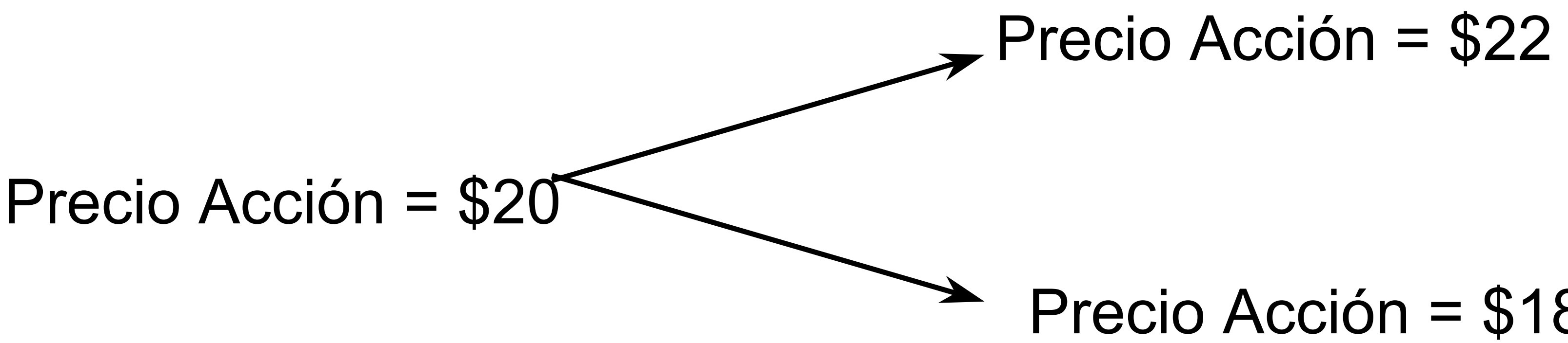
VALORACION DE OPCIONES CON ARBOLES BINOMIALES

Modelo Binomial Simple

- Precio actual de la acción \$20
- Dentro de tres meses será \$22 o \$18



Una opción de compra

Una opción de compra a 3 meses sobre la acción tiene un precio de ejercicio de 21.

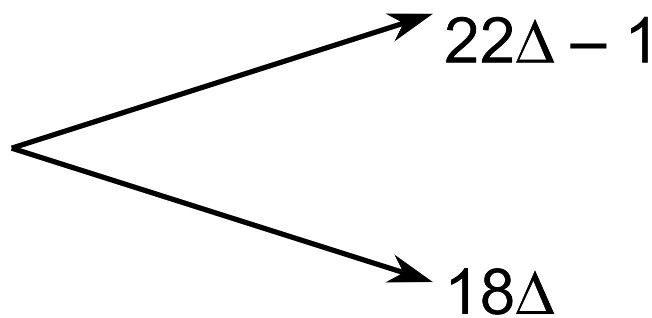
Precio acción = $22
Precio opción =$1

Precio acción = $20
Precio opción =?

Precio acción = $18
Precio opción = $0

Construir una cartera libre de riesgo

- Considerar la cartera: larga Δ acciones
  corta 1 opción de compra



- La cartera es libre de riesgo cuando $22\Delta - 1 = 18\Delta$ o $\Delta = 0.25$

Valorar la cartera
(Tipo de interés libre de riesgo 12%)

- La cartera libre de riesgo es:

