2. VARIABLE ALEATORIA

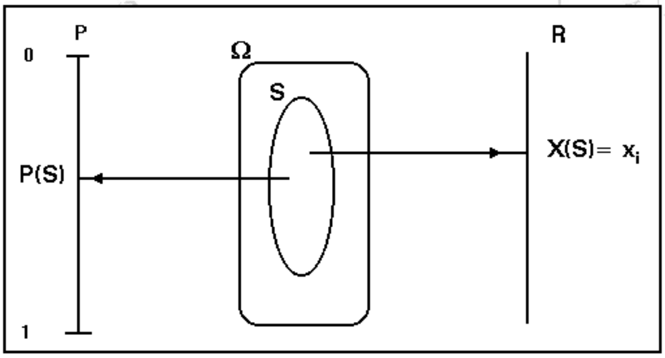
2.1. Variables aleatorias. Distribuciones de probabilidad.
2.2. Distribuciones discretas y continuas.
2.3. Esperanza y varianza. Indicadores. Transformaciones . Aproximación numérica
2.4. Aproximación empírica a las funciones de probabilidad. Cálculo de probabilidades por simulación

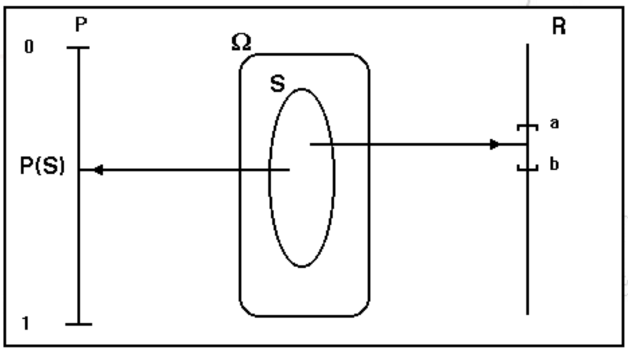
---

2.1 Variables aleatorias. Distribuciones de probabilidad.

Una **variable aleatoria**, X, es una función: $X : \Omega \rightarrow R$ que asocia a cada suceso $S \subset \Omega$
Un número real x= X(s) .
En general nombraremos las variables aleatorias con letras mayúsculas y los valores concretos de las variables con letras minúsculas.

Ante un experimento aleatorio cualquiera es, en principio, posible aleatorizar (asignar una variable aleatoria a los sucesos de Ω) de cualquier forma y sin ninguna restricción. Obviamente será, por lo general, interesante que la variable aleatoria conserve o recupere algún tipo de información relevante sobre el fenómeno. En definitiva, que sea significativa, que represente alguna magnitud o característica numérica.
De una forma más simple podemos considerar que una **variable aleatoria es una magnitud incierta**. Cuyo valor concreto no puede determinarse con exactitud.
Distinguimos en este gráfico entre variable aleatoria **discreta**, si toma un conjunto finito, o infinito numerable de valores posibles y variable aleatoria **continua** si recorre un intervalo, una conjunción de intervalos o la totalidad de la recta real.





Como, por otro lado, a cada suceso, S, del espacio de resultados le corresponde una probabilidad, a través de la "probabilización". Podemos considerar que se "induce" una asignación de probabilidades sobre la variable aleatoria.

De esta forma, la masa total (unitaria) de probabilidad puede repartirse (distribuirse) entre los valores definidos de la variable aleatoria (si es discreta) o entre los distintos intervalos (si es continua).
Si consideramos, entonces la variable aleatoria, junto con su asignación de probabilidad (inducida), estamos ante una DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD (X ,P_X).

2.2. Variables aleatoria discretas y continuas . Distribuciones discretas y continuas de probabilidad

2.2.1. Variables aleatorias discretas. Distribuciones discretas.

Como hemos comentado arriba una variable aleatoria discreta es aquella que tiene un campo de variación, un recorrido , discreto, consistente en un conjunto finito de **valores** o en un conjunto numerable de **valores**.

Por ejemplo "el valor númerico que se obtenga al lanzar un dado" es una variable aleatoria discreta cuyo recorrido es un conjunto finito de valores R_X={1,2,3,4,5,6}. En cambio, el "número de coches que pasan en una hora por un tramo de vía pública" es una variable aleatoria cuyo recorrido es numerable (pero no finito) : R_X= {0,1,2,…,… } .

Función de cuantía

En virtud de la inducción de probabilidad sobre la variable aleatoria podemos asignar una función llamada **función de cuantía** de probabilidad o **función de masa de probabilidad** (**pmf**, de sus siglas en inglés) tal que :

$P_X : R_X \rightarrow [0,1] \quad : \quad P(x)=P_\Omega(X^{-1}(x)) \quad \forall\ x\in R_X$

Es decir que asigna a cada valor $x\in R_X$ la probabilidad del suceso de Ω que se corresponde con el valor x

Propiedades de la función de cuantía:

1.- $P(x) \geq 0 \quad \forall\ x\in R_X$ Ya que, al fin y al cabo es una probabilidad

2.- $\sum_{\forall x\in R_X} P(x)=1$ Ya que sería la probabilidad de todo el espacio de resultados (o muestral)

