Colección de problemas.
Curso cero del grado en matemáticas

Castellano. Curso 2017-2018

Índice general

Introducción

La siguiente colección de problemas acompaña el curso cero del Grado en Matemáticas de la UV. La intención es autocontrolar el nivel de asimilación tanto de los videos como del texto del curso cero. A pesar de esto, el primero de los cuestionarios es de determinación del nivel de los estudiantes. Esto es así porque lo exige la plataforma en la que se colgarán todos los contenidos de este curso.

Casi la totalidad de las preguntas son del tipo de respuesta múltiple. Sin embargo, hay algunas que deberéis elaborar escribiendo una pequeña argumentación. Estas no podrán ser autocorregidas.

0.1. Cuestionario del módulo cero

1. El siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & + & 4z & = & -1 \end{array}\right.$$

   es:

   a) Compatible determinado.
   b) Compatible indeterminado.
   c) Incompatible.

2. Discute el siguiente sistema en función del parámetro a :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 5 \\ 5x & + & y & - & z & = & 11 \\ 3x & - & y & + & az & = & 2. \end{array}\right.$$

   a) Para cualquier valor de a el sistema es incompatible.
   b) Si $a = 1$, sistema incompatible y si $a \neq 1$ sistema compatible determinado.
   c) Si $a = 2$, sistema compatible indeterminado y si $a \neq 2$ sistema incompatible.

3. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

   calcula $A \cdot B - 7C^{-1}$.

   a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   b) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$.
   c) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Dada la matriz

$$B = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & x & 2 \end{pmatrix},$$

   calcula el valor de x para el que la matriz B no tiene inversa.

   a) $x = -1$.

b) $x = 0$.

c) $x = -3$.

5. Sabiendo que la matriz cuadrada A verifica $A^3 - I = 0$, siendo I la matriz identidad. ¿Qué vale A^{125}?

    a) I.

    b) A^2.

    c) $A + I$.

6. Dados los vectores $\overrightarrow{v_1} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{v_2} = (2, a, -1)$ y $\overrightarrow{v_3} = (1, 0, a)$, encuentra los valores de a para los que los vectores no forman una base de $\mathbb{R}^3$.

    a) $a = 1,\ 2$.

    b) $a = -1,\ 1$.

    c) $a = -1,\ 0$.

7. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A = (-1, 0, 2)$ y es perpendicular a la recta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z - 2$.

    a) $y - 3z + 6 = 0$.

    b) $2x - y + z = 0$.

    c) $y - 3z - 2 = 0$

8. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ cx + 3, & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

    calcula los valores $a,\ b$ y c para que se cumpla la hipótesis del teorema de rolle en el intervalo $[1, 2]$.

    a) $a = -3,\ b = 6,\ c = 0$.

    b) $a = -2,\ b = 1,\ c = 1$.

    c) $a = 0,\ b = 2,\ c = 3$.

9. Calcula el área limitada por la curva $y = 4(x-2)e^{2x}$ y las rectas $x = 0,\ x = 1$ e $y = 0$.

    a) $1 + e$.

    b) $2 + e^2$.

    c) $5 - 3e^2$.

10. Una clase está formada por 6 niñas y 10 niños. Si se escoge un comité de 3 alumnos al azar, calcula la probabilidad de que hayan escogido 2 niñas y 1 niño.

    a) 0,482.

    b) 0,267.

    c) 0,234.

0.2. Soluciones del cuestionario 0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	b	b	a	b	c	a	a	c	b

1. Si puedes medir el lado de un cuadrado, no lo podrás hacer con su diagonal

1.1. Cuestionario final 1

1. Argumenta por qué es cierta la siguiente afirmación: si p es un número entero y el número 3 divide a p^2, entonces el 3 divide a p.

2. Aprovecha el anterior ejercicio para demostrar, a la forma de Hipaso, que $\sqrt{3}$ es un número irracional.

3. Di si es cierta o falsa la siguiente afirmación: si p es un número entero y el número 4 divide a p^2, entonces el 4 divide a p. Si es cierta, tendrás que argumentarlo. Si es falsa, tendrás que encontrar un contraejemplo.

4. Di si es cierta o falsa la siguiente afirmación: si p es un número entero y el número 6 divide a p^2, entonces el 6 divide a p. Si es cierta, tendrás que argumentarlo. Si es falsa, tendrás que encontrar un contraejemplo.

