s)}{\bigotimes}\mathfrak{X}(M)$ para r y s variando en los enteros no negativos, se puede definir el producto por una función, la suma y el producto tensorial y los operadores contracción del mismo modo que se hace para los tensores sobre un $I\!R$-espacio vectorial, pero cambiando $I\!R$ por $\mathcal{F}(M)$.

El conjunto $\overset{s}{\bigwedge}\mathfrak{X}(M)^*$ de las aplicaciones $\mathcal{F}(M)$-multilineales alternadas de $\mathfrak{X}(M) \times \overset{s}{\dots} \times \mathfrak{X}(M)$ en $\mathcal{F}(M)$. Sobre la unión (para s variando en los enteros no negativos) de los $\overset{s}{\bigwedge}\mathfrak{X}(M)^*$ se puede definir el producto por una función, la suma y el producto exterior y la multiplicación interior del mismo modo que se hace para las formas alternadas sobre un $I\!R$-espacio vectorial, pero cambiando $I\!R$ por $\mathcal{F}(M)$.

7.2.5.Teorema. *Denotaremos por $\mathcal{T}^{(r,s)}(M)$ el conjunto de los campos tensoriales diferenciables de tipo (r,s), y por $E^s(M)$ el conjunto de las formas diferenciales de grado s sobre M.*

(a) Existe una correspondencia biunívoca entre $\mathcal{T}^{(r,s)}(M)$ y $\overset{(r,s)}{\bigotimes}\mathfrak{X}(M)$ que conserva la suma, el producto por una función, el producto tensorial y las contracciones.

(b) Existe una correspondencia biunívoca entre $E^s(M)$ y $\overset{s}{\bigwedge}\mathfrak{X}(M)^*$ que conserva la suma, el producto por una función, el producto exterior y la multiplicación interior.

Demostración. (a) Demostraremos primero que existe una tal biyección para el caso $(r,s) = (0,1)$. Definamos la aplicación $\hat{}: \mathcal{T}^{(0,1)}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^*$ tal que la imagen de $t \in \mathcal{T}^{(0,1)}(M)$ es la aplicación $\hat{t}$ que a cada campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ le hace corresponder la función $\hat{t}(X) : M \longrightarrow I\!R$ definida por $\hat{t}(X)(p) = t_p(X_p)$. Esta aplicación está bien definida (es decir, realmente $\hat{t}(X)$ es una función diferenciable y la acción de $\hat{t}$ es $\mathcal{F}(M)$-lineal), porque, en una carta arbitraria (U,φ) de M, se tiene que $t = \sum_{i=1}^m t_i dx^i$ y $X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ con t_i y X^i funciones diferenciables sobre U, luego $\hat{t}(X)|_U = \sum_{i=1}^m t_i X^i$ es diferenciable sobre U; y, además, $\hat{t}(fX+gY)(p) = t_p(f(p)X_p + g(p)Y_p) = (f\hat{t}(X) + g\hat{t}(Y))(p)$.

Vamos a ver ahora que esta aplicación $\hat{}$ tiene una inversa $\tilde{}$, lo que probará que es biyectiva. Dado un $\alpha \in \mathfrak{X}(M)^*$, definamos $\widetilde{\alpha}$ por $\widetilde{\alpha}_p(v) = \alpha(X)(p)$ para $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X_p = v$. Si $\widetilde{\alpha}$ está bien definido, está claro que $\hat{\widetilde{\alpha}} = \alpha$ y $\widetilde{\hat{t}} = t$, luego solo falta ver que $\tilde{}$ está bien definida. Veámoslo: En primer lugar, la aplicación $\widetilde{\alpha}_p$ no depende del campo vectorial X elegido. En efecto, sea Y otro campo vectorial tal que $Y_p = v$. Sea (U,φ) una carta en p, en la cual $X|_U = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ y $Y|_U = \sum_{i=1}^m Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Dado un abierto V conteniendo a p y con clausura contenida en U sabemos (cfr.6.1.9.2) que existe $\theta \in \mathcal{F}(M)$ tal que $\theta|_V = 1$ y $\theta_{M-U} = 0$. Definamos los campos vectoriales $\xi_i \in \mathfrak{X}(M)$ y las funciones $X'^i, Y'^i \in \mathcal{F}(M)$ por

$$\xi_i(x) = \begin{cases} \theta\dfrac{\partial}{\partial x^i} & \text{if } x \in U \\ 0 & \text{if } x \in M-U, \end{cases} \qquad X'^i(x) = \begin{cases} \theta X^i & \text{if } x \in U \\ 0 & \text{if } x \in M-U, \end{cases} \qquad Y'^i(x) = \begin{cases} \theta Y^i & \text{if } x \in U \\ 0 & \text{if } x \in M-U. \end{cases}$$

Resulta de estas expresiones que

$$X = \sum_{i=1}^m X'^i \xi_i + (1-\theta^2)X \quad \text{e} \quad Y = \sum_{i=1}^m Y'^i \xi_i + (1-\theta^2)Y.$$

Además, como $X(p) = Y(p) = v$, se tiene que ${X'}^i(p) = {Y'}^i(p)$ y, usando todo esto,

$$\begin{aligned}\alpha(X)(p) &= (\sum_{i=1}^m {X'}^i\alpha(\xi_i) + (1-\theta^2)\alpha(X))(p) = \sum_{i=1}^m {X'}^i(p)\alpha(\xi_i)(p) + 0\\ &= \sum_{i=1}^m {Y'}^i(p)\alpha(\xi_i)(p) + 0 = (\sum_{i=1}^m {Y'}^i\alpha(\xi_i) + (1-\theta^2)\alpha(Y))(p) = \alpha(Y)(p).\end{aligned}$$

Por otro lado, de la definición de $\widetilde{\ }$ y de que α sea $\mathcal{F}(M)$-lineal resulta que $\widetilde{\alpha}_p$ es $I\!R$-lineal. Queda por ver que $p \mapsto \widetilde{\alpha}_p$ es diferenciable. Ahora bien, sobre una carta arbitraria (U, φ) se tiene que se puede escribir $\widetilde{\alpha} = \sum_{i=1}^m \alpha_i dx^i$ y, si V es un abierto tal que $\overline{V} \subset U$, definiendo ξ_i como antes, se tiene $\alpha_i|_V = \widetilde{\alpha}(\frac{\partial}{\partial x^i})\Big|_V = \alpha(\xi_i)|_V$ que es diferenciable por ser $\alpha(\xi_i) \in \mathcal{F}(M)$.

Veamos ahora como extender esta biyección a $\mathcal{T}^{(r,s)}(M)$. La biyección que acabamos de construir permite identificar $\mathfrak{X}(M)^*$ con $\mathcal{T}^{(0,1)}(M) = E^1(M)$. Por lo tanto, dado $\alpha \in \overset{(r,s)}{\bigotimes} \mathfrak{X}(M)$, se puede considerar como una aplicación $\alpha : E^1(M) \times \overset{r}{\dots} \times E^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \overset{s}{\dots} \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$, y podemos definir $\hat{\ } : \mathcal{T}^{(r,s)}(M) \longrightarrow \overset{(r,s)}{\bigotimes} \mathfrak{X}(M)$ por

$$\hat{t}(\omega^1, ..., \omega^r, X_1, ..., X_s)(p) = t_p({\omega^1}_p, ..., {\omega^r}_p, X_{1p}, ..., X_{sp})$$

para cualesquiera $p \in M$, $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega^j \in E^1(M)$, $1 \le i \le r$, $1 \le j \le s$. La demostración de que $\hat{\ }$ es una biyección es como en el caso $(0,1)$, solo que ahora, además de definir los ξ_i extensión de los $\frac{\partial}{\partial x^i}$, hay que definir (de manera análoga) unos ζ^j extensión de los dx^j y unas extensiones ${X'}_i^j$ de las funciones X_i^j componentes de los campos vectoriales X_i y unas extensiones ${\omega'}_l^k$ de las funciones ω_l^k componentes de los $(0,1)$-campos tensoriales ω^k. Se comprueba sin dificultad que esta biyección es compatible con las operaciones indicadas.

El apartado (b) se demuestra de manera análoga. $\square$

§7.3. Transformaciones de campos tensoriales por medio de aplicaciones.

7.3.1. Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades de dimensiones m y n respectivamente. Para cada $p \in M$, sabemos de álgebra tensorial que la aplicación $f_p^* : T_{f(p)}^{(0,s)}N \longrightarrow T_p^{(0,s)}M$ (y también $f_p^* : \bigwedge_{f(p)}^s N \longrightarrow \bigwedge_p^s M$) dual de f_{*p} se define por

$$(f_p^*\alpha)(v_1, ..., v_s) = \alpha(f_{*p}v_1, ..., f_{*p}v_s).$$

Esta aplicación verifica las propiedades:

$$(g \circ f)_p^* = (g_{*f(p)} \circ f_{*p})^* = f_p^* \circ g_{f(p)}^*, \quad f_p^*(\alpha \otimes \beta) = (f_p^*\alpha) \otimes (f_p^*\beta) \text{ y } f_p^*(\omega \wedge \eta) = (f_p^*\omega) \wedge (f_p^*\eta).$$

Si f_{*p} es un isomorfismo, f_p^* es un isomorfismo.