3.- $P(x\in A)=\sum_{x\in A} P(x)$

Ejemplo1: Lanzamos tres monedas. El espacio de resultados será: Ω={(c,c,c),(c,c,+),(c,+,c),(+,c,c),(c,+,+),(+,c,+),(+,+,c),(+,+,+)} Si consideramos la variable aleatoria: X= número de caras obtenidas, tendremos:Que el recorrido será: $x\in R_X$={0,1,2,3} y la función de cuantía será:

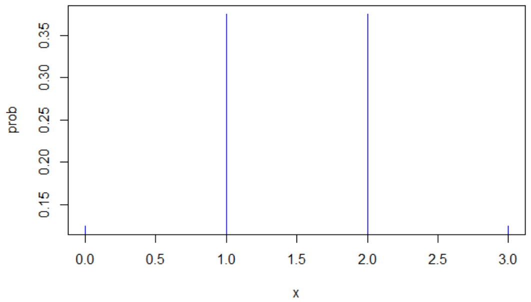
x	P(x)
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8
Total	1

```
library(prob); library(RcmdrMisc)
tosscoin(3, makespace = TRUE) # monedas: tosscoin(nº de monedas, probabilizado)
 tosscoin(2)
 omega<-tosscoin(3, makespace = TRUE)
 omega <- within(omega, {
  xtoss3 <- Recode(toss3, '"H" = 1; "T" = 0;', as.factor=FALSE)
  xtoss2 <- Recode(toss2, '"H" = 1; "T" = 0;', as.factor=FALSE)
  xtoss1 <- Recode(toss1, '"H" = 1; "T" = 0;', as.factor=FALSE)
  x=xtoss1+xtoss2+xtoss3
})
t<-table(omega$x)
prop.table(t, margin=NULL)
```

```
0     1     2     3
0.125 0.375 0.375 0.125
```

Podemos representar gráficamente la función de cuantía anterior

```
x<-c(0,1,2,3)
prob<-c(0.125,0.375,0.375,0.125)
plot(x,prob,type="h",col=blue)
```



Es interesante hacer notar cómo, al representarla así, observamos un claro paralelismo con los diagramas de barras de la estadística descriptiva.

Función de Distribución

Definimos la **función de distribución**, en inglés cumulative distribution function (CDF) , como: $F(x)=P(X\leq x)$ para $x\in]-\infty, \infty[$

1. F es siempre no decreciente : para $t_1 \leq t_2 \Rightarrow F(t_1) \leq F(t_2)$

2.-F es siempre continua por la derecha $\lim_{t\to a^+} F(t) = F(a) \qquad \forall a \in \mathbb{R}$

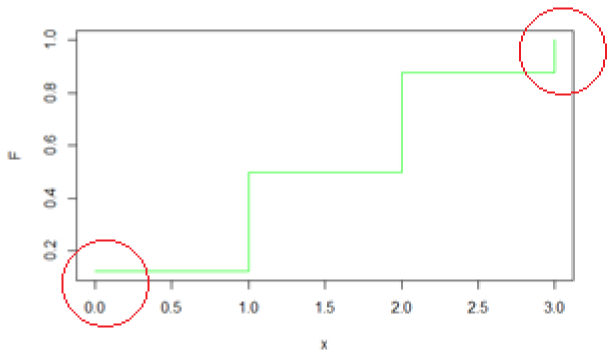
(Sólo será, también continua por la izquierda, en el caso de variables aleatorias continuas)

3.- Sus valores extremos son 0 y 1 de forma que : $\lim_{t\to -\infty} F(t) = 0 \qquad y \lim_{t\to \infty} F(t) = 1$

Teniendo en cuenta lo anterior el perfil de una función de distribución de una variable aleatoria discreta es el de una función escalonada desde 0 hasta 1, donde cada salto de escalón se corresponderá a cada punto para el que está definida la probabilidad (la función de cuantía)

Continuando el ejemplo anterior:

```
F<-cumsum(prob)
F
plot(x,F,type="s", col="green")
```




```
[1] 0.125 0.500 0.875 1.000
```

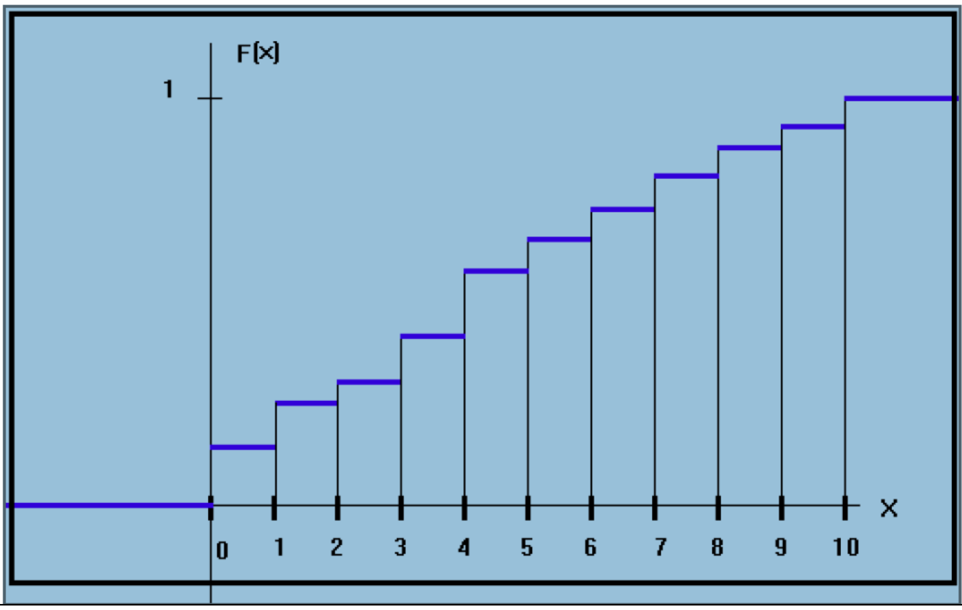
Hay que hacer notar que al principio y al final del gráfico (zonas marcadas con círculo rojo) la representación obtenida no se corresponde con la F. de Distribución.