  larga 0.25 acciones
  corta 1 opción de compra

- El valor de la cartera dentro de 3 meses es

$$22\times 0.25 - 1 = 4.50$$

- El valor de la cartera hoy es

$$4.5e^{-0.12\times 0.25} = 4.3670$$

Valorar la opción

- La cartera es

  larga 0.25 acciones
  corta 1 opción

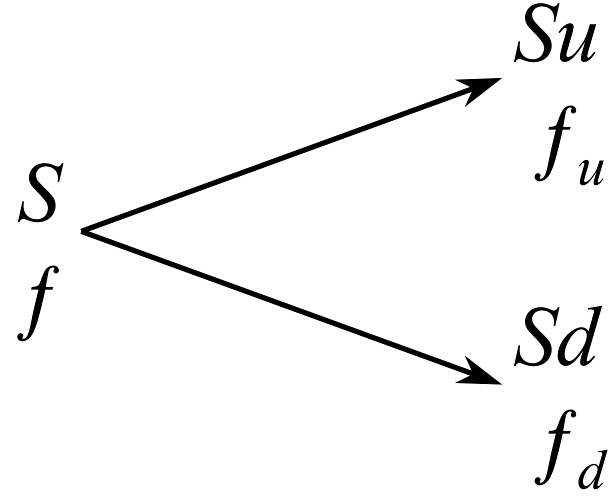
  su valor 4.367
- El valor de las acciones es

  $$5 \ (= 0.25 \times 20\ )$$
- Por lo tanto, el valor de la opción es

  $$0.633 \ (= 5 - 4.367\ )$$

Generalización

- Un derivado con vencimiento en el momento T y que depende de una acción



Generalización
(continuación)

- Considere la cartera larga en Δ acciones y corta en 1 derivado

$$Su\Delta - f_u$$

$$Sd\Delta - f_d$$

- La cartera es libre de riesgo cuando $Su\Delta - f_u = Sd\,\Delta - f_d$ o

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{Su - Sd}$$

Generalización
(continuacion)

- Valor de la cartera en el momento T es $Su\,\Delta - f_u$
- Valor de la cartera hoy es $(Su\,\Delta - f_u)e^{-rT}$
- Otra expresión para el valor de la cartera hoy es $S\,\Delta - f$
- De manera que

$$f = S\,\Delta - (Su\,\Delta - f_u)e^{-rT}$$

Generalización
(continuacion)

- Sustituyendo por Δ obtenemos

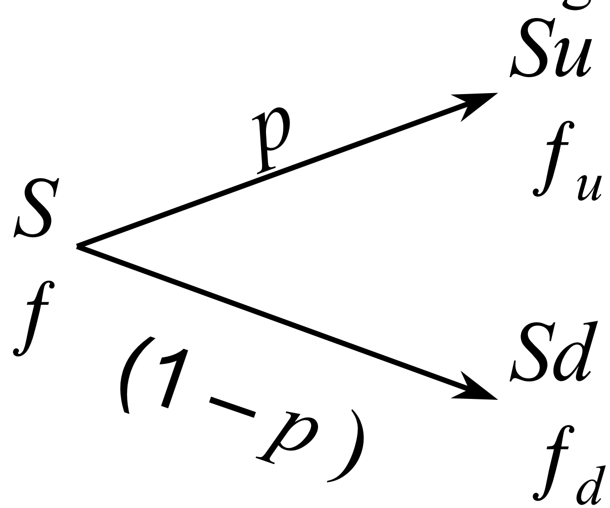
$$f = [\, p\, f_u + (1-p\,)f_d \;]e^{-rT}$$

donde

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

Valoración Riesgo-Neutral

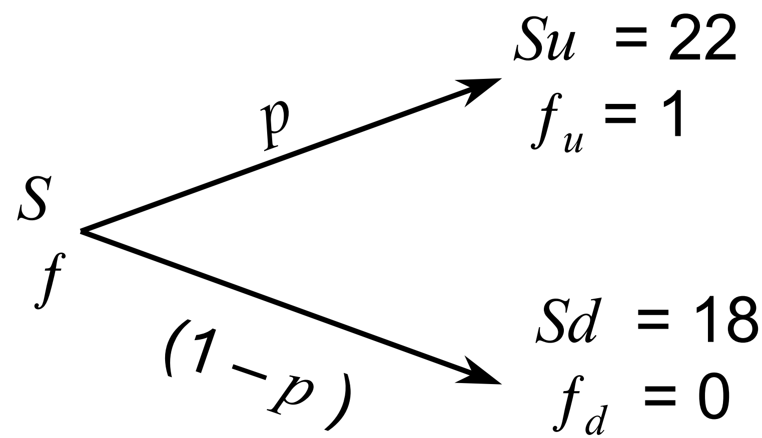
- $f = [\, p\, f_u + (1 - p\,) f_d\,]e^{-rT}$
- Las variables p y $(1 - p\,)$ pueden ser interpretadas como las probabilidades riesgo-neutral de movimientos al alza o a la baja, respectivamente. El valor de un derivado es su resultado esperado en un mundo neutral al riesgo descontado al tipo de interés libre de riesgo.