A partir de estos resultados es inmediato que

7.3.2.Proposición-Definición. *Una función diferenciable $f : M \longrightarrow N$ define una aplicación $f^* : \mathcal{T}^{(0,s)}(N) \longrightarrow \mathcal{T}^{(0,s)}(M)$ (y también $f^* : E^s(N) \longrightarrow E^s(M)$) mediante la expresión $(f^*\alpha)_p = f_p^*\alpha_{f(p)}$. La aplicación f^* se llama (a veces) retroacción (pull-back) por f.*

Demostración. Hemos de ver, únicamente, que f^* está bien definida, para lo cual hay que ver que $\pi \circ (f^*\alpha)(p) = p$, lo que es evidente, y que para todo $\alpha \in \mathcal{T}^{(0,s)}(N)$, se tiene que $f^*\alpha : M \longrightarrow T^{(0,s)}(M)$ es diferenciable. Para ver esto último usaremos la proposición 7.2.3. Dado $x \in M$, sea $(V; y^1, ..., y^n)$ un sistema de coordenadas de N tal que $f(x) \in V$ y sea $(U; x^1, ..., x^m)$ un sistema de coordenadas de M tal que $x \in U$ y $f(U) \subset V$. Si $(f^*\alpha)_{i_1...i_s}$ son las funciones componentes de $f^*\alpha$ definidas como en7.2.2, se tiene, para todo $p \in U$,

$$(f^*\alpha)_{i_1...i_s}(p) = (f^*\alpha)(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x^{i_s}})(p) = \alpha_{f(p)}(f_{*p}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, ..., f_{*p}\frac{\partial}{\partial x^{i_s}})$$
$$= \alpha_{f(p)}(\sum_{j_1=1}^{n} \frac{\partial(y^{j_1} \circ f)}{\partial x^{i_1}}(p)\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\Big|_{f(p)}, ..., \sum_{j_s=1}^{n} \frac{\partial(y^{j_s} \circ f)}{\partial x^{i_s}}(p)\frac{\partial}{\partial y^{j_s}}\Big|_{f(p)})$$
$$= \sum_{j_1,...,j_s=1}^{n} \frac{\partial(y^{j_1} \circ f)}{\partial x^{i_1}}(p)...\frac{\partial(y^{j_s} \circ f)}{\partial x^{i_s}}(p)\alpha_{f(p)}(\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\Big|_{f(p)}, ..., \frac{\partial}{\partial y^{j_s}}\Big|_{f(p)})$$
$$= \sum_{j_1,...,j_s=1}^{n} \frac{\partial(y^{j_1} \circ f)}{\partial x^{i_1}}(p)...\frac{\partial(y^{j_s} \circ f)}{\partial x^{i_s}}(p)\alpha_{j_1...j_s}(f(p)),$$

esto es

$$(f^*\alpha)_{i_1...i_s} = \sum_{j_1,...,j_s=1}^{n} \frac{\partial(y^{j_1} \circ f)}{\partial x^{i_1}} ... \frac{\partial(y^{j_s} \circ f)}{\partial x^{i_s}} \ (\alpha_{j_1...j_s} \circ f),$$

que es una función diferenciable. $\square$

7.3.3. Si $g \in \mathcal{F}(N) = E^0(N) = \mathcal{T}^{(0,0)}(N)$, se define $f^*(g) = g \circ f$.

7.3.4. Es inmediato comprobar que f^* conserva las operaciones suma y producto tensorial de campos tensoriales y producto de un tensor por una función. Si f es un difeomorfismo, f_p^* es un isomorfismo para todo $p \in M$.

7.3.5. Si f es un difeomorfismo, se puede definir también $\widetilde{f} : \mathcal{T}^{(r,s)}(M) \longrightarrow \mathcal{T}^{(r,s)}(N)$ por

$$\widetilde{f}(t)(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s)(f(p)) = t_p(f_p^*\theta^1_{f(p)}, ..., f_p^*\theta^r_{f(p)}, f_{*p}^{-1}X_{1p}, ..., f_{*p}^{-1}X_{sp}).$$

§7.E. Ejercicios

7.E.1. Prueba que $T^{(0,0)}M$ es difeomorfa a $M \times I\!R$.

7.E.2. Completa los detalles de la demostración de 7.2.3.

7.E.3. Di que tipo de campos tensoriales (sobre una subvariedad regular de $I\!R^3$ de dimensión 2) son los objetos siguientes que se definieron en el curso de Geometría Diferencial Clásica: la primera forma fundamental, la segunda forma fundamental y el operador de forma (también llamado aplicación de Weingarten).

7.A. APENDICE: TENSORES SOBRE UN ESPACIO VECTORIAL REAL

Hacemos en este apéndice un repaso rápido de los tensores sobre un espacio vectorial, que corresponden al temario de la asignatura de Algebra Multilineal. Seguimos (muchas veces copiando textualmente) el capítulo 0 de los apuntes de Angel Montesinos Amilibia de Variedades Diferenciables.

§7.A.1. Tensores sobre un espacio vectorial.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión n. Un tensor r veces contravariante y s veces covariante, o de tipo (r,s), es una aplicación $r+s$-lineal

$$\alpha : V^* \times \overset{r}{\dots} \times V^* \times V \times \overset{s}{\dots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}.$$

El conjunto de los tensores de tipo (r,s) sobre V con las operaciones $+$ y producto por un escalar definidas por

$$(\alpha+\beta)(\omega^1,...,\omega^r,x_1,...,x_s) = \alpha(\omega^1,...,\omega^r,x_1,...,x_s) + \beta(\omega^1,...,\omega^r,x_1,...,x_s) \text{ y}$$
$$(\lambda\alpha)(\omega^1,...,\omega^r,x_1,...,x_s) = \lambda\,\alpha(\omega^1,...,\omega^r,x_1,...,x_s)$$

para cualesquiera $\omega^1,...,\omega^r \in V^*$ y cualesquiera $x_1,...,x_s \in V$, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, que se llama espacio tensorial (r,s) sobre V y lo denotaremos por $\overset{(r,s)}{\otimes} V$ ó $T^{(r,s)}V$ ó $V^{(r,s)}$.

Recordemos que existe un isomorfismo natural entre V y V^{**} dado por

$$\begin{array}{rlllll} \natural : & V \longrightarrow & V^{**} & & & \\ & x \mapsto & x^\natural : & V^* \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & \omega \mapsto & \omega(x) \end{array}$$

Identificando V y V^{**} a traves de este isomorfismo natural, resulta que $V^{(1,0)} \equiv V$. Por otro lado es claro que $V^{(0,1)} \equiv V^*$.

Convendremos en que $V^{(0,0)} = \mathbb{R}$.

Dados $\alpha \in V^{(r,s)}$ y $\beta \in V^{(t,m)}$, se define $\alpha\otimes\beta \in V^{(r+t,s+m)}$ por

$$\alpha\otimes\beta(\omega^1,...,\omega^{r+t},x_1,...,x_{s+m}) = \alpha(\omega^1,...,\omega^r,x_1,...,x_s)\beta(\omega^{r+1},...,\omega^{r+t},x_{s+1},...,x_{s+m}).$$

Resulta de esta definición que

$(\alpha_1+\alpha_2)\otimes\beta = \alpha_1\otimes\beta + \alpha_2\otimes\beta$, $\alpha\otimes(\beta_1+\beta_2) = \alpha\otimes\beta_1 + \alpha\otimes\beta_2$, $(\lambda\alpha)\otimes\beta = \alpha\otimes(\lambda\beta) = \lambda(\alpha\otimes\beta)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\alpha\otimes(\beta\otimes\gamma) = (\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma$. Estas propiedades se resumen diciendo que el producto tensorial de tensores es bilineal y asociativo.

Sin embargo, en general $\alpha\otimes\beta \neq \beta\otimes\alpha$.

Proposición. *Si V es un espacio vectorial de dimensión n, entonces $V^{(r,s)}$ es un espacio vectorial de dimension n^{r+s}. Con más precisión: Si $\{e_1, ..., e_n\}$ es una base de V y $\{\theta^1, ..., \theta^n\}$ es su base dual (por tanto, una base de V^*), entonces*

$$\{e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_r} \otimes \theta^{j_1} \otimes ... \otimes \theta^{j_s}\}_{i_1,...,i_r,j_1,...,j_s \in \{1,...,n\}} \tag{A.1}$$

es una base de $V^{(r,s)}$.

Demostración. Recordemos que si $\omega^k \in V^*$ y $x_\ell \in V$, entonces

$$\omega^k = \sum_{i=1}^n \omega_i^k \theta^i \text{ y } x_\ell = \sum_{j=1}^n x_\ell^j e_j \text{ con } \omega_i^k = \omega^k(e_i) \text{ y } x_\ell^j = \theta^j(x_\ell).$$

Entonces, para todo elemento h de $V^{(r,s)}$ y cualesquiera $\omega^1, ..., \omega^r \in V^*$ y $x_1, ..., x_s \in V$ se tiene

$$h(\omega^1, ..., \omega^r, x_1, ..., x_s) = h(\sum_{i_1=1}^n \omega_{i_1}^1 \theta^{i_1}, ..., \sum_{i_r=1}^n \omega_{i_r}^r \theta^{i_r}, \sum_{j_1=1}^n x_1^{j_1} e_{j_1}, ..., \sum_{j_s=1}^n x_s^{j_s} e_{j_s})$$

$$= \sum_{i_1=1}^n ... \sum_{i_r=1}^n \sum_{j_1=1}^n ... \sum_{j_s=1}^n \omega_{i_1}^1 ... \omega_{i_r}^r x_1^{j_1} ... x_s^{j_s} h(\theta^{i_1}, ..., \theta^{i_r}, e_{j_1}, ..., e_{j_s})$$

$$= \sum_{i_1=1}^n ... \sum_{i_r=1}^n \sum_{j_1=1}^n ... \sum_{j_s=1}^n \omega^1(e_{i_1}) ... \omega^r(e_{i_r}) \omega^{j_1}(x_1) ... \omega^{j_s}(x_s) h(\theta^{i_1}, ..., \theta^{i_r}, e_{j_1}, ..., e_{j_s})$$

$$= \sum_{i_1=1}^n ... \sum_{i_r=1}^n \sum_{j_1=1}^n ... \sum_{j_s=1}^n h(\theta^{i_1}, ..., \theta^{i_r}, e_{j_1}, ..., e_{j_s}) e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_r} \otimes \theta^{j_1} \otimes ... \theta^{j_s}(\omega^1, ..., \omega^r, x_1, ..., x_s)$$

de donde se deduce que

$$h = \sum_{i_1,...,i_r,j_1,...,j_s=1}^n h(\theta^{i_1}, ..., \theta^{i_r}, e_{j_1}, ..., e_{j_s}) e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_r} \otimes \theta^{j_1} \otimes ... \theta^{j_s}.$$

Lo que prueba que (A.1) es un sistema generador de $V^{(r,s)}$. Para probar que son l.i., obsérvese que

$$\sum_{i_1,...,i_r,j_1,...,j_s=1}^n \lambda_{j_1...j_s}^{i_1...i_r} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_r} \otimes \theta^{j_1} \otimes ... \theta^{j_s} = 0$$

implica que

$$\sum_{i_1,...,i_r,j_1,...,j_s=1}^n \lambda_{j_1...j_s}^{i_1...i_r} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_r} \otimes \theta^{j_1} \otimes ... \theta^{j_s}(\theta^{k_1}, ..., \theta^{k_r}, e_{\ell_1}, ..., e_{\ell_s}) = 0$$

de donde se deduce que $\lambda_{\ell_1...\ell_s}^{k_1...k_r} = 0$ y, por tanto, (A.1) es un conjunto l.i.. $\square$

Teorema. *Existen isomorfismos naturales entre los espacios* $V^{(r,s)}$, *el espacio* $\mathrm{Hom}(V^{(s,0)}, V^{(r,0)})$ *de las aplicaciones lineales de* $V^{(s,0)}$ *en* $V^{(r,0)}$ *y el espacio* $\mathrm{Hom}_s(V \times \overset{s}{\dots} \times V, V^{(r,0)})$ *de las aplicaciones* s*-lineales de* V *en* $V^{(r,0)}$. *En particular,* $V^{(1,1)}$ *es naturalmente isomorfo a* $\mathrm{Hom}(V, V)$.