1. Para valores inferiores a cero F(x)=0 y, justo en x=0 se produce "el salto" (escalón) de cuantía 0,125
2. A partir de x=3 y una vez alcanzado el valor F(x=3)=1 la función sigue tomando el valor 1 para los valores superiores a 3 .

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.125 & 0 \le x < 1 \\ 0.5 & 1 \le x < 2 \\ 0.875 & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

Una más adecuada representación gráfica de una Función de Distribución para una variable aleatoria discreta podemos verla en el gráfico siguiente. Donde una cierta variable que toma valores pertenecientes a {0,1,…, 10} tiene asignadas unas probabilidades según una función de cuantía que desconocemos (los saltos de cada escalón) cuya acumulación genera la Función de Distribución que vemos como función escalonada desde 0 hasta 1.

Función de distribución en distribuciones de variable discreta:



Puede observarse que:

- Presenta un perfil escalonado,produciendose un salto en cada uno de los valores definidos de la variable aleatoria.Es continua por la derecha, pero no por la izquierda.
- La cuantía de cada salto es precisamente la probabilidad en ese punto, la función de cuantía.
- Es semejante al DIAGRAMA ACUMULATIVO de una distribución de frecuencias de valores sin agrupar.
- Entre cada dos puntos (de los definidos) no hay probabilidad (y por tanto no se acumula).

Ejercicio resuelto: Dada una variable aleatoria cuyo recorrido es {0,1,2,3,4,5} y cuya Función de distribución obedece a la expresión:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 0.2 & 0\le x<1 \\ 0.3 & 1\le x<2 \\ 0.5 & 2\le x<3 \\ 0.7 & 3\le x<4 \\ 0.8 & 4\le x<5 \\ 1 & x\ge 5 \end{cases}$$

Obtener P(x=3), P(x=2.5),P(3<x≤5),P(2≤x<5). Y finalmente la F.cuantía

La probabilidad en un punto siempre va a ser $P(x)=F(x^+)-F(x^-)$ Si se trata de uno de los puntos definidos de la variable (un punto de su recorrido) $F(x^+)>F(x^-)$ y la diferencia será la función de cuantía en x, la cuantía del salto en el escalón, la probabilidad de x. Sin embargo si x no pertenece al recorrido de la variable aleatoria,(tramos horizontales de la F. de Distribución) ,$F(x^+)=F(x^-)$ y la probabilidad en ese punto es 0.

$$P(3)=F(3^+)-F(3^-)=0.7-0.5=0.2$$

$$P(2.5)=F(2.5^+)-F(2.5^-)=0.5-0.5=0$$

Las probabilidades de un intervalo dependerán de si éste incluye o no a sus extremos:

$P(a<x\le b))=P(x\le b)-P(x\le a)=F(b)-F(a)$
$P(a\le x\le b)=P(x\le b)-P(x<a)=F(b)-F(a^-)$ debe sumarse la P(a) a la anterior
$P(a<x<b)=P(x<b)-P(x\le a)=F(b^-)-F(a)$ debe restarse la P(b) a la primera expresión
$P(a\le x<b)=P(x<b)-P(x<a)=F(b^-)-F(a^-)$ debe sumarse la P(a) y restarse la P(b) a la primera expresión

De esta forma :

$$P(3<x\le 5))=P(x\le 5)-P(x\le 3)=F(5)-F(3)=1-0.7=0.3$$

coincidirá con P(4)+P(5) ya que 4 y 5 son los valores que incluye el intervalo

$$P(2\le x<5))=P(x<5)-P(x<2)=F(5^-)-F(2^-)=0.8-0.3=0.5$$

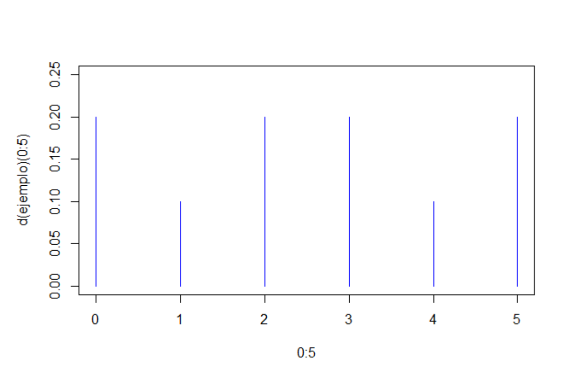
coincidirá con P(2)+P(3)+P(4) ya que 2,3 y 4 son los valores que incluye el intervalo

