Curso cero del grado en matemáticas

Castellano. Curso 2018-2019

Índice general

Introducción

A todos los estudiantes de matemáticas nos ha pasado lo mismo. Las primeras semanas en la universidad íbamos muy desorientados. No sólo por el cambio personal que representa estar en la universidad, sino, sobre todo, por los contenidos que se empiezan a impartir en las nuevas aulas. Los problemas que pueden aparecer son múltiples. Entre los símbolos que se utilizan, el nuevo lenguaje casi críptico, la formalización de las argumentaciones, la abstracción, etc. entre todo esto, es bastante complicado que alguien pueda sacar algo de sentido de lo que le explican esas primeras semanas. Sólo a medida que pasan unas semanas y empiezas asimilar algunos de los conceptos recibidos, comienzas a ver la luz. Unos lo hacen antes que otros. Otros, desgraciadamente, no lo llegan a conseguir.

El objetivo de este curso cero no es suplir aquellas carencias que podáis tener vosotros, los nuevos estudiantes de matemáticas, sino mostrar cómo se trabaja a lo largo del curso, cómo se hacen las cosas en matemáticas. Cómo se hace en concreto en el grado en Matemáticas de la Universidad de Valencia, pero por extensión, cómo se hace en cualquier grado en matemáticas.

Las matemáticas no son sólo números y fórmulas. Son mucho más que eso. Son abstracción y deducción. Son saber encontrar lo fundamental de una serie de ejemplos, de situaciones diversas. Por eso, una de las características de las matemáticas es su Universalidad. Esto significa que la misma abstracción aplica en muchas situaciones diversas. Y esa es una de las competencias fundamentales de los matemáticos. Saben determinar cuál es la raíz del problema, y saben identificar cuál es el método de resolución más adecuado.

Por eso en este curso cero haremos hincapié sobre todo en cómo se llega a resultados matemáticos mediante la abstracción y la concatenación de argumentos. Sobre todo esto último, cuáles son las técnicas más habituales de demostración matemática: por ejemplo, demostración geométrica, demostración constructiva, demostración por reducción al absurdo o demostración por inducción.

Otra de las características de las matemáticas es su objetividad. Esto quiere decir que los resultados matemáticos son independientes de la interpretación. Una vez se ha deducido un resultado mediante un razonamiento correcto, una demostración, entonces, la propia exactitud del lenguaje matemático, la propia forma de trabajar de los matemáticos, hace que no haya interpretación posible. El resultado es cierto, si se ha podido probar, o bien el enunciado es falso si se ha encontrado un contraejemplo. No hay más. No hay un contexto, o una interpretación, que pueda cambiar esto.

Para ilustrar estas técnicas de demostración veremos algunas demostraciones, clásicas o no, y además intentaremos ponerlas en su contexto histórico. Así, hablaremos del teorema de Pitágoras, del número irracional $\sqrt{2}$ y de la existencia de infinitos números primos. Son demostraciones que tienen sus años, pero esta es otra de las características de esta ciencia, su resistencia, su permanencia en tiempo. Los resultados matemáticos, una vez demostrados, son ciertos siempre. El mismo teorema de Pitágoras, demostrado hace más de 2500 años, sigue con plena validez, y lo seguimos aplicando, y se seguirá aplicando en el futuro, tal como lo pensó en su momento el sabio griego.

Finalmente, el curso lo acabaremos con una introducción a los números complejos que aprovecharemos también para recordar nociones de trigonometría.

Sobre todo, lo que no tenéis que perder es la ilusión que os ha traído a estas aulas. Recordad que en este curso cero... ¡No hay examen! Bueno, casi. Hay unos ejercicios de autoevaluación, pero poca cosa más.

1. Si puedes medir el lado de un cuadrado, no lo podrás hacer con su diagonal

1.1. Un poco de historia

Las demostraciones lo son todo en matemáticas. La manera en que éstas avanzan siempre es deducir un resultado a partir de una hipótesis mediante una serie de razonamientos encadenados. Una de las primeras demostraciones de la historia y posiblemente la que será una de las primeras demostraciones que veréis, es la que afirma que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Lo que es seguro es que cuando apareció esta demostración en Grecia, hace ya más de 2000 años, el enunciado no era ése. Entonces, no podía existir el concepto de número real y, posiblemente, ni el de número irracional. Precisamente es este resultado sobre $\sqrt{2}$ el que motivó que los matemáticos se plantearan la existencia de conjuntos de números más allá de los racionales.

Pitágoras[1] puede ser el iniciador de la ciencia y las matemáticas. Los hay que dicen que el resultado más importante de las matemáticas es el teorema que lleva su nombre. Por cierto, ¿cuál es la demostración del teorema de Pitágoras? Demostraciones de este teorema hay muchas y de diversas procedencias. He visto que hay una muy sencilla que es de un predecesor de Obama en el cargo: James Abram Garfield[2] (1831-1881), el vigésimo presidente de los Estados Unidos. Sólo hace falta una figura para entenderla y recordar cuál es la fórmula del área de un trapecio:

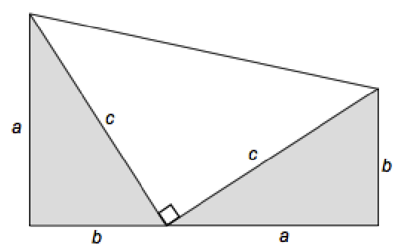


Figura 1.1: Demostración del Teorema de Pitágoras

[1] Pitágoras de Samos, 582 aC - 496 aC.

[2] . . . y que no tiene nada que ver con el famoso felino.

Si observamos la imagen, en este caso tenemos un trapecio de bases a y b y altura $a+b$. Por tanto su área es:

$$A = (a+b)\cdot\frac{a+b}{2} = \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{a^2+2ab+b^2}{2} = ab + \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Ahora bien, este trapecio lo podemos descomponer como la unión de tres triángulos rectángulos y en ese caso, su área sería la suma de las áreas de los triángulos:

$$A = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} = ab + \frac{c^2}{2}.$$

Igualando las dos áreas, obtenemos:

$$ab + \frac{a^2+b^2}{2} = ab + \frac{c^2}{2}.$$

Finalmente, simplificando obtenemos la famosa fórmula del Teorema de Pitágoras

$$a^2+b^2=c^2.$$

Pitágoras y su escuela (los pitagóricos) elaboraron toda una teoría de explicación del universo basada en los números naturales, y por extensión, en los racionales, de los que decían que eran la esencia de todo. Sólo con los números naturales, afirmaban, se podía explicar todo, desde el número de planetas en el sistema solar a la harmonía musical. Sin embargo, se encontraron con algunos obstáculos. El primero de ellos fue expresar la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado la unidad mediante un número racional.

Por el teorema de Pitágoras (¿de quién si no?) sabemos que el cuadrado de la longitud de la diagonal (la hipotenusa del triángulo rectángulo) tiene que ser igual a 2. Por eso, diremos ahora que la longitud es $\sqrt{2}$. No nos adelantemos, pero los pitagóricos, que por entonces eran una secta secreta, estaban convencidos de que la longitud de la diagonal tenía que ser el cociente de números naturales. Se tenía que poder medir utilizando sólo números naturales.

Para poder entender la manera en que se llegó al resultado negativo, es necesario recordar primero cómo se miden longitudes. Medir no es más que comparar una longitud, que hace el paper de unidad, con otra. Veamos la siguiente imagen

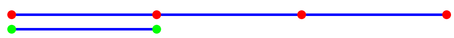


Figura 1.2: Tomando como unidad el segmento inferior, el superior tiene una longitud de 3 unidades

Si la relación entre los segmentos es exacta, como en el ejemplo anterior, entonces no hay problema, pero esto no siempre es así. Por ejemplo, el segmento a medir podría ser de longitud inferior a la unidad. Entonces, ¿qué se puede hacer?