Irrelevancia de la rentabilidad esperada de la acción

Cuando estamos valorando una opción en términos de la acción subyacente la rentabilidad esperada de la acción es irrelevante.

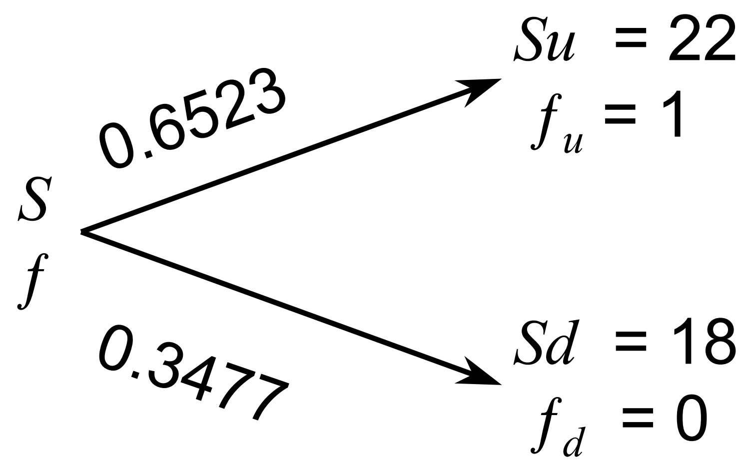
Ejemplo



- Dado que p es una probabilidad riesgo-neutral
  $20e^{0.12\times 0.25} = 22p + 18(1-p); \; p = 0.6523$
- Alternativamente, podemos usar la fórmula:

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} = \frac{e^{0.12\times 0.25} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.6523$$