Demostración. Por la proposición anterior, todo tensor de tipo (r, s) es combinación lineal de tensores de la forma $x_1 \otimes ... \otimes x_r \otimes \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^s$. Por lo tanto, para definir una aplicación lineal sobre un espacio de tensores, bastará definirla sobre los tensores del tipo $x_1 \otimes ... \otimes x_r \otimes \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^s$ (que se llaman descomponibles) y extenderla por linealidad a todo el espacio. De acuerdo con esta observación, para definir el isomorfismo $\widetilde{\ }$ entre $V^{(r,s)}$ y $\mathrm{Hom}(V^{(s,0)}, V^{(r,0)})$ bastará con definir, para cada $\alpha \in V^{(r,s)}$, la acción de $\widetilde{\alpha}$ sobre tensores de la forma $x_1 \otimes ... \otimes x_s$. Se define entonces $\widetilde{\ } : V^{(r,s)} \longrightarrow \mathrm{Hom}(V^{(s,0)}, V^{(r,0)})$ por

$$\begin{array}{llllll} \alpha \mapsto & \widetilde{\alpha} : & V^{(s,0)} \longrightarrow & V^{(r,0)} & & \\ & & x_1 \otimes ... \otimes x_s \mapsto & \widetilde{\alpha}(x_1 \otimes ... \otimes x_s) : & V^* \times ... \times V^* \longrightarrow & I\!R \\ & & & & (\omega^1, ..., \omega^r) \mapsto & \alpha(\omega^1, ...\omega^r, x_1, ..., x_s), \end{array}$$

que se comprueba que es un isomorfismo. Por otra parte, se define $\widehat{\ } : \mathrm{Hom}(V^{(s,0)}, V^{(r,0)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_s(V \times \overset{s}{\dots} \times V, V^{(r,0)})$ por

$$\begin{array}{llllll} \widetilde{\alpha} \mapsto & \widehat{\alpha} : & V \times \overset{s}{\dots} \times V \longrightarrow & V^{(r,0)} & & \\ & & (x_1, ..., x_s) \mapsto & \widehat{\alpha}(x_1, ..., x_s) : & V^* \times ... \times V^* \longrightarrow & I\!R \\ & & & & (\omega^1, ..., \omega^r) \mapsto & \widetilde{\alpha}(x_1 \otimes ... \otimes x_s)(\omega^1, ...\omega^r), \end{array}$$

i.e., $\widehat{\alpha}(x_1, ..., x_s) = \widetilde{\alpha}(x_1 \otimes ... \otimes x_s)$, que es también un isomorfismo. $\square$

En el caso $r = s = 1$ el isomorfismo $V^{(1,1)} \cong \mathrm{Hom}(V, V)$ se escribe

$$\alpha \mapsto \widetilde{\alpha} : x \mapsto \widetilde{\alpha}(x) \, / \, \omega(\widetilde{\alpha}(x)) = \alpha(\omega, x),$$

lo cual, usando una base $\{e_i\}$ de V y su dual $\{\theta^i\}$, da

$$\text{Si } \alpha = \sum_{i,j} \alpha^i_j e_i \otimes \theta^j, \text{ entonces } \widetilde{\alpha}(x) = \sum_{i,j} \alpha^i_j \theta^j(x) e_i.$$

Contracción tensorial. *Dados dos números enteros* a *y* b, *con* $1 \leq a \leq r$ *y* $1 \leq b \leq s$, *se define la contracción del índice contravariante* a *con el índice covariante* b *como la aplicación*

$$C^{(a,b)} : V^{(r,s)} \longrightarrow V^{(r-1,s-1)} \text{ definida por}$$

$$\begin{aligned} & C^{(a,b)}(\alpha)(\omega^1, ..., \omega^{r-1}, x_1, ..., x_{s-1}) \\ & \qquad = \sum_{i=1}^{n} \alpha(\omega^1, ..., \omega^{a-1}, \theta^i, \omega^a, ..., \omega^{r-1}, x_1, ..., x_{b-1}, e_i, x_b, ..., x_{s-1}), \end{aligned}$$

donde, como siempre, $\{e_i\}$ es una base de V y $\{\theta^i\}$ es su base dual.

Se comprueba que esta definición no depende de la base $\{e_i\}$ elegida y que $C^{(a,b)}$ es lineal.

Se deduce de la definición de $C^{(a,b)}$ que si

$$\alpha = \sum_{i_1,\dots i_r,j_1,\dots,j_s=1}^{n} \alpha^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_r}\otimes\theta^{j_1}\otimes\dots\theta^{j_s},$$

entonces

$$C^{(a,b)}(\alpha) = \sum_{i_1,\dots,i_{r-1},j_1,\dots,j_{s-1}=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha^{i_1\dots i_{a-1}ii_a\dots i_{r-1}}_{j_1\dots j_{b-1}ij_b\dots j_{s-1}} e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_{r-1}}\otimes\theta^{j_1}\otimes\dots\theta^{j_{s-1}}$$

Si $\widetilde{h}\in \operatorname{Hom}(V,V)$ y $h\in V^{(1,1)}$ es su antiimagen por el isomorfismo $\widetilde{\ }$, $C^{(1,1)}h\in V^{(0,0)}=\mathbb{R}$, y aplicando la definición anterior de $C^{(1,1)}$ y la expresión del isomorfismo $\widetilde{\ }$ dada antes para el caso $r=s=1$, se tiene

$$C^{(1,1)}h = \sum_{i=1}^{n} h(\theta^i, e_i) = \sum_{i=1}^{n}\theta^i(\widetilde{h}(e_i)) = \operatorname{tr}\widetilde{h},$$

i.e., $C^{(1,1)}$ es, en este caso, la traza del endomorfismo asociado.

§7.A.2. k-FORMAS.

Definición. *Un tensor covariante de orden k, $\alpha\in V^{(0,k)}$ se dice que es una k-forma si es antisimétrico, es decir, si*

(A.2.1) $$\alpha(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_k) = -\alpha(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_k)$$

para cualesquiera i, j entre 1 y k. Esto es equivalente a decir que

(A.2.2) $$\alpha(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(x_1,\dots,x_k)$$

para cualquier $\sigma\in\mathcal{S}_k$, el grupo de las permutaciones de k elementos, y donde $\operatorname{sgn}(\sigma)$ *se define por*

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \text{ es una permutación par,} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ es una permutación impar} \end{cases}$$

El conjunto $\bigwedge^k V^*$ de las k-formas de V es un subespacio vectorial de $V^{(0,k)}$.

Obsérvese que se deduce de la definición que $\bigwedge^0 V^* = \mathbb{R}$ y $\bigwedge^1 V^* = V^*$.

De (A.2.1) se deduce que $\alpha(x_1,\dots,x,\dots,x,\dots,x_k)=0$ si $\alpha\in\bigwedge^k V^*$.

La equivalencia entre (A.2.1) y (A.2.2) resulta de que en (A.2.1) lo que se ha hecho es una trasposición. En efecto, si se da (A.2.1) como definición, y si σ es una permutación par (resp. impar), entoncer σ se puede escribir como composición de un número par (resp. impar) de trasposiciones. Aplicando (A.2.1) a cada trasposición, tendremos que el signo habrá cambiado un número par (resp. impar) de veces, con lo cual, al final, el signo no habrá cambiado (resp. habrá cambiado) y se tendrá (A.2.2). Recíprocamente, si se toma (A.2.2) como definición, como en (A.2.1) se hace una trasposición, por tanto una permutación impar, el signo cambia, y se verifica (A.2.1).

Proposición. *(a) Si $x_1, ..., x_k$ son linealmente dependientes, entonces $\alpha(x_1, ..., x_k) = 0$ para toda k-forma α.*

(b) Si $k > n$, entonces $\bigwedge^k V = \{0\}$.

Demostración. (a) Si $x_1, ..., x_k$ son linealmente dependientes, uno de ellos x_j se puede escribir como combinación de los demás, $x_j = \sum_{i \neq j} \mu^i x_i$, y se tiene: $\alpha(x_1, ..., x_k) = \alpha(x_1, ..., x_{j-1}, \sum_{i \neq j} \mu^i x_i, , x_{j+1}, ..., x_k) = \sum_{i \neq j} \mu^i \alpha(x_1, ..., x_{j-1}, x_i, , x_{j+1}, ..., x_k) = 0$ por haber dos argumentos repetidos. El apartado (b) es consecuencia del (a), porque si $k > n$, k vectores son siempre linealmente dependientes. □

Sean k, ℓ enteros no negativos. Una *permutación de barajar de tipo* (k, ℓ) es una permutación $\sigma \in \mathcal{S}_{k+\ell}$ que verifica $\sigma(1) < \sigma(2) < ... < \sigma(k)$ y $\sigma(k+1) < \sigma(k+2) < ... < \sigma(k+\ell)$. Denotaremos por $\mathcal{S}_{(k,\ell)}$ al conjunto de las permutaciones de barajar de tipo (k, ℓ).

Definición. *Dadas $\alpha \in \bigwedge^k V^*$, $\beta \in \bigwedge^\ell V^*$, se define el producto exterior $\alpha \wedge \beta$ de α y β como la $k+\ell$-forma dada por*

$$(\alpha \wedge \beta)(x_1, ... x_{k+\ell}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{(k,\ell)}} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(k)}) \beta(x_{\sigma(k+1)}, ..., x_{\sigma(k+\ell)}), \tag{A.2.3}$$

que se demuestra (calculando) que es igual a

$$(\alpha \wedge \beta)(x_1, ... x_{k+\ell}) = \frac{1}{k! \ell!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(k)}) \beta(x_{\sigma(k+1)}, ..., x_{\sigma(k+\ell)}). \tag{A.2.4}$$

Utilizando la segunda fórmula es fácil comprobar que, efectivamente, $\alpha \wedge \beta$ es antisimétrica (lo veremos a continuación).