Vamos a ver cómo podemos medir un segmento de longitud exactamente igual a la mitad de la unidad. La solución consiste en colocar los segmentos, no paralelos como antes, sino en forma oblicua, y además, poner dos copias consecutivas de los segmentos unidad. A continuación aplicaremos el Teorema de Tales[3]:

[3] Tales de Mileto, no de Tales de la Sierra de Espadán. Por cierto, si tenéis ocasión buscad "Teorema de Thales, opus 48 de Johann Sebastian Mastropiero".

Teorema 1.1 Teorema de Tales: *Los segmentos determinados por rectas paralelas en dos rectas concurrentes son proporcionales.* [4]

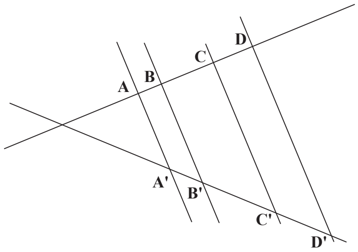


Figura 1.3: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BD}{B'D'} = \dots$

Pues bien, trazaremos una recta que una los extremos y después trazamos una paralela que pasa por el extremo del segmento unidad.

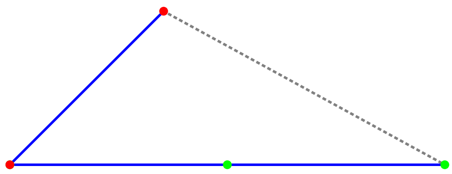


Figura 1.4: Ahora el segmento superior no tiene una longitud que sea múltiplo entero del inferior

Esta paralela determina el punto medio del otro segmento.

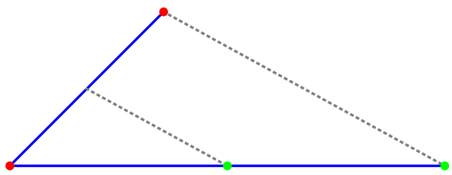


Figura 1.5: Ahora el segmento superior no tiene una longitud que sea múltiplo entero del inferior

Análogamente, se pueden determinar las longitudes un tercio o dos tercios.

Y así se se pueden medir las longitudes de la forma $\frac{p}{q}$ donde p y q son números naturales no nulos, $p < q$ y sin divisores en común.

Otro ejemplo: Medir la longitud $2\ \frac{1}{4}$. Primero construimos un segmento de longitud 2 y después volvemos a hacer el proceso correspondiente a la construcción de la longitud $\frac{1}{4}$. Si aplicamos ahora el Teorema de Tales, es decir, trazamos una recta que una los extremos:

[4]La demostración de este teorema, que no veremos aquí, está basada en los resultados sobre triángulos semejantes.

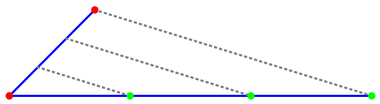
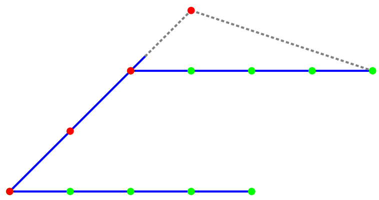
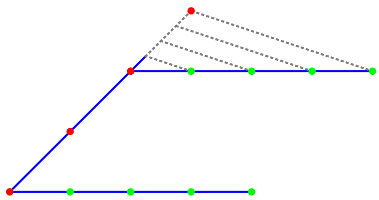


Figura 1.6: Ahora el segmento superior no tiene una longitud que sea múltiplo entero del inferior



y después trazamos paralelas:

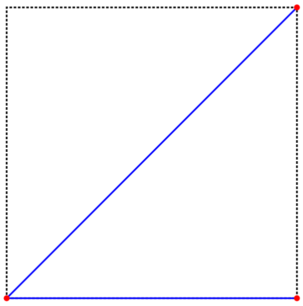


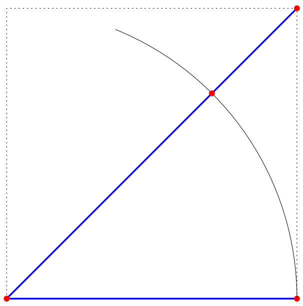
Se observa que el trozo que sobrepasaba antes las 2 unidades está en relación 1 a 4, por tanto, la longitud del trozo es la cuarta parte de la unidad. Y la longitud de todo el segmento que queríamos medir será 2 unidades y un cuarto.

1.2. $\sqrt{2}$ es inconmensurable

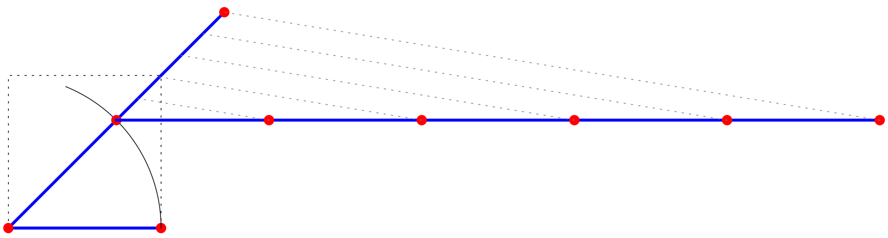
Lo que plantearon los griegos es medir la diagonal de un cuadrado tomando como unidad el lado del mismo.

Es evidente que la longitud de la diagonal es mayor que la del lado:

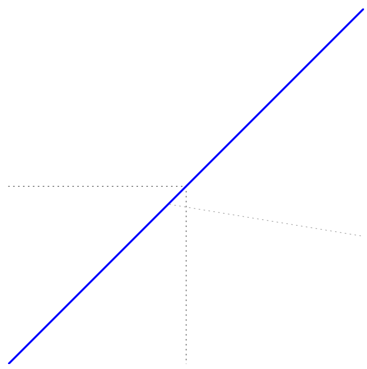




Podríamos intentar medir la longitud haciendo construcciones similares a las anteriores. Seguro que haríamos una construcción similar a esta:



Según esta figura, la longitud de la diagonal parece ser $1 + \frac{2}{5} = 1{,}4$. Ahora bien, si hacemos una ampliación…



Vemos que la diagonal es un poco más larga que $1{,}4$. O de otra manera, $1{,}4$ no puede ser el resultado porque su cuadrado, que es $1{,}96$, no es igual a 2.

Podríamos afinar un poco más considerando los números racionales $1{,}41 = \frac{141}{100}$ o $1{,}414 = \frac{1414}{1000} = \frac{707}{500}$, etc., pero los cuadrados de todos estos números nunca es igual a 2. Nunca alcanzaríamos, por tanto, la longitud exacta. Y éste es el resultado sorprendente: una construcción geométrica sencilla da lugar a objetos que no se pueden medir.

Si la diagonal se pudiera medir según el proceso visto antes, esto equivaldría a que la longitud sería de la forma $\frac{p}{q}$ con p y q números naturales no nulos, y además sin divisores en común. Es decir, sería un numero de los que ahora llamamos racionales. Por tanto, decir que la diagonal no es medible es equivalente a decir que la raíz cuadrada de 2 no es un número racional, es irracional. Cosa que contradice la idea central del pensamiento de Pitágoras y de su escuela.

En esto, uno de los discípulos de Pitágoras, de nombre Hípaso de Metaponto[5], demostró que la diagonal de un cuadrado de lado la unidad es inconmensurable. Esto representó un descubrimiento revolucionario dado que hacía tambalear la explicación pitagórica del mundo.

Según la leyenda, Hípaso pagó con su vida su descubrimiento. Otros compañeros de la escuela pitagórica le lanzaron por la borda del barco en el que viajaban al enseñarles Hípaso su demostración. Otras fuentes dicen que el propio Hípaso se suicidó. El cualquier caso, bien podríamos decir que fue el primer mártir de las matemáticas[6].