Valorar la Opción

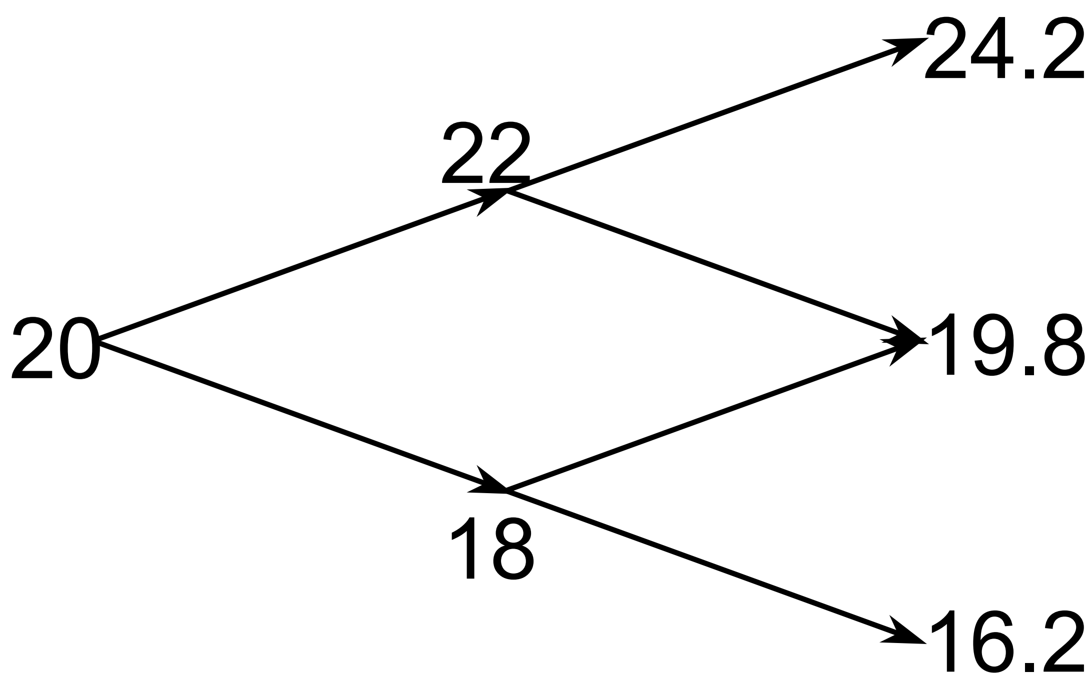


El valor de la opción es

$e^{-0.12\times0.25}$ [0.6523×1 + 0.3477×0]