Vamos a demostrar la equivalencia de (A.2.3) y (A.2.4). Para cada permutación $\sigma \in \mathcal{S}_{(k,\ell)}$, la composición de σ con las permutaciones que llevan $\{\sigma(1), ..., \sigma(k)\}$ en sí mismo y $\{\sigma(k+1), ..., \sigma(k+\ell)\}$ en sí mismo están en $\mathcal{S}_{k+\ell}$, y solo la composición con la identidad está en $S_{(k,\ell)}$. Esto da, para cada $\sigma \in \mathcal{S}_{(k,\ell)}$, $k!\ell!$ permutaciones distintas en $\mathcal{S}_{k+\ell}$. El signo de cada una de estas permutaciones es el producto de la de σ por el de la permutación de $\{\sigma(1), ..., \sigma(k)\}$ por el de la de $\{\sigma(k+1), ..., \sigma(k+\ell)\}$. Al hacer el cáculo en (A.2.4) sumando los sumandos que corresponden a las $k!\ell!$ permutaciones de $\mathcal{S}_{k+\ell}$ que hay para cada $\sigma \in \mathcal{S}_{(k,\ell)}$, se observa que los signos de las permutaciones de $\{\sigma(1), ..., \sigma(k)\}$ y de $\{\sigma(k+1), ..., \sigma(k+\ell)\}$ se cancelan con los cambios de signo de las aplicaciones antisimétricas α y β, luego todos estos sumandos son iguales al sumando que corresponde a la permutación σ, luego al sumarlos y dividir por $k!\ell!$ resulta el mismo valor que el que corresponde a la permutación σ, y esto da la igualdad entre (A.2.3) y (A.2.4).

Vamos ahora a comprobar que $\alpha \wedge \beta \in \bigwedge^{k+\ell} V^*$, i.e., que $\alpha \wedge \beta$ es antisimétrica. Para ello, en los cálculos a continuación, vamos a aplicar una permutación σ a una sucesión finita de vectores $x_{\tau(1)}, ..., x_{\tau(k+\ell)}$ (con $\tau \in \mathcal{S}_{k+\ell}$) que no están ordenados con el mismo orden que sus índices. Para ver como se hace eso, hagamos el cambio de nombres: $v_1 = x_{\tau(1)}, ..., v_{k+\ell} = x_{\tau(k+\ell)}$, i.e. $v_i = x_{\tau(i)}$. Al aplicar σ a esta sucesión finita de vectores, obtenemos $v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k+\ell)}$, pero como $v_i = x_{\tau(i)}$, lo que hemos obtenido es $x_{\tau(\sigma(1))}, ..., x_{\tau(\sigma(k+\ell))}$. Teniendo en cuenta esto, utilizando la fórmula (A.2.4), si $\tau \in \mathcal{S}_{k+\ell}$, se tiene

$$\begin{aligned}
&(\alpha \wedge \beta)(x_{\tau(1)}, ..., x_{\tau(k+\ell)}) \\
&\qquad = \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(x_{\tau(\sigma(1))}, ..., x_{\tau(\sigma(k))})\beta(x_{\tau(\sigma(k+1))}, ..., x_{\tau(\sigma(k+\ell))}) \\
&\qquad = \frac{\operatorname{sgn}(\tau)}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+\ell}} \operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma)\alpha(x_{\tau(\sigma(1))}, ..., x_{\tau(\sigma(k))})\beta(x_{\tau(\sigma(k+1))}, ..., x_{\tau(\sigma(k+\ell))}) \\
&\qquad = \operatorname{sgn}(\tau)(\alpha \wedge \beta)(x_1, ..., x_{k+\ell}),
\end{aligned}$$

porque la composición $\tau \circ \sigma$ es una permutación de $\{1, ..., k+\ell\}$, y si σ recorre $\mathcal{S}_{k+\ell}$, $\tau \circ \sigma$ recorre también $\mathcal{S}_{k+\ell}$.

Proposición. *(a) El producto exterior es bilineal y asociativo.*

(b) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell}\beta \wedge \alpha$.

(c) Si ω^i *son* 1*-formas,* $(\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^k)(x_1, ..., x_k) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega^1(x_{\sigma(1)})...\omega^k(x_{\sigma(k)})$.

(d) Si $\{\theta^1, ..., \theta^n\}$ *son una base de* V^**, entonces* $\{\theta^{i_1} \wedge ... \wedge \theta^{i_k};\ 1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n\}$ *es una base de* $\bigwedge^k V^*$*. De aquí se deduce que* $\dim(\bigwedge^k V^*) = \binom{n}{k}$*. Además, si* $\{e_i\}$ *es la base dual de* $\{\theta^i\}$*, se tiene que, para todo* $\alpha \in \bigwedge^k V^*$,

$$\alpha = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n} \alpha(e_{i_1}, ..., e_{i_k})\theta^{i_1} \wedge ... \wedge \theta^{i_k}.$$

Demostración. (a) Que es bilineal es evidente a partir de su definición. Para ver que es asociativo, sean α, β y γ una k, ℓ y r-forma respectivamente. Vamos a ver que

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \beta \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma), \tag{A.2.5}$$

donde la segunda expresión se define por

$$\begin{aligned}
&\alpha \wedge \beta \wedge \gamma(x_1, ..., x_{k+\ell+r}) \\
&= \frac{1}{k!\ell!r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+\ell+r}} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(k)})\beta(x_{\sigma(k+1)}, ..., x_{\sigma(k+\ell)})\gamma(x_{\sigma(k+\ell+1)}, ..., x_{\sigma(k+\ell+r)}).
\end{aligned}$$

Para probar esto, en el cálculo que haremos a continuación tendremos en cuenta que $\mathcal{S}_{k+\ell}$ puede considerarse un subconjunto de $\mathcal{S}_{k+\ell+r}$ identificando cada $\tau \in \mathcal{S}_{k+\ell}$ con la permutación de $\mathcal{S}_{k+\ell+r}$ definida por

$$(1, ..., k+\ell+r) \mapsto (\tau(1), ..., \tau(k+\ell), k+\ell+1, ..., k+\ell+r).$$

Teniendo en cuenta esto calculamos:

$$
\begin{aligned}
&(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma(x_1,...,x_{k+\ell+r})\\
&\quad=\frac{1}{(k+\ell)!r!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{k+\ell+r}}\operatorname{sgn}(\sigma)(\alpha\wedge\beta)(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(k+\ell)})\gamma(x_{\sigma(k+\ell+1)},...,x_{\sigma(k+\ell+r)})\\
&\quad=\frac{1}{(k+\ell)!r!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{k+\ell+r}}\frac{1}{k!\ell!}\sum_{\tau\in\mathcal{S}_{k+\ell}}\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)\alpha(x_{\sigma(\tau(1))},...,x_{\sigma(\tau(k))})\\
&\qquad\qquad\beta(x_{\sigma(\tau(k+1))},...,x_{\sigma(\tau(k+\ell))})\gamma(x_{\sigma(k+\ell+1)},...,x_{\sigma(k+\ell+r)})\\
&\quad=\frac{1}{k!\ell!r!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{k+\ell+r}}\frac{1}{(k+\ell)!}\sum_{\tau\in\mathcal{S}_{k+\ell}}\operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau)\alpha(x_{\sigma(\tau(1))},...,x_{\sigma(\tau(k))})\\
&\qquad\qquad\beta(x_{\sigma(\tau(k+1))},...,x_{\sigma(\tau(k+\ell))})\gamma(x_{\sigma(\tau(k+\ell+1))},...,x_{\sigma(\tau((k+\ell+r))})\\
&\quad=\frac{1}{(k+\ell)!}\sum_{\tau\in\mathcal{S}_{k+\ell}}\frac{1}{k!\ell!r!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{k+\ell+r}}\operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau)\alpha(x_{\sigma(\tau(1))},...,x_{\sigma(\tau(k))})\\
&\qquad\qquad\beta(x_{\sigma(\tau(k+1))},...,x_{\sigma(\tau(k+\ell))})\gamma(x_{\sigma(\tau(k+\ell+1))},...,x_{\sigma(\tau((k+\ell+r))})\\
&\quad=\frac{1}{k!\ell!r!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{k+\ell+r}}\operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau)\alpha(x_{\sigma(\tau(1))},...,x_{\sigma(\tau(k))})\\
&\qquad\qquad\beta(x_{\sigma(\tau(k+1))},...,x_{\sigma(\tau(k+\ell))})\gamma(x_{\sigma(\tau(k+\ell+1))},...,x_{\sigma(\tau((k+\ell+r))})\\
&\quad=\alpha\wedge\beta\wedge\gamma(x_1,...,x_{k+\ell+r})
\end{aligned}
$$

porque todos los sumandos en τ que hay en la tercera expresión empezando por debajo son iguales y porque al variar σ en $\mathcal{S}_{k+\ell+r}$, lo mismo le ocurre a $\sigma\circ\tau$ para cada τ, y el número de elementos de $\mathcal{S}_{k+\ell}$ es $(k+\ell)!$.

La seguna igualdad de (A.2.5) se demuestra de igual manera.

(b) es consecuencia de que la permutación $(1,...,k+\ell)\mapsto(k+1,...,k+\ell,1,...,k)$ tiene paridad $k\ell$.

