



VNIVERSITAT  VALÈNCIA

DEPARTAMENT D'ESTADÍSTICA I
INVESTIGACIÓ OPERATIVA

Ejercicios de Cálculo de Probabilidades

Curso académico 2004-2005

Tema 1: Concepto de Probabilidad y Propiedades. Probabilidad condicional. Independencia

- Se lanzan al aire dos monedas bien construidas. De las siguientes afirmaciones cual, si alguna, te parece la solución correcta a la pregunta ¿cual es la probabilidad de que aparezcan dos caras? Razona la respuesta.
 - Puesto que *o aparecen dos caras o no aparecen dos caras* la probabilidad es $\frac{1}{2}$.
 - El número de caras obtenido puede ser 0, 1 ó 2. La probabilidad de 2 caras es $\frac{1}{3}$.
 - Aunque sean monedas iguales, vamos a considerar que podemos etiquetarlas como "moneda 1" "moneda 2". Teniendo en cuenta ese orden, los posibles resultados son CC, C+, +C y ++. La probabilidad de dos caras, CC, es $\frac{1}{4}$.
- Tres grupos de amigos eligen al azar entre tres bares para ir a cenar, sin restricción en el número de grupos por bar.
 - Listar los posibles resultados y, considerando que son equiprobables, calcular la probabilidad de los sucesos: A = Primer bar vacío; B = Los dos primeros bares vacíos y C = Cada bar no tiene más de un grupo.
 - Hallar las probabilidades de A, B y C si se distribuyen los tres grupos entre n bares, $n \geq 2$.
- Si se lanzan dos dados, ¿cual es la probabilidad de que los dos números que aparecen sean distintos? ¿Cual es la probabilidad de que al lanzar 3 dados los 3 sean distintos? ¿Y si se lanzan n dados, $n \leq 6$?
- Una pareja planifica su familia de acuerdo con una de las siguientes estrategias y bajo la hipótesis de que el nacimiento de una niña o un niño son igualmente probables.
 - Tener tres hijos.
 - Tener niños hasta que nace la primera hija o hasta que tenga tres, lo que se produzca antes. Después parar.
 - Tener niños hasta que tenga uno de cada sexo o hasta tener tres, lo que se produzca antes. Después parar.

Sea B_i el suceso consistente en que han nacido i niños y sea C el suceso consistente en que hay más niñas que niños. Determinar $P(B_1)$ y $P(C)$ en cada uno de las tres estrategias anteriores.
- Supóngase que tres corredores del equipo A y tres del equipo B participan en una carrera. Si los seis tienen las mismas aptitudes y no hay empates, ¿cual es la probabilidad de que los tres corredores del equipo A lleguen en primero, segundo y tercer lugar, y los tres corredores del equipo B lleguen en cuarto, quinto y sexto lugar?
- Una urna contiene 100 bolas, de las cuales r son rojas. Supóngase que las bolas son seleccionadas al azar de una en una y sin reemplazo. Determinar:
 - La probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.
 - La probabilidad de que la quincuagésima bola extraída sea roja.
 - La probabilidad de que la última bola extraída sea roja.
- Muestreos con y sin reemplazamiento
 - Muestreo con reemplazamiento.** Una moneda bien construida se lanza diez veces. Calcular la probabilidad de los sucesos: A = Se obtienen exactamente tres caras, y B = Se obtienen no más de tres caras.
 - En el caso anterior, obtener la probabilidad de observar exactamente r caras en n lanzamientos.

- c) **Muestreo sin reemplazamiento.** En una clase a la que asisten 15 chicos y 30 chicas se eligen al azar a 10 estudiantes. Calcular las probabilidades de los sucesos: A = Se eligen exactamente tres chicos, y B = Se eligen no más de tres chicos.
- d) En el caso anterior, obtener la probabilidad de elegir exactamente r chicos entre los n estudiantes seleccionados si en la clase hay R chicos y $N - R$ chicas.
8. k personas se sientan aleatoriamente en n asientos ($n > k$),
- Si los asientos están situados en fila ¿cuál es la probabilidad de que ocupen k asientos contiguos en la fila?
 - Si los asientos están situados en círculo, ¿cuál es la probabilidad de que ocupen k asientos contiguos del círculo?
 - Si k personas se sientan aleatoriamente en una fila de $2k$ asientos, ¿cual es la probabilidad de que no haya dos personas sentadas en asientos contiguos?
9. **Lotería Primitiva.** En la lotería primitiva cada boleto consiste en elegir seis números del 1 al 49. El día del sorteo se obtienen los seis números ganadores más un séptimo conocido como complementario. Obtienen el primer premio los boletos cuyos seis números coinciden con los seis números ganadores, y obtienen el segundo premio si cinco de los números del boleto son números ganadores, y el otro coincide con el complementario. Calcular las probabilidades de obtener el primer o el segundo premio si jugamos un boleto de la lotería primitiva.
10. Tres caballos A, B y C intervienen en una carrera. El caballo A tiene doble probabilidad de ganar que el caballo B , y este último tiene doble probabilidad de ganar que C . Calcular las probabilidades que tienen de ganar cada uno de los tres caballos.
11. Se sabe que entre los 120 estudiantes de un colegio mayor hay 60 que estudian Biológicas (B), 50 que estudian Farmacia (F) y 20 que cursan ambos estudios simultáneamente. Determinar la probabilidad de que uno de ellos escogido al azar estudie Biológicas o Farmacia, y la probabilidad de que no estudie ambas simultáneamente.
12. De entre los 96 análisis de glucosa en sangre realizados durante un día en un laboratorio, se observó que todos los resultados estaban comprendidos entre 50 y 350 mg/ml. En 89 de esos análisis la cantidad de glucosa no era superior a 190 mg/ml y en 21 de ellos era superior a 120 mg/ml. Determinar:
- La probabilidad de que el resultado de uno de esos análisis esté entre 120 y 190 mg/ml.
 - La probabilidad de que el resultado de uno de esos análisis esté entre 50 y 120 mg/ml.
 - La probabilidad de que el resultado de uno de esos análisis sea mayor que 190 mg/ml.
13. Se sabe que la probabilidad de que un matemático encuentre trabajo nada mas acabar la carrera es 0.4, para un ingeniero en informática esa probabilidad es 0.6. Si la probabilidad de que ambos encuentren trabajo es 0.24, calcular las probabilidades de que:
- Sólo encuentre trabajo el informático.
 - Al menos uno de los dos encuentre trabajo.
 - Ninguno encuentre trabajo.
14. El examen de una asignatura consta de dos partes, una teórica y otra práctica, y se sabe que el 20 % de los estudiantes presentados aprueban ambas, mientras que el 70 % aprueba el examen teórico y el 40 % el práctico. Determinar la probabilidad de que un estudiante escogido al azar entre los presentados:
- Suspenda el teórico.
 - Apruebe el práctico si se sabe que es de los que han aprobado el teórico.

- c) Apruebe el teórico si se sabe que es de los que han aprobado el práctico.
15. En cierta población, donde la mitad son hombres y la otra mitad mujeres, el 10 % son zurdos. Si el 6 % son hombres zurdos, ¿qué porcentaje hay de mujeres diestras?
 16. Juan y Marta son poco puntuales. Cuando quedan juntos a una hora, la probabilidad de que Juan sea puntual es 0.4, mientras que la probabilidad de que Marta llegue tarde es 0.55. Sabiendo que la probabilidad de que al menos uno de los dos llegue a la hora acordada es 0.7, calcular la probabilidad de que los dos sean puntuales.
 17. Juan (el del ejercicio anterior) ha quedado ahora con su hermano David. La probabilidad de que los dos sean puntuales es 0.1 y la de que los dos lleguen tarde es 0.2. Calcular la probabilidad de que David sea puntual.
 18. En una permutación aleatoria de los enteros $1, 2, \dots, n$ se dice que hay coincidencias si al menos uno de los números está en el sitio correcto.
 - a) Calcule la probabilidad de coincidencias para $n = 2, 3$ y 4 . Demuestre que, en general, esa probabilidad es $\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$.
 - b) ¿Cuál es el límite de la probabilidad anterior cuando n tiende a infinito?
 19. Sean $\{A_1, A_2 \text{ y } A_3\}$ tres sucesos arbitrarios, con probabilidades $P(A_1)$, $P(A_2)$ y $P(A_3)$ respectivamente. Calcular la probabilidad de que ocurra exactamente uno de ellos.
 20. Se lanza un dado bien construido dos veces (lo cual es probabilísticamente equivalente a lanzar dos dados bien contruidos). Sabiendo que el primer dado ha sacado un 3 o menor, ¿Cuál es la probabilidad condicionada de que la suma de los dos números sea impar ?
 21. Se lanza una moneda bien construida tres veces. Hallar:
 - a) La probabilidad condicionada de que el primer lanzamiento resulte cara, sabiendo que hubo exactamente una cara (Trata de adivinar la respuesta primero, y entonces usa la definición de probabilidad condicionada).
 - b) La probabilidad condicionada de que hubiera exactamente una cara, sabiendo que en el primer lanzamiento salió cara.
 - c) La probabilidad condicionada de tres caras, dado que hay al menos dos caras.
 - d) La probabilidad condicionada de que salgan tres caras, dado que los dos primeros lanzamientos resultaron dos caras.
 22. Piensa acerca de lo que significan las probabilidades condicionadas siguientes y decide los valores que deberían tener. Entonces calcúlalas usando la definición de probabilidad condicionada.
 - a) $P(B | B)$.
 - b) $P(B | B^c)$.
 - c) $P(B | \Omega)$.
 - d) $P(B | \emptyset)$.
 - e) $P(B | A)$ cuando A es un subconjunto de B .
 - f) $P(B | A)$ cuando B es un subconjunto de A .
 23. Supongamos que $P(B | A) = P(B)$. ¿Debe ser $P(A | B) = P(A)$? ¿Por qué ? Suponer que las probabilidades $P(A)$ y $P(B)$ son mayores que cero.
 24. Se extraen tres cartas de una baraja francesa (52 cartas), de una en una y sin reemplazamiento. Hallar la probabilidad de que:
 - a) Todas sean rojas (i.e. son corazones o diamantes).

- b) Las dos primeras sean negras y la tercera sea roja.
 - c) La primera y la tercera sean negras y la segunda sea roja.
 - d) La segunda y la tercera sean negras y la primera sea roja.
 - e) Exactamente una sea roja.
 - f) Exactamente una sea negra. (No es necesario realizar ningún cálculo si se sabe la respuesta del apartado e).
 - g) La primera es un as y la segunda también.
 - h) La primera no es un as y la segunda sí.
 - i) La segunda es un as.
25. En una fábrica de tornillos hay cuatro máquinas trabajando en paralelo. La máquina 1 produce el 35 % de los tornillos, y solo el 5 % de ellos son defectuosos. Similarmente las máquinas 2, 3 y 4 producen el 30 %, el 20 % y el 15 % del total, y sus porcentajes de tornillos defectuosos son 4 %, 2 % y 2 % respectivamente. Calcular las probabilidades de que un tornillo elegido al azar entre los fabricados por esas máquinas sea:
- a) Defectuoso y fabricado por la máquina i ($i = 1, 2, 3, 4$).
 - b) Defectuoso.
 - c) No defectuoso.
 - d) Fabricado por la máquina 2 y no defectuoso.
26. El 28 % de los Republicanos, el 75 % de los Demócratas y el 42 % de los independientes están a favor del candidato A. Además, el 40 % de los votantes son Republicanos, el 43 % Demócratas y el 17 % independientes. ¿Que proporción de los votantes están a favor del candidato A?
27. Se compran tres ordenadores iguales para el aula de informática, sabiendo que la probabilidad de que falle algo dentro del período de garantía es p en cada ordenador.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzca al menos un fallo durante la garantía?
 - b) ¿Para que valor de p esa probabilidad es exactamente 0.5?
28. **Esquema de urna de Pólya.** Una urna contiene, inicialmente, cierta combinación de bolas azules y blancas. Se extrae una bola, se anota su color y entonces se devuelve a la urna y se añade otra bola del mismo color a la urna. De esta forma, la extracción de una bola aumenta ligeramente la probabilidad de que la siguiente sea del mismo color. Supongamos que la urna contiene originalmente tres bolas azules y siete bolas blancas. Sean los sucesos A_i = La i -ésima extracción sale bola azul, y B_i = la i -ésima extracción es blanca. Hallar las probabilidades siguientes:
- a) $P(A_1 \cap A_2 \cap B_3)$
 - b) $P(A_1 \cap B_2 \cap A_3)$. Comparar con el apartado a.
 - c) $P(B_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Comparar de nuevo.
 - d) $P(A_2)$. Compara con $P(A_1)$. (Sugerencia para $P(A_2)$: A_2 es la unión de dos sucesos disjuntos $A_1 \cap A_2$ y $B_1 \cap A_2$.)
29. En una determinada ciudad, el 80 % de los votantes del PSOE, el 45 % de los del PP, y el 55 % de los demás, están de acuerdo con una determinada decisión del Gobierno. En las últimas elecciones, el 35 % de los electores de esa ciudad votaron PSOE y el 40 % votaron PP. Determinar:
- a) La proporción de electores que está de acuerdo con la decisión del Gobierno.
 - b) La probabilidad de que un elector, que dice estar de acuerdo con la decisión del Gobierno, haya votado al PSOE en las últimas elecciones.

