Aportaciones Matemáticas
Serie Comunicaciones **20** (1997) 1–5.

Radon-Nikodym versus Fatou

Oscar Blasco
Departamento de Análisis Matemático,
Universidad de Valencia.
46100-Burjassot Valencia. España.
e-mail: oblasco@uv.es

Resumen. Se demuestra que el Teorema de Radon-Nikodym sobre representabilidad de medidas reales absolutamente continuas respecto a la de Lebesgue en el intervalo $[0,1]$ es equivalente al Teorema de Fatou sobre la existencia de límites radiales en casi todo punto de funciones armónicas y acotadas en el disco unidad.

1. Introducción

Las notas que siguen a continuación son esencialmente el contenido de la charla de divulgación e investigación impartida en el XXIX Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana, celebrado en San Luis Potosí en Octubre de 1996. La idea de las mismas es poner de manifiesto que dos teoremas clásicos del Análisis como son el de Radon-Nikodym, pieza básica de teoría de la Medida, y el resultado de Fatou sobre existencia de valores frontera de funciones armónicas y acotadas en el disco unidad, hecho éste importante y relevante en el Análisis Armónico y Ecuaciones Diferenciales, son resultados equivalentes, significando ésto que la validez de uno implica la del otro y recíprocamente.
Recordemos la formulación de los mismos que consideraremos en este trabajo en el contexto de medidas de Borel reales y funciones armónicas reales.

1.1 Teorema. **(Teorema de Radon-Nikodym)** *Sea μ una medida de Borel real (y por tanto con variación total finita) sobre $[0,1]$ que es absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue m. Entonces existe $f \in L^1([0,1])$ de modo que $\mu(E) = \int_E f dm$ para todo boreliano E en $[0,1]$.*

1.2 Teorema. **(Teorema de Fatou)** *Sea $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ una función armónica y acotada. Entonces existe una función f medible y esencialmente acotada, es decir $f \in L^\infty([0,1])$, tal que $\lim_{r\to 1^-} u(re^{2\pi i t}) = f(t)$ para casi todo $t \in [0,1]$.*

1991 Mathematical Subject Classification. 46B22.

El modo de llegar a dicha observación proviene de la formulación de los resultados anteriormente mencionados en un contexto vectorial, es decir para funciones que toman valores en espacios de Banach. La consideración de este tipo de funciones, e incluso de medidas con valores vectoriales, fue una línea muy desarrollada y provechosa de los años 70 y 80 (ver [4], [3], [5]), tratándose de estudiar las propiedades (geométricas) que han de poseer los espacios de Banach para poder formular determinados teoremas en el contexto vectorial. Un buen ejemplo de ello son las llamadas propiedad de Radon-Nikodym (RNP) (ver [3] para diversas caracterizaciones de la misma) o la propiedad de Fatou (FP) (ver [2]). En estas notas veremos que un espacio de Banach X tiene la propiedad de Radon-Nikodym si y sólo si X tiene la propiedad de Fatou. La formulación de dicho resultado cuando X coincide con el cuerpo $\mathbb{R}$ significa la equivalencia de los dos teoremas arriba mencionados.
En lo que sigue $(X, ||.||)$ denota un espacio de Banach real, X^* su dual topológico, $< x, x^* >$ el par dual y por $\mathcal{L}(X, Y)$ entendemos los operadores lineales continuos entre dos espacios de Banach X e Y. Denotaremos por $C([0,1])$, $L^1([0,1])$ y $L^\infty([0,1])$ los espacios de funciones continuas reales, integrables respecto de la medida de Lebesgue m y esencialmente acotadas respectivamente y por $C([0,1], X)$, $L^1([0,1], X)$ y $L^\infty([0,1], X)$ los espacios de las funciones X-valoradas que son continuas, fuertemente medibles integrables Bochner y fuertemente medibles esencialmente acotadas respectivamente (ver [3, 5]). Por último $\mathcal{B}$ denota los borelianos sobre $[0,1]$, $\mathbb{D}$ significa el disco unidad abierto y cuando $0 < r < 1$ y $t \in [0,1]$ escribiremos $P_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2rcos(2\pi t)}$ para el núcleo de Poisson en el disco.