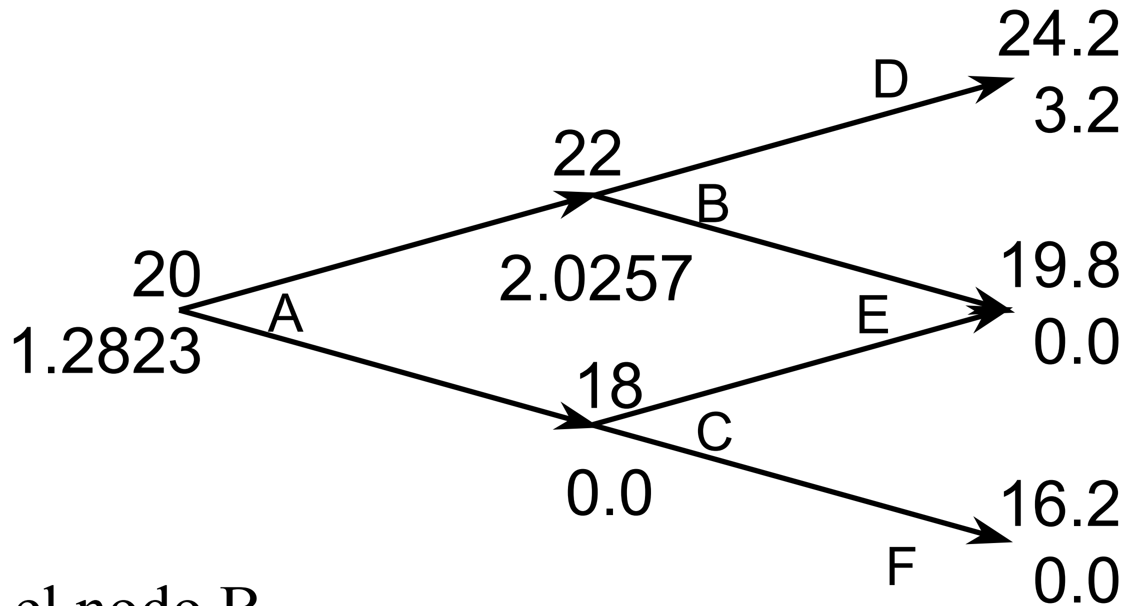
= 0.633

Un ejemplo con dos pasos temporales



- Cada paso temporal es 3 meses

Valorar una opción de compra



- Valor en el nodo B

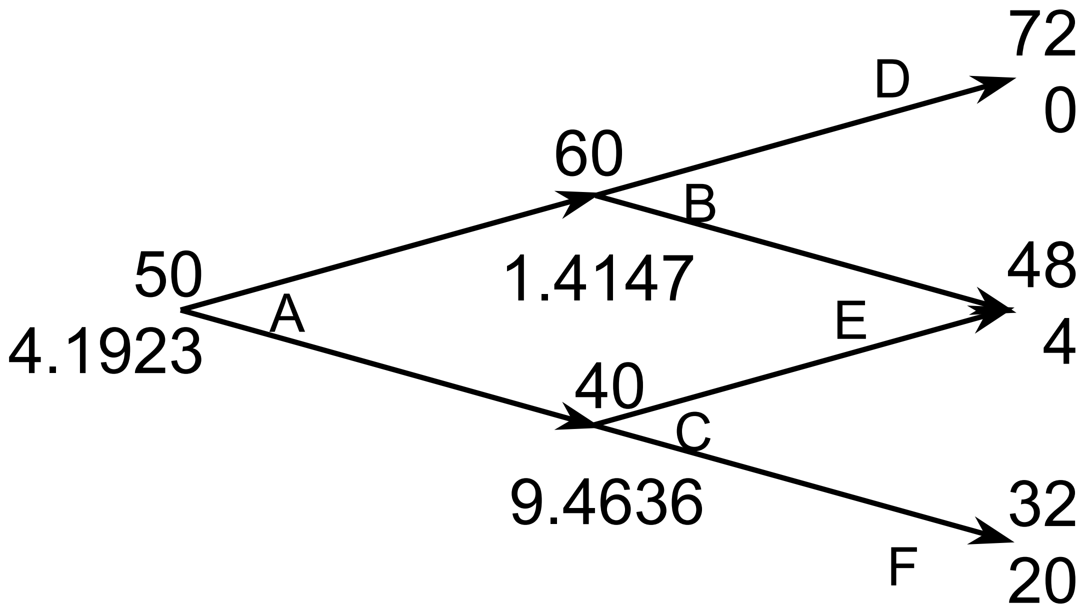
  $= e^{-0.12\times0.25}(0.6523\times3.2 + 0.3477\times0) = 2.0257$

- Valor en el nodo A

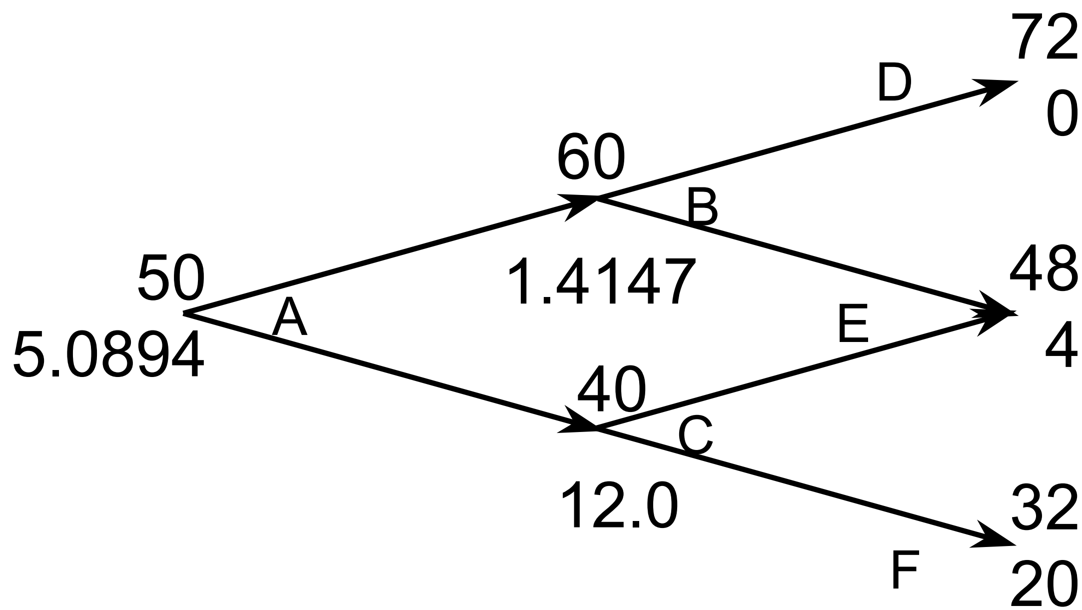
  $= e^{-0.12\times0.25}(0.6523\times2.0257 + 0.3477\times0)$

  $= 1.2823$

Ejemplo de una opción de venta; X=52



Qué sucede cuando una opción es de estilo americano



Parámetros del árbol: acción que no paga dividendos (1)

- Nosotros elegimos los parámetros p, u, y d tal que el árbol proporcione los valores correctos de media y desviación típica de los cambios en el precio de la acción en un mundo neutral al riesgo.