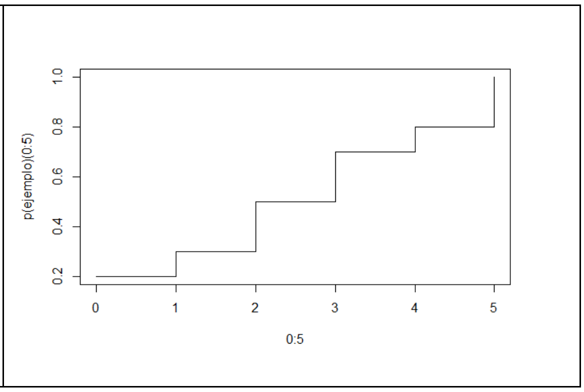
Finalmente para obtener la Función de cuantía observamos los puntos en los que se producen los saltos en la F. de Distribución (puntos del recorrido de la variable) 0,1,2,3,4,5 y determinamos estas probabilidades. Tendremos:

x	P(x)
0	0.2
1	0.1
2	0.2
3	0.2
4	0.1
5	0.2
sum	1

```
library(distrEx) # también se puede usar el paquete "distr"
ejemplo <- DiscreteDistribution(supp = 0:5, prob = c(0.2,0.1,0.2,0.2,0.1,0.2))
ejemplo
d(ejemplo)(0:5)
p(ejemplo)(0:5)

plot(x=0:5,d(ejemplo)(0:5),type="h",col="red")
plot(x=0:5,p(ejemplo)(0:5),type="s",col="blue")
```



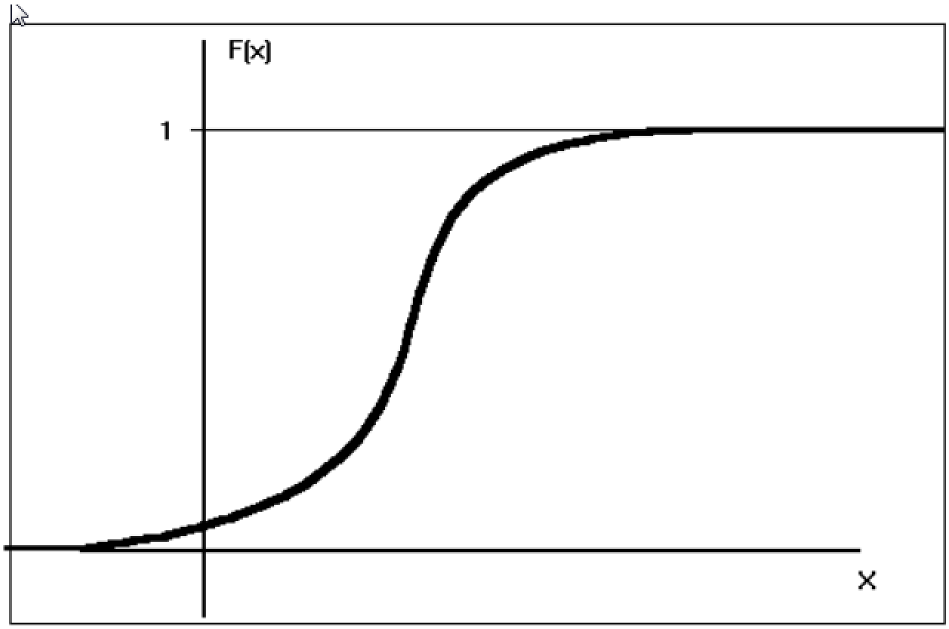


2.2.2. Variables aleatorias continuas. Distribuciones continuas.
Una variable aleatoria continua tiene por recorrido un intervalo de la recta real, una unión de intervalos de la recta real o la propia recta real.

Es, en principio, concebible que pueda tomar cualquiera de los infinitos valores que componen su recorrido. Sin embargo, en la práctica nos encontramos con que no suele ser posible llevar a cabo mediciones más allá de cierto grado de precisión. Esto se traduce en situaciones similares a las del siguiente ejemplo: El record mundial de los cien metros lisos lo ostenta Usain Bolt con un tiempo de 9,58 s . Eso no quiere decir que los corriera en exactamente en ese tiempo y no en 9,580003, o en 9,579999999921, por ejemplo. Más bien quiere decir que los corrió en un tiempo comprendido entre 9,575 y 9,585 ya que la precisión de la medida es de una centésima de segundo. Este ejemplo ayuda a comprender, también, el hecho de que cuando hablemos de variables continuas digamos que no existe para ellas probabilidad en un punto.