30. Para la fabricación de una partida de piezas se utilizaron 3 máquinas, A , B y C , con las que se fabricaron el 20 %, 30 % y 50 % de las piezas respectivamente. Los porcentajes de piezas defectuosas que tales máquinas producen son, respectivamente, 1 %, 2 % y 3 %. Determinar la probabilidad de que una pieza defectuosa haya sido producida por la máquina B .
31. Un test para la detección precoz del cáncer de mama tiene un 2 % de falsos positivos y un 1 % de falsos negativos. Si este tipo de cáncer afecta a una mujer de cada 5,000 en una determinada población, determinar la probabilidad de que una mujer de esa población, a quien el test le ha dado positivo, tenga cáncer de mama.
32. Un sistema de detección de cerraduras de seguridad defectuosas da lugar a un 1 % de falsos positivos (cerraduras aparentemente defectuosas que resultan funcionar correctamente) y a un 3 % de falsos negativos (cerraduras aparentemente bien fabricadas que resultan no funcionar bien). Determinar la probabilidad inicial mínima de que una cerradura sea defectuosa para que, si el sistema la señala como defectuosa, la probabilidad final de que realmente lo sea resulte mayor que 0.99.
33. Los pacientes de los que se sospecha una enfermedad E son sometidos dos veces consecutivas a un mismo test (pruebas condicionalmente independientes) del que se sabe que da positivo al 98 % de las personas que padecen E y al 6 % de las que no padecen E . Determinar la probabilidad inicial máxima de que un paciente tenga E para que su probabilidad final, si ambas pruebas resultan negativas, sea menor que 0.01.
34. Se estima que el 27 % de los estudiantes de la Universitat de València están en el primer curso y que, de ellos, un 60 % no ha nacido en la ciudad. Si el 25 % de los estudiantes de primero, no nacidos en la ciudad y que viven en pisos de estudiantes son de Derecho, y la probabilidad de que un estudiante de la Universidad elegido al azar sea de primero de Derecho, no haya nacido en la ciudad y viva en un piso de estudiantes es 0.02, determinar la probabilidad de que un estudiante de primero, que no ha nacido en la ciudad, viva en un piso de estudiantes.
35. Si en un examen de respuesta múltiple con k respuestas posibles un alumno conoce la respuesta correcta con probabilidad p y marca una respuesta al azar con probabilidad $1 - p$, determinar la probabilidad de que haya contestado al azar si su respuesta es correcta.

SOLUCIONES

1 c

2 (a). $P(A) = .2963$, $P(B) = .03704$ y $P(C) = .2222$

(b). $P(A) = (\frac{n-1}{n})^3$, $P(B) = (\frac{n-2}{n})^3$ y $P(C) = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}$

3 $\frac{5}{6}$; $\frac{5}{9}$; $V_{6,n}$ 6^{-n} si $n \leq 6$, 0 en otro caso.

4 (a). $P(B_1) = .375$ y $P(C) = .5$

(b). $P(B_1) = .25$ y $P(C) = .5$

(c). $P(B_1) = .625$ y $P(C) = .25$

5 0.05

6 (a). $\frac{r}{100}$ (b). $\frac{r}{100}$ (c). $\frac{r}{100}$

7 (a). $P(A) = .1172$ y $P(B) = .1719$ (b). $\binom{n}{r} 2^{-n}$ (c). $P(A) = .2904$ y $P(B) = .5597$ (d).

$$\frac{\binom{R}{r} \binom{N-R}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$

8 (a). $(n-k+1)/\binom{n}{k}$ (b). $n/\binom{n}{k}$ (c). $(k+1)/\binom{2k}{k}$

9 $P(\text{Primer premio}) = ,7151 \times 10^{-7}$ y $P(\text{Segundo premio}) = ,4291 \times 10^{-6}$

10 $P(A) = \frac{4}{7}$, $P(B) = \frac{2}{7}$ y $P(C) = \frac{1}{7}$.

11 $P(B \cup F) = \frac{3}{4}$ y $P(\overline{B \cap F}) = \frac{5}{6}$.

12 (a). 0.1459 (b). 0.7812 (c). 0.0729.

13 (a). 0.36 (b). 0.76 (c). 0.24.

14 (a). 0.3 (b). 0.286 (c). 0.5.

15 0.46.

16 0.15.

17 0.5.

18 (a). 0.5, 0.6667 y 0.6250 (b). 0.6321.

19 $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) -$
 $-2 P(A_1 \cap A_2) - 2 P(A_1 \cap A_3) - 2 P(A_2 \cap A_3) +$
 $+3 P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

20 $\frac{1}{2}$

21 (a). $\frac{1}{3}$ (b). $\frac{1}{4}$ (c). $\frac{1}{4}$ (d). $\frac{1}{2}$

22 (a). 1 (b). 0 (c). $P(B)$ (d). Sin sentido (e). 1 (f). $\frac{P(B)}{P(A)}$

23 Sí

24 (a). .1176 (b). .1275 (c). .1275 (d). .1275 (e). .3824 (f). .3824 (g). .0045 (h). .0724 (i). .0769

25 (a). 0.0175, 0.0120, 0.0040, 0.0030 (b). 0.0365 (c). 0.9635 (d). 0.2880.

26 0.5059.

27 (a). $1 - (1-p)^3$ (b). 0.2063.

28 (a). .0636 (b). .0636 (c). .0636 (d). $\frac{3}{10}$ la misma que $P(A_1)$

29 (a). 0.5975 (b). 0.4686

30 0.2609

31 0.0098

32 $p \geq 0,5051$

33 $p \leq 0,9571$

34 0.4938

35 $\frac{1-p}{(1-p)+kp}$

Tema 2: Variables aleatorias

- Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad definida como $f(x) = \frac{x}{10}$ para $x = 1, 2, 3, 4$ (y 0 en otro caso). Calcula las siguientes probabilidades:
 - $P(1 < X < 3)$, $P(1 \leq X < 3)$, $P(1,5 < X < 3)$, $P(1,5 \leq X < 3)$, $P(1,5 \leq X \leq 1,99)$.
 - $P(X \leq 1)$, $P(X < 1)$, $P(0 \leq X \leq 2 \mid 1 \leq X \leq 3)$, $P(X = 2, 3)$, $P(X = 1, 2, 3, 4)$.
 - $P(X \in N)$ donde N es el conjunto de los números enteros positivos.
 - $P(X \in Q)$ donde Q es el conjunto de los números racionales.
 - Calcula y dibuja la función de distribución $F(x)$ de la variable X . Repite los dos primeros apartados del problema utilizando $F(x)$. Representa en la gráfica dibujada todas las probabilidades del primer apartado del problema y las dos primeras del segundo.
- Si $F(x)$ es la función de distribución de una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 3,2$, calcula: (a) $F(1)$, (b) $F(0,99)$, (c) $F(3,2)$, (d) $F(-4,5)$, (e) $\lim_{x \rightarrow 2-} F(x)$
- Calcula la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X para la que $P(X > x) = (1/2)^x$ cuando $x = 1, 2, 3, \dots$ y $P(X = x) = 0$ en otros casos.
- Representa gráficamente la función $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ 0,20 & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ 0,35 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 0,45 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0,70 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 0,95 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{si } 5 \leq x < \infty \end{cases}$$

- ¿Es la función de distribución de una variable aleatoria X discreta?
 - Calcula y representa gráficamente la función de probabilidad de esta variable aleatoria X .
 - Calcula la(las) mediana(s) de X .
- Considera un juego que consiste en lanzar repetidamente una moneda hasta conseguir el resultado *cara*. Cada vez que obtienes el resultado *cruc* colocas una ficha de color blanco en un sombrero, pero si el resultado es *cara*, además de acabarse el juego, añades una ficha negra en el sombrero. De esa forma, cuando finaliza el juego, el número de fichas en el sombrero es igual al número de lanzamientos realizados. A continuación se elige al azar una ficha del sombrero. Si es blanca ganas 100 euros, pero si es la negra pierdes 100 euros. Comprueba que la probabilidad de que ganes es $0.3069 (= 1 - \ln 2)$. (Recuerda que, desarrollando en serie de potencias, $\ln(\frac{1}{1-x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} X^n$, si $|x| < 1$).
 - La concha del caracol de tierra *Limocolaria mantersiana* puede ser rayada o pálida. El 60 % de estos caracoles de tierra tiene la concha rayada. Se seleccionan 10 caracoles al azar de esta población. Calcula la probabilidad de que la proporción de caracoles con concha rayada presentes en la muestra: (a) sea del 50 %, (b) esté entre el 50 % y el 60 %, ambos inclusive, (c) no sea inferior al 70 %, (d) sea del 60 %.
 - Los genetistas han identificado dos cromosomas sexuales X e Y en los seres humanos. Todo individuo tiene un cromosoma X , y la presencia de un cromosoma Y , distingue al individuo como hombre, por lo que los dos sexos se caracterizan como XX (mujer) y XY (hombre). El daltonismo está causado por un alelo recesivo en el cromosoma X que denotamos por x . El cromosoma Y no tiene conexión con la ceguera al color. En función de tal deficiencia, se consideran tres genotipos para las mujeres y dos para los hombres.

Mujeres	Hombres
XX (normal)	XY (normal)
Xx (portadora)	xY (daltónico)
xx (daltónica)	

Si cada hijo hereda un cromosoma sexual de cada progenitor

- Calcula la probabilidad de que un hijo de portadora de ceguera al color y un hombre *normal* sea niño y daltónico.
 - Si esta pareja tiene tres hijos, ¿cuál es la probabilidad de que los tres sean niños todos daltónicos?
 - Si esta pareja tiene cinco hijos, ¿cuál es la probabilidad de que a lo sumo dos sean niños y daltónicos? ¿cuál es la probabilidad de que tres o más sean niñas?
- Se pretende construir una planta nuclear en una determinada localización geográfica y se desea conocer la opinión de los habitantes de la ciudad más cercana al lugar de la construcción. Los datos oficiales aseguran que el 60 % de los habitantes de la ciudad está a favor del proyecto. Según esta información, si se seleccionara una muestra aleatoria de 20 individuos de dicha población y se preguntara a cada individuo su opinión sobre esta cuestión, ¿cuál sería la probabilidad de que más de la mitad de los encuestados manifestaran una opinión favorable a la construcción de la planta nuclear? Si como resultado de la encuesta sólo cinco personas se declararon favorables al citado proyecto, ¿dudarías de la cifra oficial del 60 % dada anteriormente? Explica la respuesta.
 - Para estudiar la regulación hormonal de una ruta metabólica se inyecta a ratas albinas un fármaco que inhibe la síntesis de proteínas del organismo. Se sabe que, en general, 4 de cada 20 ratas mueren a causa del fármaco antes de que el experimento haya concluido. Si se trata a 10 ratas con este fármaco, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 8 estén vivas al finalizar el experimento?
 - Una de las características fundamentales de la herencia de caracteres cuantitativos (peso, altura, etc) es que un número elevado de genes contribuye a la expresión del carácter. Cada uno de estos genes aporta un pequeño efecto a la expresión de dicho carácter. Supón que el peso de las ovejas adultas está determinado por 10 pares de genes y que en cada par génico, la presencia de al menos un gen $+$ es suficiente para determinar un incremento de $+1$ Kg. de peso. Si los dos genes del par son $-$, no se produce ningún incremento en el peso. Por otro lado, el peso mínimo para un individuo con todos los genes $-$ es de 10 kg. Considera un rebaño en el que todas las ovejas tienen los 10 pares génicos formados por un gen $+$ y un gen $-$. Los pares génicos de sus descendientes se forman eligiendo al azar un gen del correspondiente par génico de cada uno de los progenitores. Si se elige una oveja al azar de la descendencia del rebaño mencionado, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 17 kg? Y si ahora se eligen al azar 8 descendientes, ¿cuál es la probabilidad de que como mínimo la mitad de ellos pese 15 kg o mas?
 - De un lote que contiene 25 artículos, de los cuales 5 son defectuosos, se eligen 4 al azar. Sea X la variable aleatoria que describe el número de artículos defectuosos elegidos. Obtén la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X si los artículos se escogen
 - con reemplazamiento.
 - sin reemplazamiento.

