Programa

Lección 7
Ecuaciones de Maxwell.
Ondas electromagnéticas

- 7.1 Introducción
- 7.2 Generalización del teorema de Ampère para corrientes no estacionarias. Corriente de desplazamiento de Maxwell
- 7.3 Ecuaciones de Maxwell en el vacío
- 7.4 Ecuación de ondas. Solución en ondas planas
- 7.5 Ondas planas con variación temporal armónica

Programa

Lección 7
Ecuaciones de Maxwell.
Ondas electromagnéticas

BIBLIOGRAFÍA

Griffiths	Lección	7
Marshall	Lección	8
Pomer	Lección	7
Reitz-Milford-Christy	Lección	16

Generalización del teorema de Ampère para corrientes no estacionarias. Corriente de desplazamiento de Maxwell

$$\nabla \vec{E} = \frac{r\,(\vec{r})}{e_0} \qquad \nabla \vec{B} = 0 \qquad \nabla x\, \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \nabla x\, \vec{B} = m_0 \vec{J}(\vec{r})$$

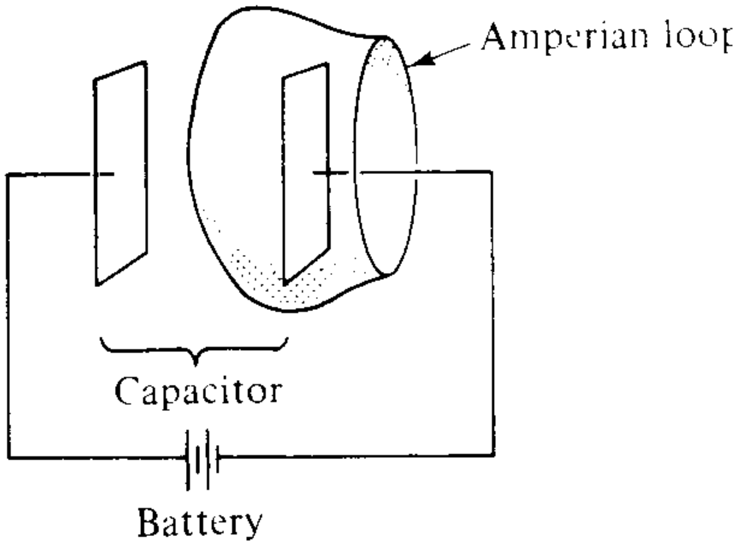
$$\nabla\,(\nabla x\, \vec{B}) = 0 = m_0\, \nabla \vec{J}(\vec{r}) \qquad \nabla\, \vec{J} + \frac{\partial r}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \vec{J}_T = 0 \qquad \nabla x\, \vec{B} = m_0 \vec{J}_T \qquad \nabla \left(\vec{J} + e_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\boxed{\vec{J}_T = \vec{J} + e_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Ecuaciones de Maxwell. Ondas electromagnéticas

Generalización del teorema de Ampère para corrientes no estacionarias. Corriente de desplazamiento de Maxwell



$$\int_C \vec{B}\, d\vec{l} = m_0 i$$

$$E = \frac{s}{e_0} = \frac{q}{e_0 S}$$

$$e_0 S \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{dq}{dt} = i$$

$$\boxed{\nabla x\, \vec{B} - e_0 m_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = m_0 \vec{J}}$$

Ecuaciones de Maxwell. Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell en el vacío

$$\boxed{\nabla \vec{E} = \frac{r\,(\vec{r})}{e_0}}$$

$$\boxed{\nabla x\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0}$$

$$\boxed{\nabla \vec{B} = 0}$$

$$\boxed{\nabla x\,\vec{B} - e_0 m_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = m_0 \vec{J}}$$

$$\boxed{\nabla\,\vec{J} + \frac{\partial r}{\partial t} = 0}$$

Ecuación de ondas. Solución en ondas planas

$$\nabla x \nabla x \vec{E} + \frac{\partial \nabla x \vec{B}}{\partial t} = \nabla (\nabla \vec{E}) - \Delta \vec{E} + \frac{\partial \nabla x \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \vec{E} = 0$$

$$\frac{\partial \nabla x \vec{B}}{\partial t} = e_0 m_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\Delta \vec{E} - e_0 m_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

$$\boxed{\Delta \vec{B} - e_0 m_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0}$$

$$\boxed{\Delta \Psi - e_0 m_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0}$$