Demostración. La demostración[7] es por la técnica de *reducción al absurdo*. Supongamos que fuera cierta, que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

[5]Metaponto es una población italiana que fue colonia griega. Está en el golfo de Tarent.

[6]Como nota trágica podemos decir que James Abram Garfield, el presidente de los Estados Unidos del que hemos visto antes su demostración del Teorema de Pitágoras, también murió asesinado. Ahora bien, en esta ocasión su muerte no tuvo nada que ver con la demostración que había descubierto, sino que fue por razones políticas.

[7]La demostración data alrededor del año 500 a.C. Por tanto, ¡tiene cerca de 2500 años! Es un ejemplo de la *resistencia* de las matemáticas. Una vez demostrado el resultado, éste ya es para siempre.

con p y q números naturales no nulos y sin divisores en común. Atención a esta última condición porque resulta fundamental para la argumentación. Entonces, elevando al cuadrado ambos miembros, tenemos que

$$2 = \frac{p^2}{q^2}.$$

Equivalentemente,

$$2q^2 = p^2. \tag{1.1}$$

Esto implica que 2 tiene que ser un divisor de p^2, y por tanto, también de p. Esta afirmación puede ser que necesite un poco más de explicación. Una afirmación equivalente sería: si p^2 es un número par, entonces p también sería un número par. En efecto, si p no fuera par, entonces sería de la forma $p = 2k + 1$, con $k \in \mathbb{N}$. En este caso,

$$p^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

tampoco sería par. Por tanto p tiene que ser par.

Es decir, podemos escribir p como $p = 2k$ con k número natural. Sustituyendo p en la ecuación (1.1), tenemos que

$$2q^2 = (2k)^2 = 4k^2.$$

Simplificando,

$$q^2 = 2k^2,$$

pero esto implica ahora que 2 también divide a q^2 y por tanto a q. Y ya hemos llegado a una contradicción (⨳) porque acabamos de demostrar que 2 divide tanto a p como a q y habíamos dicho que p y q eran números naturales no nulos y sin divisores comunes. $\square$

Esto no es más que un ejemplo de cómo se formaliza una demostración, de cuáles son los símbolos que se hacen servir y de cómo se escriben las ideas en términos matemáticos. ¿Cómo se adquiere esta habilidad? Sólo hay una forma: escribir uno mismo las demostraciones una y otra vez. Ahora bien, no de una manera memorística, sino recordando en cada paso cuál es la idea, cuál es el razonamiento, y después, transcribir el razonamiento en símbolos.

1.3. Demostraciones constructivas

Acabamos de ver una demostración por reducción al absurdo, pero hay más técnicas de demostración. Para acabar este primer capítulo, y dado que está relacionado con los números irracionales, veremos una demostración constructiva y otra no constructiva.

Las demostraciones constructivas son aquéllas que resuelven la existencia de algún objeto matemático enseñándolo y comprobando que verifica lo que se pedía.

La siguiente demostración constructiva es muy sencilla:

Proposición 1.3.1 *Existen dos números irracionales diferentes tal que su producto es un número racional positivo.*

Demostración. Sean $x = \sqrt{2}$ y $y = 3\sqrt{2}$. Está claro que tanto x como y son irracionales[8]. Su producto es $x\,y = 3$ que es un racional positivo. $\square$

Ya lo veis. La demostración era tan sencilla como dar esos dos números que verifican lo que se pide. Además, notad que la construcción no es única.

El contrario de una demostración constructiva es una "no constructiva", de idea feliz. La existencia del objeto es el resultado de un proceso, de un algoritmo. Veamos un ejemplo de un enunciado similar al anterior.

Proposición 1.3.2 *Existen dos números irracionales diferentes tal que el primero elevado al segundo es un número racional positivo.*

Demostración. Consideremos[9] $x = \sqrt{3}$ y $y = \sqrt{2}$. Está claro que tanto x como y son irracionales y distintos.

Si x^y fuera racional[10] entonces ya lo tendríamos. Si no lo es, si $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$ es irracional, entonces consideramos $x = (\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$ y dejamos $y = \sqrt{2}$. En este caso, ahora sí que tenemos que

$$x^y = \left((\sqrt{3})^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{3})^{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = (\sqrt{3})^2 = 3.$$

Por tanto, x^y ahora sí que sería un racional. $\square$

Notad que no hemos dado cuáles son los números que verifican la condición. Sólo hemos demostrado que uno de los pares

$$(\sqrt{3}, \sqrt{2}) \qquad \text{ó} \qquad ((\sqrt{3})^{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$$

es la solución del problema.

---

[8] ¿Por qué lo es y?

[9] Se ha de notar la diferencia entre el principio de la demostración anterior y este principio. Entonces poníamos "sean" porque ya sabíamos que sería la construcción definitiva. Ahora sólo escribimos "consideremos" porque sólo será el principio de un proceso.

[10] Y no estamos diciendo que lo sea.

2. Cuestiones de notación sobre conjuntos y elementos

2.1. Notación

Símbolo	Significado
$\forall$	para todo
$\exists$	existe
$\exists\,!$, $\exists^*$	existe un único
: , /	tal que
$\Rightarrow$	implica, entonces
$\Leftrightarrow$, sii	si y sólo si
$\in$	pertenece
$\notin$	no pertenece
$\subseteq$	contenido o igual
$\subset$	contenido
$\cup$	unión
$\cap$	intersección
$-$, $\setminus$	diferencia de conjuntos
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$x_1 + x_2 + \cdots + x_n$
$\prod_{i=1}^{n} x_i$	$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$
$\times_{i=1}^{n} A_i$	$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$
$\mathbb{N}$	números naturales
$\mathbb{Z}$	números enteros
$\mathbb{Q}$	números racionales
$\mathbb{R}$	números reales
$\mathbb{C}$	números complejos
$\aleph_0$	Aleph cero

Letra	Minúscula	Mayúscula
alfa	α	
beta	β	
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
épsilon	ϵ	
zeta	θ	Θ
eta	η	
lambda	λ	Λ
mu	μ	
nu	ν	
xi	ξ	Ξ
pi	π	Π
ro	ρ	
sigma	σ	Σ
kappa	κ	
tau	τ	
fi	φ	Φ
ji	χ	
psi	ψ	Ψ
omega	ω	Ω

Si antes hemos hablado fundamentalmente del papel que tienen los matemáticos griegos en los momentos iniciales de las matemáticas, con respecto a la teoría de conjuntos el matemático fundacional fue Georg Cantor (1845-1918). Él fue quien puso los fundamentos de la cardinalidad de conjuntos y la noción de conjunto bien ordenado. Por ejemplo, demostró que aunque el conjunto de los números reales es un conjunto infinito de elementos es mayor que el conjunto de los naturales.

Desgraciadamente, tal y como le pasó a Hípaso de Metaponto, sus descubrimientos también le causaron muchos problemas. El trabajo de Cantor encontró resistencia por parte de algunos importantes matemáticos contemporáneos que, si bien no lo lanzaron por la borda, si que le hicieron la vida académica muy complicada. Puede ser a raíz de eso que Cantor sufrió frecuentes ataques de depresión a lo largo de toda su vida. Finalmente murió en un hospital psiquiátrico.

2.2. Conjuntos

Un conjunto es una colección bien definida de objetos distintos. Los objetos que forman el conjunto son sus elementos.

Los conjuntos se denotan, por convenio, con letras mayúsculas.

Hay dos maneras de definir un conjunto:

Describiendo el conjunto: Sea S el conjunto de los números naturales positivos y menores estrictamente que 5:

$$S = \{n \in \mathbb{N}\,|1 \leq n < 5\}.$$

O por enumeración, diciendo explícitamente quiénes son sus elementos:

$$S = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Fijaros que en los dos casos hemos puesto los elementos entre llaves $\{\ \ \}$ y los elementos separados por comas. Así, $\{1, 2\}$ es el conjunto que tiene por elementos los números naturales 1 y 2, mientras que $(1, 2)$ denota el punto de $\mathbb{R}^2$ de coordenadas 1 y 2.