Calcula también en ambos casos la mediana de la distribución de X .
 - El número de personas X que en una determinada población tienen una huella dactilar de tipo *Amunt@watson* es una variable aleatoria Poisson de parámetro λ .
 - ¿Te parece razonable que la distribución Poisson puede ser un modelo probabilístico adecuado para la variable presentada?
 - Demuestra que $P(X = 1 \mid X \geq 1) = \lambda(e^\lambda - 1)^{-1}$.

- c) Un descuidado ladrón deja en el lugar del robo una huella de tipo *Amunt@watson*. Se sabe que la probabilidad de que la huella dactilar de una persona elegida aleatoriamente al azar sea de tipo *Amunt@watson* es 10^{-6} . En una ciudad con 10^7 habitantes una persona con las huellas dactilares del tipo *Amunt@watson* es considerada la culpable del robo anterior. ¿Crees que únicamente con esta información el detenido es realmente el culpable? ¿Con qué tamaño de ciudad encontrarías ese hecho razonable?
13. Se lanza una serie de cohetes pirotécnicos hasta que se registra el primer lanzamiento correcto. Si esto no se produce en cinco ensayos, el experimento se detiene y se inspecciona el equipo. El coste del primer lanzamiento es de K miles de euros, el de cada uno de los restantes (si los hay) es de $K/3$ miles de euros. Cuando se consigue un lanzamiento correcto se obtiene una cierta cantidad de información que se valora como una ganancia de C miles de euros. Si T es la variable aleatoria que describe el coste del experimento total, calcula su distribución de probabilidad y represéntala gráficamente.
14. Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad $f(x) = \frac{4}{3x^2}$ para $1 \leq x \leq 4$ (y 0 en otro caso). Calcula las siguientes probabilidades
- $P(1 < X < 3)$, $P(1 \leq X < 3)$, $P(1,5 < X < 3)$, $P(1,5 \leq X < 3)$, $P(1,5 \leq X \leq 1,99)$.
 - $P(X \leq 1)$, $P(X < 1)$, $P(0 \leq X \leq 2 \mid 1 \leq X \leq 3)$, $P(X = 2, 3)$, $P(X = 1, 2, 3, 4)$.
 - $P(X \in N)$ donde N es el conjunto de los números enteros positivos.
 - $P(X \in Q)$ donde Q es el conjunto de los números racionales.
 - Dibuja la función de densidad $f(x)$ y representa en esa gráfica las probabilidades del apartado del problema. Calcula y dibuja la función de distribución $F(x)$ de la variable X . Repite los dos primeros apartados del problema calculando ahora las correspondientes probabilidades a través de $F(x)$.
15. Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad:
- $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ 6(1-x) & \text{si } 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
- Dibuja $f(x)$ y comprueba que realmente es una función de densidad de probabilidad.
 - Calcula la función de distribución de X y represéntala gráficamente.
 - Calcula $P(\frac{3}{4} \leq X \leq 1)$ y $P(\frac{1}{3} \leq X < \frac{2}{3})$ y representa gráficamente estas dos probabilidades en cada una de las dos gráficas anteriores.
16. Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función de distribución:
- $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{3x}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ \frac{x+1}{4} & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$
- Calcula $P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{5}{2})$
 - Calcula una función de densidad para X y represéntala gráficamente.
 - Calcula el percentil del 25 %, del 50 % y del 75 %.
17. Encuentra una función de densidad de una variable aleatoria cuya función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1 + 3x)e^{-3x} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

18. Si una densidad para la variable aleatoria X es $f(x) \propto (x+1)^2$ cuando $0 < x < 2$, y cero en otros casos, calcula la función de distribución de X , la probabilidad $P(X > 1 \mid X < 1,5)$ y la mediana de la distribución.
19. Representa gráficamente la función de distribución siguiente:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}(1+x^2) & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

20. Sea X una variable aleatoria con densidad exponencial de parámetro $\lambda = 2$. Halla las siguientes probabilidades:
- $P(2X + 1 > 3)$
 - $P(X^2 \leq 7)$
 - $P(X \leq 2 \mid X > 0,5)$
 - $P(X > 0,5 \mid X \leq 2)$
21. La duración (en horas) de cierto tubo de radio es una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro $\lambda = 0,005$.
- Calcula la probabilidad de que un tubo de esas características dure menos de 200 horas si se sabe que todavía funciona después de 150 horas de servicio.
 - Si se instalan tres de esos tubos en un conjunto, ¿cual es la probabilidad de que exactamente uno deba ser sustituido después de 150 horas de servicio?
 - Calcula el valor del percentil de orden 0.90 y comenta su significado en relación a la duración de los tubos estudiados.
 - ¿Cual es el número máximo de tubos que se pueden poner en un panel de modo que haya una probabilidad 0.5 de que después de 150 horas de servicio todos continúen funcionando?
22. Si X es una variable aleatoria $N(\mu, \sigma^2)$, esboza gráficamente su densidad para los siguientes valores de los parámetros.
- $\mu=0$ y $\sigma^2=0.25$.
 - $\mu=0$ y $\sigma^2=1$.
 - $\mu=0$ y $\sigma^2=4$.
 - $\mu=0$ y $\sigma^2=16$

Calcula también en cada caso las probabilidades $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$, $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$, $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$ y comenta los resultados obtenidos.

23. Hace años se descubrió que los faisanes de Montana poseían una contaminación por mercurio apreciable, y se pensó que esto podía deberse a que habían sido alimentados con semillas de plantas tratadas con metilo de mercurio. Sea X la variable aleatoria que describe el nivel de mercurio (en ppm) de un faisán de Montana. Suponiendo que la distribución de X es normal de parámetros $\mu=0.25$ ppm y $\sigma=0.08$ ppm, calcula el percentil del 25 % de su distribución y las probabilidades $P(X < 0,3)$, $P(X > 0,17)$, $P(0,2 < X < 0,4)$.
24. En cierta población de primates, la distribución de la capacidad craneal, X , puede suponerse normal de parámetros $\mu=1200 \text{ cm}^3$ y $\sigma=140 \text{ cm}^3$.
- Calcular la probabilidad de que la capacidad craneal de un miembro de dicha población sea superior a 1400 cm^3 .
 - Calcular $P(1000 < X < 1050)$, $Pr(X < 1060)$ y $P(X > 920)$.
 - ¿Qué valor de X superará el 20 % de los primates de dicha población?

25. El diámetro máximo de los hematíes de una persona con malaria por *Plasmodium vivax* presenta las siguientes características: Si la célula está infectada dicha variable se distribuye de forma normal de parámetros $\mu=7.6$ micras y $\sigma=0.9$ micras, y si la célula no está infectada dicha variable también se distribuye de forma normal pero ahora con $\mu=9.6$ micras y $\sigma=1.0$ micras. Calcula:
- Probabilidad de que una célula no infectada tenga un diámetro máximo superior a 9.4 micras. Probabilidad de que una célula no infectada tenga un diámetro máximo inferior a 7.0 micras.
 - Probabilidad de que el diámetro máximo de una célula infectada sea inferior a 9.4 micras. Probabilidad de que el diámetro máximo de una célula infectada sea superior a 7.0 micras.
 - Realiza un esbozo gráfico de las dos densidades del problema y sitúa en cada una de ellas las probabilidades pedidas.
26. El grosor de las cáscaras de los huevos producidos por un cierto grupo numeroso de gallinas sigue aproximadamente una distribución normal de parámetros $\mu=0.38$ mm. y $\sigma=0.03$ mm.. Calcula el percentil de orden 95 de la distribución del grosor. Supongamos que un huevo se clasifica como de cáscara fina si el grosor de su cáscara es a lo sumo de 0.32 mm. a) ¿Qué porcentaje de huevos son de cáscara fina?; b) Un gran número de huevos se empaqueta al azar en hueveras de 12 huevos cada una, ¿qué porcentaje de hueveras tendrán al menos un huevo de cáscara fina?
27. Considera la variable aleatoria X del problema 4. Calcula la función de probabilidad de las variables aleatorias $Y = X + 2$, $Z = X^2$, $U = |X|$.
28. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ . Sea Y una variable aleatoria discreta definida como $Y = k$ si $k \leq X < k + 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Calcula la función de probabilidad y la función de distribución de la variable Y .
29. Si X es una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ , calcula la función de distribución de $Y = (X + 1)^{-1}$.
30. Si X es una variable aleatoria con distribución uniforme en $(0,1)$, identifica la distribución de la variable aleatoria $Y = -\lambda^{-1} \ln X$, $\lambda > 0$.
31. Si la distribución de la variable aleatoria X absolutamente continua es exponencial de parámetro λ , calcula la función de distribución de $Y = aX$, $a > 0$, y utilízala para calcular $P(Y > b)$ con $b > 0$.
32. Si X es una variable aleatoria normal $N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$, identifica la densidad de probabilidad de su cuadrado.
33. Si X es una variable aleatoria con distribución uniforme en $(0, 1)$, calcula:
- La función de densidad de $Y = \tan \left\{ \pi \left(X - \frac{1}{2} \right) \right\}$.
 - La función de distribución de $Z = \ln \{ X / (1 - X) \}$.

SOLUCIONES

- 1** (a) 0.2, 0.3, 0.2, 0.2, 0 (b) 0.1, 0.0, 0.5, 0.5, 1 (c) 1 (d) 1
- 2** (a) 0.1712 (b) 0.0408 (c) 0.6025 (d) 0 (e) 0.1712
- 3** $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ para $x = 1, 2, \dots$
- 12** (a) Si el tipo de huella es poco habitual y la población es grande (c) X es Poisson de parámetro 19, por lo que $P(\text{es el único}) \approx 10(e^{10} - 1)^{-1}$ que es muy pequeña.
- 14** (a) $\frac{8}{9}, \frac{8}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}, 0, 0, 21887$ (b) 0, 0, $\frac{3}{4}, 0, 0$ (c) 0 (d) 0.
- 17** $9xe^{-3x}$ para $x > 0$ y 0 en otro caso.
- 18** 0 para $x < 0$, $\frac{1}{26}((x+1)^3 - 1)$ para $0 \leq x \leq 2$ y 1 si $x > 2$.
- 20** (a) 0.1353 (b) 0.9950 (c) 0.9502 (d) 0.3561
- 29** $F(y) = 0$ si $y \leq 0$, $F(y) = \exp\{\lambda(1 - (1/y))\}$ si $0 < y < 1$, y $F(y) = 1$ si $y \geq 1$.
- 30** Exponencial de parámetro λ .
- 31** $\exp\{-\lambda b/a\}$
- 32** $Ga(y|\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- 33** (a) Cauchy típica, $f(y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+y^2}$ (b) $1 - (1 + e^t)^{-1}$, $t \in \Re$

Tema 3: Vectores aleatorios

1. Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con las siguientes funciones de probabilidad:

$$\begin{array}{rcccc} x: & 0 & 1 & 2 \\ p_X(x): & .3 & .5 & .2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} y: & 0 & 1 & 2 \\ p_Y(y): & .6 & .1 & .3 \end{array}$$

