



# PRÁCTICAS DE ANÁLISIS FUNCIONAL

Departamento de Análisis Matemático

Curso 2012-2013

Profesores responsables:

Oscar Blasco

Pablo Galindo.

Práctica 1	Espacios de Hilbert . . . . .	1
Práctica 2	Espacios Normados: Generalidades . . . . .	5
Práctica 3	Aplicaciones Lineales . . . . .	11
Práctica 4	Ecuaciones Integrales . . . . .	15
Práctica 5	Espacios de Hilbert. Segunda parte . . . . .	20



# Práctica 1

## Espacios de Hilbert

### Ejemplo 1.1

La norma  $\|\cdot\|_\infty$  en  $\mathbb{R}^2$  no proviene de un producto escalar.

#### Solución

Es suficiente comprobar que no se cumple la ley del paralelogramo, esto es, que existen  $x, y \in \mathbb{R}^2$  tales que

$$\|x + y\|_\infty^2 + \|x - y\|_\infty^2 \neq 2(\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2).$$

Con este fin, tomamos los puntos  $x = (1, 0)$  e  $y = (0, 1)$  para los que  $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = \|x + y\|_\infty = \|x - y\|_\infty = 1$ .

### Ejemplo 1.2

En  $C([-1, 2])$ ,  $(f, g) = \int_{-1}^2 f\bar{g}$  define un producto escalar cuya norma  $\|\cdot\|$  no es completa.

#### Solución

Sea  $g_n(x) = 0$  en  $[-1, -1/n] \cup [1 + 1/n, 2]$ ,  $g_n(x) = 1$  en  $[0, 1]$  y lineal en el resto. Se tiene que  $\lim_n \int_{-1}^2 (g_n - \chi_{[0,1]})^2 = 0$  de donde se sigue que  $(g_n)$  es una sucesión de Cauchy. Si  $(g_n)$  es convergente a  $g \in C([-1, 2])$  entonces también  $\lim_n \int_{-1}^2 (g_n - g)^2 = 0$ , lo que implica que  $g = \chi_{[0,1]}$  casi por todas partes. Esto es una contradicción por ser  $g$  una función continua. Otra forma de verlo es observar que  $C([-1, 2])$  es un subespacio del espacio de Hilbert  $L^2([-1, 2])$ . Puesto que  $(g_n)$  converge a  $\chi_{[0,1]}$  en  $L^2([-1, 2])$ , deducimos que  $C([-1, 2])$  no es cerrado en  $L^2([-1, 2])$  y, en consecuencia,  $C([-1, 2])$  no puede ser completo.

### Ejercicio 1.1

Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Hilbert. Si los vectores  $u, v \in X$  verifican  $|\langle u, v \rangle| = \|u\|\|v\|$ , es decir, verifican la desigualdad de Cauchy-Schwartz con igualdad, ¿qué podemos saber de estos vectores? Estudiar la misma cuestión para la igualdad  $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ .

### Ejercicio 1.2

Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Hilbert. Sean  $x, y$  elementos de  $X$  con norma uno.

- Si  $x \neq y$ , entonces  $\|tx + (1-t)y\| < 1$  para todo  $0 < t < 1$ .
- Si  $\|x - y\| \geq \varepsilon$ , acotar la norma del punto medio  $\frac{1}{2}(x + y)$ .

### Ejercicio 1.3

Probar que en todo espacio  $X$  con producto escalar se cumple la llamada identidad de Apolonio:

$$\|x - z\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x + y}{2}\right\|^2.$$

### Ejercicio 1.4

Sea  $X$  un espacio vectorial en el cual hay definidos dos productos escalares  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y  $(\cdot, \cdot)$ . Probar que los dos productos coinciden si, y sólo si,  $\langle x, x \rangle = (x, x)$  para todo  $x \in X$ .

### Ejercicio 1.5

En el espacio  $\ell_2$  calcula la intersección de la bola  $B(x_0, 1)$  con la recta  $\{\lambda x_1 : \lambda \in \mathbb{R}\}$  donde  $x_0 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots)$  y  $x_1 = (1, 0, \dots)$ . Ídem con el plano generado por  $x_1, x_2$  siendo  $x_2 = (0, 1, 0, \dots)$ .

**Ejercicio 1.6**

¿En el espacio  $\ell_2$  la recta generada por  $(1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{9}}, \dots)$  corta a la bola  $\overline{B}(x_0, \frac{1}{2})$ ?  $x_0 = (0, 1, 0, \dots)$ .

**Ejercicio 1.7**

En el espacio  $L^2(0, 1)$  calcula la intersección de la esfera  $S(x_0, 1)$  con la recta  $\{\lambda x_1 : \lambda \in \mathbb{R}\}$  donde  $x_0(t) = 2t^2$  y  $x_1(t) = t$ .

**Ejercicio 1.8**

Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \neq 0$ . En el espacio  $\ell_2$  consideramos  $x_1 = (\alpha, \beta, 0, \dots)$ ,  $x_2 = (0, \alpha, \beta, 0, \dots)$ ,  $x_3 = (0, 0, \alpha, \beta, 0, \dots)$  etc. y llamamos  $S = \{x_n\}$ . Prueba que (a) Si  $|\frac{\alpha}{\beta}| \geq 1$ , entonces  $S^\perp = \{0\}$ . (b) Si  $|\frac{\alpha}{\beta}| < 1$ , entonces  $S^\perp = \text{lin}\{(1, -\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha^2}{\beta^2}, -\frac{\alpha^3}{\beta^3}, \dots)\}$ .

**Ejercicio 1.9**

Prueba que en un espacio prehilbertiano real, las afirmaciones siguientes son equivalentes,

- $x \perp y$ ,
- $\|x + ty\| = \|x - ty\|$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,
- $\|x + ty\| \geq \|x\|$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 1.10**

En el espacio real  $C([0, 1])$  con el producto escalar  $(f, g) = \int_0^1 fg$ , el ortogonal de  $M = \{f \in C([0, 1]) : f(0) = 0\}$  es  $M^\perp = \{0\}$ .

**Ejercicio 1.11**

Prueba que en un espacio prehilbertiano real la intersección de las esferas  $S(a, R)$  y  $S(b, R)$  con  $\|a\| = \|b\|$  es una esfera contenida en  $\{a - b\}^\perp$ . Halla su centro y su radio.

**Ejercicio 1.12**

Probar que si  $M$  es un subconjunto de un espacio de Hilbert entonces  $M^\perp = \overline{M}^\perp$ .

**Ejemplo 1.3**

Sean  $X$  un espacio de Hilbert e  $Y$  un subespacio cerrado de  $X$ . Demostrar que si  $P$  es la proyección ortogonal de  $X$  sobre  $Y$  entonces  $\|Px\| \leq \|x\|$  para todo  $x \in X$ .

Solución

Sea  $P$  la proyección ortogonal de  $X$  sobre  $Y$ . Puesto que para cada  $x \in X$  el vector  $Px$  es ortogonal a  $x - Px$  se deduce del teorema de Pitágoras que  $\|x\|^2 = \|x - Px\|^2 + \|Px\|^2$ ; de donde  $\|Px\| \leq \|x\|$ .

**Ejercicio 1.13**

Sean  $X$  un espacio prehilbertiano y sea  $v \in X$  con  $\|v\| = 1$ . Si  $M = \{v\}^\perp$ , encontrar una fórmula explícita para la proyección ortogonal sobre  $M$ .