$$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)d$$

$$\sigma^2 \Delta t = pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2$$

- Otra condición impuesta: $u = 1/d$

Elegir u y d

Una forma de ajustar la volatilidad es establecer

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

donde σ es la volatilidad y Δt es la longitud del paso temporal. Esta es la aproximación usada por Cox, Ross, and Rubinstein

Parámetros del árbol: acción que no paga dividendos (2)

- Cuando Δt es pequeño una solución a las ecuaciones es

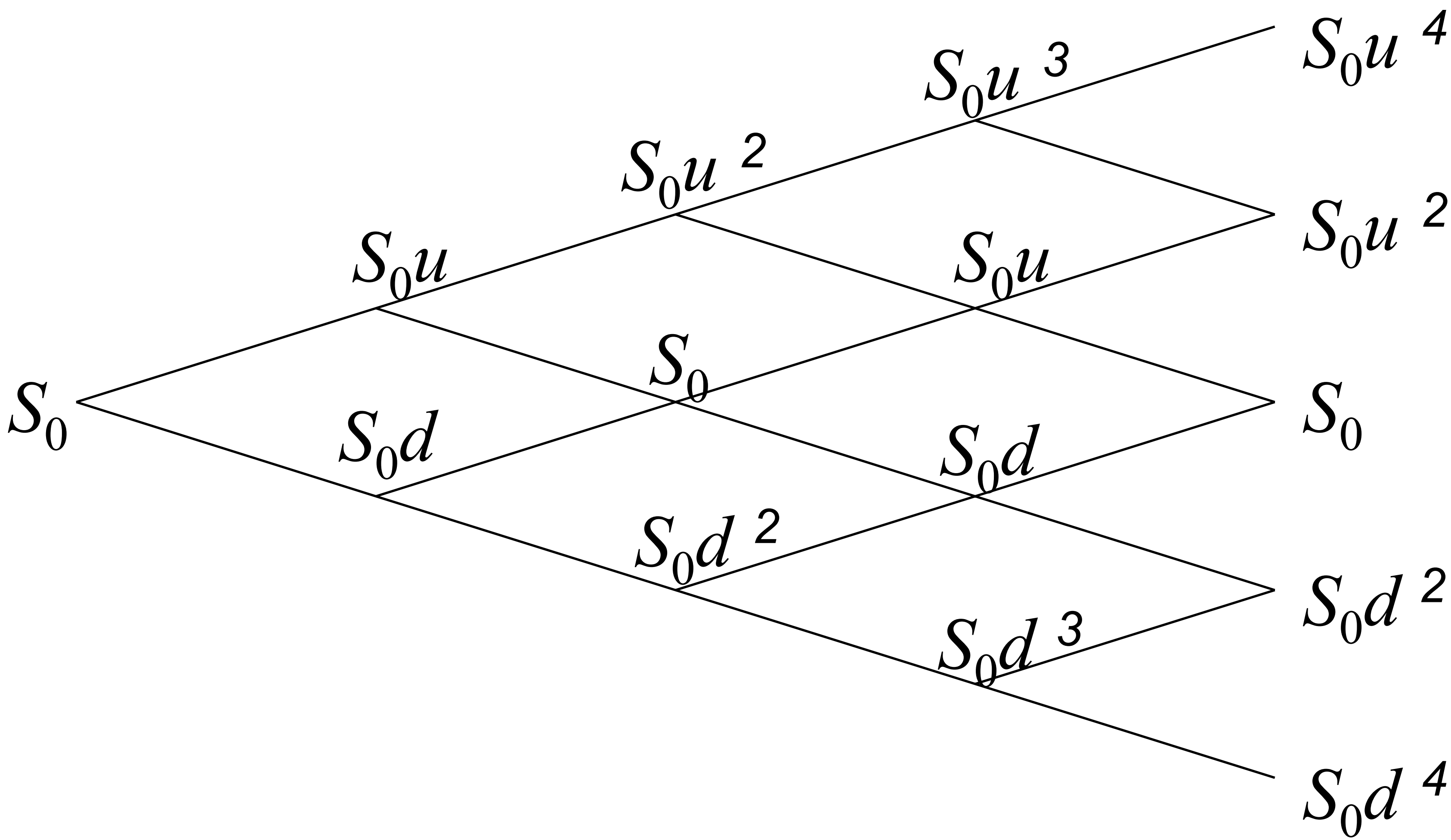
$$u = e^{\sigma \sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma \sqrt{\Delta t}}$$