El orden en que aparecen los elementos es indiferente. Los conjuntos $\{1, 2\}$ y $\{2, 1\}$ son el mismo conjunto, mientras que $(1, 2)$ y $(2, 1)$ son puntos diferentes.

La relación de pertenencia se denota por el signo $\in$ y la no pertenencia por $\notin$: por ejemplo, dado $S = \{1, 2, 3, 4\}$ tenemos que $2 \in S$ pero $0 \notin S$.

El conjunto que no tiene ningún elemento se llama conjunto vacío y se denota por $\emptyset$.

Un conjunto A se dice que es un subconjunto de otro conjunto B si todo elemento de A también lo es de B. Cuando pasa esto decimos que A está incluido en B y lo denotamos por $A \subset B$.

Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si todo elemento de A lo es también de B y viceversa. Es decir, si $A \subset B$ y $B \subset A$. Lo denotaremos por $A = B$.

Un conjunto puede tener como elementos a otros conjuntos. Por ejemplo:

$$S = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2\}, \{1\}, 1, \emptyset\}.$$

S es un conjunto con 6 elementos.

El número de elementos de un conjunto se dice *cardinal* del conjunto. El cardinal puede ser un número natural y en este caso el conjunto se dice que es finito, o puede ser ∞ si el conjunto tiene infinitos elementos.

Si el cardinal de un conjunto es ∞, entonces aún podemos distinguir entre los conjuntos que tienen tantos elementos como tiene el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, en este caso se dice que son conjuntos numerables, o lo conjuntos que aún tienen más elementos. En este caso se dice que son conjuntos no numerables.

2.3. Conjuntos de números

- Los números naturales:
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$
A veces, y no os asustéis por eso, hay matemáticos que incluyen también el cero en el conjunto de los números naturales. Así, también os podéis encontrar con libros, manuales, apuntes, etc. que ponen
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$
En este caso, cuando se quiere trabajar específicamente con los números naturales positivos, entonces estos se denotan por
$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}.$$
Éste es un hecho muy común. Diferentes áreas de las matemáticas hacen servir diferentes convenios. No hay mayor problema que el de saber en cada momento cuál es el convenio que se está utilizando.
- Los números enteros:
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$
- Los números racionales:
$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}.$$
- Los números reales, la construcción de la cual es sencilla,
$$\mathbb{R}.$$
Números reales no racionales son, por ejemplo,
$$\sqrt{2}, \sqrt{5}, \pi, e.$$
- Los números complejos:
$$\mathbb{C}.$$

2.4. Los cuantificadores

El cuantificador universal: que se denota por el símbolo "$\forall$" y que se lee "para todo".

Y el cuantificador existencial: que se denota por el símbolo "$\exists$" y que se lee "existe".

A la vista de estos símbolos puede ser que os preguntéis por qué los matemáticos escribimos "al revés". Los símbolos son sólo abreviaturas, condensaciones de una idea en una grafía sencilla. Así, en vez de escribir diversas veces las expresiones "para todo..." y "existe un..." se buscó una manera de abreviarlas. La solución vino de la imprenta. Algún tipógrafo pensó en girar 180 grados los tipos correspondientes a la "a" y a la "e" mayúsculas para abreviar las expresiones que en inglés son "for **a**ll..." y "**e**xists...".

2.5. Intervalos de la recta real

Hay determinados subconjuntos de la recta real que son especiales: los intervalos.
Sean ay b números reales tal que $a \leq b$. Definimos

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\},\\
[a,b[&= \{x \in \mathbb{R}/a \leq x < b\},\\
]a,b] &= \{x \in \mathbb{R}/a < x \leq b\},\\
]a,b[&= \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\},\\
[a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R}/a \leq x\},\\
]a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R}/a < x\},\\
]-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R}/x \leq b\},\\
]-\infty,b[&= \{x \in \mathbb{R}/x < b\}.
\end{aligned}$$

Recordemos que el producto cartesiano de los conjuntos A y B se define como

$$A \times B = \{(a,b) \ / \ a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

2.6. El orden de los cuantificadores es importante

Pues eso, no es lo mismo decir que todo estudiante de la clase tiene una madre (para toda persona de la clase hay una persona, no necesariamente de la propia clase, que es su madre) que decir que hay una persona que es la madre de todos los estudiantes de la clase. Si entender esto en una frase parece sencillo, cuando se escriben afirmaciones utilizando símbolos matemáticos la cosa parece no estar tan clara.

Definición: Un subconjunto $S \subseteq \mathbb{Q}$ se dice que es "*especial*" si

$$\exists r \in \mathbb{Q}^{+} \ / \ \forall x \in S \qquad x + r \in S.$$

Definición 2: Un subconjunto $S \subseteq \mathbb{Q}$ se dice que es "*raro*" si

$$\forall x \in S \qquad \exists r \in \mathbb{Q}^{+} \ / \ x + r \in S.$$

3. ¿Qué es una demostración?

Los números primos han fascinado desde siempre a los matemáticos. Otro de los primeros resultados matemáticos, y por tanto de las primeras demostraciones, es el que afirma que hay infinitos números primos. La demostración es de las que hace servir el método de reducción al absurdo, como en la demostración de que $\sqrt{2}$ es un irracional: supongamos que el resultado no es cierto. Si llegamos a una contradicción al suponer esto, entonces necesariamente el resultado tiene que ser cierto.

Tesis: $\boxed{\text{Hay infinitos números primos.}}$

Los números primos son

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots$$

Los matemáticos griegos probaron que si cogíamos el producto de 2 números primos y le sumamos la unidad, entonces obtenemos otro número primo:

$$2 \cdot 3 + 1 = 7.$$

Lo mismo pasa si cogemos los 3 primeros números primos:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31.$$

O con los 4 primeros números primos:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211.$$

Por tanto, parece que el enunciado (hay infinitos números primos) es cierto, pero …¿Tenemos una demostración?, ¡pues no! Mirad que cuando hemos obtenido el 7 (multiplicando el 2 por 3 y sumando 1) nos hemos “saltado” el 5. Después ha pasado que el resultado, el 7, no es divisible por 5, y así hemos tenido la suerte de que 7 es primo.

En el siguiente paso, el del 31, aún nos hemos saltado más números primos (7, 11, 13, 17, 19, 23 y 29). Y en cada paso nos saltaríamos cada vez más y más. Y cada vez habríamos de comprobar que ninguno de esos números primos divide al construido, porque podría pasar que en una de las construcciones, uno de los números primos que nos saltamos sí que fuera un divisor.

La solución utilizará el método de reducción al absurdo.

Demostración: Por reducción al absurdo. Supongamos que el enunciado no es cierto, es decir, que el conjunto de números primos es finito:

$$P := \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}.$$

Consideremos el número natural construido multiplicando todos estos números primos y después sumando la unidad:

$$m = p_1\, p_2\, \ldots\, p_n + 1.$$

Vamos a comprobar que m también es un número primo. Si no lo fuera, sería divisible por algún número natural, pongamos k, menor que m y mayor que 1. Si k no fuera primo, entonces sería divisible, a su vez, de otro número natural menor. Así, podemos suponer que k es un número primo, que k es uno de los números primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Podemos suponer que $k = p_1$. Ahora bien, si p_1 divide a m, dado que p_1 también divide al producto $p_1 p_2 \ldots p_n$, entonces también tendrá que dividir a la diferencia $m - p_1 p_2 \ldots p_n = 1$. Y aquí está la contradicción, porque los números primos son todos mayores que 1 y, por tanto, no pueden dividir a 1.