**Ejercicio 1.14**

Sea  $\Omega$  un subconjunto medible de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\chi_A$  la función característica de  $A \subset \Omega$ . Demostrar que  $P_A f = \chi_A f$  es una proyección en el espacio  $L^2(\Omega)$ . ¿Qué condiciones deben cumplir los subconjuntos  $A$  y  $B$  para que  $P_A + P_B$  sea también una proyección?

**Ejemplo 1.4**

Sea  $Y$  el subespacio de  $L^2(0, 2\pi)$  constituido por aquellas funciones  $f$  tales que  $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$ . Probar que  $Y$  es cerrado y calcular el punto de  $Y$  más cercano a  $f_0(x) = 3 \cos^2 5x$ .

Solución

Se deduce de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y del hecho de que la función constante igual a 1 está en  $L^2(0, 2\pi)$  que  $\int_0^{2\pi} |f(x)| dx \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_2$  para cada  $f \in L^2(0, 2\pi)$ . Por tanto,  $\Phi : L^2(0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Phi(f) = \int_0^{2\pi} f(x) dx$ , es un funcional lineal y continuo y en consecuencia  $Y = \text{Ker } \Phi$  es un subespacio cerrado de  $L^2(0, 2\pi)$ .

Para calcular la mínima distancia de  $f_0$  a  $Y$  tenemos que descomponer  $f_0$  como la suma de un elemento de  $Y$  y un elemento de  $Y^\perp$ . Observamos que las funciones constantes  $g(x) = \alpha$  están en  $Y^\perp$ , de modo que lo que haremos es encontrar  $\alpha$  de modo que  $f_0 - g \in Y$ . Esto nos da la condición

$$\int_0^{2\pi} (f_0(x) - \alpha) dx = 0.$$

De donde obtenemos

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(x) dx = \frac{3}{2}.$$

Es decir, descomponemos  $f_0 = g + h$ , siendo  $g(x) = \frac{3}{2}$  un elemento de  $Y^\perp$  y  $h(x) = f_0(x) - \frac{3}{2}$  un elemento de  $Y$ . En consecuencia

$$\text{dist}(f_0, Y) = \|g\|_2 = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

**Ejercicio 1.15**

Demostrar que para cada  $f \in L^2(a, b)$  y cada  $n \in \mathbb{N}$  existe un único polinomio  $p_n$  de grado menor o igual que  $n$  verificando

$$\|f - p\|_2 \geq \|f - p_n\|_2$$

para todo polinomio  $p$  de grado menor o igual que  $n$ .

**Ejercicio 1.16**

Sea  $Y$  el subespacio de  $L^2(\mathbb{R})$  formado por las funciones que se anulan casi por todas partes en el semieje  $]0, +\infty[$ . Calcular la distancia de  $Y$  a la función  $g(x) := e^{-|x|}$ .

**Ejercicio 1.17**

Sea  $\Phi : \ell_2 \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $\Phi(x) = 2x_1$ . Calcula la distancia del vector  $x = (2^{-\frac{n}{2}})$  al núcleo de  $\Phi$ .

**Ejercicio 1.18**

Dado el subespacio  $G := \{x = (x_n) \in \ell_2 : x_1 = x_2\}$  de  $\ell_2$ , se pide probar que  $G$  es cerrado y calcular su distancia al punto  $x = (\frac{1}{n})$ .

**Ejercicio 1.19**

Sea  $H = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \int_0^1 f(t) dt = 0\}$ . Hallar la distancia de la función  $e^{-t^2}$  a  $H$ . Ídem para  $H = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \int_0^1 f(\sqrt{t}) dt = 0\}$ .

**Ejercicio 1.20**

Probar que  $Y = \{f \in L^2(0, 2\pi) : \int_0^{2\pi} f(x) dx = 0\}$  con la norma  $\|\cdot\|_2$  es un espacio de Hilbert.

**Ejemplo 1.5**

Sea  $P$  el espacio vectorial de los polinomios reales definidos en  $[0, 1]$  con el producto escalar definido por  $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ . Dar un ejemplo de un funcional lineal continuo sobre  $P$  para el cual no se cumpla el teorema de representación de Riesz-Fréchet.

Solución

Sea  $g$  una función continua en  $[0,1]$  que no sea un polinomio y consideremos la forma lineal continua  $\Phi : P \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi(f) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$ . Supongamos existe  $h \in P$  tal que  $\Phi(f) = (f, h)$  para cualquier  $f \in P$ ; es decir,  $\int_0^1 f(t)(g(t) - h(t))dt = 0$  para toda  $f \in P$ . Por el teorema de Weierstrass real podemos encontrar una sucesión de polinomios  $(f_n)$  que converge a la función continua  $h - g$  uniformemente en  $[0,1]$  y por tanto

$$\int_0^1 (h(t) - g(t))^2 dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t)(h(t) - g(t))dt = 0$$

de donde se sigue que  $g = h \in P$ , lo que es una contradicción.

**Ejercicio 1.21**

Sea  $\Phi : \ell_2 \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n-1}}$ , siendo  $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$ .

- Demostrar que  $\Phi$  es lineal y continua.
- Calcular el vector  $y \in \ell_2$  que representa a  $\Phi$ .

**Problemas Complementarios****Ejercicio 1.22**

¿La elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  es la esfera unidad para una norma de espacio de Hilbert en  $\mathbb{R}^2$ ?

**Ejercicio 1.23**

En  $\mathbb{R}^2$  se considera el producto escalar

$$\langle (a, b), (c, d) \rangle_e := ac + bd - \frac{ad + bc}{2}$$

Probar que, efectivamente,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$  es un producto escalar y dibujar la bola cerrada unidad de  $\mathbb{R}^2$  asociada a la norma  $\|x\|_e := \sqrt{\langle x, x \rangle_e}$ . Demostrar que esta norma es equivalente a la norma euclídea ordinaria.

**Ejercicio 1.24**

Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio normado real cuya norma verifica la ley del paralelogramo. Demostrar que existe un producto escalar en  $X$  tal que  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  para todo  $x \in X$ . (Utilizar la identidad polar.)

**Ejercicio 1.25**

Sea  $(H, \|\cdot\|)$  un espacio de Hilbert real. Sean  $u, v \in H$  dos vectores ortogonales y con norma 1. Calcular para cada  $x \in H$

- $d(x, r_u)$ , es decir, la distancia entre el punto  $x$  y la recta  $r_u := \{tu : t \in \mathbb{R}\}$ .
- $d(x, \pi_{u,v})$ , es decir, la distancia entre el punto  $x$  y el plano  $\pi_{u,v} := \{tu + sv : t, s \in \mathbb{R}\}$ .

**Ejercicio 1.26**

En el espacio  $l_2$  se considera el conjunto  $M = \{x \in l_2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\}$ . Probar que  $M$  es un subespacio vectorial denso en  $l_2$ . ¿Es  $M$  cerrado? ¿Se cumple  $l_2 = M \oplus M^\perp$ ?

**Ejercicio 1.27**

Aproximar por mínimos cuadrados la función exponencial  $e^t$  por medio de polinomios de grado menor o igual que 1 en el intervalo  $[-1, 1]$ .

# Práctica 2

## Espacios Normados: Generalidades

### Ejemplo 2.1

Probar que, en todo espacio normado  $(X, \|\cdot\|)$ ,

$$\left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2$$

para cualesquiera  $x, y \in X$ .

### Solución

Aplicamos la desigualdad triangular:

$$\left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\|^2 \leq \frac{1}{4}(\|x\| + \|y\|)^2 = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|}{4}.$$

Como, para cualesquiera números reales  $a, b$ ,

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

tenemos que

$$2ab \leq a^2 + b^2.$$

Por tanto,  $2\|x\|\|y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$ , y queda entonces

$$\left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\|^2 \leq \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|}{4} \leq \frac{2\|x\|^2 + 2\|y\|^2}{4}$$

lo que completa la prueba.