(c) resulta de la aplicación sucesiva de la fórmula (A.2.5)

(d) se obtiene calculando, teniendo en cuenta (c), de la siguiente manera: para $1\le j_1<...<j_k\le n$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_k\le n}\alpha(e_{i_1},...,e_{i_k})\theta^{i_1}\wedge...\wedge\theta^{i_k}(e_{j_1},...,e_{j_k})\\
&\qquad=\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_k\le n}\alpha(e_{i_1},...,e_{i_k})\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_k}\operatorname{sgn}(\sigma)\theta^{i_1}(e_{j_{\sigma(1)}})...\theta^{i_k}(e_{j_{\sigma(k)}})\\
&\qquad=\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_k\le n}\alpha(e_{i_1},...,e_{i_k})\delta^{i_1}_{j_1}...\delta^{i_k}_{j_k}=\alpha(e_{j_1},...,e_{j_k}),
\end{aligned}
$$

y (d) resulta ahora por un razonamiento análogo al que se dió cuando se demostró en el apartado 1 que $V^{(r,s)}$ tenía dimensión n^{r+s} y se determinó una base. $\square$

Producto interior. *Dado $x \in V$, se llama producto interior (o multiplicación interior, o contracción interior) con x a la aplicación*

$$\iota_x : \bigwedge^k V^* \longrightarrow \bigwedge^{k-1} V^*$$

definida por

$$\iota_x(\alpha)(x_1, ..., x_{k-1}) = \alpha(x, x_1, ..., x_{k-1}).$$

Obsérvese que $C^{(1,1)}(x \otimes \alpha)(x_1, ..., x_{k-1}) = \sum_{i=1}^n \theta^i(x)\alpha(e_i, x_1, ..., x_{k-1}) = \alpha(\sum_{i=1}^n \theta^i(x)e_i, x_1, ..., x_{k-1}) = \alpha(x, x_1, ..., x_{k-1}) = \iota_x(\alpha)(x_1, ..., x_{k-1})$, i.e.

$$\iota_x(\alpha) = C^{(1,1)}(x \otimes \alpha)$$

Proposición. *ι_x verifica las propiedades:*

(a) $\iota_x \circ \iota_x = 0$
(b) $\iota_x(\lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda\iota_x(\alpha) + \mu\iota_x(\beta)$
(c) $\iota_{\lambda x+\mu y}(\alpha) = \lambda\iota_x(\alpha) + \mu\iota_y(\alpha)$
(d) Si $\alpha \in \bigwedge^k V$ *y* $\beta \in \bigwedge^\ell V$*, entonces* $\iota_x(\alpha \wedge \beta) = (\iota_x\alpha) \wedge \beta + (-1)^k\alpha \wedge (\iota_x\beta)$

Demostración. Los apartados (a) a (c) son muy fáciles de ver. Demostraremos el (d). Supongamos primero que $k = 1$, y sean $x_2, ..., x_{\ell+1} \in V$. Poniendo $x = x_1$, tenemos

$$\begin{aligned}
\iota_x(\alpha \wedge \beta)(x_2, ..., x_{\ell+1}) &= (\alpha \wedge \beta)(x_1, x_2, ..., x_{\ell+1}) \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{(1,\ell)}} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(x_{\sigma(1)})\beta(x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(\ell+1)}) \\
&= \sum_{j=1}^{\ell+1}(-1)^{j+1}\alpha(x_j)\beta(x_1, ..., \widehat{x_j}, ..., x_{\ell+1}) \\
&= \alpha(x)\beta(x_2, ..., x_{\ell+1} + \sum_{j=2}^{\ell+1}(-1)^{j+1}\alpha(x_j)\beta(x, x_2, ..., \widehat{x_j}, ..., x_{\ell+1}) \\
&= ((\iota_x\alpha) \wedge \beta)(x_2, ..., x_{\ell+1}) - \sum_{j=2}^{\ell+1}(-1)^j\alpha(x_j)(\iota_x\beta)(x_2, ..., \widehat{x_j}, ..., x_{\ell+1}) \\
&= (\iota_x\alpha) \wedge \beta + (-1)^1\alpha \wedge (\iota_x\beta))(x_2, ..., x_{\ell+1}),
\end{aligned}$$

y así queda probado para $k = 1$. Suponiendo válida la fórmula para todo $\alpha \in \bigwedge^k V^*$, sea $\gamma \in \bigwedge^1 V^*$. Entonces

$$\iota_x((\gamma \wedge \alpha) \wedge \beta) = \iota_x(\gamma \wedge (\alpha \wedge \beta)) = \iota_x(\gamma) \wedge (\alpha \wedge \beta) - \gamma \wedge \iota_x(\alpha \wedge \beta)$$
$$= (\iota_x(\gamma)\wedge\alpha)\wedge\beta-\gamma\wedge(\iota_x\alpha)\wedge\beta+(-1)^{k+1}\gamma\wedge\alpha)\wedge(\iota_x\beta) = (\iota_x(\gamma\wedge\alpha))\wedge\beta+(-1)^{k+1}(\gamma\wedge\alpha)\wedge(\iota_x\beta).$$

Como todo elemento de $\bigwedge^{k+1} V^*$ es una combinación lineal de elementos de la forma $\gamma \wedge \alpha$, con $\gamma \in \bigwedge^1 V^*$ y $\alpha \in \bigwedge^k V^*$ y ι_x es lineal (propìedad (b)), el resultado es cierto para formas de grado $k + 1$, lo que, por inducción, acaba la demostración. $\square$

§7.A.3. Transformación de tensores por medio de aplicaciones linelaes.

Definición. *Dada una aplicación lineal $f : U \longrightarrow V$ entre dos espacios vectoriales reales de dimensión finita, se define (como generalización de la aplicación lineal o traspuesta de f) la aplicación*

$$f^* : V^{(0,s)} \longrightarrow U^{(0,s)} \quad por \quad f^*\alpha(x_1, ..., x_s) = \alpha(f(x_1), ..., f(x_s)),$$

y, por la misma expresión se define $f^* : \bigwedge^s V^* \longrightarrow \bigwedge^s U^*$. Se comprueba inmediatamente que f^* es lineal.

Proposición. *Se verifica que*

(a) Si $g : V \longrightarrow W$ es otra aplicación lineal, entonces $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

(b) Si α y β son tensores covariantes y ω y η son formas sobre el espacio vectorial V y $f : U \longrightarrow V$, entonces

$$f^*(\alpha \otimes \beta) = (f^*\alpha) \otimes (f^*\beta) \quad y \quad f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta).$$

(c) Si f es un isomorfismo, entonces f^* es un isomorfismo.

Demostración. (a) es consecuencia inmediata de aplicar la definición de f^* y de g^*. (b) lo demostraremos solo para formas, pues para tensores la demostración es igual pero más sencilla. Si ω es de grado r, η es de grado s y $x_1, ..., x_{r+s} \in U$, calculamos:

$$\begin{aligned} f^*(\omega \wedge \eta)(x_1, ..., x_{r+s}) &= \omega \wedge \eta(f(x_1), ..., f(x_{r+s})) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{(r,s)}} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega(f(x_{\sigma(1)}), ..., f(x_{\sigma(r)}))\eta(f(x_{\sigma(r+1)}), ..., f(x_{\sigma(r+s)})) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{(r,s)}} \operatorname{sgn}(\sigma)(f^*\omega)(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(r)})(f^*\eta)(x_{\sigma(r+1)}, ..., x_{\sigma(r+s)}) \\ &= (f^*\omega) \wedge (f^*\eta)(x_1, ..., x_{r+s}). \end{aligned}$$

Para probar (c) basta con observar que si f es un isomorfismo, entonces f^* tiene una inversa lineal $\widetilde{f}$ definida por

$$\widetilde{f}\gamma(y_1, ..., y_r) = \gamma(f^{-1}(y_1), ..., f^{-1}(y_r))$$

para cualesquiera $y_1, ..., y_r \in V$ y $\gamma \in U^{(o,r)}$. $\square$

8. DERIVADA DE LIE Y DIFERENCIAL EXTERIOR

§8.1. Derivaciones y antiderivaciones.

Dada una variedad diferenciable M, sobre $\mathcal{F}(M)$ sabemos hacer dos operaciones importantes que nos indican el comportamiento local de las funciones : la derivada direccional en la dirección de un vector (i.e. la acción de un vector o de campo vectorial X sobre una función f, Xf) y la diferencial de una función df. El propósito de esta lección es extender estas operaciones a campos tensoriales cualesquiera. La forma de extenderlas no es única y aquí vamos a ver solo dos de estas extensiones: (1) la derivada de Lie, que extiende a un campo tensorial cualquiera el concepto de derivada direccional, (2) la diferencial exterior, que extiene a las formas diferenciales el concepto de diferencial.

En este apartado vamos a ver algunas propiedades generales que se verifican para todas las extensiones del concepto de derivada direccional (las derivaciones) y para algunas de las extensiones del concepto de diferencial a las formas diferenciales (las antiderivaciones).

8.1.1. Definición. *Una derivación L de grado (a, b) (resp. de grado a) sobre el espacio $\mathcal{T}(M)$ de los campos tensoriales sobre M (resp. sobre el espacio $E(M)$ de las formas diferenciales sobre M) es una aplicación $L : \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathcal{T}(M)$ (resp. $L : E(M) \longrightarrow E(M)$) que verifica las propiedades:*

(1) $L(\lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda\, L(\alpha) + \mu\, L(\beta)$.

(2) Si $\alpha \in \mathcal{T}^{(r,s)}(M)$ (resp. $\alpha \in E^k(M)$), entonces $L(\alpha) \in \mathcal{T}^{(r+a,s+b)}(M)$ (resp. $L(\alpha) \in E^{k+a}(M)$).

(3) $L(\alpha \otimes \beta) = L(\alpha) \otimes \beta + \alpha \otimes L(\beta)$ (resp. $L(\alpha \wedge \beta) = L(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge L(\beta)$).

8.1.2. Definición. *Una antiderivación A de grado a sobre el espacio $E(M)$ de las formas diferenciales sobre M es una aplicación $A : E(M) \longrightarrow E(M)$ que verifica las propiedades:*

(1) $A(\lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda\, A(\alpha) + \mu\, A(\beta)$.

(2) Si $\alpha \in E^k(M)$, entonces $A(\alpha) \in E^{k+a}(M)$.

(3) Si $\alpha \in E^k(M)$, entonces $A(\alpha \wedge \beta) = A(\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge A(\beta)$).