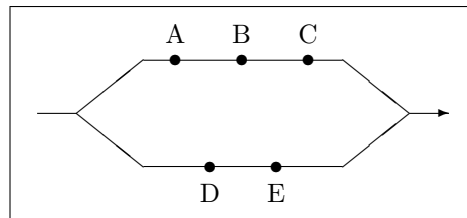
- Construye una tabla en la que se muestre $P(X = x, Y = y)$ para cada par (x, y) de valores posibles.
 - Halla $P(X = Y)$
 - Halla $P(X + Y = 2)$
 - Halla la función de probabilidad de la variable aleatoria $Z = X + Y$, y represéntala gráficamente.
2. El número total de hijos e hijas de una familia escogida al azar puede describirse como una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 1,8$. Si la probabilidad de tener un hijo varón es 0,51, determinar la probabilidad de que una familia escogida al azar tenga dos hijas y ningún hijo.
3. Una planta produce M semillas, donde M se supone que sigue una distribución binomial con parámetros n y p . Cada semilla germina con probabilidad γ independientemente de las demás. Denotamos por R el número de plantas que realmente germinan. Se pide calcular (y dibujar para el caso particular de $n = 5$, $p = 0,5$ y $\gamma = 0,8$) las siguientes funciones:
- La función de probabilidad condicional de R dado $M = m$.
 - La función de probabilidad conjunta de R y M .
 - La función de probabilidad de R .
 - La función de probabilidad de M dado $R = r$.
4. Se tira 4 veces una moneda bien equilibrada: X es el número de caras que aparecen en las tres primeras tiradas, Y es el número de caras que aparecen en las tiradas 2, 3 y 4.
- ¿Cuál es la distribución de X ? ¿Y la de Y ?
 - Construye la tabla de la función de probabilidad conjunta de X e Y .
 - Halla las funciones de probabilidad marginales y comprueba que coinciden con las que has hallado en (a).
 - ¿Son independientes X e Y ?
 - Halla la probabilidad condicional de que $X = x$ dado que $Y = 2$, para $x = 0, 1, 2$ y 3.
5. Supongamos que X e Y son dos variables aleatorias Poisson independientes cuyos parámetros son 3 y 4 respectivamente. Halla la probabilidad de que $X + Y = 5$. (Pista: Este suceso se puede descomponer como unión de 6 sucesos disjuntos: $(X = 0 \text{ e } Y = 5)$, $(X = 1 \text{ e } Y = 4)$, etc. Además se puede usar la fórmula binomial para sumar las 6 probabilidades.)
6. Sean X e Y dos v.a. independientes con la misma función de probabilidad $f(k) = pq^k$ para $k = 0, 1, \dots$. Esta es la función de probabilidad de la distribución geométrica de parámetro p , $0 < p < 1$ y $q = 1 - p$. Sea Z el mínimo de X e Y . Queremos determinar la función de probabilidad de Z , para ello vamos a completar los siguientes pasos:
- Para $n = 0, 1, \dots$ halla $P(X \geq n)$.
 - Para $n = 0, 1, \dots$ halla $P(Z \geq n)$. (Pista : $Z \geq n$ si y sólo si tanto $X \geq n$ como $Y \geq n$).
 - Usando el resultado del apartado (b) halla $f_Z(k) = P(Z = k)$, para $k = 0, 1, \dots$

7. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aleatorias independientes tales que cada una de ellas sigue una distribución geométrica de parámetro p , es decir su función de probabilidad es $f(x) = pq^x$ para $x = 0, 1, \dots$ siendo $0 < p < 1$ y $q = 1 - p$. Calcula su función de probabilidad conjunta.
8. Se elige al azar un punto dentro del cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$. Para cada uno de los sucesos siguientes, dibuja la región de $\mathbb{R}^2$ asociada y calcula su probabilidad:
 - a) El punto pertenece al cuadrado de vértices $(0,0)$, $(\frac{1}{2},0)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ y $(0,\frac{1}{2})$.
 - b) Dista de $(0,0)$ menos de $\frac{1}{2}$.
 - c) La suma de sus coordenadas es mayor que 1.
 - d) El valor absoluto de la diferencia entre sus coordenadas es mayor que $\frac{1}{2}$.
9. Se eligen al azar dos números reales en el intervalo $(0,1)$.
 - a) ¿Cuál es la probabilidad de que el menor sea mayor que $\frac{1}{2}$? Dibuja la región asociada a ese suceso.
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de que el menor sea mayor que $\frac{1}{4}$ y el mayor sea menor que $\frac{3}{4}$? Dibuja la región asociada a ese suceso.
 - c) Los dos números elegidos se utilizan para señalar dos puntos por donde cortar un bastón de un metro de longitud. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres trozos del bastón constituyan un triángulo? Dibuja la región asociada a ese suceso.
10. Sean X e Y dos v.a. independientes que siguen una distribución exponencial de parámetro λ , por lo tanto una función de densidad conjunta es $f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$ para $x > 0, y > 0$ (y 0 en otro caso). Halla (y representa gráficamente) la función de densidad de las dos variables aleatorias siguientes (halla primero la función de distribución y después deriva):
 - a) $U = \max(X, Y)$ (Pista: Si a es un número positivo, $U \leq a$ si y solo si tanto $X \leq a$ como $Y \leq a$)
 - b) $V = \min(X, Y)$ (Pista: Si a es un número positivo, halla $P(V > a)$ y a partir de ella determina $P(V \leq a)$).
11. Sean X e Y dos variables independientes que siguen una distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$. Para hacer los siguientes cálculos no necesitas hacer ninguna integral: ten en cuenta que el conjunto de valores posibles es un cuadrado de lado 1 en el plano, luego la función de densidad conjunta es constante e igual a 1.
 - a) Escribe su densidad conjunta.
 - b) Representa gráficamente el suceso $2X \leq Y$ y calcula $P(2X \leq Y)$.
 - c) Si a es un número entre 0 y 1, representa gráficamente y halla la probabilidad de que el máximo de X e Y sea menor o igual que a . Es decir, halla la función de distribución de $M = \max(X, Y)$. Deriva para hallar una función de densidad de M . Dibuja las funciones de densidad y distribución que acabas de calcular.
 - d) Halla $P(X + Y \leq a)$ para cualquier número a entre 0 y 1, antes representa gráficamente el suceso involucrado.
 - e) Halla $P(X + Y \leq a)$ para cualquier número a entre 1 y 2, antes representa gráficamente el suceso involucrado.
 - f) Combina los resultados de los apartados (d) y (e) para obtener la función de distribución de $Z = X + Y$. Deriva para obtener una densidad de Z . Dibuja las funciones de densidad y distribución que acabas de calcular.

12. Luis y Marcos van a hacer su compra semanal a un supermercado, cada uno con un carrito. Terminan a la vez y escogen una caja diferente para pagar. Queremos saber la probabilidad de que Luis tenga que esperar a que empiecen a cobrarle al menos tres veces más que Marcos. Para hallarla llama X al tiempo que espera Luis a ser servido e Y al tiempo que espera Marcos. Supón que X e Y son v.a. independientes y que siguen una distribución exponencial de parámetro λ . Traduce el suceso de interés *Luis tiene que esperar a que empiecen a cobrarle al menos tres veces más que Marcos* a una región del plano, dibuja esa región y calcula su probabilidad.
13. La densidad conjunta de X e Y es $f(x, y) = \lambda^3 x e^{-\lambda(x+y)}$ para $x > 0$ e $y > 0$. (Representa gráficamente los sucesos involucrados en las apartados siguientes antes de calcular su probabilidad.)
 - a) Halla las densidades marginales y demuestra que X e Y son independientes.
 - b) Halla $P(X \leq a, Y \leq b)$ para cualesquiera a y b números positivos.
 - c) Halla $P(X \leq a)$ para $a > 0$.
 - d) Calcula la probabilidad de que $X + Y \leq a$ para $a > 0$
 - e) Encuentra una densidad para $Z = X + Y$. Dibújala.
14. Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con las siguientes funciones de densidad: $f_X(x) = 2(1 - x)$ para $0 < x < 1$ y $f_Y(y) = 2y$ para $0 < y < 1$. Representa gráficamente esas funciones. Dibuja el suceso X es mayor que Y y calcula su probabilidad.
15. La distribución conjunta de las variables aleatorias X e Y es uniforme en el rombo con vértices en $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ y $(0,-1)$.
 - a) Sin hacer ningún cálculo, decide si X e Y son independientes.
 - b) Escribe la función de densidad conjunta de X e Y .
 - c) Calcula la función de densidad marginal de X y dibújala.
16. Si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes con distribución uniforme en $(0,1)$, obtén y representa gráficamente la función de densidad de $Y = X_1 + X_2$. Resuelve este problema por dos caminos distintos: mediante la función de distribución de Y , y mediante el teorema de transformaciones de variables. En ambos casos haz todas las representaciones gráficas oportunas.
17. Si X e Y son variables aleatorias con función de densidad conjunta $f(x, y) = 2$ en la región $0 < x < y < 1$, determina la función de densidad de $Z = X + Y$. Resuelve este problema por dos caminos distintos: mediante la función de distribución de Y , y mediante el teorema de transformaciones de variables. En ambos casos haz todas las representaciones gráficas oportunas.
18. Si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes con distribución exponencial $Ex(\lambda_i)$, determina la distribución de $Y = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$. Resuelve este problema por dos caminos distintos: mediante la función de distribución de Y , y mediante el teorema de transformaciones de variables. En ambos casos haz todas las representaciones gráficas oportunas.
19. Determinar la distribución de la suma y de la diferencia de dos variables aleatorias normales típicas independientes.
20. Determina la función de densidad de la suma de dos v.a. independientes, ambas con distribución Gamma de parámetros $\alpha = \beta = 2$. Utiliza para ello el teorema de cambio de variables, representando gráficamente el soporte de las variables originales y el soporte de las variables transformadas que hayas utilizado.
21. Si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes con distribución Gamma $Ga(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, determinar la distribución conjunta de $Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$ e $Y_2 = X_1 + X_2$ y sus marginales. Representa gráficamente el soporte de las variables originales y el soporte de las variables transformadas.

22. Cada una de las cinco componentes del sistema dibujado más abajo tiene un tiempo de vida que es exponencial de parámetro λ (media $\frac{1}{\lambda}$), todos ellos independientes. El sistema deja de funcionar cuando se estropean al menos una de las componentes que hay en cada uno de sus dos ramales.

- a) Obtén, en términos de λ , la función de densidad del tiempo de vida del sistema.
- b) Suponiendo que $\lambda = 1$: ¿Cuánto vale la probabilidad de que el sistema tarde en estropearse más de un día?
- c) ¿Y la probabilidad de que el sistema tarde en estropearse más de dos días, si se sabe que al final del primer día todavía estaba funcionando?



SOLUCIONES

1 (b) .29, (c) .26, (d) valores 0, 1, 2, 3, 4; probabilidades .18, .33, .26, .17, .06.

2 0.0643

3 (a) $\text{Bi}(m, \gamma)$, (c) $\text{Bi}(n, p\gamma)$, (d) $M - r$ es $\text{Bi}(n - r, \frac{p(1-\gamma)}{1-p\gamma})$

4 (a) Cada una de ellas sigue una distribución binomial con $n=3$ y $p=.5$.

		X				
		0	1	2	3	
(b) y (c)	0	1/16	1/16	0	0	2/16 = 1/8
	1	1/16	3/16	2/16	0	6/16 = 3/8
	2	0	2/16	3/16	1/16	6/16 = 3/8
	3	0	0	1/16	1/16	2/16 = 1/8
		2/16	6/16	6/16	2/16	1

(d) No (e) $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$

5 $\frac{7^5 e^{-7}}{5!}$

6 (a) q^n (b) q^{2n} (c) $q^{2n}(1 - q^2)$

7 $f(x_1, \dots, x_n) = p^n q^{\sum x_i}$ si $x_i = 0, 1, \dots$ para todo $i = 1, \dots, n$, y vale 0 en otro caso.

8 (a). $\frac{1}{4}$ (b). $\frac{\pi}{16}$ (c). $\frac{1}{2}$ (d). $\frac{1}{4}$

9 (a). $\frac{1}{4}$ (b). $\frac{1}{4}$ (c). $\frac{1}{4}$

10 $f_U(u) = 2\lambda(1 - e^{-\lambda u})e^{-\lambda u}$ si $u > 0$, (y 0 en otro caso).

$f_V(v) = 2\lambda e^{-2\lambda v}$ si $v > 0$, (y 0 en otro caso).

11 (a). $f(x, y) = 1$ para $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$

(b). $\frac{1}{4}$, (c). a^2 ; $f_M(x) = 2x$ para $0 < x < 1$. (d). $\frac{a^2}{2}$

(e). $1 - \frac{(2-a)^2}{2}$

(f). $f_Z(z) = z$ si $0 < z < 1$, $2 - z$ si $1 \leq z < 2$, y 0 en otro caso.