### Ejemplo 2.2

Encontrar una sucesión  $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ , donde cada  $x^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots)$ ,  $\xi_j^{(n)} \in \mathbb{R}$ , que pertenezca a  $\ell_1$ , y que sea convergente en  $\ell_{\infty}$  pero no en  $\ell_1$ .

### Solución

Es importante observar primero que si la sucesión  $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$  converge a  $x$  en  $\ell_{\infty}$ , entonces la sucesión  $(x^{(n)} - x)_{n=1}^{\infty}$  converge a  $0$ , con lo cual basta encontrar el ejemplo de una sucesión que converja a  $0$ . Además, tanto la convergencia en el espacio  $\ell_{\infty}$  como en el espacio  $\ell_1$  implica la convergencia coordenada a coordenada; por ello, hay que buscar una sucesión  $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$  que converja coordenada a coordenada a  $0$  pero que no converja a  $0$  en  $\ell_1$ .

Sea  $x^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots)$  definida por  $\xi_i^{(n)} = 0$  si  $i \leq n$  y  $\xi_i^{(n)} = n/i^2$  si  $i \geq n+1$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se cumple que  $x^{(n)} \in \ell_{\infty}$  y  $\|x^{(n)}\|_{\infty} = n/(n+1)^2$ , y, por otro lado,  $x^{(n)} \in \ell_1$  y  $\|x^{(n)}\|_1 = n \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ . Se deduce que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{(n)}\|_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} n/(n+1)^2 = 0$ , si bien  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{(n)}\|_1 \neq 0$  puesto que

$$\|x^{(n)}\|_1 \geq n \left( \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right) \geq \frac{n^2}{4n^2} \geq \frac{1}{4}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Ejemplo 2.3**

Estudiar si las sucesiones de funciones definidas por  $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$  e  $y_n(t) = t^n - t^{2n}$  convergen en  $\mathcal{C}([0, 1])$  donde la norma viene definida por  $\|x\| = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t)|$ .

Solución

Para empezar, como la convergencia en la norma implica la convergencia puntual, es conveniente saber si la sucesión de funciones  $(x_n)_{n=1}^\infty$  converge puntualmente a alguna función continua, digamos  $x$ . Si esto es así, esa función  $x$  será el posible límite en la norma del espacio. Posteriormente, hay que calcular la norma de la diferencia entre los valores de la sucesión y ese posible límite; es decir,  $\|x_n - x\|$ , y, por último, verificar si esta sucesión de normas tiende a 0. Para hallar la norma de una función, es necesario calcular el máximo del módulo de la función; en otras palabras, hay que hallar el máximo absoluto  $M$  y el mínimo absoluto  $m$  de la función en  $[0, 1]$ : el máximo del módulo es entonces  $\max\{M, -m\}$ . Dado que las funciones que aparecen son derivables, se puede empezar estudiando las raíces de sus derivadas.

Es evidente que  $x_n(1) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y es fácil ver que, para cada  $t \in [0, 1]$ , se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} t^n - t^{n+1} = 0$ . Por tanto, la sucesión  $(x_n)_{n=1}^\infty$  converge puntualmente a 0. Para comprobar que la convergencia se verifica en la norma es necesario ver que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - 0\| = 0$ . Comenzaremos calculando la norma de las funciones. Si  $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$ , entonces la derivada  $x'_n(t) = nt^{n-1} - (n+1)t^n$  sólo se anula en el punto  $t = \frac{n}{n+1}$ . Como  $x''_n(t) = n(n-1)t^{n-2} - (n+1)nt^{n-1}$ , se deduce que  $x''_n(\frac{n}{n+1}) = n(n-1)\frac{n}{n+1}^{n-2} - (n+1)n\frac{n}{n+1}^{n-1} < 0$  con lo cual en ese punto hay un máximo relativo. No existen mínimos relativos. En los extremos del intervalo se tiene  $x(0) = 0$  y  $x(1) = 0$ . Luego el valor máximo es  $x_n(\frac{n}{n+1}) = \frac{n^n}{(n+1)^n} - \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$  mientras que el mínimo es 0 y, por consiguiente,  $\|x_n\| = \frac{n^n}{(n+1)^n} - \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$ . Se concluye que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^n}{(n+1)^n} - \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \right) = 0$$

y la sucesión  $(x_n)_{n=1}^\infty$  converge a 0 en el espacio  $\mathcal{C}([0, 1])$ .

En el segundo caso, es también sencillo comprobar que la sucesión  $(y_n)_{n=1}^\infty$  converge puntualmente a 0. Por otro lado, vamos a calcular la norma de la función  $y_n$ . Como  $y_n(t) = t^n - t^{2n}$  se cumple que  $y'_n(t) = nt^{n-1} - 2nt^{2n-1}$  con lo cual la derivada se anula en el punto  $t = \frac{1}{2^{1/n}}$ . Calculando la segunda derivada se comprueba que  $y''_n(\frac{1}{2^{1/n}}) < 0$ . Por tanto, en ese punto hay un máximo relativo y no existen mínimos relativos. Por anularse la función en los extremos del intervalo, se deduce que el valor del máximo absoluto es  $y_n(\frac{1}{2^{1/n}})$  y el del mínimo 0. Por tanto,  $\|y_n\| = y_n(\frac{1}{2^{1/n}}) = \frac{1}{4}$ . Obviamente la sucesión de normas  $\|y_n\|$  no converge a 0 con lo cual la sucesión  $(y_n)_{n=1}^\infty$  no converge a 0 en la norma del espacio  $\mathcal{C}([0, 1])$ .

**Ejemplo 2.4**

Probar que la sucesión de funciones medibles en  $[0, 1]$  cuyos primeros términos son  $\chi_{[0, 1]}$ ,  $\chi_{[0, 1/2]}$ ,  $\chi_{[1/2, 1]}$ ,  $\chi_{[0, 1/4]}$ ,  $\chi_{[1/4, 1/2]}$ ,  $\chi_{[1/2, 3/4]}$ ,  $\dots$ ;  $\| \cdot \|_p$ -converge, pero no converge puntualmente para ningún punto de  $[0, 1]$ .

Solución

Lo esencial en este ejemplo es percatarse, por un lado, que la medida de los intervalos donde las funciones no se anulan tiende a 0 puesto que esto implica que la sucesión  $p$ -converge a 0 y, por otro, que la sucesión de funciones aplicada en cada punto concreto repite infinitamente los valores 0 y 1.

Aunque no es estrictamente necesario, sí que resulta conveniente disponer de una fórmula para la sucesión: ésta es  $x_n = \chi_{[j/2^k, (j+1)/2^k]}$ , siendo  $n = 2^k + j$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  y  $j = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1$ .

La  $p$ -norma de cada función es

$$\|x_n\|_p = \left( \int_0^1 \chi_{[j/2^k, (j+1)/2^k]}^p \right)^{1/p} = \left( \frac{1}{2^k} \right)^{1/p}.$$

Es evidente que la sucesión de normas es decreciente y, como  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{1}{2^k})^{1/p} = 0$ , su ínfimo es 0. Por tanto,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_n\|_p = 0$ , con lo cual la sucesión  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  converge a 0 en  $L^p(0, 1)$ .