5. Aprovecha el anterior ejercicio para demostrar, a la forma de Hipaso, que $\sqrt{6}$ es un número irracional.

6. Intentemos ahora algo más general. Prueba que si p es un número primo, entonces $\sqrt{p}$ es también un número irracional.

7. ¿Si los compañeros de Hipaso lo lanzaron por la borda, cómo ha llegado su demostración hasta nosotros? ¿Se salvó Hipaso? ¿La conciencia de alguno de los compañeros le obligó a reconocer que Hipaso tenía razón y convenció al resto de difundir la demostración? ¿Es todo una invención de Mileto de Tales?

1.2. Soluciones del cuestionario final 1

1. Hay varias posibilidades. Una de ellas podría ser la siguiente. En relación con la divisibilidad por el número 3, cualquier número natural p puede escribirse como

$$\begin{array}{rcll} p &=& 3k & \text{si } p \text{ es divisible por } 3, \\ p &=& 3k+1 & \text{si el resto de dividir } p \text{ por 3 es } 1, \\ p &=& 3k+2 & \text{si el resto de dividir } p \text{ por 3 es } 2. \end{array}$$

   En cada caso se tiene que el cuadrado de p es

$$\begin{array}{rcll} p^2 &=& 9k^2 & \text{por lo tanto } p^2 \text{ tambien es divisible por } 3, \\ p^2 &=& 9k^2+6k+1 = 3(k^2+2k)+1 & \text{por lo tanto el resto de dividir } p^2 \text{ por 3 tambien es } 1, \\ p &=& 9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1 & \text{por lo tanto el resto de dividir } p^2 \text{ por 3 es } 1. \end{array}$$

   La conclusión es que si 3 divide a p^2, el único caso posible es que ya el 3 dividiera a p.

2. Por reducción al absurdo. Si $\frac{p}{q} = \sqrt{3}$ con $mcd(p,q) = 1$, entonces $p^2 = 3q^2$. Esto quiere decir que 3 divide a p^2. Por el ejercicio anterior, 3 también divide a p, es decir $p = 3k$. Sustituyendo, $(3k)^2 = 3q^2$. Simplificando $3k^2 = q^2$. Por lo tanto, 3 divide a q^2. Aplicando de nuevo el ejercicio anterior, 3 divide a q. Contradicción porque entonces tenemos que 3 es un divisor común de p y de q.

3. Es falsa. Como contraejemplo podemos poner $p = 6$. El 4 divide a $6^2 = 36$ pero no divide a 6.

4. Es cierta. Para argumentarlo podemos utilizar los siguientes hechos: el primero, ya utlizado en la demostración de Hipaso, que si 2 divide a p^2 entonces 2 también divide a p, y el segundo, el ejercicio 1, si 3 divide a p^2 entonces 3 también divide a p. Y la manera de utilizarlos podría ser la siguiente: si 6 divide a p^2, entonces tanto el 2 como el 3 dividen a p^2. Aplicando los dos hecho anteriores, tenemos que tanto el 2 como el 3 también dividen a p. Esto quiere decir que el 6 también divide a p.

5. Es la misa argumentación que antes pero cambiando lo necesario. Por reducción al absurdo. Si $\frac{p}{q} = \sqrt{6}$ con $mcd(p,q) = 1$, entonces $p^2 = 6q^2$. Esto quiere decir que 6 divide a p^2. Por el ejercicio anterior, 6 también divide a p, es decir $p = 6k$. Sustituyendo, $(6k)^2 = 6q^2$. Simplificando $6k^2 = q^2$. Por lo tanto, 6 divide a q^2. Aplicando de nuevo el ejercicio anterior, 6 divide a q. Contradicción porque entonces tenemos que 6 es un divisor común de p y de q.

6. Hay que demostrar primero que si p, número primo, divide a m^2 (atención con el cambio de símbolos) entonces p también divide a m. La segunda parte es la demostración por reducción al absurdo análoga a la anterior.