Entre las magnitudes que suelen considerarse continuas, tenemos, paradigmáticamente, el tiempo, pero también otras como las longitudes, temperaturas y otras características físicas. También algunas magnitudes no estrictamente continuas pero sí con una variabilidad particular muy elevada suelen modelizarse como continuas. (Rentas, ingresos, gastos, costos, número de siniestros, etc)

Función de distribución en una distribución de variable continua.
En una distribución de variable continua se induce probabilidad sobre todos los infinitos intervalos que integran el campo de definición de la variable .En consecuencia ante cualquier incremento de la variable (por pequeño que sea) le corresponderá un incremento de la probabilidad que se va acumulando, lo que hará que la función de probabilidad acumulada, **la función de distribución,** tenga que ser continua en todos los puntos del campo de definición de la variable. Es esta la razón de que se llamen distribuciones continuas, ya que acumulan de forma continua su probabilidad.



Podemos observar cómo:

- La función de distribución es continua por ambos lados (absolutamente continua), acumulando la variable probabilidad de manera continuada desde que comienza su campo de variación hasta que termina (acumulando la masa total ,1).

- Tiene un perfil similar al del POLÍGONO ACUMULATIVO de una distribución de frecuencias de valores agrupados.Coincidiría con él si se tratara de intervalos infinitésimo.

Entre las propiedades de la Funsión de distribución de una variable aleatoria continuas están:

1.- F(x) es no decreciente : si $t1 \leq t2$ entonces $F(t1) \leq F(t2)$

2. - F(x) es continua

3. - $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

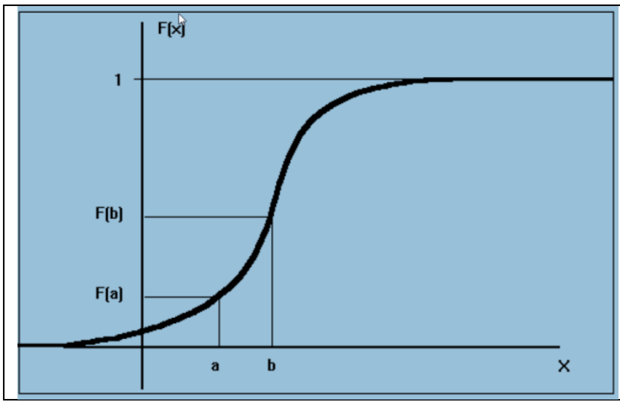
La probabilidad de cualquier intervalo perteneciente al recorrido de la variable puede calcularse a través de la F.de Distribución:

$$P(a \leq x \leq b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x < b) = P(a < x < b) = F(b) - F(a)$$

Al no asociarse probabilidad a valores sino a intervalos , la probabilidad en un punto es cero y por lo tanto la probabilidad de un intervalo es indiferente a si éste es cerrado, abierto o semiabierto.

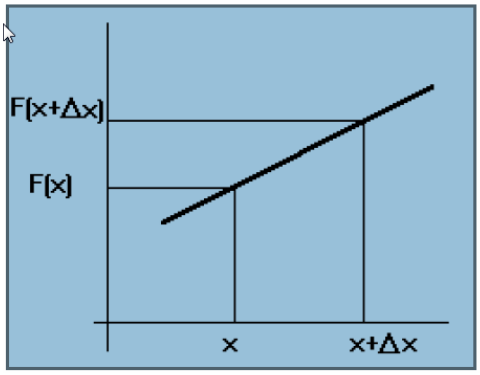
Función de Densidad . (F.de densidad de probabilidad)

ˆ Como hemos dicho , la asignación de probabilidad no es a puntos (valores) del recorrido sino a intervalos. En cualquier intervalo podremos, sin embargo, definir la DENSIDAD MEDIA DE PROBABILIDAD entendida como el incremento de probabilidad que se da en intervalo dividido por la longitud del mismo:



$$DMP([a,b]) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

Y considerando un intervalo incremental:



$$DMP(\Delta x) = \frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$$

que si lo llevamos al límite cuando el incremento es infinitesimal nos conduce, por definición, a la derivada de $F(x)$

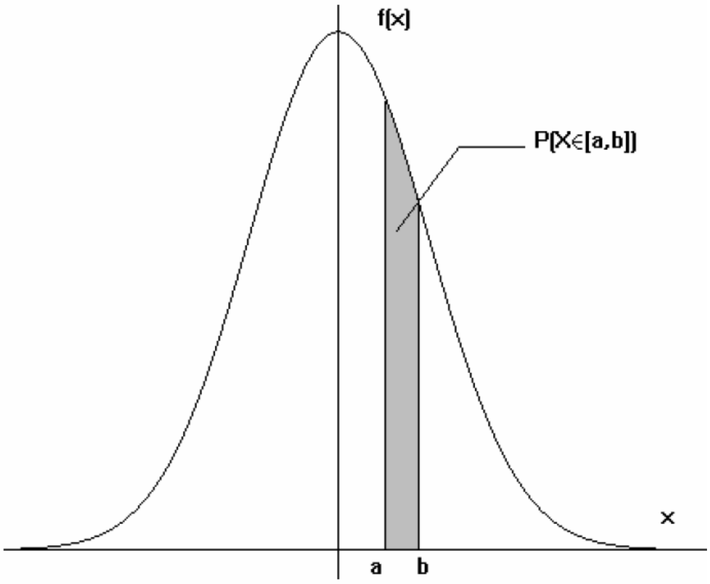
$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$$

Pues bien, llamaremos función de densidad o función de densidad de probabilidad a la función que a cada posible valor de x le hace corresponde la densidad media de probabilidad de un entorno (o intervalo) infinitésimo incremental de ese valor x. Esto es, con la derivada de la F. de distribución.