$$p = \frac{a - d}{u - d}$$

$$a = e^{r \, \Delta t}$$

El árbol completo



Inducción hacia atrás

- Partiendo del valor de una opción en los nodos finales.
- Trabajamos hacia atrás a lo largo del árbol usando la valoración riesgo-neutro para calcular el valor de la opción en cada nodo, comprobando si es ventajoso o no el ejercicio anticipado.

Ejemplo: Opción de venta

$S_0 = 50; \quad X = 50; \quad r = 10\%; \quad \sigma = 40\%;$

$T = 5 \text{ meses} = 0.4167;$

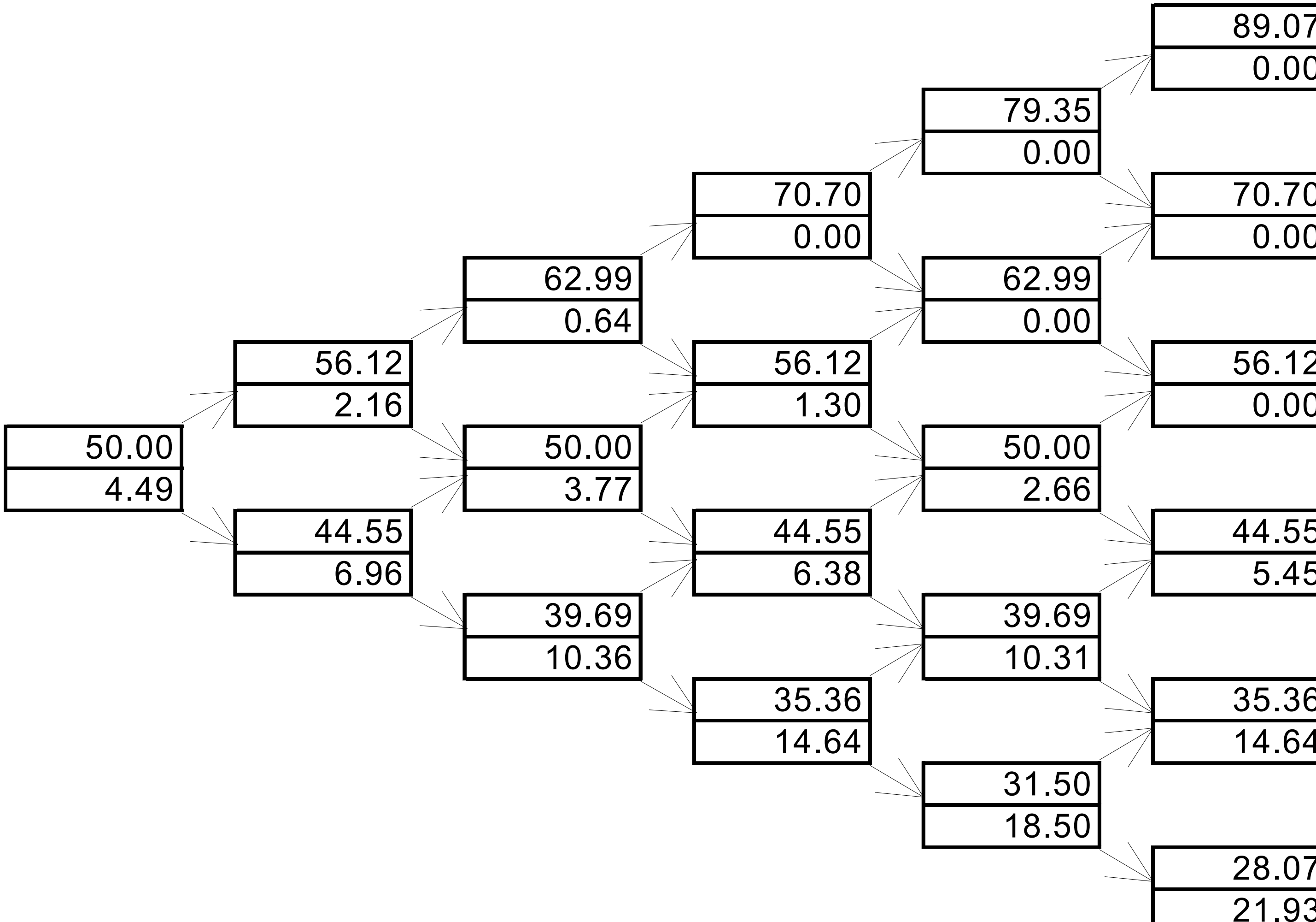
$\Delta t = 1 \text{ mes} = 0.0833$

Los parámetros implican

$u = 1.1224; \quad d = 0.8909;$

$a = 1.0084; \quad p = 0.5076$

Ejemplo (continuacion)



Delta

- Delta (Δ) es el ratio de cambio en el precio de una opción sobre una acción respecto el cambio en el precio de la acción subyacente.
- El valor Δ varía de un nodo a otro nodo.

Cálculo de Delta

Delta se calcula entre nodos con incremento temporal Δt

$$\text{Delta} = \frac{2.16 - 6.96}{56.12 - 44.55} = -0.41$$

Gamma

Mide la tasa de variación de la Delta con respecto a la variacion del activo subyacente

$$\delta\Delta \approx \Gamma\,\delta S$$

Calculo de Gamma

Gamma se calcula entre nodos con incremento temporal $2\Delta t$

$$\Delta_1 = \frac{0.64 - 3.77}{62.99 - 50} = -0.24; \;\; \Delta_2 = \frac{3.77 - 10.36}{50 - 39.69} = -0.64$$

$$\text{Gamma} = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{11.65} = 0.03$$

Theta

Tasa de variacion del valor de una opcion con respecto al paso del tiempo