7. No tengo ni idea.

2. Cuestiones de notación sobre conjuntos y elementos

2.1. Parte 1

Ejercicio 2.1.1 *¿Recuerdas el alfabeto griego?*

Ejercicio 2.1.2 *Indica el significado de los siguientes símbolos:*

Símbolo	*Significado*
$\forall$	
$\exists$	
$\exists!$, $\exists^*$	
: , /	
$\Rightarrow$	
$\Leftrightarrow$	,
$\in$	
$\notin$	
$\subseteq$	
$\subset$	
$\cup$	
$\cap$	
$-$, $\setminus$	

2.2. Parte 2.1

Ejercicio 2.2.1 *Escribe los siguientes conjuntos:*

a) El conjunto formado por los números naturales comprendidos entre -2 y 5.

b) El conjunto formado por todos los números enteros excepto el -3.

Ejercicio 2.2.2 *Dado el conjunto $S = \{1, 2, \{1, 2\}, 3, \{2, 3\}\}$, di si las siguientes expresiones son o no ciertas:*

1. $2 \in S$.
2. $1 \in S$.

3. $\{1\} \in S$.
4. $\{1\} \subset S$.
5. $\{\{1\}\} \subset S$.
6. $\{\emptyset\} \subset S$.

Ejercicio 2.2.3 *Di si las siguientes expresiones son o no ciertas:*

1. $\emptyset \in \{\emptyset\}$.
2. $\emptyset \subset \{\emptyset\}$.
3. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$.

2.3. Parte 2.2

Ejercicio 2.3.1 *Consideremos los conjuntos* $A = \{1, 2\}$ *y* $B = \{\{1, 2\}\}$*. Di si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:*

1. $A = B$.
2. $A \subset B$.
3. $A \subset A$.
4. $\{\emptyset\} \subset B$.

Ejercicio 2.3.2 *Consideremos los conjuntos* $S = \{\{1, 2\}, \mathbb{Q}, \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}\} \cup \mathbb{Q}$*. Di si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:*

1. $\frac{1}{3} \in S$.
2. $\sqrt{2} \in S$.
3. $\mathbb{Q} \subset S$.
4. $\mathbb{Q} \in S$.
5. $\mathbb{R} \in S$.
6. $\mathbb{R} \subset S$.
7. $1 \in S$.

Ejercicio 2.3.3 *Consideremos los conjuntos* $S = \{1, 2, \{1, 2\}, (1, 2)\}$*. Di si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:*

1. $1 \in S$.

2. $2 \in S$.
3. $(2,1) \in S$.
4. $\{2,1\} \in S$.
5. $\{2,1\} \subset S$.
6. $\{1,2,1\} \subset S$
7. $\{(1,2)\} \subset S$.

2.4. Parte 3.1

Ejercicio 2.4.1 *Dibuja sobre la recta real intervalos* $[-3,0]$, $[-3,0[$ *y* $[-4,3]$ *excepto el 2.*

Ejercicio 2.4.2 *¿Tiene sentido poner* $]-\infty,\infty[$*?*

Ejercicio 2.4.3 *Escribe en forma de intervalo el conjunto de números comprendidos entre -3 y 5.*

Ejercicio 2.4.4 *Indica cuáles de los siguientes conjuntos son conjuntos vacíos:*

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : 6 \leq x \leq 5\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{R} : -6 \leq x < 5\}$.

c) $C = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < 2\}$.

2.5. Parte 3.2

Ejercicio 2.5.1 *Expresar como un único intervalo las siguientes uniones e intersecciones de intervalos:*

$$
\begin{array}{lcccc}
a) & [-3,1[& \cup &]0,2] & = \\
b) & [-3,1[& \cap &]0,2] & = \\
c) & [-3,0[& \cup &]0,2] & = \\
d) & [-3,0[& \cap &]0,2] & = \\
e) & [-3,0[& \cup & [0,2] & =
\end{array}
$$

2.6. Parte 4

Ejercicio 2.6.1 *Dados los conjuntos* $A = \{1, 3, \sqrt{6}\}$ *y* $B = \{-3, 0, 7\}$ *indica los elementos del conjunto* $A \times B$. *¿Es es mismo conjunto que* $B \times A$*?*

Ejercicio 2.6.2 *Di si son ciertas o no las siguientes afirmaciones (ayuda: ¡dibuja primero los conjuntos!):*

1. $[0, 2] \times [1, 3] = [1, 3] \times [0, 2]$.
2. $([0, 2] \times [1, 3]) \cup ([1, 3] \times [0, 2]) = [0, 3] \times [0, 3]$.
3. $([0, 2] \times [1, 3]) \cap ([1, 3] \times [0, 2]) = [1, 2] \times [1, 2]$.