Ecuaciones de Maxwell. Ondas electromagnéticas

Ecuación de ondas. Solución en ondas planas

$$\vec{u}\,\vec{r} = z = cte$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

$$x = z - ct$$

$$y = z + ct$$

$$\Psi(z,t)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,y)}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\Psi(x,y) = f(x) + g(y)$$

$$\boxed{\Psi(z,t) = f(z-ct) + g(z+ct)}$$

$$z - ct = cte = z_0$$

$$z = z_0 + ct$$

$$\nabla \to \vec{u}\frac{\partial}{\partial z}$$

Ecuaciones de Maxwell. Ondas electromagnéticas

Ecuación de ondas. Solución en ondas planas

$$\vec{u}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = 0 \qquad \vec{u}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = 0 \qquad \vec{u}\,x\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \vec{u}\,x\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial(\vec{u}\,\vec{B})}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial(\vec{u}\,\vec{E})}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial(\vec{u}\,\vec{B})}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial(\vec{u}\,\vec{E})}{\partial t} = 0$$

Sea un plano $z = cte$ *Sean* $\vec{u}_1$ *y* $\vec{u}_2$ *vectores unitarios* $\vec{u}_1 x \vec{u}_2 = \vec{u}$

$$\vec{E} = f_1(z - ct)\vec{u}_1 + f_2(z - ct)\vec{u}_2 \qquad \vec{B} = f_3(z - ct)\vec{u}_1 + f_4(z - ct)\vec{u}_2$$

$$\frac{\partial\, f(z - ct)}{\partial z} = f' \qquad \frac{\partial\, f(z - ct)}{\partial t} = -cf'$$

Ecuaciones de Maxwell. Ondas electromagnéticas

Ecuación de ondas. Solución en ondas planas

$$\vec{u}\, x \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{u} x \left(f_1' \vec{u}_1 + f_2' \vec{u}_2 \right) - c\left(f_3' \vec{u}_1 + f_4' \vec{u}_2 \right) = 0 \qquad \left(f_1' \vec{u}_2 - f_2' \vec{u}_1 \right) - c\left(f_3' \vec{u}_1 + f_4' \vec{u}_2 \right) = 0$$

$$f_2' = -c f_3' \qquad f_2 = -c f_3 \qquad f_1' = c f_4' \qquad f_1 = c f_4$$

$$\vec{E} = f_1 \vec{u}_1 + f_2 \vec{u}_2 \qquad c\vec{B} = -f_2 \vec{u}_1 + f_1 \vec{u}_2$$

$$\boxed{\vec{E}\, \vec{B} = 0} \qquad \boxed{E = cB} \qquad \boxed{\vec{E}\, x\, \vec{B} = \frac{\left(f_1^{\,2} + f_2^{\,2} \right)}{c} \vec{u} = \frac{E^2}{c} \vec{u} = cB^2 \vec{u}}$$

Ecuaciones de Maxwell. Ondas electromagnéticas

Ondas planas con variación temporal armónica

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \; e^{ik(z-ct)} \qquad \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \; e^{ik(z-ct+j)} \qquad \vec{E}(\vec{r},t) = \hat{\vec{E}}_0 \; e^{ik(z-ct)}$$

$$kc = w \qquad k l = 2p \qquad z = \vec{u}\,\vec{r} \qquad \vec{k} = k\,\vec{u} \qquad e^{i(\vec{k}\,\vec{r}-wt)}$$

$$\nabla \Leftrightarrow i\vec{k} \qquad \boxed{\vec{k}\;\vec{E}_0 = 0} \qquad \boxed{\vec{k}\;x\;\vec{E}_0 = w\,\vec{B}_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Leftrightarrow -iw \qquad \boxed{\vec{k}\;\vec{B}_0 = 0} \qquad \boxed{\vec{k}\;x\;\vec{B}_0 = -\frac{w}{c^2}\,\vec{E}_0}$$