Por otro lado, fijado  $t \in [0, 1]$ , para cada  $k = 0, 1, 2, \dots$  existe  $j = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1$  tal que  $t \in [j/2^k, (j+1)/2^k]$  y así  $\chi_{[j/2^k, (j+1)/2^k]}(t) = 1$ . Se sigue que la sucesión  $(x_n(t))_{n=1}^{\infty}$  tiene una subsucesión constantemente igual a 1. Por otro lado, es evidente que si  $k \geq 2$ , entonces existe  $j = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1$  tal que  $t \notin [j/2^k, (j+1)/2^k]$  y así  $\chi_{[j/2^k, (j+1)/2^k]}(t) = 0$ . Se deduce que existe una subsucesión de  $(x_n(t))_{n=1}^{\infty}$  constantemente igual a 0. Por tanto, la sucesión  $(x_n(t))_{n=1}^{\infty}$  no converge.

## 1 Problemas

### Ejercicio 2.1

Probar que en un espacio normado la clausura de  $B_\delta(x)$  es  $B'_\delta(x)$  y que el interior de  $B'_\delta(x)$  es  $B_\delta(x)$ . ¿Es eso cierto en un espacio métrico cualquiera?

### Ejercicio 2.2

Probar que en todo espacio normado el diámetro de una bola es igual al doble del radio.

### Ejercicio 2.3

Probar que para dos vectores  $x$  e  $y$  cualesquiera se verifica

$$\|x\| \leq \max(\|x+y\|, \|x-y\|)$$

### Ejercicio 2.4

Probar que un subconjunto  $A$  de un espacio normado es acotado si y sólo si para cualquier sucesión  $\{x_n\}$  en  $A$  y cualquier sucesión  $\{\lambda_n\}$  en  $\mathbf{K}$  que tiende a 0, la sucesión  $\{\lambda_n x_n\}$  tiende a 0.

### Ejercicio 2.5

Sea  $X = \{x \in \mathcal{C}([-1, 1]) : x(t) = x(-t) \text{ para todo } t \in [-1, 1]\}$  considerado como subespacio del espacio  $\mathcal{C}([-1, 1])$  con la norma supremo. Demostrar que  $X$  es un espacio de Banach.

### Ejercicio 2.6

En el espacio  $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$  se considera el conjunto

$$M := \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) : f(0) = 0, f(1) = 1\}.$$

Estudiar si  $M$  es un conjunto cerrado. ¿Es  $M$  acotado? ¿Es  $M$  compacto?

### Ejercicio 2.7

Probar que el espacio  $\mathcal{C}([0, 1])$  con la norma  $\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt$  no es completo. (Considerar la sucesión de funciones  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ , donde

$$f_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ 0, & \text{si } t \in [1/2 + 1/n, 1], \\ \alpha_n t + \beta_n, & \text{si } t \in [1/2, 1/2 + 1/n] \end{cases}$$

$\alpha_n$  y  $\beta_n$  elegidos convenientemente.)

### Ejercicio 2.8

Probar que el subespacio de las sucesiones "finitamente no nulas", i.e. existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n = 0$  para  $n \geq n_0$ , denotado  $c_{00}$  o  $\varphi$ , es denso en  $c_0$ . ¿Es  $\varphi$  un espacio de Banach?

**Ejercicio 2.9**

Para cada  $p \geq 1$ , se define

$$\ell_p = \{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid x_n \in \mathbf{K}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \text{ converge} \}.$$

- (a) Probar que  $\ell_p$  es un subespacio vectorial de  $c_0$ . ¿Es cerrado?  
 (b) Probar que si  $p \leq q$ , entonces  $\ell_p$  es un subconjunto de  $\ell_q$ .

**Ejercicio 2.10**

Encontrar una sucesión  $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ , donde cada  $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots)$ ,  $x_j^{(n)} \in \mathbb{R}$ , que pertenezca a cada uno de los dos espacios indicados y que sea

- (a) convergente en  $\ell_{\infty}$  pero no en  $\ell_2$   
 (b) convergente en  $\ell_2$  pero no en  $\ell_1$   
 (c) convergente en  $c_0$  pero no en  $\ell_1$   
 (d) convergente en  $c_0$  pero no en  $\ell_2$

**Ejercicio 2.11**

Sea  $x_0 \in [a, b]$ . Probar que  $\|f\|_{x_0} = |f(x_0)| + \|f'\|_{\infty}$  es una norma en  $\mathcal{C}^1([a, b])$  equivalente a  $\|f\|_1 = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$ , donde  $\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$ .

**Ejercicio 2.12**

Consideremos la sucesión de funciones

$$x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}.$$

Estudiar su convergencia en los espacios  $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_{\infty})$  y  $(\mathcal{C}^1([0, 1]), \|\cdot\|_1)$ .

**Ejercicio 2.13**

Probar que la identidad de  $(\mathcal{C}^1([a, b]), \|\cdot\|_1)$  en  $(\mathcal{C}^1([a, b]), \|\cdot\|_{\infty})$  es continua pero que las dos normas no son equivalentes. (Considerar la sucesión definida por  $\frac{\sin n^2 x}{n}$  en  $[-\pi, \pi]$ .)

**Ejercicio 2.14**

Probar que  $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$  y que  $L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$ . ¿Qué ocurre si en lugar de  $\mathbb{R}$  consideramos los espacios  $L^2(I)$  y  $L^1(I)$ , donde  $I$  es un subconjunto de medida finita?

**Ejercicio 2.15**

Supongamos que  $I$  es un intervalo acotado en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión en  $L^p(I)$ . Probar que se cumplen las siguientes implicaciones.

$$f_n \rightarrow \text{uniformemente} \Rightarrow f_n \rightarrow \text{en la norma } \|\cdot\|_p \Rightarrow f_n \rightarrow \text{en la norma } \|\cdot\|_1.$$

Probar que los recíprocos no son ciertos.

**Ejercicio 2.16**

Probar que la sucesión  $\{n\chi_{[0, 1/n]}\}_{n=1}^{\infty}$  converge puntualmente pero no converge en el espacio  $L^p(0, 1)$ .

## 2 Problemas complementarios

### Ejercicio 2.17

En  $\mathbb{R}^2$  se consideran el conjunto  $A := [-1, 1] \times [-1, 1]$ , y el punto  $p = (2, 0)$ . Calcular las distancias  $d_1(p, A)$ ,  $d_\infty(p, A)$  y  $d_2(p, A)$ , siendo  $d_1(x, y) := \|x - y\|_1$ ,  $d_2(x, y) := \|x - y\|_2$ , y  $d_\infty(x, y) := \|x - y\|_\infty$ . Probar que en cada uno de los tres casos ( $i = 1, 2, \infty$ ), existe en  $A$  algún punto "más próximo"  $q$  tal que

$$\|p - q\|_i = d_i(p, A).$$

¿Es único este punto  $q \in A$ ?

### Ejemplo 2.5

Consideremos el espacio  $\ell_\infty$  con la norma  $\|\cdot\|_\infty$ . Sea  $e^i$  la sucesión cuyos términos son todos 0 excepto el  $i$ -ésimo que es 1. Explicar si se puede escribir toda sucesión  $x = (\chi_i) \in \ell_\infty$  como

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i e^i.$$

### Solución

La respuesta es negativa. Basta considerar la sucesión constante

$$(1, 1, 1, \dots) = (1) \in \ell_\infty$$

Está claro que

$$\sum_{i=1}^n 1e^i = (1, \dots, 1, 0, 0, \dots).$$

Por tanto

$$\left\| (1, 1, 1, \dots) - \sum_{i=1}^n 1e^i \right\|_\infty = \|(1, 1, 1, \dots) - (1, \dots, 1, 0, 0, \dots)\|_\infty = 1$$

Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| (1, 1, 1, \dots) - \sum_{i=1}^n 1e^i \right\|_\infty = 1.$$

Si fuera

$$(1, 1, 1, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} e^i$$

por definición de serie

$$(1, 1, 1, \dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e^i$$

luego debería ser

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| (1, 1, 1, \dots) - \sum_{i=1}^n 1e^i \right\|_\infty = 0.$$

### Ejercicio 2.18

Probar que una bola abierta de un espacio normado es homeomorfa a todo el espacio. Probar que un espacio normado es separable si y sólo si su bola unidad abierta es separable.