Ejercicio 2.6.3 *A la vista del ejercicio anterior, demuestra ahora en general que si* A_1, A_2, B_1 *y* B_2 *son conjuntos cualesquiera, entonces:*

1. $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \subseteq (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$.
2. $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

2.7. Parte 5

Ejercicio 2.7.1 *Demostrar haciendo servir símbolos lógicos las siguientes afirmaciones:*

1. *Todo múltiplo de* 4 *es un número primo.*
2. *Si* 2 *es par entonces todos los números enteros son pares.*
3. *Todo número mayor que* 2 *es la suma de dos números primos.*

Para finalizar, escribir también la negación de las afirmaciones anteriores.

Ejercicio 2.7.2 *Sea* $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Escribe con símbolos y determinar si son o no verdad las siguientes afirmaciones:*

1. *Hay un elemento que es mayor que todos.*
2. *Existe un único elemento tal que su cuadrado es* 4.
3. *Para cada elemento existe otro que es menor o igual que él mismo.*

Ejercicio 2.7.3 *Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinar si son o no ciertas las siguientes afirmaciones:*

1. $\exists x \in A / x + 3 = 10$.
2. $\forall x \in A$ *se cumple que* $x + 3 < 10$.

Para finalizar, escribir también la negación de las afirmaciones anteriores.

Ejercicio 2.7.4 *Determinar si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:*

1. $\forall x \in \mathbb{R}\; x < 0 \;\Rightarrow\; x < 3$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} /\; x^2 + y^2 = 1$.

Ejercicio 2.7.5 *Di si los siguientes conjuntos son o no especiales.*

1. $\emptyset$.
2. $\{0, 1\}$.
3. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$.
4. $\{1 - \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\}$.

Ejercicio 2.7.6 *Escribe la negación de la condición que aparece en la Definición de conjunto "especial".*

Ejercicio 2.7.7 *Di si los siguientes conjuntos son o no raros.*

1. $\emptyset$.
2. $\{0, 1\}$.
3. $\mathbb{N}$.
4. $\mathbb{Q}$.
5. $\{\frac{n}{5} / n \in \mathbb{N}\} = \{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \frac{6}{5}, \dots\}$.
6. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

Ejercicio 2.7.8 *Escribe la negación de la condición que aparece en la Definición de conjunto "raro".*

2.8. Cuestionario final 2

1. Dado el conjunto $S = \{1, 2, \{1, 2\}, 3, \{2, 3\}\}$, di si las siguientes expresiones son o no ciertas:

   i) $\emptyset \subset S$,

   ii) $\emptyset \in S$,

   iii) $\{1, 2, \{1, 2\}, \{2, 3\}\} \subset S$.

   a) V, F, V.
   b) F, V, F.
   c) V, V, F.

2. Di si las siguientes expresiones son o no ciertas:

   i) $\emptyset \in \emptyset$,

   ii) $\emptyset \subseteq \emptyset$,

   iii) $\emptyset \subset \emptyset$.

   a) F, F, V.
   b) F, V, F.
   c) V, V, F.

3. Consideremos los conjuntos $A = \{1, 2\}$ y $B = \{\{1, 2\}\}$. Di si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:

   i) $\emptyset \subset B$,

   ii) $A \subseteq A$,

   iii) $A \in B$.

   a) F, F, V.
   b) V, V, V.
   c) V, V, F.

4. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $]1, 4[$?

   a) Infinitos.
   b) 2.
   c) Depende del conjunto de números en el que estemos trabajando: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R} \ldots$

5. En algunos textos los intervalos abiertos se denotan con paréntesis en vez de llaves. Por ejemplo, en vez de escribir $]1, 2[$, escriben $(1, 2)$. ¿Cuál es el problema de esta notación?

a) Se puede confundir el conjunto abierto con el punto en el plano.

b) No hay problema.

c) Depende del conjunto de números en el que estemos trabajando: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R} \ldots$

6. Expresar como un único intervalo las siguientes uniones e intersecciones de intervalos:

   i) $[-3, 0[\cap[0, 2]$,

   ii) $[-3, 0] \cup [0, 2]$,

   iii) $[-3, 0] \cap [0, 2]$.

a) $]-3, 2[,\ [-3, 2], \{0\}$.

b) $\{0\},\ [-3, 2], \{2\}$.

c) $\emptyset,\ [-3, 2], \{0\}$.

7. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinar si son o no ciertas las siguientes afirmaciones:

   i) $\exists x \in A / x + 3 < 7$,

   ii) $\exists! x \in A / x^2 - 3x + 2 = 0$.

a) V, V.

b) V, F.

c) F, F.

8. ¿El conjunto $\mathbb{N}$ es *especial*?

a) V.

b) F.

9. ¿El conjunto $[0, 1[\, \cap\, \mathbb{Q}$ es *raro*?

a) V.

b) F.

10. Determinar si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:

    i) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} /\ x^2 + y^2 = 2$.

    ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x < y\ \Rightarrow\ 2y < 10$.

a) F, V.

b) V, F.

c) F, F.

2.9. Soluciones del cuestionario final 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	b	b	c	a	c	b	a	a	c

3. ¿Qué es una demostración?

3.1. Parte 1

Ejercicio 3.1.1 *Demuestra por reducción al absurdo que* $x^2 + 4 \geq 4x$.

3.2. Parte 2

Ejercicio 3.2.1 *Demuestra que* $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \ldots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}.$$

Ejercicio 3.2.2 *Demuestra por inducción que si* $n \in \mathbb{N}$ *es impar,* $7^n + 1$ *es divisible por 8.*

Ejercicio 3.2.3 *Dados* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in]-1, 0]$, *probar que*

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Ejercicio 3.2.4 *Prueba que para todo número impar* $n \in \mathbb{N},\ n^2 - 1$ *es divisible entre 8.*

Ejercicio 3.2.5 *Prueba que para todo número natural* $n \geq 3$, $n! \geq 3^{n-2}$.

Ejercicio 3.2.6 *Demuestra que para todo número natural* $n \geq 1,\ F_n < 2^n$, *siendo* F_n *la sucesión de Fibonacci definida de la forma:*

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 1$$

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1},\ n \geq 3.$$

3.3. Parte 3

Ejercicio 3.3.1 *Demuestra por inducción que si* n *es un entero positivo, entonces* $n(n+1)$ *es divisible por 2 .*

Ejercicio 3.3.2 *Prueba que* $(3n)! > 2^{6n-4}$ *para todo número natural* n.

Ejercicio 3.3.3 *Demuestra por inducción que* $\forall n \geq 1$*:*

$$2 + 6 + 10 + \ldots + (4n–2) = 2n^2.$$

Ejercicio 3.3.4 *Demuestra que si* n *es un entero positivo, entonces* $a^{2n}–b^{2n}$ *es divisible por* $a + b$.

Ejercicio 3.3.5 *Demuestra por inducción que* $n^3 - n$ *es divisible por 3 para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3.3.6 *Demuestra que la desigualdad de Bernuilli*

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

se cumple para cualquier $a \geq -1$ *y para todo* n *natural.*

Ejercicio 3.3.7 *Demuestra, utilizando la hipótesis de inducción, la validez de las siguientes igualdades:*

a) $\sum_{j=1}^{n} 5^{j-1} = \frac{5^n-1}{4}$.

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

Ejercicio 3.3.8 *Demuestra por inducción que para todo número natural* $n > 1$, $(n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$.

Ejercicio 3.3.9 *Demuestra por inducción que para* $n > 0$*, la derivada de* $f(x) = x^n$ *es* $f'(x) = x^{n-1}$.

3.4. Parte 4

3.5. Parte 5 y 6

Ejercicio 3.5.1 *Este ejercicio es todo un clásico. Vamos a demostrar que* $2 = 1$*, ¿dónde está el error?*

$$\begin{aligned} a &= b \\ a^2 &= ab \\ a^2 - b^2 &= ab - b^2 \\ (a - b)(a + b) &= b(a - b) \\ a + b &= b \\ b + b &= b \\ 2b &= b \\ 2 &= 1. \end{aligned}$$

Ejercicio 3.5.2 *Vamos a demostrar nuevamente que* $2 = 1$. *Sabemos que para* $x \neq 0$,

$$x = 1 + 1 + \ldots + 1.$$

Multiplicando ambos lados por x obtenemos

$$x^2 = x + x + \ldots + x.$$

ahora, derivando con respecto a x,

$$2x = 1 + 1 + \ldots + 1.$$

Volviendo a la primera línea vemos que el lado derecho de la igualdad es x, *y por lo tanto,*

$$2x = x.$$

Dado que $x \neq 0$, *dividiendo ambos lados por* x *obtenemos que* $2 = 1 \ldots$ *¿Dónde está el error?*

3.6. Cuestionario final 3

1. Determinar si el producto de 3 números impares consecutivos es siempre divisible por 6.

   a) V.
   b) F.