2. Preliminares

Pasaremos por un breve repaso de las definiciones y propiedades que estimo pueden ser no tan conocidas y que necesitaremos, con el objeto de que estas notas sean fácilmente legibles y medianamente autocontenidas.

2.1 Definición. Sea $\mu : \mathcal{B} \to \mathcal{X}$ una medida numerablemente aditiva, es decir

$$\mu(\cup_{n=1}^\infty E_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n)$$

donde los conjuntos $E_n \in \mathcal{B}$ son disjuntos dos a dos y la convergencia de la serie se entiende en la norma del espacio.
Se dice que μ es absolutamente continua repecto de la medida de Lebesgue m, denotado $\mu << m$, si

$$\lim_{m(E)\to 0} ||\mu(E)|| = 0.$$

Se define la variación de μ como la medida positiva

$$|\mu|(A) = sup\{\sum_{n=1}^m ||\mu(E_i)||\}$$

donde el supremo se toma sobre las particiones de borelianos E_i con $A = \cup_{i=1}^m E_i$. Se dice que μ es de variación finita si

$$|\mu|([0,1]) = ||\mu||_1 < \infty.$$

2.2 Definición. Un espacio X se dice que tiene la propiedad de Radon-Nikodym, denotado $X \in (RNP)$, si para toda μ medida numerablemente aditiva con valores en X tal que $\mu << m$ y $||\mu||_1 < \infty$ existe una $f \in L^1([0,1], X)$ de modo que $\mu(E) = \int_E f dm$ para todo $E \in \mathcal{B}$.

2.3 Definición. Una función $u : \mathbb{D} \to X$ se dice armónica si para todo $x^* \in X^*$ se tiene que $z \to < u(z), x^* >$ es armónica escalar, es decir

$$\frac{\partial}{\partial x^2} < u(z), x^* > + \frac{\partial}{\partial y^2} < u(z), x^* >= 0$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ y $x^* \in X^*$.

2.4 Definición. Un espacio X se dice que tiene la propiedad de Fatou, denotado $X \in (FP)$ si para toda función armónica u con valores en X y acotada, es decir $sup_{z\in\mathbb{D}}||u(z)|| < \infty$, existe $f \in L^\infty([0,1], X)$ tal que

$$\lim_{r\to 1^-} u(re^{2\pi it}) = f(t)$$

para casi todo $t \in [0,1]$.

Recordaremos un resultado clásico, cuya demostración en el caso vectorial, sigue los pasos del caso escalar (ver [7]):

2.5 Lema. *Sea $f \in L^1([0,1], X)$. Entonces la integral de Poisson de f, definida por*

$$P(f)(re^{2\pi it}) = \int_0^1 f(s)P_r(t-s)ds$$

es una función armónica con valores en X que verifica

$$\lim_{r\to 1^-} P(f)(re^{2\pi it}) = f(t)$$

para casi todo $t \in [0,1]$.

2.6 Lema. *Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{L}^\infty([\prime, \infty]), \mathcal{X})$. Entonces la integral de Poisson de T, definida por*

$$P(T)(re^{2\pi it}) = T(P_r(t - .))$$

es una función armónica con valores en X.

Demostración: Nótese que $< P(T), x^* >= P(f_{x^*})$ donde f_{x^*} es la función que respresenta el elemento del dual de $L^1([0,1])$ dado por la composición x^*T. $\square$

3. El teorema y su prueba.

Pasaremos ahora a enunciar y probar el resultado anunciado que se debe a Bukhvalov y Danilevich (ver [2]). Fue probado por distintos autores (ver [6, 1]) y la demostración que presento es propia y aparece por vez primera (de este modo) en estas notas.