### Ejercicio 2.19

Si  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y tal que  $\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$  para todo  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , entonces  $f(x) = 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . (Utilizar el teorema de aproximación de Weierstrass.)



# Práctica 3

## Aplicaciones Lineales

### Ejemplo 3.1

Probar que los espacios  $c$  y  $c_0$  son isomorfos.

#### Solución

Para cada  $x = \{x_n\} \in c$  sea  $\ell(x) = \lim_n x_n$ . Entonces  $\ell$  es una forma lineal en  $c$  y como

$$|\ell(x)| \leq \|x\|$$

para todo  $x \in c$ , se tiene que  $\ell$  es continua y que  $\|\ell\| \leq 1$ .

Definimos la aplicación  $T : c \rightarrow c_0$

$$T(x) = (\ell(x), x_1 - \ell(x), x_2 - \ell(x), \dots).$$

Es decir,

$$(Tx)_1 = \ell(x) \text{ y } (Tx)_n = x_{n-1} - \ell(x), \quad n > 1.$$

Se comprueba fácilmente que  $T$  está bien definida, es lineal y además que  $\|Tx\| \leq 2\|x\|$ .

Además, dada  $y = \{y_n\} \in c_0$  existe una única sucesión  $x = \{x_n\} \in c$  tal que  $T(x) = y$ . En efecto, de la definición de  $T$  se sigue que  $x$  debería ser solución del sistema de ecuaciones

$$\ell(x) = y_1, x_1 - \ell(x) = y_2, x_2 - \ell(x) = y_3, \dots$$

y, por tanto,

$$x_n = y_1 + y_{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Por otra parte, puesto que  $\{y_n\}$  es convergente a cero, deducimos que la fórmula anterior define una sucesión  $x = \{x_n\}$  convergente de modo que  $\ell(x) = y_1$  y  $T(x) = y$ . Lo que prueba que  $T$  es un isomorfismo lineal. Por último,  $T^{-1}$  es también continua puesto que

$$\|T^{-1}(y)\| = \|x\| \leq |y_1| + \|y\| \leq 2\|y\|.$$

En consecuencia,  $T$  es un isomorfismo topológico.

### Ejemplo 3.2

Sea  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  una sucesión acotada en un espacio de Banach  $E$ . Demostrar que la aplicación  $T : \ell_1 \rightarrow E$  definida por  $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$  es lineal, continua y que  $\|T\| = \sup_n \|a_n\|$ .

#### Solución

Es evidente que la aplicación  $T$  está bien definida y es lineal. Sea  $M = \sup_n \|a_n\|$ . Dado  $m \in \mathbb{N}$  se tiene que si  $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$ , entonces

$$\left\| \sum_{n=1}^m a_n x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^m \|a_n\| \cdot |x_n| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = M \|x\|_1;$$

por lo tanto, se cumple que  $\|Tx\| \leq M \|x\|_1$ , con lo cual  $T$  es continua y  $\|T\| \leq M$ .

Por otra parte, dado  $\epsilon > 0$ , sea  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\|a_m\| > M - \epsilon$ . Consideremos el vector  $e_m$  cuyas componentes son todas nulas salvo la  $m$ -ésima que vale 1. Entonces  $T(e_m) = a_m$  luego  $\|T\| > M - \epsilon$ . Como  $\epsilon$  es arbitrario se tiene que  $\|T\| \geq M$ .

Observar que al calcular  $T(e_m) = a_m$ , como  $\|e_m\|_1 = 1$ , obtenemos directamente que  $\|T\| \geq \|a_m\|$ , y por tanto que  $\|T\| \geq M$ .

### Ejemplo 3.3

Sean  $X$  e  $Y$  espacios normados de dimensión  $m$  y  $n$  respectivamente. Si  $U : X \rightarrow Y$  es un operador lineal cuya matriz asociada es  $(a_{jk})_{\substack{j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,m}}$ , calcular su norma como operador de  $\ell_\infty(m)$  en  $\ell_\infty(n)$ .

#### Solución

Dado  $x \in \ell_\infty(m)$ , sea  $y = Ux$ , entonces

$$\|Ux\| = \max_{1 \leq j \leq n} |y_j| \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^m |a_{jk}| \cdot |x_k| \leq \|x\|_\infty \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^m |a_{jk}|;$$

luego

$$\|U\| \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^m |a_{jk}| = M.$$

Consideremos  $j_0$  tal que  $\sum_{k=1}^m |a_{j_0 k}| = M$ . Entonces si definimos el vector  $z \in \ell_\infty(m)$  por  $z_k = \text{sign}(a_{j_0 k})$ ,  $1 \leq k \leq m$ , se tiene que

$$\|U\| \geq \|Uz\| = \max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{k=1}^m a_{jk} z_k \right| \geq \sum_{k=1}^m a_{j_0 k} z_k = \sum_{k=1}^m |a_{j_0 k}| = M;$$

luego  $\|U\| = M$ .

### Ejemplo 3.4

Probar que en todo espacio normado de dimensión infinita existen formas lineales que no son continuas.

#### Solución

Sea  $\{e_i\}_{i \in I}$  una base de Hamel del espacio  $E$ . Podemos suponer que todos los vectores  $e_i$  son de norma 1. Elijamos una sucesión de vectores de la base  $\{e_{i_n}\}_{n=1}^\infty$  distintos.

Para definir una forma lineal en  $E$  es suficiente dar sus valores sobre los vectores de la base y extenderla linealmente. Además, como nos interesa que no sea continua, la definiremos de forma que no esté acotada en la bola unidad cerrada.

Definimos

$$\begin{aligned} \varphi(e_i) &= 0 \quad \text{si } i \neq i_n, \quad n = 1, 2, \dots \\ \varphi(e_{i_n}) &= n \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Para cada  $x \in E$ , podemos escribir  $x = \sum_{k=1}^m \alpha_k e_{\beta_k}$ , donde  $\beta_k \in I$ ,  $m \in \mathbb{N}$  y  $\alpha_k \in K$ . Entonces definimos  $\varphi(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi(e_{\beta_k})$ .

Puesto que  $\sup_n \varphi(e_{i_n}) = +\infty$  se sigue que  $\varphi$  no es continua.

## 1 Problemas

### Ejercicio 3.1

Probar que el funcional  $\varphi : L^p(0,1) \rightarrow \mathbb{R}$  definido  $\varphi(f) = \int_0^1 f(x) dx$  es continuo y calcular su norma.

### Ejercicio 3.2

Dados los puntos  $t_1, \dots, t_n$  del intervalo  $[a, b]$  y los números reales  $c_1, \dots, c_n$ , calcular la norma del funcional  $\Psi : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por  $\Psi(f) = \sum_{k=1}^n c_k f(t_k)$ ,  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ .

### Ejercicio 3.3

Sea  $\varphi : c_0 \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n$ . Probar que  $\varphi$  es continua y calcular su norma. Demostrar que no existe  $x \in c_0$  de norma 1 tal que  $\|\varphi\| = |\varphi(x)|$ .

### Ejercicio 3.4

Calcular la norma del funcional  $\Phi$  que aparece en el Ejercicio 1.21.