12 $\frac{1}{4}$

13 (a). $f_X(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$, $x > 0$. $f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}$, $y > 0$.

(b). $(1 - (1 + \lambda a)e^{-\lambda a})(1 - e^{-\lambda b})$ (c). $1 - (1 + \lambda a)e^{-\lambda a}$ (d). $1 - (1 + \lambda a + \frac{\lambda^2 a^2}{2})e^{-\lambda a}$.

(e). $\frac{\lambda^3 z^2}{2} e^{-\lambda z}$ ($z > 0$)

14 $\frac{1}{6}$

15 (a). No (b). $f(x, y) = \frac{1}{2}$ si $|x| + |y| < 1$ (c). $f(x) = 1 - |x|$ si $|x| < 1$

16 $f(y) = y$, si $0 < y < 1$, $f(y) = 2 - y$, si $1 < y < 2$.

17 $f(z) = z$, si $0 < z < 1$, $2 - z$, si $1 \leq z \leq 2$

18 $f(y) = Ga(y|2, 1)$

19 Normales, con media 0 y varianza 2.

20 $Ga(4, 2)$

21 $Y_1 \sim Be(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $Y_2 \sim Ex(\frac{1}{2})$

22 (a). $f_T(t) = 1 - 2\lambda \exp(-2\lambda) - 3\lambda \exp(-3\lambda) + 5\lambda \exp(-5\lambda)$ si $t \geq 0$, y 0 en otro caso.

(b). 0.1784 (c). 0.1163.

Tema 4: Esperanza

1. Sea X una variable aleatoria para la que existe $E(X)$ y $E(X^2)$.
 - a) Comprueba que $E((X-E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$.
 - b) Demuestra que para cualquier número real a , se cumple la relación:

$$E((X-a)^2) = E((X-E(X))^2) + (a-E(X))^2,$$
 por lo que $E((X-a)^2)$ se minimiza cuando $a = E(X)$.
2. Calcula la esperanza y varianza de una variable aleatoria X con distribución:
 - a) Discreta cuyos valores con probabilidad no nula son $1, 2, \dots, n$, todos ellos equiprobables.
 - b) Binomial de parámetros $n = 4$ y $p = \frac{1}{2}$.
 - c) La que se presenta en el problema 4 del tema 2.
3. Si representamos por μ y σ^2 , respectivamente, la esperanza y varianza de una variable aleatoria X , expresa en términos de estos dos momentos:
 - a) $E(2X - 3)$ y $V(2X - 3)$.
 - b) El segundo momento de X y el segundo momento de X respecto de $a = 1$.
 - c) $V(5 - X)$.
 - d) $E((X - 2)(X + 1))$.
4. Sea X una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro λ .
 - a) Comprueba que $E(X) = \lambda$ y $E(X(X - 1)) = \lambda^2$.
 - b) Utilizando los resultados anteriores, calcula $E(X^2)$ y $E((X-E(X))^2)$.
5. Calcula la esperanza y varianza de una variable aleatoria X con distribución:
 - a) $f(x) = 6x(1-x)$ si $0 < x < 1$ (y 0 en otro caso).
 - b) $f(x) = \frac{3}{x^4}$ si $x > 1$ (y 0 en otro caso).
 - c) $f(x)$ es proporcional a x^2 si $0 < x < 1$ (y 0 en otro caso).
 - d) $f(x)$ es proporcional a x^k si $0 < x < 1$ (y 0 en otro caso), siendo $k > -1$ una constante conocida.
6. Rescata las gráficas de las densidades de los problemas 15 y 16 del tema 2. Antes de empezar a realizar cálculos, piensa dónde (de las gráficas anteriores claro) situarías la esperanza y la mediana de cada una de las variables de estos problemas. Rescata ahora la mediana de la distribución del problema 16, calcula la de la distribución del problema 15 y la esperanza de las dos distribuciones considerada. Sitúa todos estos valores en las gráficas anteriores. Si has acertado en tus previsiones pues ya has acabado el problema. Pero si te has equivocado deberías reflexionar un poco más sobre el significado de los conceptos de esperanza y mediana de la distribución de una variable aleatoria.
7. La esperanza de una variable aleatoria X no siempre representa un valor *típico* ni tampoco un valor *medio* de su distribución.
 - a) Calcula la esperanza de una variable aleatoria X cuyos únicos valores posibles (con probabilidad no nula) son 1, 2 y 1000 con probabilidades $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ respectivamente.
 - b) Si X tiene una distribución exponencial con parámetro λ , calcula la probabilidad de que X sea mayor que su esperanza.
 - c) Si X tiene una distribución exponencial con parámetro λ , calcula el valor m para el que $P(X > m) = \frac{1}{2}$.

8. Calcula la esperanza y varianza de una variable aleatoria X con distribución:
- Uniforme en el intervalo (α, β) .
 - Dada por la función de densidad $f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$ si $x > 0$ (y 0 en otro caso).
9. La altura de un gorila adulto macho sigue una distribución normal con valor esperado $\mu=75.2$ pulgadas y varianza $\sigma^2=8.5$ pulgadas².
- ¿Qué porcentaje de gorilas adultos macho medirá entre 73.0 y 77.4 pulgadas?
 - ¿Qué porcentaje de gorilas adultos macho pasará de 80.0 pulgadas?
 - Sabiendo que una pulgada equivale a 2.54 cm, ¿cuál sería la distribución de la altura de los gorilas adultos macho expresados en cm?
 - ¿Variarían las respuestas de los dos primeros apartados si las alturas viniesen expresadas en otra unidad que no fuesen pulgadas? Justifica tu respuesta.
10. Si X es una variable aleatoria con distribución normal:
- ¿Qué porcentaje de valores de la variable se encuentran a un máximo de tres desviaciones típicas de la media?
 - Si la desviación típica es $\sigma = 10$, ¿qué amplitud tiene un intervalo centrado en la media que contenga el 50 % de la población de valores de la variable?
11. Si X es una variable aleatoria con distribución Normal de media $\mu = 86$ y desviación típica $\sigma = 5$, calcula:
- La probabilidad de que X esté más alejada del 10 % de su media. i.e.: que no esté entre $\mu - 0,1\mu$ y $\mu + 0,1\mu$.
 - El percentil 75º de la distribución de X .
 - El percentil 25º de la distribución de X .
 - El número a de forma que la probabilidad de que $X \in [86 - a, 86 + a]$ sea 0.90.
12. Una empresa vende azúcar en bolsas de 5 kilos. Las envasadoras de azúcar no pueden garantizar un peso exacto de azúcar por bolsa; de hecho, los pesos se distribuyen normalmente con un peso medio de $\mu=5.13$ kilos y una desviación típica $\sigma=0.08$ kilos. Se pide:
- ¿Qué proporción de bolsas pesará menos de 5 kilos?
 - Se van a pesar 12 bolsas, ¿cuál es la probabilidad de que 10 o más bolsas pesen más de 5 kilos?
 - La máquina puede ajustarse para incrementar el peso medio μ . Suponiendo que la desviación típica no cambia, ¿a qué valor debería ajustarse μ para que solamente el 1 % de las bolsas pese menos de 5 kilos?
13. Determinar la función de densidad, la media y la varianza, de una v.a. Y cuyo logaritmo, $X = \ln Y$ tiene una distribución normal con función de densidad
- $$f(x) = N(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right)$$
14. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Calcula $E(e^{5X})$ y demuestra que $E(1/X)$ no existe.
15. Sea X la variable aleatoria que describe el número de caras obtenidas en 100 lanzamientos de una moneda equilibrada
- ¿Que dice la desigualdad de Chebyshev sobre la probabilidad de que X no esté a menos de un 10 % de su valor esperado?

- b) Repite el apartado anterior suponiendo que se realizan 1000 lanzamientos.
- c) Vuelve a repetir el primer apartado anterior pero ahora con n lanzamientos.
16. Aunque con frecuencia la desigualdad de Chebyshev no proporciona una buena cota, en ocasiones no puede mejorarse. Sea X una variable aleatoria que puede tomar los valores $-a$, 0 y a con probabilidades p , $1 - 2p$ y p respectivamente, donde $0 < p < \frac{1}{2}$, y siendo $a > 0$.
- a) Calcula la esperanza y la varianza de X .
- b) Utilizando la desigualdad de Chebyshev, halla una cota para $P(|X - E(X)| \geq a)$.
- c) Calcula el valor exacto de $P(|X - E(X)| \geq a)$ y compáralo con el valor de la cota que has obtenido en el apartado anterior.
17. Sean X e Y dos variables aleatorias independientes tales que: $E(X) = 2$, $E(X^2) = 6$, $E(Y) = 3$ y $E(Y^2) = 13$. Calcula:
- a) $E(X^2 - 3X + 2)$, $E((X + 1)^2)$, $E((X - E(X))^2)$ y $E(X^2) - (E(X))^2$.
- b) $E(X + Y)$, $E(2XY)$, $E((3X - Y)^2)$ y $(E(3X - Y))^2$.
18. Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación de las variables aleatorias X e Y cuya función de probabilidad conjunta se muestra en la tabla siguiente:

$f(x, y)$		y			
		1	2	3	
x	1	0.12	0.08	0.11	0.31
	2	0.18	0.14	0.07	0.39
	3	0.17	0.05	0.08	0.30
		0.47	0.27	0.26	

19. Sea Y el número de fracasos que preceden al segundo éxito en un proceso de Bernoulli con probabilidad de éxito p . Queremos calcular $E(Y)$ y $V(Y)$, para ello vamos a considerar $Y = X_1 + X_2$, siendo X_1 el número de fracasos que preceden al primer éxito, y X_2 el número de fracasos entre el primer y el segundo éxito.
- a) Obtén la función de probabilidad de X_1 y la de X_2 .
- b) Calcula $E(X_1)$, $V(X_1)$, $E(X_2)$ y $V(X_2)$.
- c) A partir de los resultados del apartado anterior, calcula $E(Y)$ y $V(Y)$.
20. Si X , Y y Z son variables aleatorias y a, b, c y d son números reales, comprueba que:
- a) $\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\text{Cov}(X, Y)$.
- b) $\text{Cov}(X + Y, Z) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z)$.
- c) $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$.
21. Si (X, Y) es un vector aleatorio con función de densidad conjunta $f(x, y) = \frac{6}{5}(x^2 + y)$ si $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$ (y 0 en otro caso), calcula la covarianza y el coeficiente de correlación de ambas variables.
22. La distribución conjunta de las variables aleatorias X e Y es uniforme en el rombo con vértices en $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(0, -1)$.
- a) Calcula $E(X)$ y $V(X)$.
- b) Sin hacer ningún cálculo adicional, escribe la función de densidad marginal de Y , su media y su varianza.
- c) Calcula $E(XY)$, $\text{Cov}(X, Y)$ y $\rho(X, Y)$.