2. La suma de los n primeros números naturales impares es:

   a) n^2.
   b) $n+1$.
   c) $2n+3$.

3. ¿Es cierto que para cada entero positivo n se cumple que $f(n) = n^2 - n + 17$ es un número primo?

   a) V.
   b) F.

4. Si a y b son números irracionales, entonces $a \cdot b$ puede ser racional o irracional.

   a) V.
   b) F.

5. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$
   calcula A^{n+1}.

   a) $A^{n+1} = 2^{n+1}A$.
   b) $A^{n+1} = 2^{n-1}A$.
   c) $A^{n+1} = 2^{n}A$.

6. ¿Es cierto que para todo $n \in \mathbb{N},\ n^2 - 3n - 1 > 0$.

   a) V.
   b) F.

7. Calcula el determinante de orden $n+1$:
$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 2x & x^2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2x & x^2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2x \end{vmatrix}.$$

   a) $D_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1}$.

b) $D_{n+1}(x) = nx^{n+1}$.

c) $D_{n+1}(x) = (n+1)x^n$.

8. Sabiendo una progresión aritmética $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es una sucesión en la que se pasa de un término al siguiente sumando un mismo número, d, llamado diferencia de la progresión, calcula la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética.

   a) $S_n = a_1 + nd$.

   b) $S_n = a_1 + (n-1)d$.

   c) $S_n = a_1 + \frac{(n+1)}{2}d$.

9. Calcula el siguiente sumatorio:
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

   a) $S_n = 1 + \frac{1}{n}$.

   b) $S_n = \frac{1}{n+1}$.

   c) $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

10. Calcula la siguiente suma:
$$3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 2\sum_{k=0}^{n} k^3 - \sum_{k=0}^{n} k.$$

    a) $\frac{(n-1)n(n+1)}{2}$.

    b) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

    c) $\frac{n^2(n+1)(n+3)}{2}$.

3.7. Soluciones del cuestionario final 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	a	b	a	c	b	a	b	c	c

4. Los números complejos

4.1. Parte 1

Presentación del Módulo

4.2. Parte 2

Ejercicio 4.2.1 *Demostrar las siguientes propiedades de la suma y el producto de números complejos:*

1. *Asociativa (para la suma y el producto).*
2. *Conmutativa (para la suma y el producto).*
3. *Distributiva del producto respecto de la suma.*
4. *Existencia de elemento neutro para la suma:* $(0, 0)$.
5. *Existencia de elemento neutro para el producto:* $(1, 0)$.
6. *Elemento opuesto para la suma:* $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$.
7. *Elemento inverso para el producto: Si* $(a, b) \neq (0, 0)$*, entonces*

$$(a, b) \times \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0).$$

Ejercicio 4.2.2 *Dados* $z = x + yi, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$*, demuestra las siguientes propiedades:*

1. $\overline{z} \cdot z = x^2 + y^2$.
2. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$.
3. $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)$.
4. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$.
5. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

6. $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z_2 \neq 0.$

Ejercicio 4.2.3 *Dados $z = 1 + 3i,\ w = 2 - i$ y $t = 1 + 2i$ realiza las siguientes operaciones:*

1. $z + w - 2t =$
2. $z \cdot w - 2t =$
3. $\frac{w}{t} =$

Ejercicio 4.2.4 *Efectúa las siguientes operaciones de números complejos:*

1. $(5 + 15i) + 2(20 - 2i)$.
2. $\frac{1}{3} + \frac{5}{3}i - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$.
3. $3i + i(2 + i)$.
4. $(-10 - 8i) + (1 + i)(1 - i)$.

Ejercicio 4.2.5 *Halla el número complejo z que satisface la ecuación $(7 + i)z + (2 + 3i) = 18 + 5i$.*

Ejercicio 4.2.6 *Dados los números complejos $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 3i$ y $z_3 = 1 - 2i$, realiza las siguientes operaciones:*

1. $z_1 \cdot z_3$.
2. $z_2 \cdot z_3$.
3. z_1/z_2.
4. $2z_2 - 3z_3$.