### Ejercicio 3.5

Sea  $\varphi$  una aplicación lineal entre dos espacios normados  $E$  y  $F$ . Probar que  $\varphi$  es continua si, y sólo si, cuando  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión acotada en  $E$ , la sucesión  $\{\varphi(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$  está acotada en  $F$ .

### Ejercicio 3.6

Sean  $X$  e  $Y$  espacios normados de dimensión  $m$  y  $n$  respectivamente. Si  $U : X \rightarrow Y$  es un operador lineal cuya matriz asociada es  $(a_{jk})_{\substack{j=1, \dots, n \\ k=1, \dots, m}}$ , calcular su norma como operador de  $\ell_1(m)$  en  $\ell_1(n)$ .

### Ejercicio 3.7

Consideremos una matriz infinita  $(a_{ik})_{i,k=1}^{\infty}$  tal que  $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^q < \infty$ ,  $q > 1$ . Sea  $p$  el conjugado de  $q$ . Probar que la correspondencia que a cada sucesión  $x = \{x_i\} \in \ell_p$  le asocia la sucesión  $Ax = y = \{y_i\}$ , donde  $y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , define un operador lineal continuo  $A : \ell_p \rightarrow \ell_q$ .

### Ejercicio 3.8

Se define el funcional  $T : \mathcal{C}([-1, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$T(f) = \int_{-1}^1 x f(x) dx.$$

Calcular la norma.

### Ejercicio 3.9

Calcular la norma del operador  $T : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$  definido por

$$(Tx)(t) = \int_0^1 e^{t+s} x(s) ds.$$

### Ejercicio 3.10

Sea  $k$  una función continua en  $[a, b] \times [a, b]$ . Probar que el operador  $(Uf)(s) = \int_a^b k(s, t) f(t) dt$ , definido en  $L^1(a, b)$  con valores en  $L^1(a, b)$ , es continuo y su norma vale

$$\|U\| = \max \left[ \int_a^b |k(s, t)| ds : t \in [a, b] \right]$$

(Utilizar la continuidad uniforme de  $k$  en  $[a, b] \times [a, b]$ )

### Ejercicio 3.11

Sea  $E = \mathcal{C}^1[0, 2\pi]$  y consideremos el operador  $T : E \rightarrow \mathcal{C}([0, 2\pi])$  definido por  $Tf = f + f'$ . Estudiar la continuidad de  $T$  en  $E$  con las normas  $\|\cdot\|_0$  y  $\|\cdot\|_1$ .

## 2 Problemas complementarios

### Ejercicio 3.12

Probar que si el operador  $U$  del Ejercicio 3.10 lo consideramos definido en  $L^1(a, b)$  y con valores en  $\mathcal{C}([a, b])$ , es continuo y su norma vale

$$\|U\| = \max\{|k(s, t)| : s, t \in [a, b]\}.$$

### Ejercicio 3.13

Probar que si el operador  $U$  del Ejercicio 3.10 lo consideramos definido en  $L^2(a, b)$  y con valores en  $L^2(a, b)$ , es continuo y su norma está mayorada por  $\|k(s, t)\|_2$ .

### Ejercicio 3.14

Sea  $X$  el subespacio de  $\mathcal{C}([0, 1])$  generado por las funciones  $t^2$  y  $1$ .

(a) Probar que si  $x(t) = \alpha t^2 + \beta$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $t \in [-1, 1]$ ; entonces  $\|x\|_\infty = \max\{|\alpha + \beta|, |\beta|\}$ .

(b) Se define  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(x) = \alpha + \beta$ , donde  $x \in X$  es  $x(t) = \alpha t^2 + \beta$ . Demuestra que  $f$  es lineal, continua y calcula su norma.

### Ejercicio 3.15

Dada  $\alpha = (\alpha_n)_{n=1}^\infty \in \ell_1$  se define  $T : c_0 \rightarrow c_0$  por

$$T\left((x_n)_{n=1}^\infty\right) = \left(\sum_{k=n}^\infty \alpha_k x_k\right)_{n=1}^\infty.$$

Demostrar que  $T$  es una aplicación lineal continua y calcular su norma.

### Ejercicio 3.16

Sea  $X = \{f : \mathcal{C}([0, +\infty[) \text{ tales que } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$  dotado con la norma  $\|\cdot\|_\infty$ . Comprobar que  $T : X \rightarrow X$  definido por  $T(f)(x) = f(x) \sin x$  es un operador lineal y continuo y calcular su norma.

### Ejercicio 3.17

Sea  $1 \leq p < \infty$  y sea  $\phi \in L^{2p}(0, 1)$ . Para cada  $x \in L^{2p}(0, 1)$  se define

$$(Tx)(t) := \phi(t)x(t)$$

p.c.t.  $t \in (0, 1)$ . Demostrar que  $T$  define una aplicación lineal y continua entre los espacios de Banach  $L^{2p}(0, 1)$  y  $L^p(0, 1)$ , y calcular su norma. ¿Qué ocurre si  $p = \infty$ ?

### Ejercicio 3.18

Probar que si  $E$  es un espacio normado sobre  $\mathbf{K}$ , entonces  $E$  es isométrico a  $L(\mathbf{K}, E)$ .

# Práctica 4

## Ecuaciones Integrales

### Ejemplo 4.1

Resolver la ecuación

$$x(s) = \frac{5s}{6} + \frac{1}{2} \int_0^1 stx(t) dt$$

por el método de aproximaciones sucesivas.

#### Solución

Partiendo de la función  $x_0(s) = 1$ , y del núcleo  $k(s, t) = \frac{st}{2}$  calculamos

$$x_{n+1}(s) = \frac{5s}{6} + \int_0^1 k(s, t)x_n(t) dt$$

y se van obteniendo las funciones

$$\left\{ 1, \frac{13}{12}s, \frac{73}{72}s, \frac{433}{432}s, \frac{2593}{2592}s, \frac{15553}{15552}s, \frac{93313}{93312}s, \frac{559873}{559872}s, \dots \right\}$$

A la vista de la sucesión obtenida, parece razonable pensar que la función  $x(s) = s$  es la solución de la ecuación. Para comprobarlo evaluamos el miembro de la derecha en la ecuación integral para  $x(t) = t$  y nos da efectivamente  $s$ .

### Ejemplo 4.2

Resolver la ecuación

$$x(s) = 1 + \int_0^s x(t) dt$$

por el método de aproximaciones sucesivas.

#### Solución

Tomando  $x_0(s) = 0$  entonces por la fórmula recurrente se tiene

$$x_1(s) = 1 + \int_0^s 0 dt = 1$$

$$x_2(s) = 1 + \int_0^s 1 dt = 1 + s$$

$$x_3(s) = 1 + \int_0^s (1 + t) dt = 1 + s + \frac{s^2}{2}$$

$$x_4(s) = 1 + \int_0^s (1 + t + \frac{t^2}{2}) dt = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!}$$

se tiene entonces que

$$x_n(s) = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \dots + \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}$$

por lo tanto

$$x_n(s) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} = e^s$$

Es fácil comprobar que  $e^s$  es la solución de la ecuación integral dada.

**Ejemplo 4.3**

Calcular la solución de la ecuación

$$x(s) = 1 + \int_0^1 (1 - 3st)x(t)dt$$

por medio del núcleo resolvente.

Solución

Considerando el operador

$$(Kx)(s) = \int_0^1 (1 - 3st)x(t)dt$$

de  $L^2(0, 1)$  en  $L^2(0, 1)$ , sabemos que su norma está mayorada por la norma del núcleo  $k(s, t) = 1 - 3st$  que vale  $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ , por lo tanto la ecuación tiene una solución.