23. Un suceso, A , asociado con cierto experimento es tal que $P(A) = .35$. El experimento se repite 45 veces, y en la repetición i -ésima, $i = 1, \dots, 45$ se define la variable $X_i = 1$ si ocurre A y $X_i = 0$ en otro caso.
- Obtén la distribución de $\Sigma_{45} = X_1 + \dots + X_{45}$.
 - Calcula $E(\bar{X}_{45})$ y $V(\bar{X}_{45})$ siendo $\bar{X}_{45}$ la media muestral de las 45 variables anteriores.
 - Utilizando la desigualdad de Chebyshev, calcula una cota para $P(0,3 < \bar{X}_{45} < 0,4)$.
 - Calcula el valor exacto de $P(0,3 < \bar{X}_{45} < 0,4)$.
24. Sean $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 0,25$, y sea $\bar{X}_{100}$ su media muestral.
- Calcula la esperanza y la varianza de $\bar{X}_{100}$.
 - Utilizando la desigualdad de Chebyshev, encuentra una cota para la probabilidad de que $\bar{X}_{100}$ se diferencie de su media en más de 0.5.
25. Sea $X_1, \dots, X_{25}$ una muestra aleatoria de tamaño 25 de una población normal de media $\mu = 6$ y varianza $\sigma^2 = 1,5$ y sea $\bar{X}_{25}$ su media muestral.
- ¿Qué probabilidad hay de que una variable cualquiera de la muestra tome valores entre 5.5 y 6.5 ?
 - ¿Cual es la probabilidad de que $\bar{X}_{25}$ esté entre 5.5 y 6.5 ?
 - ¿Cuántas observaciones serían necesarias como mínimo para que $P(5,95 \leq \bar{X}_n \leq 6,05) \geq 0,95$?
26. Sea $X_1, \dots, X_{40}$ es una muestra aleatoria de una distribución $N(50,36)$. Calcula:
- La probabilidad de que su media muestral, $\bar{X}_{40}$, esté entre 50 y 51.
 - La probabilidad de que su suma, Σ_{40} , sea menor que 1940.
 - El percentil del 98 % de la distribución de $\bar{X}_{40}$.
 - Dos números equidistantes del valor esperado de Σ_{40} tales que la probabilidad de que Σ_{40} esté entre ellos sea 0.75.
27. Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de cada una de las distribuciones descritas a continuación. Calcula la esperanza y la varianza de su suma, $\Sigma_n = X_1 + \dots + X_n$, y también de su media muestral, $\bar{X}_n = \Sigma_n/n$.
- Distribución exponencial de parámetro λ .
 - Distribución uniforme en $(0,1)$.
 - Distribución geométrica de parámetro p .
 - Distribución $N(\mu, \sigma^2)$.
 - Distribución de Poisson de parámetro λ .
 - Distribución binomial de parámetros k y p .
 - La distribución con densidad $f(x) = \frac{2}{x^3}$ si $x > 1$ y en otros casos.
28. Si $X_1, \dots, X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución con valor esperado 3 y varianza 2.4 ¿Cómo de grande debe ser n para que la varianza de $\bar{X}_n$ sea menor que 0.01 ?
29. La función de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias discretas es:

$y \setminus x$	1	2	3	4
1	0.10	0.05	0.02	0.02
2	0.05	0.20	0.05	0.02
3	0.02	0.05	0.20	0.04
4	0.02	0.02	0.04	0.10

- a) Calcula $E(Y \mid X = x)$ para $x = 1, 2, 3, 4$, y la función de probabilidad de la variable aleatoria $E(Y \mid X)$.
 - b) Obtén $E(5Y + 1 \mid X = 3)$ y $V(X \mid Y = 4)$.
 - c) Calcula $E(X^2 - 3)$ y $E(X^2 - 3 \mid Y = 2)$.
30. Un edificio tiene dos ascensores, uno rápido y otro lento. En promedio, el tiempo que una persona debe esperar para coger el ascensor lento (rápido) es de 3 (1) minutos. Si una persona elige el ascensor rápido con probabilidad $2/3$ y el lento con probabilidad $1/3$, ¿cual es el tiempo medio que una persona tendrá que esperar para coger un ascensor del edificio?
31. Sean X e Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta $f(x, y) = e^{-y}$, si $0 \leq x \leq y$ y 0 en otro caso. Calcula:
- a) El coeficiente de correlación de X e Y .
 - b) $E(X \mid Y = y)$ y $E(Y \mid X = x)$.
 - c) La distribución de las variables $E(X \mid Y)$ y $E(Y \mid X)$.
32. Sean X e Y dos variables aleatorias para las que existen sus medias y varianzas. Utilizando que $E(X) = E(E(X \mid Y))$ y que $V(X \mid Y) = E(X^2 \mid Y) - [E(X \mid Y)]^2$, comprobar que $V(X) = V(E(X \mid Y)) + E(V(X \mid Y))$.
33. Sean X e Y dos variables aleatorias tales que $E(X \mid Y) = 10 - Y$, y $E(Y \mid X) = 7 - \frac{X}{4}$. Calcular la correlación entre X e Y .
34. Calcula la función generatriz de momentos de una variable aleatoria con distribución:
- a) Binomial de parámetros n y p .
 - b) Poisson de parámetro λ .
35. Sea $\{X_i, i = 1, \dots, 10\}$ una colección de variables aleatorias independientes con distribución Poisson de parámetro $\lambda_i, i = 1, \dots, 10$. Calcula la función de probabilidad de la variable aleatoria $Y = \sum_{i=1}^{10} X_i$.
36. Si X es una variable aleatoria con distribución Gamma de parámetros α y β , obtén su media y su varianza a partir de su función generatriz de momentos. La suma finita de variables aleatorias independientes con distribución Gamma, ¿es también una variable aleatoria con distribución Gamma?
37. Calcula la función generatriz de momentos de una variable aleatoria con función de densidad $f(x) = x$ cuando $0 \leq x \leq 1$, $f(x) = 2 - x$ cuando $1 \leq x \leq 2$ y $f(x) = 0$ en el resto de valores reales.
38. Calcula la función de probabilidad, función de distribución, media, mediana y varianza de una variable aleatoria discreta cuya función generatriz de momentos es $\psi(t) = (e^t + 2e^{4t} + 2e^{8t})/5$, $-\infty < t < \infty$.
39. Utiliza funciones generatrices de momentos para demostrar que si X e Y son variables aleatorias independientes entonces $Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y)$.

SOLUCIONES

- 2** (a) $\frac{n+1}{2}$ y $\frac{n^2-1}{12}$ (b) 2 y 1
- 3** (a) $2\mu - 3$ y $4\sigma^2$ (b) $\sigma^2 + \mu^2$ y $\sigma^2 + (\mu - 1)^2$ (c) σ^2 (d) $\sigma^2 + \mu^2 - \mu - 2$
- 4** (c) $\lambda + \lambda^2$ y λ
- 5** (a) 0.5 (b) 1.5 (c) 0.75 (d) $\frac{k+1}{k+2}$
- 7** (a) 251.25 (b) 0.3679 (c) $\frac{\ln 2}{\lambda}$
- 8** (a) $\frac{b+a}{2}$ y $\frac{(b-a)^2}{12}$ (b) $\frac{2}{\lambda}$ y $\frac{2}{\lambda^2}$
- 9** (a) 54.68 % (b) 4.95 % (c) N(191.008, 54.8386) (d) No. La normalidad se mantiene en transformaciones lineales.
- 10** (a) 99.74 % (b) 13.6
- 11** (a) 0.0854 (b) 89.37 (c) 82.63 (d) 8.225
- 12** (a) 5.16 % (b) 0.9787 (c) 5.1864 kilos
- 13** $f(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2}(\frac{\ln y - \mu}{\sigma})^2\}$, $E(y) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$, $V(y) = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$
- 15** (a) Menor o igual que 1. (b) Menor o igual que .1 (c) Menor o igual que $\frac{100}{n}$.
- 16** (a) 0 y $2a^2p$ (b) Menor o igual que $2p$. (c) Igual a $2p$.
- 17** (a) 2, 11, 2 y 2 respectivamente (b) 5, 12, 31 y 9 respectivamente
- 18** -0.0821 y -0.1269
- 19** (a) $f(x_1) = p(1-p)^{x_1}$, si $x_1 = 0, \dots$; $f(x_2)$ coincide con $f(x_1)$.
 (b) $E(x_1) = E(x_2) = \frac{1-p}{p}$ y $V(x_1) = V(x_2) = \frac{1-p}{p^2}$. (c) $2 \frac{1-p}{p}$ y $2 \frac{1-p}{p^2}$.
- 21** -0.01 y -0.1306
- 22** (d) 0 y $\frac{1}{6}$ (f) todos son 0.
- 23** (a) Binomial con $n = 45$ y $p = 0.35$ (b) 0.35 y 0.005
- 24** (a). 4 y 0.16 (b). Menor o igual que 0.64
- 25** (a). 0.3182 (b). 0.9586 (c). 2305
- 26** (a). 0.3531 (b). 0.0571 (c). 51.94 (d). $2000 \pm 43,64$
- 27** (a). $E(S_n) = \frac{n}{\lambda}, V(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}, E(\bar{X}_n) = \frac{1}{\lambda}, V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n\lambda^2}$ (b). $E(S_n) = \frac{n}{2}, V(S_n) = \frac{n}{12}, E(\bar{X}_n) = \frac{1}{2}, V(\bar{X}_n) = \frac{1}{12n}$ (c). $E(S_n) = \frac{nq}{p}, V(S_n) = \frac{nq}{p^2}, E(\bar{X}_n) = \frac{q}{p}, V(\bar{X}_n) = \frac{q}{np^2}$ (d). $E(S_n) = nb, V(S_n) = na^2, E(\bar{X}_n) = b, V(\bar{X}_n) = \frac{a^2}{n}$ (e). $E(S_n) = n\lambda, V(S_n) = n\lambda, E(\bar{X}_n) = \lambda, V(\bar{X}_n) = \frac{\lambda}{n}$ (f). $E(S_n) = nkpq, V(S_n) = nkpq, E(\bar{X}_n) = kp, V(\bar{X}_n) = \frac{kpq}{n}$ (g). $E(S_n) = 2n, V(S_n)$ no existe, $E(\bar{X}_n) = 2, V(\bar{X}_n)$ no existe
- 28** 241 al menos
- 33** -0.5, siempre que X e Y no sean variables aleatorias degeneradas.

Tema 5: Teoremas límites.

1. **Convergencia Débil.** La sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$ converge en probabilidad a una constante b si $\forall \epsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - b| < \epsilon) = 1$.
 - a) Sea $\{Z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ una sucesión de variables aleatorias, tales que Z_n solo puede tomar los valores 0 y n^2 con probabilidades $1 - \frac{1}{n}$ y $\frac{1}{n}$, respectivamente. Comprueba que la sucesión de variables aleatorias $\{Z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ converge en probabilidad a 0, pero la sucesión de sus valores esperados diverge.
 - b) Construye una sucesión de variables aleatorias cuyas medias converjan a 0, pero que no converja en probabilidad.
2. **Convergencia en Media Cuadrática.** La sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$ converge en media cuadrática a una constante b si $\lim_{n \rightarrow \infty} E((X_n - b)^2) = 0$.
 - a) Comprueba que la sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$ converge en media cuadrática a b si y solo si sus medias convergen a b y sus varianzas convergen a 0.
 - b) Comprueba que si $\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$ converge en media cuadrática a b , entonces también converge en probabilidad a b .
3. Sea $\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, todas ellas con la misma distribución cuya media μ y varianza σ^2 existen. Comprueba que la sucesión $\{\bar{X}_n\}_{n=1}^{+\infty}$, donde $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, converge en media cuadrática a μ .
4. Sea $\{Z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ una sucesión de variables aleatorias tales que Z_n solo puede tomar los valores $\frac{1}{n}$ y n con probabilidades $1 - \frac{1}{n^2}$ y $\frac{1}{n^2}$, respectivamente.
 - a) ¿Existe alguna constante b a la que esa sucesión converja en probabilidad?
 - b) ¿Existe alguna constante b a la que esa sucesión converja en media cuadrática?
5. Sea S_{45} el número de fracasos que preceden al 45º éxito en un proceso de Bernoulli con probabilidad de éxito $p=0.36$. Sea $S_{45} = X_1 + \dots + X_{45}$, donde X_1 representa el número de fracasos que preceden al primer éxito, X_2 es el número de fracasos entre el primer y el segundo éxito, y así sucesivamente. Las X_j son independientes.
 - a) Dar el nombre de la distribución de una única X_j , obtener también su media μ y su varianza σ^2 .
 - b) ¿Cuál es el valor esperado y la varianza de S_{45} ?
 - c) Aproximar la probabilidad de que S_{45} esté a una distancia no superior a 20 de su media.
 - d) ¿Qué dice la desigualdad de Chebyshev sobre la probabilidad que aproximas en el apartado c ?
6. Los clientes de cierto banco efectúan depósitos con media 157.92 euros y desviación típica 30.20 euros. Aparte de esto no se sabe nada más acerca de la distribución de estos depósitos. Como parte de un estudio, se eligieron al azar e independientemente 75 depósitos. ¿Cuál es la probabilidad de que la media de estos 75 depósitos sea 170.00 euros o mayor ?
7. Los vehículos que cruzan un puente tienen pesos cuya media es de 4675 quilos y cuya desviación estándar es de 345 quilos. Si hay 40 vehículos sobre el puente en un instante dado, hallar el número a tal que la probabilidad (aproximada) de que su peso total no supere a a sea del 99 %.
8. La gente que frecuenta cierto pub tiene una probabilidad de 0.001 de salir y cantar con el grupo que está actuando. En una noche determinada hay 150 personas en el pub. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una persona salga y cante con el grupo ? Suponer que cada persona en el pub toma la decisión independientemente del resto. Hallar el verdadero valor y el aproximado por la distribución apropiada con una precisión de 5 dígitos.