Aunque su naturaleza es muy diferente, y de hecho **NO ES** una probabilidad ,la f. de densidad juega un papel similar en el caso continuo al que juega la f. de cuantí en el discreto.

Las propiedades básicas de una función de densidad son:

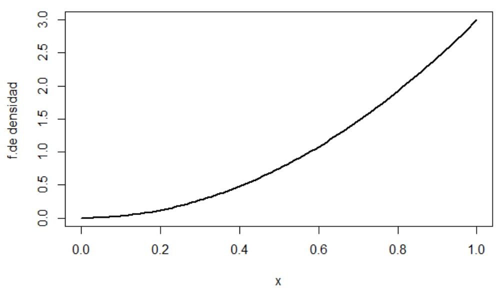
1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in dom(X)$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
4. $P(X \in A) = \int_{x \in A} f(x)dx$
5. $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(t)dt$
6. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

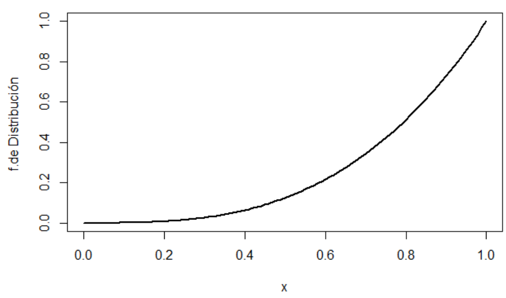


En https://www.uv.es/ceaces/base/variable%20aleatoria/dibujo.htm puede verse un gráfico dinámico en el que observar la relación entre F(x) y f(x) .
Calcular probabilidades a partir de la función de densidad es tan fácil o tan difícil como resulte integrar la función. En ocasiones puede obtenerse ventaja de los procedimientos informáticos , como en este ejemplo con R:
Ejemplo 2

```
f <- function(x) 3*x^2# f.de densidad, definida para valores de [0,1]

plot(f)
curve(f, from = 0, to = 1, lwd = 2, ylab = "f.de densidad ") #alternativa y preferiblemente
integrate(f, lower = 0.14, upper = 0.71)#cálculo de P(0.14<x<0.71)
F<-function(x) integrate(f, lower = 0, upper = x)
F(0);F(1); F(0.71);F(0.14)
```





2.3. Esperanza y varianza. Indicadores. Transformaciones . Aproximación numérica.

La esperanza de una variable aleatoria, también llamada su media, puede definirse como:

$$E(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx & \text{caso continuo}\\[2ex] \displaystyle\sum_{\forall x} xP(x) & \textit{caso discreto}\end{cases}$$

La esperanza de una variable aleatoria puede considerarse como el centro de gravedad de su distribución de probabilidad.
Si se repitiera un gran número de veces el fenómeno aleatorio que subyace a la variable aleatoria considerado tomaramos los valores obtenidos de la variable aleatoria y calculáramos su media araitmética obtendríamos un valor más o menos cercano al valor de su esperanza y resultaría tanto más cercano cuanto mayor fuera el número de repeticiones

E(x)=μ= media de la distribución.

Ejemplo discreto: Considerando la variable aleatoria del ejemplo 1: X= número de caras obtenidas en el lanzamiento de tres monedas:

x	P(x)
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

$$\mu = \sum_{x=0}^{x=3} x.P(x) = 0\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{3}{8} + 2\cdot\frac{3}{8} + 3\cdot\frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$$

Ejemplo continuo: Dada la v. a. continua, X, definida en [0,1] y con función de densidad $f(x) = 3x^2$ la media vendría dada por:

$$\mu = \int_0^1 x f(x)dx = \int_0^1 x\cdot 3x^2 dx = \int_0^1 3x^3 dx = 3\int_0^1 x^3 dx = 3\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 3\cdot\frac{1}{4} = 0.75$$

La esperanza puede generalizarse un convertirse en un operador, aplicable a cualquier función g(x) de la variable aleatoria x. Así tendríamos el llamado **operador esperanza**, E[ ] .

$$E[g(x)] = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx & \text{caso continuo} \\ \displaystyle\sum_{\forall x} g(x) P(x) & \textit{caso discreto} \end{cases}$$

Propiedades del operador esperanza:
1.- La esperanza de una constante es la propia constante
2.- La esperanza de una función lineal es la misma función lineal de la esperanza.
La linealidad de los operadores sumatorio e integral garantiza el cumplimiento de estas dos propiedades.

E[a + b.x] = a+ b E[x]

Automatización en R .Utlizando el paquete distrEx o distr de R podemos generar variables aleatorias (como ya se ha visto más arriba) y trabajar con algunas ya preconstruidas así como también automatizar el cálculo de ciertas funciones, de la esperanza y de otros indicadores de la distribución.