Si  $k_1(s, t) = 1 - 3st$  y  $k_{n+1}(s, t) = \int_0^1 k(s, u)k_n(u, t)du$  sabemos que la solución de la ecuación viene dada por

$$x(s) = 1 + \int_0^1 R(s, t)1dt = 1 + \int_0^1 \left( \sum_{n=1}^{\infty} k_n(s, t) \right) 1dt$$

Calculemos los núcleos iterados

$$\begin{aligned} k_2(s, t) &= \int_0^1 (1 - 3sx)(1 - 3xt)dx = 1 - \frac{3}{2}(s + t) + 3st \\ k_3(s, t) &= \int_0^1 (1 - 3sx)\left(1 - \frac{3}{2}(x + t) + 3xt\right)dx = \frac{1}{4}(1 - 3st) = \frac{1}{4}k_1(s, t) \end{aligned}$$

De forma similar se obtiene que  $k_4(s, t) = \frac{1}{4}k_2(s, t)$  y en general

$$k_n(s, t) = \frac{1}{4}k_{n-2}(s, t)$$

por lo tanto el núcleo resolvente es

$$\begin{aligned} R(s, t) &= \left(1 + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} + \dots\right)k_1(s, t) + \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots\right)k_2(s, t) = \\ &= \frac{4}{3}\left((1 - 3st) + \left(1 - \frac{3}{2}(s + t) + 3st\right)\right) = \frac{8}{3} - 2(s + t) \end{aligned}$$

La solución de la ecuación será

$$x(s) = 1 + \int_0^1 \left(\frac{8}{3} - 2(s + t)\right)dt = \frac{8}{3} - 2s$$

cuya comprobación es inmediata.

**Ejemplo 4.4**

Resolver la ecuación integral

$$x(s) = \operatorname{sen} s + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - s + \frac{s^3 t^2}{2}\right)x(t) dt$$

Solución

Puesto que el núcleo  $k(s, t) = 1 - s + \frac{s^3 t^2}{2}$  es degenerado escribimos

$$x(s) = \operatorname{sen} s + \alpha(1 - s) + \beta s^3 \quad (*)$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{2} \int_0^1 x(t) dt \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{4} \int_0^1 t^2 x(t) dt$$

Sustituyendo en esos valores la expresión de  $x(s)$  en (\*) obtenemos un sistema para determinar  $\alpha$  y  $\beta$ .

$$\alpha = \frac{1}{2} \int_0^1 (\operatorname{sen} t + \alpha(1 - t) + \beta t^3) dt = \frac{1}{2} - \frac{\cos 1}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{8}$$

$$\beta = \frac{1}{4} \int_0^1 t^2 (\operatorname{sen} t + \alpha(1 - t) + \beta t^3) dt = \frac{\cos 1}{4} + \frac{\operatorname{sen} 1}{2} + \frac{\alpha + 2\beta - 24}{48}$$

queda por lo tanto el sistema

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} - \frac{\cos 1}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{8} \\ \beta = \frac{\cos 1}{4} + \frac{\operatorname{sen} 1}{2} + \frac{\alpha + 2\beta - 24}{48} \end{cases}$$

cuya solución es

$$\alpha = 0.317321 \quad , \quad \beta = 0.0651367$$

Sustituyendo en (\*) la solución de la ecuación es

$$x(s) = \operatorname{sen} s + 0.317321(1 - s) + 0.0651367s^3$$

Vamos a comentar ahora otro método de obtención de soluciones aproximadas de ecuaciones. Dada la ecuación  $Ax = y$  con  $y \in X$  y  $A$  invertible en  $L(X)$ , el método consiste en resolver la ecuación  $Bx_1 = y_1$ , en la que  $B$  invertible en  $L(X)$  y  $y_1 \in X$  se eligen de forma que  $\|y - y_1\|$  y  $\|A - B\|$  sean suficientemente pequeños. Es razonable pensar que la solución de esa ecuación nos proporcione una buena aproximación de la solución de la ecuación inicial. Obviamente la elección de  $B$  y de  $y_1$  se hace de forma que la resolución de la segunda ecuación sea más sencilla que la de la inicial.

A este respecto las ecuaciones integrales con núcleo degenerado nos proporcionan soluciones aproximadas de las ecuaciones integrales de Fredholm, como veremos en el ejemplo 5.

Vamos a dar una estimación de la distancia entre las soluciones de las dos ecuaciones. Si  $x$  y  $x_1$  son las soluciones de las ecuaciones  $Ax = y$  y  $Bx_1 = y_1$ , respectivamente, se tiene que

$$x_1 - x = (x_1 - A^{-1}y_1) + (A^{-1}y_1 - A^{-1}y) = A^{-1}(A - B)x_1 + A^{-1}(y_1 - y)$$

de donde

$$\|x - x_1\| \leq \|A^{-1}\| \|A - B\| \|x_1\| + \|A^{-1}\| \|y - y_1\|$$

**Ejemplo 4.5**

Hallar una solución aproximada de la ecuación integral

$$x(s) = \operatorname{sen} s + \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - s \cdot \cos st) x(t) dt.$$

Solución

Si

$$(Kx)(s) = \frac{1}{2} \int_0^1 k(s,t)x(t)dt,$$

entonces

$$\|K\| = \max \left[ \frac{1}{2} \int_0^1 |1 - s \cos(st)| dt : s \in [0, 1] \right] = \frac{1}{2} < 1$$

luego la ecuación integral tiene una solución.

Vamos a aproximar el núcleo  $k(s,t) = 1 - s \cos st$  por otro núcleo degenerado para lo cual desarrollamos en serie de Taylor alrededor de  $(0,0)$  la función  $\cos(st)$ . De

$$\cos(st) = 1 - \frac{s^2 t^2}{2} + \frac{s^4 t^4}{24} + \dots$$

se deduce que

$$1 - s \cos(st) = 1 - s + \frac{s^3 t^2}{2} - \frac{s^5 t^4}{24} + \dots$$

Tomando como núcleo degenerado  $k_1(s,t) = 1 - s + \frac{s^3 t^2}{2}$ , vamos a resolver la ecuación

$$x_1(s) = \sin s + \frac{1}{2} \int_0^1 k_1(s,t)x_1(t)dt$$

Esta ecuación la hemos resuelto en el ejemplo 4 y su solución es

$$x_1(s) = \sin s + 0.317321(1 - s) + 0.0651367s^3$$

Esta función es por lo tanto una solución aproximada de la ecuación inicial y lo que vamos a determinar ahora es una cota del error.

Recordemos que si  $T$  es un operador de norma menor que 1, entonces el operador  $I - T$  es invertible y

$$\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

En nuestro caso, si

$$(K_1x)(s) = \frac{1}{2} \int_0^1 k_1(s,t)x(t) dt$$

escribimos  $A = I - K$  y  $B = I - K_1$ .

Como al sustituir el núcleo  $k$  por  $k_1$  consideramos la misma función dato,  $y(s) = \sin s$ , se tiene que  $y = y_1$ ; por lo tanto

$$\|x - x_1\| \leq \|A^{-1}\| \|A - B\| \|x_1\| = \|(I - K)^{-1}\| \|K - K_1\| \|x_1\|.$$

Ahora bien

$$\|(I - K)^{-1}\| < \frac{1}{1 - \|K\|} = 2.$$

Por otra parte, como la función  $x_1$  es creciente se tiene que  $\|x_1\| = x_1(1) = 0.906607$ . Finalmente,

$$\|K - K_1\| \leq \max_{s \in [0,1]} \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{s^5 t^4}{24} dt = \max_{s \in [0,1]} \frac{s^5}{240} = 0.0041666.$$

Por tanto,  $\|x - x_1\| \leq 2 \times 0.906607 \times 0.0041666 = 0.0075549$ .