Hemos llegado a una contradicción porque hemos supuesto que el enunciado no era cierto. Por tanto, el enunciado tiene que ser cierto.

3.1. La demostración por inducción

Seguramente habréis hecho alguna vez esa construcción con fichas de dominó en forma de tren. Se ponen derechas en fila, el linea recta o haciendo alguna curva, dejando la distancia suficiente entre ellas. Una vez están todas colocadas, las 28, un simple golpe a la primera las hace caer a todas una detrás de otra.

Figura 3.1: Visualización de una demostración por inducción

Es un juego que se puede hacer mucho más monumental. Hay competiciones, creo que en Holanda, así como videos en youtube, donde hacen caer construcciones con miles de fichas, incluso más de un millón. Tardan cinco o diez minutos en caer todas.

Pues bien, una demostración por inducción es lo mismo pero con infinitas fichas de dominó. Para tener la convicción de que todas caerán tienes que hacer dos cosas:

Figura 3.2: Primer paso de la inducción

- Primero tienes que saber cómo dar a la primera ficha el golpe necesario para que caiga, y eso es el **primer paso de la inducción**.

- Segundo, tienes que comprobar que si una ficha cualquiera cae, y eso es lo que dice la **hipótesis de inducción**, entonces esta ficha, al caer, hará caer también la siguiente.

Figura 3.3: Aquí fallaría la inducción

Entonces, si has comprobado estas dos cosas, podrás estar seguro que todas, absolutamente todas, aunque sean infinitas, todas caerán. La caída no es otra cosa que la confirmación de que el enunciado que es lo que se quiere probar es cierto.

3.2. Una demostración por inducción

Han contado la anécdota en muchos libros y aunque vosotros seguro que la conocéis, perdonarme si la vuelto a contar aquí. Un Gauss, Carl Friedrich Gauss (1777-1885), de unos 6 ó 7 años asistía a la escuela unitaria de su pueblo. Ya sabéis, una de esas escuelas donde los alumnos de diversas edades comparten aula. Aquella mañana el profesor, que parece ser quería acabar de corregir algunos trabajos, pidió a todos sus estudiantes que sumaran los números enteros desde el uno hasta el cien. Se imaginaba que los tendría ocupados, sin darle faena, cerca de una hora al menos. Cuál sería su sorpresa cuando, después de unos segundos más tarde, el más mocoso entre todos se le acercó con la pizarrita en sus manos diciéndole que ya tenía la respuesta. Incrédulo la cogió sin mirarla y la dejó encima de la mesa boca abajo. “Au, herr Gauss, vuelva a su pupitre y quédese en silencio”, le contestó. Una hora después, cuando algunos de los otros estudiantes ya habían acabado el ejercicio, se decidió a mirar la pizarrita de Gauss. Sólo se encontró escrito 5050, sin ninguna operación.

¿Cómo lo había calculado? Muy simple, pensando de otra manera. En vez de ir sumando $1 + 2 = 3$, $3 + 3 = 6$, $6 + 4 = 10$, etc. Gauss sumó los números por parejas:

$$1 + 100 = 101, \quad 2 + 99 = 101, \quad 3 + 98 = 101, \ldots$$

obteniendo siempre el mismo resultado. Dado que el número de parejas que podía formar eran $\frac{100}{2} = 50$, el resultado tenía quer ser

$$\frac{100}{2} \cdot 101 = 50 \cdot 101 = 5050.$$

Tesis: La suma de los n primeros números naturales positivos es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$.

Un mismo resultado se puede demostrar de diferentes maneras. Este enunciado nos puede servir de ejemplo. Lo demostraremos de tres maneras diferentes. La primera, a la manera de Guass. La segunda, utilizando la inducción. La tercera, mediante un argumento geométrico.

Demostración 1: El mismo razonamiento de Gauss se puede utilizar, ya que:

$$1 + n = n + 1, \quad 2 + (n - 1) = n + 1, \quad 3 + (n - 2) = n + 1, \ldots$$

Si n es un número par, entonces habrán $\frac{n}{2}$ parejas. Así, la suma será

$$\frac{n}{2} \cdot (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Si n es un número impar, entonces sólo podremos formar $\frac{n-1}{2}$ parejas y quedará el término del medio, $\frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$, desemparejado. Así, la suma será

$$\frac{n-1}{2} \cdot (n + 1) + \frac{n+1}{2} = \frac{(n-1)(n+1) + (n+1)}{2} = \frac{(n+1)((n-1)+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

En los dos casos llegamos a la misma respuesta.

Demostración 2: Primer paso de la inducción: Si $n = 1$, entonces

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Ahora la inducción: Supongamos que el enunciado es cierto para n. Vamos a demostrar que también es cierto para $n + 1$.

Si aplicamos la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n+(n+1) &= \tfrac{n(n+1)}{2}+n+1 \\ &= \tfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \tfrac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \tfrac{(n+1)((n+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

Demostración 3: Mirad las siguientes figuras:

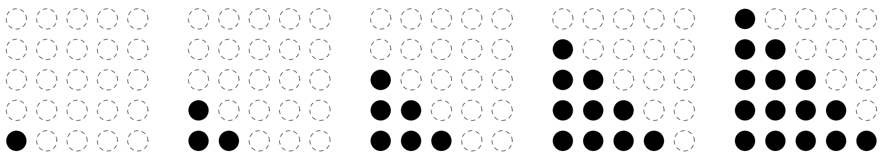


Figura 3.4: Representación de los números triangulares

En la primera figura sólo hay un círculo negro. En la segunda hay $1+2$. En la tercera, $1+2+3$, etc. Es decir, podemos representar la suma de los n primeros números naturales positivos mediante un esquema triangular.

Con la ayuda del esquema podemos encontrar el argumento de la demostración geométrica. Denotemos por T_n a la suma de los n primeros números naturales.

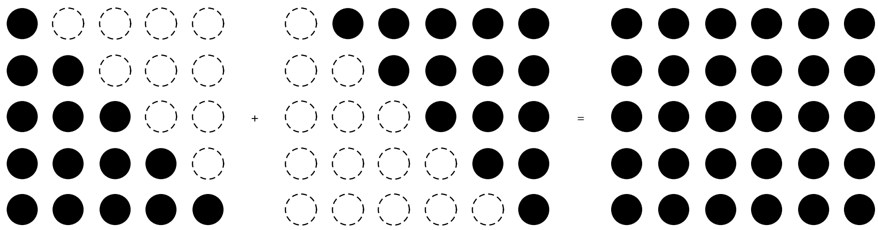


Figura 3.5: $T_n \quad + \quad T_n \quad = \quad n(n+1)$

El esquema nos dice que hay tantos puntos en dos veces T_n como en el rectángulo de lados n y $(n+1)$. Por tanto,

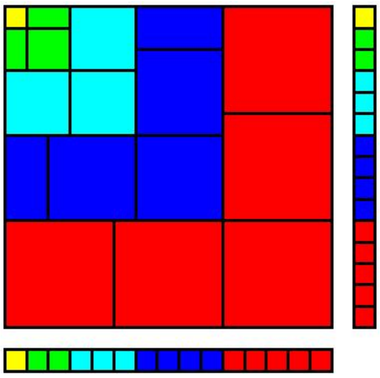
$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

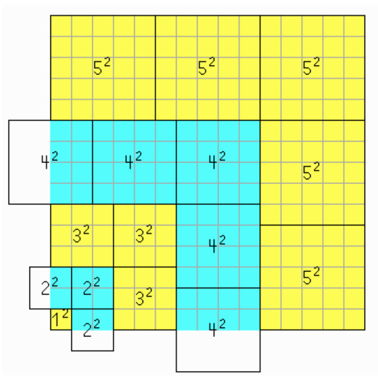
¿Cuál de las tres demostraciones es la mejor? Las tres son válidas, pero, ¿alguna de ellas es mejor que las otras? Eso ya depende de gustos. Normalmente, el criterio más aceptado es el que afirma que una demostración matemática cuanto más concisa, más elegante. Ahora bien, a veces las demostraciones concisas llevan un duro trabajo anterior, Por eso, otros opinan que las mejores demostraciones son las que hacen servir menos conceptos. En definitiva, todo es cuestión de gustos. Las demostraciones que veremos a lo largo del grado serán más o menos concisas, utilizarán más o menos conceptos, pero habéis de tener en cuenta que serán demostraciones para ser explicadas, demostraciones que quieren ser comprensibles. Eso hace que la elegancia no sea el objetivo, sino que lo será la comprensibilidad.