8.1.3. Proposición. *Si A es una antiderivación y $\alpha^1, ..., \alpha^r \in E(M)$, entonces*

$$A(\alpha^1 \wedge ... \wedge \alpha^r) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1} \alpha^1 \wedge ... \wedge A(\alpha^i) \wedge ... \wedge \alpha^r.$$

Demostración. La haremos por inducción. Para $r = 2$, tenemos, por la propiedad (3) de la definición de antiderivación, $A(\alpha^1 \wedge \alpha^2) = A(\alpha^1) \wedge \alpha^2 - \alpha^1 \wedge A(\alpha^2)$. Supongamos ahora que la fórmula del enunciado se cumple para $r-1$, i.e., que se cumple

$$A(\alpha^1 \wedge ... \wedge \alpha^{r-1}) = \sum_{i=1}^{r-1}(-1)^{i-1}\alpha^1 \wedge ... \wedge A(\alpha^i) \wedge ... \wedge \alpha^{r-1},$$

entonces, aplicando de nuevo la propiedad 8.1.2.(3), se cumple:

$$\begin{aligned} A(\alpha^1 \wedge ... \wedge \alpha^r) &= A(\alpha^1 \wedge ... \wedge \alpha^{r-1}) + (-1)^{r-1}\alpha^1 \wedge ... \wedge \alpha^{r-1} \wedge A(\alpha^r) \\ &= \sum_{i=1}^{r-1}(-1)^i\alpha^1 \wedge ... \wedge A(\alpha^i) \wedge ... \wedge \alpha^{r-1} \wedge \alpha^r + (-1)^{r-1}\alpha^1 \wedge ... \wedge \alpha^{r-1} \wedge A(\alpha^r) \\ &= \sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}\alpha^1 \wedge ... \wedge A(\alpha^i) \wedge ... \wedge \alpha^r, \end{aligned}$$

lo que acaba la demostración por inducción. □

8.1.4. Lema. *Sea L (resp. A) una derivación (resp. antiderivación) sobre $\mathcal{T}(M)$ ó $E(M)$ (resp. $E(M)$). Entonces, para todo $p \in M$ y para todo α de $\mathcal{T}(M)$ ó ($E(M)$ (resp. $E(M)$) se tiene que $L(\alpha)(p)$ (resp. $A(\alpha)(p)$) depende solo de los valores de α en un entorno de p.*

Demostración. La haremos para derivaciones sobre $\mathcal{T}(M)$ y la demostración para los demás casos es exactamente igual, cambiando solo las palabras campo tensorial por forma diferencial, derivación por antiderivación y $\otimes$ por $\wedge$ cuando sea necesario. Sean α y β campos tensoriales sobre M que coinciden en un abierto U de M que contiene a p. Sea θ una función meseta asociada a U como en el lema 5.1.9.2. Entonces $\alpha - \beta = (1-\theta)(\alpha-\beta)$ y, como $1-\theta$ es un campo tensorial de tipo $(0,0)$ y $(1-\theta)(\alpha-\beta) = (1-\theta)\otimes(\alpha-\beta)$, se tiene que $L(\alpha-\beta)(p) = L(1-\theta)(p)(\alpha-\beta)(p)+(1-\theta)(p)L(\alpha-\beta)(p) = 0$, i.e. $L(\alpha)(p) = L(\beta)(p)$. □

8.1.5.Proposición. *Sea $d\mathcal{F}(M) = \{df \,/\, f \in \mathcal{F}(M)\} \subset E^1(M) = \mathcal{T}^{(0,1)}(M)$. En $\mathcal{T}(M)$ dos derivaciones son iguales si coinciden sobre $\mathcal{F}(M)$, $d\mathcal{F}(M)$ y $\mathfrak{X}(M)$. En $E(M)$ dos antiderivaciones son iguales si coinciden sobre $\mathcal{F}(M)$ y $d\mathcal{F}(M)$.*

Demostración. De nuevo la demostración la haremos para derivaciones sobre $\mathcal{T}(M)$, y para el otro caso se hace igual. Dado $p \in M$, sea (U,φ) una carta de M en p. Si $\alpha \in \mathcal{T}^{(r,s)}(M)$, la restricción $\alpha|_U$ de α a U se puede expresar como

$$\alpha|_U = \sum_{i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_s=1}^{n} \alpha^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_s}.$$

Igual que hicimos en la demostración 7.2.5, extendemos las funciones $\alpha^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$, x^j, y los campos vectoriales $\frac{\partial}{\partial x^i}$ a funciones $\widetilde{\alpha}^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$, $\widetilde{x}^j$, y campos vectoriales ξ_i definidos sobre todo M por

$$\xi_i(x) = \begin{cases} \theta\dfrac{\partial}{\partial x^i} & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{si } x \in M-U, \end{cases} \qquad \widetilde{x}^j(x) = \begin{cases} \theta\, x^j & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{si } x \in M-U, \end{cases} \qquad \widetilde{\alpha}^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(x) = \begin{cases} \theta\, \alpha^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{si } x \in M-U, \end{cases}$$

lo que da una extensión de $\alpha|_U$ a un campo tensorial $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{T}^{(r,s)}(M)$ y otra de dx^j a una 1-forma $d\widetilde{x}^j \in \mathcal{T}^{(0,1)}(M)$ que verifican

$$\widetilde{\alpha}(x) = \begin{cases} \theta\alpha & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{si } x \in M - U, \end{cases} \qquad d\widetilde{x}^j(x) = \begin{cases} \theta\, dx^j + x^j d\theta & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{si } x \in M - U. \end{cases}$$

Todas estas extensiones coinciden, sobre un abierto V contenido en U y conteniendo a p, con las funciones o campos tensoriales extendidos. Si L es una derivación, por el lema 8.1.3, $L(\alpha)(p) = L(\widetilde{\alpha})(p)$ y, por la definición de derivación,

(8.1.5.1)

$$\begin{aligned} L(\widetilde{\alpha})(p) = & \sum_{i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_s=1}^{n} L(\widetilde{\alpha}^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s})(p)\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}|_p \otimes dx^{j_1}_p \otimes \dots \otimes dx^{j_s}_p \\ + & \sum_{i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_s=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} \alpha^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(p)\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}|_p \otimes \dots \otimes L(\xi_{i_k})(p) \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}|_p \otimes dx^{j_1}_p \otimes \dots \otimes dx^{j_s}_p \\ + & \sum_{i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_s=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{r} \alpha^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(p)\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}|_p \otimes dx^{j_1}_p \otimes \dots \otimes L(d\widetilde{x}^{j_\ell})(p) \otimes \dots \otimes dx^{j_s}_p. \end{aligned}$$

En esta expresión se ve que $L(\alpha)(p)$ está determinada por los valores $L(\widetilde{\alpha}^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s})(p)$, $L(\xi_{i_k})(p)$ y $L(d\widetilde{x}^{j_\ell})(p)$, que, a su vez, por el lema 8.1.3, no dependen de las extensiones que se han tomado. Por lo tanto, $L(\alpha)$ está determinada por la acción de L sobre campos vectoriales, funciones reales y diferenciales de funciones reales. Además, (8.1.5.1) da el modo en que $L(\alpha)$ está determinada por estas acciones. $\square$

§8.2. Derivada de Lie.

8.2.1. Definición. *Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, la derivada de Lie $\mathcal{L}_X$ es la única derivación sobre $\mathcal{T}(M)$ que verifica*

$$\mathcal{L}_X f = X(f), \quad \mathcal{L}_X Y = [X, Y] \quad y \quad \mathcal{L}_X(df)(Y) = d(\mathcal{L}_X f) := d(Xf).$$

De esta definición se deduce inmediatamente que $\mathcal{L}_X$ es una derivación de grado 0.

8.2.2 Proposición. *(a) Si $\alpha \in \mathcal{T}^{(r,s)}(M)$, en una carta (U, φ), se tiene*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\alpha) = \sum_{i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_s=1}^{n} \Big\{ & X(\alpha^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s})\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \\ & + \sum_{k=1}^{r} \alpha^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes [X, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}] \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \\ & + \sum_{\ell=1}^{r} \alpha^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes d(X(x^{j_\ell})) \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \Big\}. \end{aligned}$$

(b) Si $\omega \in E^s(M)$, en una carta (U,φ), se tiene

$$\mathcal{L}_X(\omega) = \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{n} \left\{ X(\omega_{j_1\dots j_s})dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_s} + \sum_{\ell=1}^{s} \omega_{j_1\dots j_s}dx^{j_1}\wedge\dots\wedge d(X(x^{j_\ell}))\wedge\dots\wedge dx^{j_s} \right\}.$$

(c) Si $\omega \in E^1(M)$, $\mathcal{L}_X(\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X,Y])$,
(d) $\mathcal{L}_{\lambda X+\mu Y} = \lambda\mathcal{L}_X + \mu\mathcal{L}_Y$ para cualesquiera números reales λ y μ.
(e) La derivada de Lie conmuta con la contracción, i.e. $\mathcal{L}_X(C^{(a,b)}(\alpha)) = C^{(a,b)}(\mathcal{L}_X(\alpha))$.
(f) Si $\alpha \in \mathcal{T}^{(r,s)}(M)$, $\omega^i \in E^1(M)$ y $X_j \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(\alpha)(\omega^1,\dots,\omega^r,X_1,\dots,X_s) =& X(\alpha(\omega^1,\dots,\omega^r,X_1,\dots,X_s)) \\ &-\sum_{i=1}^{r}\alpha(\omega^1,\dots,\mathcal{L}_X\omega^i,\dots,\omega^r,X_1,\dots,X_s) \\ &-\sum_{j=1}^{s}\alpha(\omega^1,\dots,\omega^r,X_1,\dots,[X,X_j],\dots,X_s).\end{aligned}$$

(g) Si $\omega \in E^s(M)$ y $X_j \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\mathcal{L}_X(\omega)(X_1,\dots,X_s) = X(\alpha(X_1,\dots,X_s)) - \sum_{j=1}^{s}\alpha(X_1,\dots,[X,X_j],\dots,X_s).$$

Obsérvese que esta expresión coincide con la que se obtendría al calcular $\mathcal{L}_X(\omega)$ considerando $\omega \in \mathcal{T}^{(0,s)}(M)$

Demostración. (a) y (b) son consecuencia de la definición de derivación y de la acción de $\mathcal{L}_X$ sobre funciones, campos vectoriales y diferenciales de funciones.

(c) se obtiene aplicando (a) o (b) para calcular $\mathcal{L}_X(\omega)(Y)$ en una carta (U,φ) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(\omega)(Y) &= \sum_{i=1}^{n}\left\{X(\omega^i)dx^i(Y) + \omega^i d(X(x^i))(Y)\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left\{X(\omega^i Y^i) - \omega^i X(Y^i) + \omega^i Y(X^i)\right\} \\ &= X(\sum_{i=1}^{n}\omega^i Y^i) - \sum_{i=1}^{n}\left\{\omega^i\{X(Y^i) - Y(X^i)\}\right\} = X\omega(Y) - \omega([X,Y],\end{aligned}$$

donde hemos usado que: $dx^i(Y) = Y^i$, $X(x^i)$, $\omega^i Y^i = \omega(Y)$, y $X(Y^i) - Y(X^i) = [X,Y]^i$ (para esta última igualdad, cfr. Nota 5.2.3).