*Ecuaciones tipo Fredholm***Ejercicio 4.1**

$$x(s) = 1 + \int_0^1 st^2 x(t) dt.$$

**Ejercicio 4.2**

$$x(s) = \frac{5}{6}s + \frac{1}{2} \int_0^1 st x(t) dt.$$

**Ejercicio 4.3**

$$x(s) = \cos(s) + \int_0^\pi (st - s^2) x(t) dt.$$

**Ejercicio 4.4**

$$x(s) = (s+1)^2 - \int_{-1}^1 (st + s^2 t^2) x(t) dt.$$

**Ejercicio 4.5**

$$x(s) = \cos(s) + \int_0^\pi \operatorname{sen}(s-t) x(t) dt.$$

**Ejercicio 4.6**

$$x(s) = s + \int_0^1 (st + \operatorname{sen}(t)) x(t) dt.$$

*Ecuaciones tipo Volterra***Ejercicio 4.7**

$$x(s) = s - \int_0^s (s-t) x(t) dt.$$

**Ejercicio 4.8**

$$x(s) = 2s + 2 - \int_0^s x(t) dt.$$

**Ejercicio 4.9**

$$x(s) = 1 + \int_0^s 2t x(t) dt.$$

*Hallar soluciones aproximadas de las siguientes ecuaciones:*

**Ejercicio 4.10**

$$x(s) = e^s - s - \int_0^1 s(e^{st} - 1) x(t) dt.$$

**Ejercicio 4.11**

$$x(s) = s + \cos(s) + \int_0^1 s(\operatorname{sen}(st) - 1) x(t) dt.$$

**Ejercicio 4.12**

$$x(s) = \frac{1}{2}(e^{-s} + 3s - 1) + \int_0^1 (e^{-st^2} - 1) x(t) dt.$$

**Ejercicio 4.13**

$$x(s) = \frac{1}{2}(s + \operatorname{sen}(s)) + \int_0^1 (1 - \cos(st^2)) s x(t) dt.$$

*Nota: En la aproximación de los núcleos usando la fórmula de Taylor, se aconseja emplear un polinomio en el que aparezcan explícitamente todas las variables de dicho núcleo. P. ej., si el núcleo es  $K(s, t) = s \cos(s+t)$ , no usaríamos  $P_0(s, t) = s.1 = s$  sino, por lo menos,  $P_1(s, t) = s \left(1 + \frac{(s+t)^2}{2}\right)$ .*

# Práctica 5

## Espacios de Hilbert. Segunda parte

### Ejemplo 5.1

Demostrar que en un espacio de Hilbert separable toda base ortonormal es numerable. (Observar que si  $x$  e  $y$  son elementos de una base ortonormal, entonces  $\|x - y\| = \sqrt{2}$ .)

#### Solución

Sea  $(e_i)_{i \in I}$  una base ortonormal de  $X$ . Observamos primero que para cada  $i, j \in I$  ( $i \neq j$ ) el teorema de Pitágoras permite calcular  $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$  y en consecuencia  $B(e_i, \frac{\sqrt{2}}{2}) \cap B(e_j, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \emptyset$ .

Por hipótesis existe un subconjunto  $S$  que es numerable y denso en  $X$ . Para cada  $i \in I$  podemos seleccionar un vector  $v_i \in B(e_i, \frac{\sqrt{2}}{2}) \cap S$ . Entonces, la aplicación  $\Phi : I \rightarrow S$  dada por  $\Phi(i) = v_i$  es inyectiva, lo que prueba que  $I$  es numerable.

### Ejercicio 5.1

Sea  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  una base ortonormal en el espacio de Hilbert  $X$ . Un operador  $T : X \rightarrow X$  se dice que es diagonal respecto de esa base si existe una sucesión de escalares  $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$  tal que  $Te_n = \alpha_n e_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

(a) Demostrar que  $T$  es continuo si, y sólo si,  $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}$ .

(b) ¿Bajo qué condiciones un operador diagonal es una proyección?

### Ejercicio 5.2

Sean  $X$  e  $Y$  espacios de Hilbert separables y sean  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  bases ortonormales de  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

(a) Dado  $T \in L(X, Y)$  se definen  $a_{jk} = (Te_k, f_j)$  con  $j, k \in \mathbb{N}$ . Demostrar que si  $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ , entonces  $Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \alpha_k \right) f_j$  (con lo cual  $T$  admite una representación matricial similar a la de los operadores entre espacios de dimensión finita, representación que depende de las bases ortonormales elegidas). Demostrar que si  $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ , entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \alpha_k \right|^2 \leq \|T\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2.$$

(b) Demostrar que si  $(a_{jk})_{j,k \in \mathbb{N}}$  es una matriz infinita verificando que existe  $C > 0$  tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \alpha_k \right|^2 \leq C \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$$

para toda sucesión  $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ , entonces define un operador  $T \in L(X, Y)$  con  $\|T\|^2 \leq C$ .

(c) Demostrar que si  $(a_{jk})_{j,k \in \mathbb{N}}$  es una matriz infinita verificando  $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < \infty$ , entonces define un operador  $T \in L(X, Y)$  con  $\|T\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2$ .

### Ejercicio 5.3

Sea  $S = \{e_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$  un conjunto ortonormal en un espacio de Hilbert  $X$ . Probar que para cada  $x \in X$ , existe a lo sumo una cantidad numerable de índices  $\alpha \in I$  para los cuales  $(x, v_{\alpha}) \neq 0$ . (Considerar el conjunto de índices  $\{\alpha : |(x, v_{\alpha})| \geq \frac{1}{n}\}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .)

**Ejercicio 5.4**

En el espacio de Hilbert  $\ell_2$  se considera la sucesión  $(w_n)$  dada por

$$\begin{aligned} w_1 &:= \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots \right) \\ w_2 &:= \left( 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots \right) \\ &\vdots \\ w_n &:= \left( \underbrace{0, \dots, 0}_{2n-1}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots \right) \end{aligned}$$

Estudiar si el conjunto  $\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$  es un sistema ortonormal en este espacio. Calcular la serie de Fourier asociada al vector

$$x := \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right)$$

respecto de  $(w_n)$ . ¿Se cumple que  $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, w_n \rangle w_n$ ? ¿Es  $\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$  un sistema ortonormal completo?

**Ejercicio 5.5**

Calcula el operador adjunto  $B$  del operador  $A : \ell_2 \rightarrow \ell_2$  definido por

$$A(x) := (0, x_1, x_2, \dots)$$

donde  $x = (x_n) \in \ell_2$ . Probar que  $B \circ A = \text{Id} \neq A \circ B$ .

**Ejercicio 5.6**

Probar que el operador  $T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ , que transforma la función  $f \in L^2(\mathbb{R})$  en la función  $Tf$  definida por

$$T(f)(t) := f(t+1)$$

es lineal y continuo, y calcular su operador adjunto.

**Ejercicio 5.7**

Sea  $F$  una función acotada, integrable en  $[a, b] \times [a, b]$ . Probar que la aplicación que a cada  $f$  de  $L^2(a, b)$  le asocia la función  $Tf$  definida por

$$Tf(s) := \int_a^b F(s, t) f(t) dt$$

es un operador lineal continuo  $T : L^2(a, b) \rightarrow L^2(a, b)$ , y calcular su adjunto.