Caso discreto:

library(distrEx)
#obtenemos la distribución del ejemplo de antes
X <- DiscreteDistribution(supp = 0:3,
prob = c(1,3,3,1)/8)
E(X) # esperanza de X
r(X)(5) # genera 5 resultados aleatorios según
#la distribución X
d(X) (3) #obtiene la f.de cuantía de 3
p(X)(2) # obtiene la f. distribución de 2
d(X)(0:3)
p(X)(0:3)
p(X)(c(2,4))# f.de distribución de 2 y de 4
diff(p(X)(c(2,4))) # prob(2<X≤4)
q.l(X)(0,75) # percentile 75
#la función debería ser sólo q pero para distinguirla de quit se le añade una "ele"
	E(X)
	[1] 1.5
	r(X)(5)
	[1] 2 3 2 2 2
	d(X) (3)
	[1] 0.125
	p(X)(2)
	[1] 0.875
	d(X)(0:3)
	[1] 0.125 0.375 0.375 0.125
	p(X)(0:3)
	[1] 0.125 0.500 0.875 1.000
	p(X)(c(2,4)) [1] 0.875 1.000
	diff(p(X)(c(2,4))
	[1] 0.125
	q.l(X)(0.75)
	[1] 2

E(3*X+4)
 	
E((X-E(X))^2)# va a ser la definición del op.varianza
var(X)
sd(X)
	E(3*X+4)
	[1] 8.5
	E((X-E(X)^2))
	[1] -0.75
	E((X-E(X))^2)
	[1] 0.75
	> E((X-E(X))^2)
	[1] 0.75
	> var(X)
	[1] 0.75

Caso continuo

#necesitaremos el paquete distr ,para trabajar con # variables.continuas.
library(distr)
f <- function(x) 3 * x^2
X <- AbscontDistribution(d = f, low1 = 0, up1 = 1)
# AbscontDistibution(f.densidad, lim.inf,lim.sup) 	
 	
library(distrEx)
 	
E(X)
var(X)
sd(X)
 	
r(X)(5) # genera 5 resultados aleatorios según la #distribución X
d(X) (0.3) #obtiene la f.de dnsidad en 0.3
p(X)(0.2) # obtiene la f. distribución de 0.2
 	
p(X)(c(0.2,0.4))#f.de distribución de 0.2 y de 0.4
diff(p(X)(c(0.2,0.4))) # prob(2<X<4)
q.l(X)(0,90)
	Consideramos la v.a. del ejemplo2 con X∊[0,1] y f.densidad $f(x)=3x^2$
	
	E(X)
	[1] 0.7496337
	var(X)
	[1] 0.03768305
	sd(X)
	[1] 0.1941212
	Los resultados no son los exactos (media=3/4, y varianza=3/8) debido a que la función E(X) usa aprox. De calc.númerico si no conoce la distribución
	
	r(X)(5)
	[1] 0.5310 0.8034 0.6377 0.9895 0.6851
	d(X) (0.3)
	[1] 0.27
	p(X)(0.2)
	[1] 0.008000034
	p(X)(c(0.2,0.4
	[1] 0.008000034 0.064000046
	diff(p(X)(c(0.2,0.4)))
	[1] 0.05600001
	q.l(X)(0.9)
	[1] 3

Varianza y operador varianza.

Definiremos la varianza de una variable ya sea discreta o continua como:

$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E[(X-E(X))^2]$ Obviamente, en el caso discreto el operador esperanza actuará como sumatorio y en el caso continuo como integral.

Con vistas a su cálculo en la práctica la varianza se puede ver como:

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E[(X^2 - 2X\mu + \mu^2)] = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 =$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

La varianza es, análogamente a como ocurría en la estadística descriptiva, una medida de la dispersión probabilística de la variable alrededor de la media. Pero viene medida y se calcula en términos cuadráticos por lo que , a menudo se considera su raíz cuadrada: La desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\left(E(X^2) - \mu^2\right)}$

La varianza puede generalizarse para ser aplicada no sólo a una variable aleatoria sino a cualquier función de una variable aleatoria (Igual que hicimos con la esperanza):
Dada una función cualquiera "g" , definiremos la varianza de g(X) como:

$$Var(g(X) = V(g(X) = D^2(g(X) = E[\left(g(X) - E(g(X))\right)^2]$$

Es fácil comprobar cómo la varianza no va a depender de las traslaciones de la variable (cambios de origen) pero sí y cuadráticamente , de los cambios de escala (o unidad). En efecto , las principales propiedades de la varianza son:

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1. & K = Cte. \Rightarrow Var(K) = 0 \\ 2. & Var(a+bX) = b^2 Var(X) \end{array}}$$

Otros indicadores de una distribución.
Podemos considerar además de media y varianza otros indicadores de una distribución de probabilidad.
Como indicadores de posición tendríamos la mediana y los cuantiles con una definición análoga a la que tenían en estadística descriptiva sin más que sustituir frecuencia por probabilidad:
Mediana : P(X<Me)=0.5
q-esimo percentil P(X< q-esimo percentil)= q/100
en R:

require(distrEx) X <- Binom(size = 7, prob = 0.32) median(X) q.l(X)(0.32) Y<-Gammad() median(Y) q.l(Y)(0.68)	X <- Binom(size = 7, prob = 0.32) median(X) [1] 2 q.l(X)(0.32) [1] 2 Y<-Gammad() median(Y) [1] 0.6931472 q.l(Y)(0.68) [1] 1.139434

Los coeficientes de asimetría y de curtósis se definen , como en el caso de distribuciones de frecuencias a partir de momentos centrales de orden 3 y 4 respectivamente.