(d) es consecuencia de que esta propiedad es cierta para la acción de $\mathcal{L}_X$ sobre $\mathcal{F}(M)$, $d\mathcal{F}(M)$ y $\mathfrak{X}(M)$ y de las fórmulas (a) y (b).

(e) Como $C^{(a,b)}$ es una aplicación $I\!R$-lineal, resulta de (d) que para probar (e) es suficiente hacerlo para el caso $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Para este caso, usando la expresión (a) y teniendo en cuenta que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right] = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(dx^{j_\ell}) = d\left(\frac{\partial}{\partial x^i} x^{j_\ell}\right) = d(\delta_i^{j_\ell}) = 0,$$

resulta que

$$C^{(a,b)}(\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\alpha)) = \sum_{i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_s=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(\alpha^{i_1\dots i_{a-1}k i_{a+1}\dots i_r}_{j_1\dots j_{b-1}k j_{b+1}\dots j_s}) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}} \otimes$$
$$\dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes \widehat{dx^{j_b}} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$$

y el cálculo de $\mathcal{L}_X(C^{(a,b)}(\alpha))$ da exactamente la misma expresión, lo que acaba la demostración de (e) para campos tensoriales.

(f) Para demostrar esta fórmula, observamos primero que

$$\alpha(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) = C^{(1,1)} \circ \overset{r+s}{\smile} \circ\, C^{(1,1)}(X_1 \otimes \dots \otimes X_s \otimes \alpha \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^r).$$

Entonces, usando el apartado (e) y la definición de derivación, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_X(\alpha)(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) \\
&\quad = C^{(1,1)} \circ \overset{r+s}{\smile} \circ\, C^{(1,1)} \Bigg(\sum_{k=1}^{r} \omega^1 \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_X(\omega^k) \otimes \dots \omega^r \otimes \alpha \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_s \\
&\qquad\qquad + \omega^1 \otimes \dots \omega^r \otimes \mathcal{L}_X(\alpha) \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_s \\
&\qquad\qquad + \sum_{\ell=1}^{s} \omega^1 \otimes \dots \omega^r \otimes \alpha \otimes X_1 \otimes \dots \otimes [X, X_\ell] \otimes \dots \otimes X_s \Bigg) \\
&\quad = \sum_{k=1}^{r} \alpha(\omega^1, \dots, \mathcal{L}_X(\omega^k), \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) + \mathcal{L}_X(\alpha)(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) \\
&\qquad\qquad + \sum_{\ell=1}^{s} \alpha(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, [X, X_\ell], \dots, X_s),
\end{aligned}$$

de donde se deduce la fórmula (f).

(g) Para demostrar esta fórmula, observemos, en primer lugar, que si $\omega \in E^s(M)$, entonces el tensor definido por la fórmula (g) también está en $E^s(M)$. Dados i, j, con

$1 \leq i < j \leq s$, la fórmula (g) y la antisimetría de ω dan:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_X(\omega)(X_1, ..., X_i, ..., X_j, ..., X_s) \\
&\quad = X(\omega(X_1, ..., X_i, ..., X_j, ..., X_s) - \sum_{k \notin \{i,j\}} \omega(X_1, ..., [X, X_k], ..., X_i, ..., X_j, ..., X_s) \\
&\qquad - \omega(X_1, ..., [X, X_i], ..., X_j, ..., X_s) - \omega(X_1, ..., X_i, ..., [X, X_j], ..., X_s) \\
&\quad = -X(\omega(X_1, ..., X_j, ..., X_i, ..., X_s) + \sum_{k \notin \{i,j\}} \omega(X_1, ..., [X, X_k], ..., X_j, ..., X_i, ..., X_s) \\
&\qquad + \omega(X_1, ..., [X, X_j], ..., X_i, ..., X_s) + \omega(X_1, ..., X_j, ..., [X, X_i], ..., X_s) \\
&\quad = -\mathcal{L}_X(\omega)(X_1, ..., X_j, ..., X_i, ..., X_s),
\end{aligned}$$

i.e., $L_X(\omega)$ es antisimétrica y está en $E^s(M)$. Por otro lado, es evidente que, con esta expresión, las acciones de $\mathcal{L}_X$ sobre $\mathcal{F}(M)$ y sobre $d\mathcal{F}(M)$ son las que se dieron en la definición de $\mathcal{L}_X$.

Para acabar la comprobación de la fórmula (g) solo falta ver que, con esta expresión, $\mathcal{L}_X$ es una derivación (de grado 0) sobre $E(M)$. Para verlo, sean $\omega \in E^r(M)$, $\beta \in E^s(M)$, y usemos la notación $X_{ki} = X_i$ si $i \neq k$ y $X_{kk} = [X, X_k]$, se tiene:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_X(\omega \wedge \beta)(X_1, ..., X_{r+s}) = X((\omega \wedge \beta)(X_1, ..., X_{r+s}) - \sum_{k=1}^{r+s} (\omega \wedge \beta)(X_1, ..., [X, X_k], ..., X_{r+s}) \\
&\quad = X\left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{r+s}} \frac{1}{r!s!} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(r)}) \beta(X_{\sigma(r+1)}, ..., X_{\sigma(r+s)}) \right) \\
&\qquad - \sum_{k=1}^{r+s} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{r+s}} \frac{1}{r!s!} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega(X_{k\sigma(1)}, ..., X_{k\sigma(r)}) \beta(X_{k\sigma(r+1)}, ..., X_{k\sigma(r+s)}) \\
&\quad = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{r+s}} \frac{1}{r!s!} \operatorname{sgn}(\sigma) \left\{ X(\omega(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(r)})) \beta(X_{\sigma(r+1)}, ..., X_{\sigma(r+s)}) \right. \\
&\qquad\qquad + \omega(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(r)}) X(\beta(X_{\sigma(r+1)}, ..., X_{\sigma(r+s)})) \\
&\qquad\qquad \left. - \sum_{k=1}^{r+s} \omega(X_{k\sigma(1)}, ..., X_{k\sigma(r)}) \beta(X_{k\sigma(r+1)}, ..., X_{k\sigma(r+s)}) \right\} \\
&\quad = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{r+s}} \frac{1}{r!s!} \operatorname{sgn}(\sigma) \left\{ X(\omega(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(r)})) \beta(X_{\sigma(r+1)}, ..., X_{\sigma(r+s)}) \right. \\
&\qquad\qquad - \sum_{k \in \{\sigma(1), ..., \sigma(r)\}} \omega(X_{k\sigma(1)}, ..., X_{k\sigma(r)}) \beta(X_{k\sigma(r+1)}, ..., X_{k\sigma(r+s)}) \\
&\qquad\qquad + \omega(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(r)}) X(\beta(X_{\sigma(r+1)}, ..., X_{\sigma(r+s)})) \\
&\qquad\qquad \left. - \sum_{k \in \{\sigma(r+1), ..., \sigma(r+s)\}} \omega(X_{k\sigma(1)}, ..., X_{k\sigma(r)}) (\beta(X_{k\sigma(r+1)}, ..., X_{k\sigma(r+s)}) \right\}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{r+s}} \frac{1}{r!s!}\operatorname{sgn}(\sigma)\left\{\mathcal{L}_X(\omega)(X_{\sigma(1)},...,X_{\sigma(r)})\beta(X_{\sigma(r+1)},...,X_{\sigma(r+s)})\right.$$

$$\left. + \,\omega(X_{\sigma(1)},...,X_{\sigma(r)})\mathcal{L}_X(\beta)(X_{\sigma(r+1)},...,X_{\sigma(r+s)})\right\}$$

$$= (\mathcal{L}_X(\omega)\wedge\beta)(X_1,...,X_{r+s}) + (\omega\wedge\mathcal{L}_X(\beta))(X_1,...,X_{r+s}).$$

□

8.2.3.Apéndice. *Dado un campo vectorial X, sea ϕ_t su grupo local 1-paramétrico. Como vimos en 7.3.5, y como ϕ_t es localmente un difeomorfismo (cfr.6.1.6), para todo $p\in M$, existe un abierto U de M conteniendo a p tal que para t suficientemente pequeño, está definida $\widetilde{\phi}_t : \mathcal{T}^{(r,s)}(U)\longrightarrow\mathcal{T}^{(r,s)}(U)$, y se puede demostrar que, para todo $\alpha\in\mathcal{T}^{(r,s)}(M)$ ó $E^r(M)$, es cierta la siguiente fórmula, análoga a la del Teorema 6.2.1:*

$$\mathcal{L}_X(\alpha) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{\alpha - \widetilde{\phi}_t\alpha_{\phi_t}\}.$$

§8.3. Diferencial exterior.

8.3.1.Proposición-Definición. *Sobre $E(M)$, existe una única antiderivación de grado 1 que sobre $\mathcal{F}(M)$ coincide con la diferencial ordinaria y sobre $d\mathcal{F}(M)$ vale 0. Esta antiderivación se llama diferencial exterior.*