3.3. Otra demostración por inducción

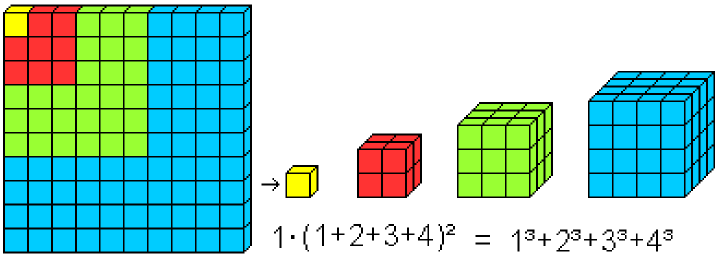
Antes hemos estudiado cuál era la suma de los n primeros números naturales, $1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Ahora estudiaremos cuál es la suma de sus cubos, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$.

Lo primero que hace un matemático, antes de demostrar nada, es conjeturar cuál puede ser el resultado. En este caso, un razonamiento geométrico nos puede ayudar. Las siguientes figuras permiten plantear la conjetura.





A la vista de las figuras la conjetura es:



$$\boxed{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2.} \tag{3.1}$$

Si la conjetura resultara cierta, entonces, como ya sabemos es igual a la suma de los n primeros números naturales, tendríamos que

$$\boxed{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.}$$

Nota: Así es cómo funcionan las matemáticas. Primero estudiar unos ejemplos, unos casos. Segundo conjeturar un resultado. Después probar (o no) la conjetura. En todos estos pasos, seguramente tendremos que utilizar cosas ya demostradas. En nuestro ejemplo, hemos utilizado que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Tenemos pendiente la demostración de la fórmula (3.1). Y la haremos por inducción.
Primero, si $n = 1$ la fórmula simplemente dice $1^3 = (1)^2$, lo cual es obviamente cierto.
Supongamos que la fórmula es cierta para n y vamos a demostrarla para $n + 1$.

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3\right) + (n+1)^3 \\ &= (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 + (n+1)^3. \end{aligned}$$

Recordemos que queremos llegar a $(1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1))^2$. Una cosa que podemos hacer es trabajar con la expresión a la que queremos llegar.

$$\begin{aligned} (1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1))^2 &= (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 + 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n)(n+1) + (n+1)^2 \\ &= (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 + 2(\tfrac{n(n+1)}{2})(n+1) + (n+1)^2 \\ &= (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 + n(n+1)^2 + (n+1)^2 \\ &= (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 + (n+1)(n+1)^2 \\ &= (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 + (n+1)^3. \end{aligned}$$

Ésta es la expresión donde ya habíamos llegado. Por tanto, sólo hace falta conectar los dos caminos y ya tenemos la demostración.

3.4. Y por último, una deducción

Si hemos probado cuál es el valor de la suma de los n primeros números naturales, y también la suma de sus cubos, está claro que falta la suma de sus cuadrados:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

Pues bien, aprovechando que ya tenemos las fórmulas

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

y

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$

deduciremos ahora la que queremos.

Comencemos recordando que

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1.$$

Si ahora sumamos esta expresión desde $k = 0$ hasta n obtenemos:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \\ &+3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \\ &+3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) \\ &+1 + 1 + \cdots + 1. \end{aligned}$$

Ahora pasamos los cubos del segundo miembro al primero:

$$\begin{aligned} (n+1)^3 &= 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \\ &+3\tfrac{n(n+1)}{2} + n + 1. \end{aligned}$$

Por tanto, S_n a la suma $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$. Entonces, hemos obtenido que

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 &= \tfrac{(n+1)^3}{3} - \tfrac{n(n+1)}{2} - \tfrac{n+1}{3} \\ &= \tfrac{1}{6}\left(2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2\right) \\ &= \tfrac{1}{6}\left(2n^3 + 3n^2 + n\right). \end{aligned}$$

$$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n}{3}(n+1)(n+\frac{1}{2}) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.}$$

3.5. Polinomios que generan números primos

3.5.1. *El polinomio de Euler*

En la sección anterior hemos conseguido expresar la sucesión de los números triangulares mediante un polinomio de segundo grado:

$$T(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

Dado que los matemáticos siempre están preguntándose cosas, en algún momento se planteó si también existiría un polinomio de segundo grado y coeficientes enteros que fuera dando siempre números primos.

Euler consideró el polinomio con coeficientes enteros

$$p(n) = n^2 + n + 41.$$

Mirad que para $n = 0$ el valor que toma el polinomio es un número primo. Para $n = 1$, el valor ahora es 43, que también es un número primo. Para $n = 2$, el valor es 47. ¡También primo! Si continuamos calculando valores. . .

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$p(n)$	41	43	47	53	61	71	83	97	113	131	...

comprobamos que siempre estamos obteniendo números primos. ¿Es esta comprobación una demostración? No. Que una propiedad, $P(n)$, se verifique para algunos valores de n, aunque sean muchos como es el caso, no quiere decir que se verifique para todos. Un “para todo ” no se demuestra con una comprobación de casos particulares, aunque sean muchos. Para demostrar la propiedad es necesario hacerlo, por ejemplo, con el método de inducción. Así, vamos a probar lo siguiente:

Tesis:

Para todo número natural, n, $p(n) = n^2 + n + 41$ siempre toma como valores números primos.

Demostración: Primer paso de la inducción: Si $n = 0$, entonces $p(0) = 41$, que es un número primo.

Hipótesis inductiva: Dado $n \in \mathbb{N}$, supongamos que $p(n)$ es un número primo. Vamos a demostrar que también $p(n + 1)$ lo es.

Tenemos que

$$\begin{aligned} p(n+1) &= (n+1)^2 + (n+1) + 41 \\ &= n^2 + 2n + 1 + n + 1 + 41 \\ &= n^2 + n + 41 + 2(n+1) \\ &= p(n) + 2(n+1). \end{aligned}$$

Por la hipótesis de inducción, $p(n)$ es un número primo, y dado que la suma de un número primo más un número par vuelve a ser un número primo, entonces ya hemos comprobado que $p(n + 1)$ es primo.

Esto prueba el enunciado y la inducción está completa.

¡Perfecto! Ya hemos probado lo que queríamos, pero…¿Cuál es el valor del polinomio cuando $n = 41$?

$$p(41) = 41^2 + 41 + 41 = 41(41 + 1 + 1) = 41 \cdot 43.$$

¡Glups! ¡No es un número primo!¿Qué ha pasado aquí?, ¿no habíamos probado ya, y por inducción que para todo número natural, n, $p(n) = n^2 + n + 41$ siempre tomaba como valores números primos?

En este caso, $n = 41$ es lo que se dice un *contraejemplo* de la afirmación "para todo número natural, n, $p(n) = n^2 + n + 41$ siempre toma como valores números primos". si para demostrar un "para todo" no es suficiente con comprobar que se verifica para muchos casos, para negar un "para todo" sólo es necesario un contraejemplo.