Asimetría: $\gamma_1 = \dfrac{E\left[(X-\mu)^3\right]}{\sigma^3}$ y curtosis : $\gamma_2 = \dfrac{E\left[(X-\mu)^4\right]}{\sigma^4} - 3$

X <- Binom(size = 7, prob = 0.32) skewness(X) kurtosis(X) W<-Norm() skewness(W) kurtosis(W)	skewness(X) [1] 0.2916917 kurtosis(X) [1] -0.2006303 W<-Norm() skewness(W) [1] 0 kurtosis(W) [1] 0

Función generatriz de momentos . FGM .

Tanto para distribuciones discretas como para continuas llamaremos Función generatriz de momentos a una función de una variable auxiliar , t , definida como:

$$FGM(t) = M(t) = \varphi(t) = E(e^{tx}) = \begin{cases} \sum\limits_{\forall x} e^{tx} P(x) & \text{caso discreto} \\ \int\limits_{\forall x} e^{tx} f(x)dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

Ejemplo discreto:

Consideramos el ejemplo 1:

x	P(x)
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

x	P(x)	e^{tx}	e^{tx} P(x)
0	1/8	1	1/8
1	3/8	e^{t}	3/8. e^{t}
2	3/8	e^{2t}	3/8. e^{2t}
3	1/8	e^{3t}	1/8 e^{3t}
Total	1	$\varphi(t) =$	$\frac{1}{8}(1+3e^{t}+3e^{2t}+e^{3t})$

Ejemplo continuo: Consideramos una variable aleatora x, definida para reales positivos (X$\in$[0,∞[ ) con f. de densidad $f(x) = e^{-x}$.

Su FGM vendrá dada por :

$$\varphi(t) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{tx} f(x)dx = \int_0^\infty e^{tx} \cdot e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-(1-t)x} dx = \frac{-1}{(1-t)} \int_0^\infty -(1-t)e^{-(1-t)x} dx =$$

$$= \frac{-1}{(1-t)}\left[e^{-(1-t)x}\right]_0^\infty = \frac{-1}{(1-t)}(e^{-\infty} - e^{-0}) = \frac{-1}{(1-t)}(0-1) = \frac{1}{(1-t)} = (1-t)^{-1}$$

Propiedades

1. No siempre se puede garantizar su existencia, aunque para la mayoría de la distribuciones de probabilidad de uso habitual sí existe.
2. Cuando existe, caracteriza unívocamente la distribución de probabilidad , análogamente a la función característica. De forma que si las distribuciones de dos variables aleatorias x e y son tales que sus dos F.G.M., φ_x y φ_y , son idénticas $\varphi_x = \varphi_y$ entonces las distribuciones de las variables x e y también son idénticas.
3. Derivando sucesivamente la F.G.M. en el punto t=0 se generan los sucesivos momentos ordinarios según la expresión:
   $\alpha_r = \varphi^{(r)}(t=0)$ este resultado se conoce como teorema de los momentos
4. Si se transforma una variable aleatoria x en otra y mediante una función lineal: y= a+bx , la F.G.M. de la distribución de y obedece a la expresión:

$$\varphi_y(t) = e^{at}\varphi_x(bt)$$

propiedad especialmente importante para comprobar la linealidad de la distribución normal

(Nota: se llama momento (ordinario) de orden r , α_r , al valor esperado de la potencia r-sima de la variable x : $\alpha_r = E(X^r)$. Si consideramos la variable cambiada de **origen** a la media hablaremos de momentos **centrales**)

---

proyecto CEACES REF.

test de variable aleatoria

1 **Si una variable aleatoria tiene de** $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = 3$

- ☐ **entonces** $E\left[x + x^2 - 3x\right] = -4$
- ☐ **entonces** $E\left[x + x^2 - 3x\right] = -1$
- ☐ **entonces la media vale 2**

2 **Si** $F(x) = k \cdot x^3 \quad para\ x \in [0;2]$

- ○ **entonces** $k = 1/4$
- ○ **entonces** $k = 1/8$

3 **Si la variable aletoria x está definida para { 0 ,1 y 2} con P(x)=x/3 .**

- ☐ **entonces P(x < 2)=1**
- ☐ **entonces P(x < 2) = 1/3**
- ☐ **entonces P(x =2) = 2/3**

4 **Si la variable X tiene de FGM** $\varphi(t) = e^{6\cdot(e^t - 1)}$

- ○ **entonces “media de X”=6**
- ○ **no es F.G.M**
- ○ **entonces “media de X”=2**

5 **Si** $y = 3x + 2x^2 - 3$ **, y conocemos que** $\mu_x = 2$ y $\sigma_x^2 = 6$

- ○ **entonces E[y] = 23**
- ○ **entonces E[y] = 4**
- ○ **entonces E[y] = 75**