3.1 Teorema. *$X \in (RNP)$ si y sólo si $X \in (FP)$.*

Demostración: Supongamos que $X \in (RNP)$ y sea $u : \mathbb{D} \to X$ una función armónica y acotada. Consideremos $r_n = 1 - 2^{-n}$ y denotemos $f_n(t) = u(r_n e^{2\pi it})$. Por hipótesis, f_n es una sucesión de funciones continuas con valores en X de modo que

$$sup_{n\in\mathbb{N}}||f_n||_\infty \leq sup_{z\in\mathbb{D}}||u(z)|| < \infty.$$

Consideremos las inclusiones isométricas

$$C([0,1], X) \subset \mathcal{L}(L^1([0,1]), X) \subset \mathcal{L}(L^1([0,1]), X^{**})$$

dadas por $f \to T_f$ donde $T_f(\phi) = \int_0^1 \phi(t)f(t)dm(t)$ y $T \to jT$ donde $j : X \to X^{**}$ es la inclusión natural.
Como es sabido (ver [3]) que

$$(L^1([0,1])\hat{\otimes}X^*)^* = (L^1([0,1], X^*))^* = \mathcal{L}(L^1([0,1]), X^{**})$$

entonces, usando el teorema de Banach-Alaoglu, podemos encontrar $T \in \mathcal{L}(L^1([0,1]), X^{**})$ y una subsucesión n_k de modo que para toda $\phi \in L^1([0,1])$ y $x^* \in X^*$ se tiene

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 < u(r_{n_k} e^{2\pi it})\phi(t), x^* > dt = T(\phi)(x^*).$$

Comprobemos primero que $T_{f_{n_k}}(\phi)$ converge a $T(\phi)$ para todo $\phi \in L^1([0,1])$ y que además $T(\phi) \in X$.
En el caso particular $\phi_m(t) = e^{-2\pi imt}$ con $m \in \mathbb{Z}$ se tiene que $T_{f_{n_k}}(\phi_m)$ corresponde la sucesión de coeficientes de Fourier $\hat{f}_{n_k}(m)$.
Observese que si $k < k'$ entonces

$$\hat{f}_{n_k}(m) = \hat{f}_{n_{k'}}(m) \left(\frac{r_k}{r_{k'}}\right)^m.$$

Por tanto es inmediato ver que $\hat{f}_{n_k}(m)$ es una sucesión de Cauchy para cada $m \in \mathbb{Z}$ y así existe $x_m \in X$ con $\lim_{k\to\infty} T_{f_{n_k}}(\phi_m) = x_m$.
Como por otro lado $\lim_{k\to\infty} < T_{f_{n_k}}(\phi_m), x^* >= T(\phi_m)(x^*)$ para todo $x^* \in X^*$ tenemos que $T(\phi_m) = x_m$ y además $T(\phi_m) \in X$.
Ahora por linealidad pasamos a polinomios trigonométricos y por densidad a toda función de $L^1([0,1])$.
Por otro lado veamos que $P(T) = u$.

En efecto, usando la unicidad de la solución del problema de Dirichlet para dato continuo, se tiene

$$\begin{aligned} P(T)(re^{2\pi it}) &= T(P_r(t-.)) \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_0^1 u(r_{n_k}e^{2\pi is})P_r(t-s)ds \\ &= \lim_{k\to\infty} u(rr_{n_k}e^{2\pi it}) \\ &= u(re^{2\pi it}). \end{aligned}$$

Definamos ahora la siguiente medida vectorial:

$$\mu(E) = T(\chi_E) = \lim_{k\to\infty} \int_E u(r_{n_k}e^{2\pi it})dt.$$

Es fácil ver que la continuidad de T implica que es numerablemente aditiva y que $||\mu(E)|| \leq ||T||m(E)$. De ésto se sigue que es absolutamente continua respecto de m y que tiene variación $||\mu||_1 \leq ||T||$.
Por consiguiente como $X \in (RNP)$ existe $f \in L^1([0,1], X)$ tal que $\mu(E) = \int_E f dm$.
Finalmente como $P(f) = P(T) = u$ entonces el Lema 2.5 garantiza la existencia de límite para casi todo $t \in [0,1]$, quedando probada la propiedad de Fatou.
Recíprocamente, supongamos que $X \in (FP)$ y sea μ una medida X-valorada con $\mu << m$ y $||\mu||_1 < \infty$.
Estudiemos en primer lugar el caso previo dado por la hipótesis siguiente:
Existe $C > 0$ tal que $||\mu(E)|| \leq Cm(E)$ para todo $E \in \mathcal{B}$.
Esto permite definir el siguiente operador $T_\mu : L^1([0,1]) \to X$ dado por

$$T_\mu(\sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{E_k}) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \mu(E_k)$$

donde $\alpha_k \in \mathbb{R}$ si$1 \leq k \leq m$ y $E_k \in \mathcal{B}$ $(1 \leq k \leq m)$ son conjuntos disjuntos dos a dos.
Es claro que

$$||T_\mu(\sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{E_k})|| \leq \sum_{k=1}^m |\alpha_k|||\mu(E_k)|| \leq C||\sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{E_k}||_1.$$

Ahora podemos extender por densidad a toda función de $L^1([0,1])$.
Definimos ahora la integral de Poisson del operador $u = P(T)$ que es armónica según el Lema 2.6. Además como $||P_r||_1 = 1$ para todo $0 < r < 1$ tenemos $||u(z)|| \leq ||T|| \leq C$.
Usando la hipótesis $X \in (FP)$ podemos concluir que existe $f \in L^\infty([0,1], X)$ de modo que $\lim_{r\to 1^-} u(re^{2\pi it}) = f(t)$ para casi todo $t \in [0,1]$.
Por unicidad del problema de Dirichlet se tiene que $P(f) = u = P(T)$ y de ahí

$$\mu(E) = T(\chi_E) = \int_E f dm.$$

Para hacer el caso general haremos el siguiente argumento:
Dada $\mu << m$ consideramos la función maximal

$$\mu^*(\theta) = sup\{\frac{|\mu|(I)}{m(I)} : \theta \in I, \quad I \text{ intervalo}\}$$

y recordemos la llamada desigualdad $1 - 1$-débil (ver [7]):

$$m(\{\theta : \mu^*(\theta) > \lambda\}) \leq \frac{||\mu||_1}{\lambda}.$$

Poniendo para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{\theta : \mu^*(\theta) \leq n\}$ se sigue de lo anterior que $[0,1] = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \cup N$ con $m(N) = 0$.
Si definimos $\mu_n(E) = \mu(E \cap A_n)$ se tendrá $||\mu_n(E)|| \leq nm(E)$. Aplicando la parte previa encontraremos $f_n \in L^1([0,1], X)$ tal que $\mu_n(E) = \int_E f_n dm$ para todo $E \in \mathcal{B}$.
Como A_n es una sucesión creciente podemos definir $f(t) = f_n(t)$ para $t \in A_n$ y con ésto se concluye que

$$\mu(E) = \ lim_{n\to\infty}\mu(E \cap A_n) = \int_E f dm.$$

□

Bibliografía

1. Blasco,O. *Vector-valued harmonic functions considered as operators.* Studia Math. **86** (1987) 9-33.
2. Bukhvalov, A. and Danilevich, A. *Boundary properties of analytic and harmonic functions with values in Banach spaces.* Proc. Mat. Zametki **31** (1982) 203-214.
3. Diestel, J and Uhl, J.J. *Vector measures.* Amer. Math. Soc. Mathematical surveys Vol 15 (1977).
4. Dinculeanu, N. *Vector measures.* Pergamon Press, New York (1967).
5. Dunford, N and Schwarz, J.T. *Linear operators. Part I* John Wiley and Sons, New York (1958).
6. Hensgen, W. *Hardy-Raume vektorwertiger funktionen.* Thesis (1986).
7. Katnetzson, Y. *An introduction to Harmonic Analysis.* John Wiley and Sons. New York (1968).