¿Qué hemos de creer más, el enunciado ya demostrado o el contraejemplo? Pues…El contraejemplo. La demostración tiene que estar mal. ¡Encontrad en ella cuál es el error!

Las matemáticas avanzan así. Primero con ejemplos. Después se plantea una conjetura y se intenta demostrarla. Si no se puede demostrar, puede que sea porque no es cierta. Entonces es necesario encontrar algún contraejemplo. Si se encuentra, normalmente ya da mucha información. Información que será útil para refinar el enunciado de la conjetura. Y así sucesivamente hasta que se encuentre una demostración válida y por tanto, un nuevo resultado.

En el enunciado que estamos utilizando como guía, el contraejemplo se obtenía precisamente cuando n era el valor del término independiente del polinomio. En este caso, cuando podemos sacar factor común, y por tanto, seguramente el resultado no será un número primo.

A continuación tenéis dos ejemplos más de demostraciones por inducción *sospechosas*…

3.6. Una demostración por inducción

Tesis: $\boxed{\text{Todos los números naturales son iguales.}}$

Demostración: Para probar la tesis, demostraremos por inducción que, para todo $n \in \mathbb{N}$, el siguiente enunciado es cierto:

$(P(n))$ Para todo $x, y \in \mathbb{N}$, si $\max(x, y) = n$, entonces $x = y$.

Primer paso de la inducción. Si $n = 1$, entonces la condición en $P(1)$ se reduce a $\max(x, y) = 1$. Dado que tanto x como y son número naturales positivos, entonces $x = 1$ y $y = 1$. Por tanto, $x = y$.

Hipótesis inductiva: Dado $k \in \mathbb{N}$, supongamos que el enunciado $P(k)$ es cierto. Vamos a demostrar que $P(k + 1)$ también es cierto.

Sean $x, y \in \mathbb{N}$ tal que $\max(x, y) = k + 1$. Entonces, $\max(x - 1, y - 1) = \max(x, y) - 1 = k$. Por la hipótesis de inducción sabemos que $x - 1 = y - 1$. Por tanto, $x = y$. Esto prueba el enunciado $P(k + 1)$ y la inducción está completa.

Conclusión: Por el principio de inducción $P(n)$ es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, como $\text{máx}(1, n) = n$ para cualquier número natural positivo, n, entonces $1 = n$ para cualquier número natural positivo n. Así, todos los números naturales positivos son iguales.

3.7. Otra demostración por inducción

Tesis: $\boxed{\text{Para todo número natural no negativo, } 2^n = 1.}$
Demostración: Primer paso de la inducción: Si $n = 0$, entonces $2^0 = 1$.

Ahora la inducción: Dado $k \in \mathbb{N}$, supongamos que $2^n = 1$ para todo n tal que $0 \leq n \leq k$. Vamos a demostrar que también $2^{k+1} = 1$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= \tfrac{2^{2k}}{2^{k-1}} && \text{por manipulación algebraica} \\ &= \tfrac{2^k . 2^k}{2^{k-1}} && \text{por manipulación algebraica} \\ &= \tfrac{1 \cdot 1}{1} && \text{por hipótesis de inducción aplicada a cada término} \\ &= 1 && \text{por simplificación.} \end{aligned}$$

Esto prueba el enunciado y la inducción está completa.

Conclusión: Por el principio de inducción, $2^n = 1$ para cualquier número natural no negativo n.

4. Los números complejos

Seguramente recordaréis que los números enteros se introdujeron porque la resta de dos números naturales no siempre es un número natural. Análogamente, los números racionales aparecen porque no siempre el cociente de dos enteros es un entero. Los números reales son también necesarios porque, entre otras razones, no siempre la raíz cuadrada de un racional positivo es un racional, como ya hemos visto con $\sqrt{2}$.

La introducción de los números complejos también quiere cerrar un problema similar: no hay ningún números real tal que su cuadrado sea un número negativo. O dicho de otra manera: nunca existe la raíz cuadrada de un real negativo.

Aunque no fue el primero en utilizar los números complejos (los primeros fueron algunos matemáticos italianos, Tartaglia y Cardano y más tarde Descartes el que los bautizó con el nombre que tienen) fue Gauss quien los definió tal como haremos ahora y trabajó con ellos para diferentes aplicaciones.

4.1. Definición y propiedades

Un número complejo no es más que una pareja ordenada de números reales, es decir, elementos del producto cartesiano, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ del conjunto de números reales, $\mathbb{R}$, por sí mismo. Ahora bien, en el conjunto de los números complejos es necesario definir también cómo sumar y cómo multiplicar.

Definición 4.1.1 *Sean $(a_j, b_j), j = 1, 2$, elementos de $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Se definen las siguientes operaciones:*

1. *Suma:*
$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$
2. *Producto:*
$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1),$$
3. *Producto por un escalar: $r \in \mathbb{R}$*
$$r(a_1, b_1) = (ra_1, rb_1).$$

Todas estas propiedades se pueden definir en la siguiente frase:

El conjunto $\mathbb{C}$, con las operaciones suma y producto que hemos definido, es un un *cuerpo*.

La aplicación $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$x \to \phi(x) = (x, 0),$$

conserva la suma y el producto:

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y),$$

$$\phi(x \cdot y) = \phi(x) \times \phi(y).$$

Esto nos permite identificar los números reales con el subcuerpo de números complejos de la forma $(x, 0)$. Por tanto, los números complejos de la forma $(x, 0)$ también los denotaremos sólo por x.

En $\mathbb{C}$ hay un número especial, $(0, 1)$. Observad que

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

es decir, el número complejo $(0, 1)$, que designamos por el símbolo $\mathbf{i}$ (la unidad imaginaria), verifica la ecuación $\mathbf{i}^2 = -1$: “es una raíz cuadrada de -1”, la otra raíz cuadrada es $-\mathbf{i} = (0, -1)$.

Tomando como base de $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ los vectores $1 = (1, 0), \mathbf{i} = (0, 1)$, entonces cualquier número complejo $z = (x, y)$ se escribe como combinación lineal de esta base:

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + \mathbf{i}y.$$

Así, definimos las partes real e imaginaria del número complejo (x, y) como

$$\begin{array}{rcl} x & = & \mathrm{Re}(z) = \text{parte real}, \\ y & = & \mathrm{Im}(z) = \text{parte imaginaria}. \end{array}$$

Esta forma de representar al número complejo z se conoce como *representación o forma binómica*.

Dado un número complejo $z = x + \mathbf{i}y$, se define su conjugado como el número complejo $\overline{z} = x - \mathbf{i}y$. Dados $z = x + \mathbf{i}y, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\overline{z} \cdot z = x^2 + y^2$.
2. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$.
3. $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)$.
4. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$.
5. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
6. $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z_2 \neq 0$.

Estas propiedades son fáciles de demostrar, con lo visto anteriormente. Ahora bien, ¿qué ocurre con la última? Hasta el momento no hemos hablado de la división de números complejos. Desgraciadamente esta operación no está definida como tal, así que hay que utilizar caminos alternativos... Consideremos los números complejos $z_1 = a + b\mathbf{i}$, $z_2 = c + d\mathbf{i}$, por las propiedades anteriores, tenemos que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + \mathbf{i}b}{c + \mathbf{i}d} = \frac{(a + \mathbf{i}b)(c - \mathbf{i}d)}{(c + \mathbf{i}d)(c - \mathbf{i}d)} = \frac{(ac + bd) + \mathbf{i}(bc - ad)}{c^2 + b^2}.$$

Ahora ya es fácil demostrar la última propiedad.