Ejercicio 4.2.7 *Demuestra que si z es un número complejo tal que $z = \overline{z}$, entonces z debe ser un número real.*

Ejercicio 4.2.8 *Calcula*

1. $(3 + i)^2 - (2 + 2i)$.
2. $[(5 + 2i) - (4 - i)]/(6 + 5i)$.
3. $\overline{(-5 - 2i) + 6}$.
4. $(6 + 2i)(1 - i)/(1 + 2i)^2$.
5. $5(2 - i) + 6\left(7 + \frac{1}{2i}\right))$.
6. $(3 - i) + (4 + 8i)[(5 + 3i) - (6 + 7i)]$.
7. $5(\overline{(3 + i)} + (3 + 2i))(1 + i)$.

Ejercicio 4.2.9 *Demuestra que si $z = a + ib$, entonces $a = \frac{z+\overline{z}}{2}$ y $b = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.*

4.3. Parte 3 y 3.1

Ejercicio 4.3.1 *Expresa los siguientes números complejos en forma polar y en forma trigonométrica:*

1. $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$.
2. $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$.
3. $z = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$.
4. $z = 2 + 3i$.

4.4. Parte 4

Ejercicio 4.4.1 *Usando la forma polar, efectúa las siguientes operaciones:*

1. $(1+i)^4$.
2. $(\sqrt{3}+i)^3$.
3. $\frac{4i}{2+i}$.

4.5. Parte 5

Ejercicio 4.5.1 *Calcula las raíces cúbicas de los siguientes números complejos:*

1. $z = -1 + i$.
2. $z = 1 + \sqrt{3}i$.
3. $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

Ejercicio 4.5.2 *Resuelve las siguientes ecuaciones en números complejos:*

1. $z^3 + 30 = 3$.
2. $z^5 + 32 = 0$.

4.6. Cuestionario final 4

1. ¿Qué vale i^{235}?

   a) $-i$,

   b) 1,

   c) i.

2. Efectúa la siguiente operación $(2+3i)(1-i)-2(2+i)$.

   a) $1-i$.

   b) $2+i$

   c) $-5-i$.

3. Simplifica al máximo la siguiente expresión

$$\frac{5+10i}{3-4i}+\frac{2-i}{i}.$$

   a) $1+i$.

   b) $\frac{-6i-8}{3i+4}$.

   c) -2.

4. Calcula el módulo y el argumento principal de $z=3+3i$.

   a) $r=\sqrt{18}$ y $\theta=\frac{\pi}{4}$.

   b) $r=\sqrt{12}$ y $\theta=\frac{\pi}{4}$.

   c) $r=\sqrt{6}$ y $\theta=\pi$.

5. Expresa en formal polar y trigonométrica el complejo $z=1-\sqrt{3}i$.

   a) $z=2_{\frac{5\pi}{3}}=2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$.

   b) $z=2_{\frac{7\pi}{4}}=2(\cos\frac{5\pi}{3}-i\sin\frac{5\pi}{3})$.

   c) $z=\sqrt{10}_{\frac{\pi}{4}}=2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$.

6. Calcula el argumento principal del complejo $\frac{3}{\sqrt{3}+i}$.

   a) $\frac{\pi}{4}$.

   b) $\frac{\pi}{6}$.

   c) $\frac{\pi}{2}$.

7. Calcula el valor de a para que el número complejo $\frac{a+i}{1-i}$ tenga igual su parte real y su parte imaginaria.

   a) $a=2$.

   b) $a=1$.

c) $a = \frac{1}{3}$.

8. Dados los números complejos $z = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ y $w = 3(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ calcula $z \cdot w$.

   a) $6(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$.

   b) -6.

   c) $6(\cos\frac{\pi^2}{4} + i\sin\frac{\pi^2}{4})$.

9. Dado el número complejo $z = 2(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})$, ¿qué vale z^4?

   a) 16.

   b) 8

   c) $16i$.

10. Resuelve la ecuación $x^3 + 125 = 0$.

    a) $5_{120^o},\ 5_{240^o}$.

    b) $125_{0^o},\ 125_{120^o},\ 125_{240^o}$.

    c) $5_{0^o},\ 5_{120^o},\ 5_{240^o}$.

4.7. Soluciones del cuestionario final 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	a	c	a	a	b	c	b	c	b