9. El suceso A tiene una probabilidad de 0.4. Esto significa que esperamos que la frecuencia relativa de A esté cercana a 0.4 en una larga serie de repeticiones del experimento que se está modelizando. ¿Cuál es la probabilidad de que en 1000 experimentos, la frecuencia relativa esté entre 0.38 y 0.42 (inclusive) ? Usar una aproximación adecuada.
10. Un borracho camina de forma aleatoria de la siguiente forma: Cada minuto da un paso hacia adelante o hacia atrás con igual probabilidad y con independencia de los pasos anteriores. Cada paso es de 50 cm. Utiliza el teorema central del límite para aproximar la probabilidad de que en una hora avance más de 5 metros.
11. Una compañía de logística envía paquetes de distintos pesos, con una media de 15 kg y una desviación típica de 10. Teniendo en cuenta que los paquetes provienen de una gran cantidad de clientes diferentes, es razonable modelizar sus pesos como variables aleatorias independientes. Calcular la probabilidad de que el peso total de 100 paquetes exceda de 1700 kg.
12. Un jugador de baloncesto encesta un lanzamiento de 3 puntos con probabilidad 0.3. Empleando el teorema central del límite, aproxima la distribución del número de canastas conseguidas en 25 lanzamientos. Calcula la probabilidad de encestar más de 10 canastas.

SOLUCIONES

- 1 **(b)** Por ejemplo, la sucesión $\{Z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ tal que $P(Z_n = \frac{1}{n} - 1) = \frac{1}{2}$ y $P(Z_n = 1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$.
- 4 **(a)** Si, $b = 0$. **(b)** No.
- 5 **(a)**. geométrica de parámetro $p=0.36$, 1.7778 y 4.9383, respectivamente **(b)**. 80 y 222.22, respectivamente **(c)**. 0.8324 (con corrección por continuidad) **(d)**. que al menos es 0.4445
- 6 0.0003
- 7 192083.99 quilos
- 8 0.13936 exacto, 0.13929 aproximado
- 9 0.8132 (con corrección por continuidad)
- 10 0.0985
- 11 0.0227
- 12 $N(7.5, 5.25)$, 0.1379

Anexo 1: Problemas de exámenes anteriores.

- (Febrero del 2000). Un aparato de diagnóstico automático da un diagnóstico basado en el resultado de n análisis de un mismo paciente. Cada análisis, independientemente de los demás, puede dar un resultado erróneo con probabilidad p . Consideremos los sucesos $H_m = \{m \text{ análisis son correctos}\}$ y $B = \{\text{un paciente está bien diagnosticado}\}$. La probabilidad de un diagnóstico correcto es una función no decreciente del número m de análisis correctos, esto es: $P(B|H_m) = g(m)$. En una mañana la máquina ha diagnosticado a k pacientes. Encontrar la probabilidad de que al menos un paciente esté mal diagnosticado. Particularizar el resultado para $g(m) = \frac{m}{n}$.
- (Febrero del 2000). Sean U_1 y U_2 dos variables aleatorias independientes y equidistribuidas $Un(0, 1)$. Definimos $X = \sqrt{U_1}$ e $Y = 2XU_2$.
 - Obtener la densidad conjunta de X e Y .
 - Obtener las funciones de densidad marginales de X e Y y sus medias.
 - Sea W una variable aleatoria Bernoulli tal que $P(W = 1) = P(0 \leq Y \leq \sqrt{X})$. Calcular $E(W)$.
- (Febrero del 2000). Las bombillas utilizadas por un aparato pueden ser de dos tipos, A y B . Las de tipo A tienen una duración media de 2000 horas con una desviación típica de 400 horas. Las de tipo B tienen una duración media de 1800 horas y una desviación típica de 500 horas. Se compran 200 bombillas del tipo A y 150 del B . Calcular la probabilidad de que la duración media de la muestra A no supere en más de 100 horas a la duración media de la muestra B .
- (Febrero del 2000). Sea X el número mínimo de pruebas Bernoulli (con probabilidad de éxito p) que tenemos que realizar hasta que se produzca al menos un éxito y un fracaso. Determinar la distribución de la variable X , su esperanza y su varianza.
- (Febrero del 2000). Sean X e Y dos variables aleatorias cuya densidad conjunta es uniforme sobre el interior del triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(1,2)$. Calcular $P(X < 1, Y < 1)$ y $P(Y < 1|X < 1,5)$.
- (Febrero del 2000). Las puntuaciones que han obtenido los estudiantes del colegio A en las pruebas de selectividad se distribuyen normales de media 6.25 y varianza 1. Análogamente, las del colegio B también son normales pero con media 6 y varianza 1.5. Se eligen al azar dos estudiantes de A y tres de B . Calcular:
 - La probabilidad de que la puntuación media de los dos estudiantes de A sea superior a la media de los tres estudiantes de B .
 - La probabilidad de que uno de esos cinco estudiantes, elegido al azar, haya obtenido una puntuación superior a 6.5.
- (Septiembre del 2000). Una urna contiene 3 bolas azules (A) y 5 bolas blancas (B). Se extraen al azar y sin reemplazamiento dos bolas de la urna. Sea X la variable aleatoria que representa la primera extracción (1 si bola A y 0 si bola B). Sea Y la variable aleatoria que representa el número de bolas A que permanecen en la urna después de las dos extracciones.
 - Construye una tabla que represente la función de probabilidad conjunta de X e Y y las dos marginales.
 - Calcula el coeficiente de correlación de X e Y .
 - Obtén la media y varianza de $V = X + Y$, y representa gráficamente las funciones de probabilidad y distribución de V .
- (Septiembre del 2000). Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f(x) = kx^2$ si $0 < x < 2$. Supongamos que se genera un círculo cuyo radio es de longitud X , sea Y la variable que mide el área del círculo. Calcula la función de densidad de Y y el área esperada de dicho círculo.

9. (Septiembre del 2000). En un proceso de fabricación de hilados se producen roturas del hilo de manera aleatoria a lo largo del tiempo. Supongamos que un trabajador controla 800 bobinas de hilo y que la probabilidad de rotura del hilo en cada bobina, durante un intervalo de tiempo de una hora, es $p=0.005$. Siendo imposible que el hilo de la bobina se rompa dos veces en ese tiempo. Encuentra el número de roturas más probable y la probabilidad de que se produzcan a lo sumo 10 roturas en una hora. Si observamos el sistema a lo largo de tres días (72 horas), calcula la probabilidad de que el número medio de roturas sea menor que siete.
10. (Septiembre del 2000). Una variable aleatoria X toma valores enteros positivos con probabilidades que decrecen en progresión geométrica. Elegir el primer término y la razón de la progresión para que $E(X) = 10$, y calcular bajo dichas condiciones $P(X \leq 10)$.
11. (Septiembre del 2000). En una oposición se supone que los candidatos que acuden preparados al examen son el 90 %, de los cuales sólo aprueba el 90 % por diversos factores. En cambio el 15 % de los no preparados también aprueba el examen.
 - a) ¿Cuál es la probabilidad que un candidato suspendido estuviese realmente preparado?
 - b) El tribunal decide cambiar el tipo de examen de modo que los no preparados suspendan con probabilidad 0.99, aunque esto afecte también a los preparados que tienen ahora una probabilidad de suspender de 0.25. Calcula la probabilidad del apartado anterior bajo estas nuevas condiciones.
12. (Septiembre del 2000). Una fábrica de azúcar produce paquetes con un peso nominal de 1000 gramos. Sin embargo, debido a fluctuaciones aleatorias en el proceso de producción, el peso real de cada paquete es una variable aleatoria X con distribución normal. Se sabe que el 6 % de los paquetes producidos pesan menos de 1000 gramos y que el 5 % sobrepasan los 1020 gramos.
 - a) Calcula la media y desviación típica de X , y el porcentaje de paquetes de azúcar que pesan menos de 995 gramos.
 - b) La fábrica tiene un beneficio por paquete producido que es igual a $15 - 0,01X$ pesetas. Si cada día se producen 150000 paquetes ¿cuál es el beneficio medio diario de la fábrica? Calcula el porcentaje de días en los que la fábrica tiene un beneficio superior a 750000 pesetas.
13. (Febrero 2001, primer parcial). Consideremos la función $f(x) = C(1 + \tau x)$ si $x = 0, 1, -1, 2$ ó -2 y vale 0 en otro caso, siendo C una constante positiva.
 - a) Determina los valores de $\tau \in \mathbb{R}$ y de C para los que $f(x)$ es una verdadera función de probabilidad.
 - b) Calcula y representa gráficamente la función de distribución de $Y = X^2$, siendo X una variable aleatoria con función de probabilidad dada por $f(x)$.
 - c) Una partícula va a realizar varios saltos a lo largo de un eje horizontal. En cada salto se moverá una unidad a derecha o izquierda según una distribución Bernoulli de parámetro $p = 0,5$, independientemente de los saltos anteriores. El número de saltos, que depende de la *energía* de la partícula, va a ser $2 + X$, siendo X una variable aleatoria con función de probabilidad dada por $f(x)$. Obtén la probabilidad de que la posición final de la partícula esté a más de dos unidades de su posición original.
14. (Febrero 2001, primer parcial). Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad $f(x) = (x + 1)/6$, cuando $-1 < x \leq 1$, $f(x) = (5 - x)/12$, cuando $1 \leq x < 5$ y $f(x) = 0$ para el resto de números reales.
 - a) Obtén la mediana y el percentil del 70 % de la distribución de X .
 - b) Calcula las probabilidades $P(0 < X < 2)$ y $P(0 < X < 2 \mid X < 3)$
 - c) Determina y representa gráficamente una función de densidad para la variable aleatoria $Y = |X| + 4$.

15. (Febrero 2001, primer parcial). Una fábrica de conservas vegetales dispone de dos almacenes. En el almacén de *Tabernes* guardan 10 lotes de conservas de alcachofas y 15 lotes de conservas de guisantes. En el de *Ribarroja* se almacenan 20 lotes de alcachofas y 25 de guisantes. Como consecuencia de un pequeño lío, se envían dos lotes del almacén de *Tabernes* al de *Ribarroja* sin ninguna etiqueta identificadora.
- Si se selecciona un lote de conservas del almacén de *Tabernes*, ¿cuál es la probabilidad de que sea de alcachofas?
 - Si el lote seleccionado en (a) era de guisantes, ¿cuál es la probabilidad de que los dos lotes enviados desde *Tabernes* a *Ribarroja* fueran de alcachofas?
 - Si se descubre finalmente que los dos lotes enviados desde *Tabernes* a *Ribarroja* son de alcachofas y se selecciona aleatoriamente 2 lotes de cada uno de los almacenes, ¿cuál es la probabilidad de que en el total de los 4 lotes seleccionados haya 3 de guisantes?
16. (Febrero 2001, primer parcial). Un sistema electrónico soporta exactamente dos subidas de tensión, al producirse la tercera el sistema deja de funcionar. El número de subidas de tensión en una hora sigue una distribución Poisson de parámetro $\lambda = 3$.
- Se sabe que durante la primera hora de funcionamiento del sistema ha habido por lo menos una subida de tensión, ¿cuál es la probabilidad de que el sistema siga funcionando al finalizar esa primera hora?
 - Se dispone de tres de esos sistemas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos funcione durante más de una hora? ¿y durante más de dos horas?
17. (Febrero 2001, primer parcial). La empresa *Chapuseitor* fabrica varillas para las motocicletas de la casa *Mamborghini*. La longitud de tales varillas es una variable aleatoria con distribución normal de parámetros $\mu = 12$ mm y $\sigma^2 = 1,25$ mm².
- Si una varilla que mide menos de 8 mm. o más de 12.5 mm. se considera defectuosa, ¿qué porcentaje de varillas defectuosas fabrica la empresa?
 - Las varillas se empaquetan en cajas de 10 unidades. ¿Cual es la probabilidad de que una caja contenga menos de tres defectuosas?
18. (Febrero 2001). Elegimos al azar dos puntos, X e Y , en el intervalo $[0, a]$. Calcular la función de distribución de la distancia entre ellos.
19. (Febrero 2001). Las variables aleatorias X e Y tienen media 0, varianza 1 y su coeficiente de correlación es ρ , Encontrar la media y la varianza de $Z = X - \rho Y$ y sus coeficientes de correlación con X e Y .
20. (Febrero 2001). Sean X e Y dos variables aleatorias Gamma independientes, con parámetros $(\alpha, 1)$ y $(\beta, 1)$ respectivamente. Calcula la función de densidad de la variable $Z = X + Y$, y la función de densidad condicional de X dado que $X + Y = z$.
21. (Febrero 2001). Un juego consiste en lanzar una moneda, si sale cara se lanzan cuatro monedas más pero si sale cruz sólo se lanzan dos monedas más. Sea X la variable aleatoria que representa el resultado del primer lanzamiento ($X = 0$ si cara y $X = 1$ si cruz), sea Y el número total de caras observado.
- Calcula la función de probabilidades conjunta, las dos marginales y la distribución de Y condicionada a $X = 1$.
 - Calcula el coeficiente de correlación entre X e Y . ¿Son independientes? ¿Porqué?
 - Se pagan 3 euros por jugar, pero se cobran tantos euros como Y . La ganancia del juego es pues: $G = Y - 3$. Calcula la función de probabilidades de G , su media y su varianza.
 - ¿Interesa jugar? ¿Interesaría jugar si se pagara solamente un euro por jugar? ¿Cuál es el precio justo del juego?