4.2. Representación polar y trigonométrica

En $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, además de las coordenadas cartesianas, podemos definir también las coordenadas polares. Todo complejo $z = x + \mathbf{i}y$, distinto del $(0,0)$, está determinado por su módulo

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

o distancia del punto (x, y) al origen $(0, 0)$, y por su argumento, el ángulo, θ, que el vector (x, y) forma com el semi eje de abcisas positivo:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta. \end{cases} \tag{4.1}$$

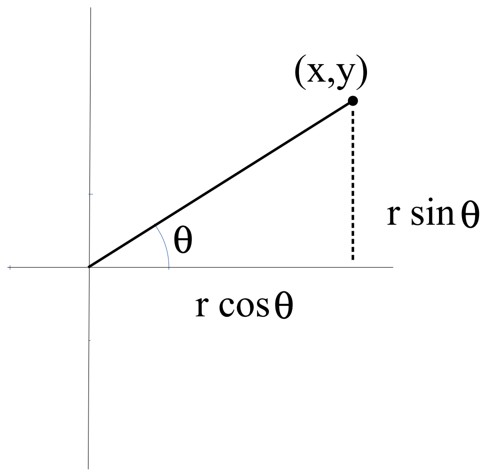


Figura 4.1: Coordenadas polares

Por tanto, podemos escribir

$$z = r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta).$$

Esta forma de escribir el número complejo z se llama *forma trigonométrica*.

Hay que remarcar que el argumento no es único. Si θ es un ángulo que verifica las ecuaciones (4.1), entonces también las verifican todos los ángulos de la forma $\theta+2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. En cualquier caso, se suele coger el argumento en el intervalo $[-\pi, \pi[$, y en este caso, se denota por $\mathrm{Arg}(z)$. Así, el número complejo $z = x + \mathbf{i}y$, se puede representar en *forma polar* como

$$z = r_{Arg(z)}.$$

La representación trigonométrica resulta especialmente adecuada para analizar el producto de números complejos: Dados

$$z = r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta), \qquad w = s(\cos\phi + \mathbf{i}\sin\phi),$$

tenemos que

$$\begin{aligned} z \cdot w &= r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta) \cdot s(\cos\phi + \mathbf{i}\sin\phi) \\ &= rs(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)(\cos\phi + \mathbf{i}\sin\phi) \\ &= rs\left((\cos\theta\ \cos\phi - \sin\theta\ \sin\phi) + \mathbf{i}(\cos\theta\ \sin\phi + \sin\theta\ \cos\phi)\right) \\ &= rs\left(\cos(\theta+\phi) + \mathbf{i}\sin(\theta+\phi)\right). \end{aligned}$$

Es decir, y eso es lo que se conoce como fórmula de Moivre, el módulo del producto es el producto de los módulos

$$|z \cdot w| = |z| \cdot\ |w|,$$

mientras que el argumento del producto es la suma de los argumentos (módulo 2π)

$$\mathrm{Arg}(z \cdot w) = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(w) \qquad \mathrm{mod}\ 2\pi.$$

De aquí se deduce fácilmente que la potencia n-ésima de un complejo $z = r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)$, esto es z^n, es un complejo de módulo $|z|^n$ y argumento $n\mathrm{Arg}(z)$.

Análogamente, en el caso de la división de los complejos, $z/w,\ w \neq 0$ obtendríamos el número complejo de módulo $|z|/|w|$ y argumento

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = \mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(w) \qquad \mathrm{mod}\ 2\pi.$$

Veamos finalmente lo que ocurre con la potencia n-ésima de un complejo $z = r_\theta$. Supongamos que existe un número complejo $x = s_\varphi$, con $s \in \mathbb{R}^+$ y $\varphi \in [-\pi, \pi[$ tal que $x = \sqrt[n]{z}$, entonces

$$x = \sqrt[n]{z} \leftrightarrow x^n = z,$$

por lo que

$$(s_\varphi)^n = s^n_{n\varphi} = r_\theta.$$

Igualando el módulo y el argumento,

$$r = s^n \rightarrow s = \sqrt[n]{r},$$

$$n\varphi = \theta + 2k\pi \rightarrow \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Así, la raíz n-ésima de un complejo $z = r_\theta$ corresponde a n números complejos de la forma:

$$\sqrt[n]{r}_{\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

4.3. Representación exponencial

Fue Euler quien, utilizando desarrollos en serie, demostró que

$$z = x + \mathbf{i}y = r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)$$

también se podía escribir como

$$r\,e^{\mathbf{i}\theta}.$$

Esta representación se conoce como representación exponencial, o fórmula de Euler,

$$z = r\,e^{\mathbf{i}\theta}.$$

Notad que la fórmula del producto y su representación ahora es aún más sencilla:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= r\,e^{\mathbf{i}\theta} \cdot s\,e^{\mathbf{i}\phi} \\ &= rs\,e^{\mathbf{i}(\theta+\phi)}. \end{aligned}$$

Los módulos se multiplican y los argumentos se suman.

Hay una regla mnemotécnica para recordar la fórmula de Euler:

$$e^{\mathbf{i}\theta} = \mathrm{c\ i\ s}.$$

También tenemos, como corolario, una de las fórmulas más famosas en las matemáticas[1]: cuando el argumento es π, entonces la fórmula de Euler dice que $e^{\mathbf{i}\pi} = -1$, o equivalentemente:

$$e^{\pi\mathbf{i}} + 1 = 0.$$

Fórmula que relaciona cinco de los números más notables: por orden de invención: 1, π, 0, $\mathbf{i}$ y e.

[1] La fórmula preferida del profesor, Yoko Ogawa, Funambulista, 2008

5. Conclusión

Para acabar esta rápida introducción dejarme que transcriba a mi estilo las cuatro características fundamentales que, según Edward Frankel, tienen las matemáticas:

1. **Universalidad.** La misma abstracción se aplica en muchos casos diferentes. La abstracción sirve para detectar que hay en común en situaciones diversas, y después, a la vez, los resultado matemáticos que se obtienen son válidos en todas las situaciones, tanto en las ya estudiadas, como las que puedan aparecer en el futuro.

2. **Objetividad.** Los resultados matemáticos no dependen de la interpretación. Por eso las matemáticas están escritas en un lenguaje especial, sin ambigüedades posibles. Además, tampoco dependen de aparatos de medida que toman datos del mundo real. Las matemáticas trabajan con ideas y los resultados no son más que relaciones entre las ideas.

3. **Resistencia.** Los resultados matemáticos son para siempre. El teorema de Pitágoras es tan válido cuando lo demostró su autor como en la actualidad y lo continuará siendo de aquí a dos años más. No pasa lo mismo con las teorías físicas que son válidas hasta que los resultados de algún experimento no concuerden con lo que predice la teoría. Entonces se tiene que reformular la teoría para que resuelva el problema. El ejemplo paradigmático es la teoría de la gravitación de Newton. Válida hasta que los científicos se dieron cuenta de que algunos hechos del mundo real no se podían explicar con ella. No fue hasta la aparición de la teoría de la gravitación de Einstein que los problemas se pudieron resolver, y sobre todo, se pudieron predecir nuevos resultados que la validaron... Hasta la aparición de la mecánica cuántica...

   No puedo evitar comentar aquí que el primer premio de un reciente concurso de monologuistas científicos lo ganó un matemático con su monólogo titulado “Un teorema es para siempre”.

4. **Relevancia.** Aunque los resultados matemáticos sólo tratan relaciones entre ideas, entre abstracciones, también tienen una fuerte implicación en el mundo físico. Muchas teorías físicas han podido avanzar y conjeturar resultados gracias a las matemáticas. Por ejemplo, y ya que hemos hablado de la teoría de la gravitación de Einstein, lo que hizo éste fue aprovechar una generalización de la teoría abstracta de superficies curvas para suponer que no vivíamos en un universo plano, sino en una de estas variedades curvas. La posibilidad de que estas variedades tuvieran algún tipo de importancia era

impensable para los matemáticos que las definieron y las trabajaron. Una de las ideas fundamentales de Einstein fue relacionar la masa con la curvatura del espacio.