Demostración. La unicidad es consecuencia de ser una antiderivación cuyos valores sobre $\mathcal{F}(M)$ y $d\mathcal{F}(M)$ están determinados (cfr. 8.1.5). Para probar la existencia, comencemos definiendo una antiderivación d_φ sobre formas definidas sobre un abierto U dominio de una carta (U,φ) de M. Por ser d_φ una antiderivación y como queremos que verifique $d_\varphi^2 f = 0$, para toda r-forma sobre U de la forma $f dx^{i_1}\wedge ...\wedge dx^{i_r}$, ha de ser

$$d_\varphi(f dx^{i_1}\wedge ...\wedge dx^{i_r} = df\wedge dx^{i_1}\wedge ...\wedge dx^{i_r}$$

y d_φ se ha de extender a r-formas arbitrarias sobre U por linealidad. Así definida, d_φ es una derivación sobre $E(U)$. En efecto, es lineal por definición y, si $\omega = \sum_{i_1<...<i_r}\omega_{i_1...i_r}dx^{i_1}\wedge ...\wedge dx^{i_r}$ y $\beta = \sum_{j_1<...<j_s}\beta_{j_1...j_s}dx^{j_1}\wedge ...\wedge dx^{j_s}$, se tiene

$$d_\varphi(\omega\wedge\beta) = d_\varphi\left(\sum_{\substack{i_1< \ ... \ <i_r\\ j_1< \ ... \ <j_s}}\omega_{i_1...i_r}\beta_{j_1...j_s}dx^{i_1}\wedge ...\wedge dx^{i_r}\wedge dx^{j_1}\wedge ...\wedge dx^{j_s}\right)$$

$$= \sum_{\substack{i_1< \ ... \ <i_r\\ j_1< \ ... \ <j_s}}((d\omega_{i_1...i_r})\beta_{j_1...j_s} + \omega_{i_1...i_r})d\beta_{j_1...j_s})$$

$$\wedge\, dx^{i_1}\wedge ...\wedge dx^{i_r}\wedge dx^{j_1}\wedge ...\wedge dx^{j_s}$$

$$= \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_r \\ j_1 < \dots < j_s}} (d\omega_{i_1 \dots i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \beta_{j_1 \dots j_s} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}$$

$$+ \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_r \\ j_1 < \dots < j_s}} (-1)^r \omega_{i_1 \dots i_r}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \wedge d\beta_{j_1 \dots j_s}) \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}$$

$$= (d_\varphi \omega) \wedge \beta + (-1)^r \omega d_\varphi \beta.$$

Consideremos ahora otra carta (V, ψ) de M. Como antes, definimos una antiderivación d_ψ que verifica $d_\psi f = df$ y $d_\psi^2 f = 0$ para toda $f \in \mathcal{F}(V)$. d_φ y d_ψ definen, de manera obvia, sendas antiderivaciones sobre $E(U \cap V)$, que verifican $d_{\psi U \cap V} f = df = d_{\varphi U \cap V} f$ y $d^2_{\psi U \cap V} f = 0 = d^2_{\varphi U \cap V} f$ para toda $f \in \mathcal{F}(M)$. Entonces, por 8.1.5, $d_{\psi U \cap V} = d_{\varphi U \cap V}$.

Por lo tanto, si definimos d sobre $E(M)$ por $d\omega|_U = d_\varphi(\omega|_U)$ para cada carta (U, φ) de M, la observación anterior muestra que $d\omega$ está bien definida y es una antiderivación de grado -1 que verifica las dos condiciones del enunciado. □

8.3.2. Definición. *Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, se define $\iota_X : E^k(M) \longrightarrow E^{k-1}(M)$ por $(\iota_X \omega)(p) = \iota_{X_p} \omega_p$. Si $\omega = f \in E^0(M) = \mathcal{F}(M)$, se define $\iota_X f = 0$. La proposición última del capítulo 7A muestra que ι_X es una antiderivación que, además, verifica $\iota_X^2 = 0$.*

8.3.2'. Lema. *Si $\alpha \in \mathcal{T}^{(r,s)}(N)$, $\beta \in \mathcal{T}^{(a,b)}(N)$, $\omega \in E^r(N)$, $\eta \in E^s(N)$, y $f : M \longrightarrow N$ es C^∞, entonces:*

$$f^*(\alpha \otimes \beta) = (f^*\alpha) \otimes (f^*\beta), \quad y \quad f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta).$$

Demostración. Para formas diferenciales y campos tensoriales de grado mayor que cero, la demostración resulta de las expresiones análogas para f_p^* dadas a continuación de 7.3.1.

Si $\omega = g \in E^0(N)$, entonces (recordando 7.3.3)

$$f^*(g\eta)(X_1, \dots, X_s) = (g\eta)(f_* X_1, \dots, f_* X_s)$$
$$= (g \circ f)(f^*\eta)(X_1, \dots, X_s) = (f^*g)(f^*\eta)(X_1, \dots, X_s)$$

□

8.3.3. Teorema. *La diferencial exterior verifica las propiedades:*

(a) $d^2\omega = 0$ para toda $\omega \in E^r(M)$.

(b) Si $f : M \longrightarrow N$ es una aplicación C^∞, entonces $f^* \circ d = d \circ f^*$.

(c) Si $\omega \in E^r(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $\mathcal{L}_X \omega = \iota_X d\omega + d\iota_X \omega$.

(d) Si $\omega \in E^r(M)$ y $X_1, \dots, X_{r+1} \in \mathfrak{X}(M)$, enonces

$$d\omega(X_1, \dots, X_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{r+1}))$$
$$+ \sum_{1 \le i < j \le r+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{r+1}).$$

Demostración. (a) Teniendo en cuenta la definición que se dió de d en la demostración de 8.3.1, bastará con probar que $d_\varphi^2 = 0$ para una carta arbitraria (U, φ) de M, y, como $d\varphi$ es lineal, bastará probar que $d_\varphi^2(f\, dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r}) = 0$ para toda $f \in \mathcal{F}(U)$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}
d_\varphi(df \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r}) &= \sum_{i=1}^{n} d_\varphi(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r}) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r}) \\
&= \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r}) \\
&\quad - \sum_{1\leq j<i\leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r}) \\
&= \sum_{1\leq i<j\leq n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r}) = 0.
\end{aligned}$$

(b) Como para toda $\omega \in E^r(N)$, se tiene $(f^*\omega)_p = \omega_{f(p)}(f_{*p}\bullet, ..., f_{*p}\bullet)$, bastará con probar la igualdad buscada sobre un anierto U dominio de una carta arbitraria (U, φ) de N. Para ello usaremos el lema 8.3.2' y la expresión, ya vista en una lección anterior, $f^*dg = d(g \circ f)$ para toda función real C^∞ g definida en un abierto de N. Con esto, se tiene que, en el abierto U,

$$\begin{aligned}
f^*d\omega &= f^*\left(\sum_{i_1<...<i_r} d\omega_{i_1...i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r} \right) \\
&= \sum_{i_1<...<i_r} f^*d\omega_{i_1...i_r} \wedge f^*dx^{i_1} \wedge ... \wedge f^*dx^{i_r} \\
&= \sum_{i_1<...<i_r} d(\omega_{i_1...i_r} \circ f) \wedge d(x^{i_1} \circ f) \wedge ... \wedge d(x^{i_r} \circ f) \\
&= d\left(\sum_{i_1<...<i_r} (\omega_{i_1...i_r} \circ f) \wedge d(x^{i_1} \circ f) \wedge ... \wedge d(x^{i_r} \circ f) \right) \\
&= df^*\left(\sum_{i_1<...<i_r} \omega_{i_1...i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r} \right) = df^*\omega.
\end{aligned}$$

(c) Como ι_X y d son antiderivaciones de grados 1 y -1 respectivamente, se tiene que

$\iota_X \circ d + d \circ \iota_X$ es de grado cero y, además:

$$\begin{aligned}(\iota_X \circ d + d \circ \iota_X)(\alpha \wedge \beta) &= \iota_X(d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta) + d((\iota_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge (\iota_X \beta)) \\ =&(\iota_X d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{r+1} d\alpha \wedge (\iota_X\beta) + (-1)^r (\iota_X\alpha) \wedge d\beta) + (-1)^{2r} \alpha \wedge (\iota_X d\beta) \\ &+ (d\iota_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^{r-1}(\iota_X\alpha) \wedge d\beta + (-1)^r d\alpha \wedge (\iota_X\beta) + (-1)^{2r} \alpha \wedge (d\iota_X\beta) \\ =&((\iota_X \circ d + d \circ \iota_X)\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge ((\iota_X \circ d + d \circ \iota_X)\beta),\end{aligned}$$

por lo tanto, $\iota_X \circ d + d \circ \iota_X$ es una derivación de grado 0. Para ver que es igual a $\mathcal{L}_X$, bastará con ver que coinciden sobre $\mathcal{F}(M)$ y $d\mathcal{F}(M)$. Veamos:

$(\iota_X \circ d + d \circ \iota_X)f = \iota_X(df) = df(X) = Xf = \mathcal{L}_X f$.

$(\iota_X \circ d + d \circ \iota_X)(df) = d(\iota_X(df)) = d(Xf) = \mathcal{L}_X(df)$.

(d) Usando la fórmula anterior (c), tenemos que $\iota_x d\omega = \mathcal{L}_X\omega - d\iota_X\omega$, lo que sugiere la demostración de la fórmula (d) por inducción y usando la fórmula conocida para $\mathcal{L}_X$.

Si $r = 1$, $d\omega(X,Y) = \iota_X(d\omega)(Y) = (\mathcal{L}_X\omega)(Y) - d(\iota_X\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X,Y]) - d(\omega(X))(Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$, que es la fórmula que buscábamos para $r = 1$.

Si la fórmula es cierta para $r-1$-formas, y $\omega \in E^r(M)$,

$$\begin{aligned}d\omega(X_1, ..., X_{r+1}) &= (\iota_{X_1}(d\omega))(X_2, ..., X_{r+1}) \\ &= (\mathcal{L}_{X_1}\omega)(X_2, ..., X_{r+1}) - d(\iota_{X_1}\omega)(X_2, ..., X_{r+1}) \\ &= X_1(\omega(X_2, ..., X_{r+1})) - \sum_{i=2}^{r+1} \omega(X_2, ..., [X_1, X_i], ..., X_{r+1}) \\ &\quad - \sum_{i=2}^{r+1} (-1)^i X_i(\iota_{X_1}\omega(X_2, ..., \widehat{X}_i, ..., X_{r+1}) \\ &\quad - \sum_{2 \le k < \ell \le r+1} (-1)^{k+\ell} \iota_{X_1}\omega([X_k, X_\ell], X_2, ..., \widehat{X}_k, ..., \widehat{X}_\ell, ..., X_{r+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^i X_i(\omega(X_1, ..., \widehat{X}_i, ..., X_{r+1}) \\ &\quad + \sum_{1 \le i < j \le r+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, ..., \widehat{X}_i, ..., \widehat{X}_j, ..., X_{r+1}).\end{aligned}$$

□

§8.E. Ejercicios

8.E.1. En $I\!R^2$, cuyas coordenadas denotamos (x, y), se consideran los campos

$$g = dx \otimes dx - \operatorname{ch}^2 x \, dy \otimes dy,$$

$$J = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \frac{\partial}{\partial y} \otimes dx + \operatorname{ch} x \frac{\partial}{\partial x} \otimes dy,$$

$$X = \cos y \frac{\partial}{\partial x} - \operatorname{sen} y \, \operatorname{th} x \, \frac{\partial}{\partial y}.$$

Probar que $\mathcal{L}_X g = 0$ y $\mathcal{L}_X J = 0$.