22. (Febrero 2001). Un colegio está preparando la fiesta de graduación de sus 500 estudiantes. Se espera, por lo ocurrido en otras ocasiones, que el 50 % de los estudiantes vengan acompañados de sus padres, el 30 % sólo por uno de ellos y el 20 % restante vengan solos. ¿Cuántos asientos hay que disponer para los padres si queremos que, con una probabilidad superior a 0.95, todos ellos puedan sentarse?
23. (Junio 2001). Sea X una variable aleatoria que describe el número de éxitos en $n = 7$ pruebas de Bernoulli de parámetro p . Sea Y la variable aleatoria que describe el número de éxitos en las $m = 4$ primeras pruebas de la serie anterior. Calcula la función de probabilidad de Y condicionada a $X = 3$. Calcula la esperanza de X^2 condicionada a $Y = 4$.
24. (Junio 2001). Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta $f(x, y) = 8xy$ cuando $0 < y < x < 1$ y $f(x, y) = 0$ en el resto de valores de $\mathbb{R}^2$. Calcula las esperanzas y varianzas de las distribuciones marginales, y obtén el coeficiente de correlación.
25. (Junio 2001). Disponemos de 100 focos halógenos cuyos tiempos de vida se pueden considerar variables aleatorias independientes, todas ellas con la misma distribución exponencial de media 5 horas. Cuando un foco se estropea se sustituye inmediatamente por otro nuevo. ¿Cuál es la probabilidad de que tengamos luz después de 525 horas? Supongamos que desde que un foco se estropea hasta que se sustituye por otro pasa un tiempo aleatorio con distribución uniforme en $(0, 0.1)$ horas. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los focos se hayan estropeado antes de 550 horas?
26. (Junio 2001). La distribución bivalente de (X, Y) viene dada por la tabla de probabilidades adjunta. Calcula la distribución de $U = |X - Y|$ y la covarianza entre X y U .

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 1$	0.1	0.2	0.1
$X = 2$	0.2	0.3	0.1

27. (Junio 2001). Un test diagnóstico da un resultado positivo en el 95 % de las personas enfermas, y da negativo en el 90 % de las personas sanas. En un brote epidémico de esa enfermedad el 20 % de la población se encuentra enferma. Si en esas circunstancias se va a realizar el test a un nuevo individuo, calcula las probabilidades siguientes: Que ese individuo esté enfermo o el test de positivo; que esté enfermo y el test de positivo, y que esté enfermo si el test ha sido positivo.
28. (Junio 2001). Se obtiene un punto, P , al azar en el círculo de centro el origen y radio uno. Sea X la variable aleatoria definida por la distancia del punto P al origen. Representa gráficamente la función de densidad de X y obtén su media y varianza.
29. (Septiembre 2001). Un juego consiste en lanzar dos monedas bien construidas, se gana si y sólo si salen dos caras. Se ha jugado cinco veces, ¿cuál es la probabilidad de haber ganado al menos en tres ocasiones?, ¿y la probabilidad de haber ganado al menos en tres ocasiones si se sabe que se ha ganado al menos una vez?, ¿y la probabilidad de haber ganado al menos en tres ocasiones si se sabe que se ganó el primer juego?
30. (Septiembre 2001). Sea $f(x) = \frac{1}{2}(1 + \alpha x)$ si $-1 \leq x \leq 1$, y 0 en otro caso.
- ¿Para que valores de α es $f(x)$ una función de densidad?. Representa gráficamente la función de distribución asociada a $f(x)$ cuando $\alpha = 1$.
 - Obtén, en función de α , la esperanza y la varianza de la variable aleatoria X cuya función de densidad es $f(x)$.
 - Sea $Y = X^2$. Obtén la función de densidad de Y , su media y varianza.
31. (Septiembre 2001). Un sistema electrónico está formado por dos componentes, cuyos tiempos de vida son independientes y con la misma distribución exponencial de media $\frac{1}{\lambda}$ días. El sistema funciona mientras funcione alguna de las dos componentes. Obtén, en términos de λ , la función

de densidad del tiempo de vida del sistema. Suponiendo que $\lambda = 1$: ¿Cuánto vale la probabilidad de que el sistema tarde en estropearse más de un día? ¿Cuánto valdría esa probabilidad si el sistema se estropease en cuanto fallara alguna de las dos componentes?

32. (Septiembre 2001). Lanzamos tres veces consecutivas una moneda y definimos las variables aleatorias $X = \{\text{número de caras en los dos primeros lanzamientos}\}$ e $Y = \{\text{número de caras en los dos últimos lanzamientos}\}$. Obtener la distribución de probabilidad conjunta de X e Y , sus marginales y el coeficiente de correlación entre ambas.
33. (Septiembre 2001). Disponemos de un dado cargado en el que la probabilidad de obtener cualquiera de las caras es proporcional a su número de puntos. Jugamos con él pagando 4 euros por jugada y recibiendo como premio tantos euros como puntos tiene la cara obtenida al lanzarlo. Obtener la probabilidad aproximada de ir ganando al cabo de 100 jugadas.
34. (Septiembre 2001). Un astrónomo está interesado en medir la distancia, δ , entre su laboratorio y una estrella en años luz. Sabe que las condiciones atmosféricas y los errores de medición afectan a su técnica de determinación de la distancia, en consecuencia plantea un experimento que consistirá en tomar una serie de mediciones y elegirá su media muestral como medida de la distancia real δ . Cada una de las mediciones del astrónomo son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media δ y varianza 1.44. ¿Cuántas mediciones ha de tomar para estar razonablemente seguro de que su error de medida está entre $\pm 0,5$ años luz?. Justifica las hipótesis que utilices para determinar el número de medidas.

SOLUCIONES

- 1 $1 - [P(B)]^k$ siendo $P(B) = \sum_{m=0}^n g(m) \binom{n}{m} p^{n-m} (1-p)^m$, $P(B) = 1-p$ si $g(m) = \frac{m}{n}$.
- 2 (a) $f_{X,Y}(x,y) = 1$ si $0 < y < 2x < 2$. (b) $f_X(x) = 2x$ si $0 < x < 1$, $E(X) = \frac{2}{3}$, $f_Y(y) = 1 - \frac{y}{2}$ si $0 < y < 2$, $E(Y) = \frac{2}{3}$. (c) $E(W) = \frac{31}{48}$.
- 3 0.022
- 4 $f(x) = p(1-p)^{x-1} + p^{x-1}(1-p)$ si $x \geq 2$. $E(X) = \frac{1}{p(1-p)} - 1$, $V(X) = \frac{1+3p^2-3p}{p^2(1-p)^2} - 2$.
- 5 $\frac{3}{8}$ y $\frac{5}{7}$.
- 6 (a) 0.5986. (b) 0.3651.
- 7 (b) -0.6547. (c) $E(V) = 2.625$, $V(V) = 0.2343$.
- 8 $f(y) = \frac{3}{16} \pi^{-\frac{3}{2}} \sqrt{y}$ si $0 < y < 4\pi$, $E(Y) = \frac{12}{5} \pi$.
- 9 Máximo en $X = 4$, $P(X \leq 10) = 0.9987$, $P(\text{número medio} < 7) = 1$.
- 10 Primer término 0.1, razón 0.9, probabilidad 0.651
- 11 (a) 0.5143. (b) 0.6944.
- 12 (a) Media 1009.7187, des. típ. 6.25 y porcentaje 0.925%. (b) Beneficio medio 735421.875 y porcentaje 6%.
- 13 (a) $C = 0,2$, $\tau \in [-0,5, 0,5]$. (b) $F_Y(y) = 0$ si $y < 0$, $0,2$ si $0 \leq y < 1$, $0,6$ si $1 \leq y < 4$, y 1 si $4 \leq y$.
(c) $\frac{3+4\tau}{40}$.

- 14** (a) $q_{0,5} = 1,563$, $q_{0,7} = 2,317$. (b) 0.5417 y 0.65. (c) $f_Y(y) = \frac{1}{3}$ si $4 \leq y \leq 5$, $\frac{9-y}{12}$ si $5 \leq y \leq 9$, y 0 en otro caso.
- 15** (a) 0.4. (b) 0.163. (c) 0.343.
- 16** (a) 0.393. (b) 0.8081 y 0.128.
- 17** (a) 32.8%. (b) 0.3118.
- 18** $F_D(d) = 0$ si $d < 0$, $1 - (1 - \frac{d}{a})^2$ si $0 \leq d < a$, y 1 si $a \leq d$.
- 19** $E(Z) = 0$, $V(Z) = 1 - \rho^2$, $\text{Corr}(X, Z) = \sqrt{1 - \rho^2}$ y $\text{Corr}(Y, Z) = 0$.
- 20** $f_Z(z) = Ga(z|\alpha + \beta, 1)$, $f_{X|Z=z}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{1}{z} (\frac{x}{z})^{\alpha-1} (1 - \frac{x}{z})^{\beta-1}$ si $0 \leq x \leq z$.
- 21** (b) -0.189, no son independientes. (c) $f_G(-3) = \frac{4}{32}$, $f_G(-2) = \frac{9}{32}$, $f_G(-1) = \frac{8}{32}$, $f_G(0) = \frac{6}{32}$, $f_G(1) = \frac{4}{32}$ y $f_G(2) = \frac{1}{32}$, $E(G) = -1$ y $V(G) = \frac{7}{4}$. (d) Con 3 euros no, con 1 sí, precio justo 2 euros.
- 22** Al menos 679 asientos.
- 23** Si $X = 3$, Y sólo puede tomar los valores 0, 1, 2 y 3 con probabilidades $\frac{1}{35}$, $\frac{12}{35}$, $\frac{18}{35}$ y $\frac{4}{35}$ respectivamente. $E(X^2|Y = 4) = 31$.
- 24** $E(X) = \frac{4}{5}$, $V(X) = \frac{2}{75}$, $E(Y) = \frac{8}{15}$, $V(Y) = \frac{11}{225}$ y $\text{Corr}(X, Y) = \sqrt{\frac{24}{11}}$.
- 25** 0.309 y 0.692.
- 26** $f_U(0) = 0,3$, $f_U(1) = 0,5$ y $f_U(2) = 0,2$. $\text{Cov}(X, Y) = 0,16$.
- 27** 0.28, 0.19 y 0.704.
- 28** $f_X(x) = 2x$ si $0 \leq x \leq 1$, $E(X) = \frac{2}{3}$ y $V(X) = \frac{1}{18}$.
- 29** 0.104, 0.136 y 0.262.
- 30** (a) $\alpha \in [-1, 1]$, $F_X(x) = 0$ si $x < -1$, $\frac{x^2+2x+1}{4}$ si $-1 \leq x \leq 1$, y 1 si $1 \leq x$. (b) $E(X) = \frac{\alpha}{3}$, $V(X) = \frac{3-\alpha^2}{9}$. (c) $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{(y)}}$ si $0 \leq y \leq -1$, $E(Y) = \frac{1}{3}$ y $V(Y) = \frac{4}{45}$.
- 31** $f_Y(y) = 2\lambda e^{-\lambda y}(1 - e^{-\lambda y})$ si $y \geq 0$, 0.600 y 0.135.
- 32** $\text{Corr}(X, Y) = \frac{23}{64}$.
- 33** 0.767.
- 34** $n \geq 23$.