$$\delta C \approx \Theta \delta t$$

Cálculo de Theta

Theta se calcula apartir de nodos centrales con incrementos temporales de 0 y $2\Delta t$

$$\textbf{Theta} = \frac{3.77 - 4.49}{0.1667} = -4.3 \textbf{ por año}$$

$$\textbf{-}\,0.012 \textbf{ por día}$$

Vega

Tasa de variacion del valor de una opcion con respecto a la volatilidad del subyacente

$$\delta C \approx \Theta\, \delta \sigma$$

Cálculo de Vega

- Podemos proceder como sigue:
- Construir un nuevo árbol con una volatilidad de 41% en lugar de 40%.
- Valor de la opción es 4.62
- Vega es

$$4.62 - 4.49 = 0.13$$

$$\text{por } 1\% \text{ cambio en volatil idad}$$

Rho

Tasa de variacion del valor de una opcion con respecto al tipo de interes

$$\delta C \approx \Theta\,\delta r$$

Árboles y Dividendos Continuos

- Cuando una acción paga dividendos continuos al ratio q nosotros construimos el árbol de la misma forma pero estableciendo $a = e^{(r-q)\Delta t}$
- Como con Black-Scholes:
  - Para opciones sobre índices de acciones, q es igual a la rentabilidad por dividendo del índice
  - Para opciones sobre divisas, q es igual al tipo de interés libre de riesgo de la divisa
  - Para opciones sobre contratos de futuros $q = r$

Árbol Binomial para acciones que pagan dividendos

- Procedimiento:
  - Dibujar el árbol para el precio de la acción menos el valor actual de los dividendos
  - Crear un nuevo árbol añadiendo el valor actual de los dividendos en cada nodo
- Esto asegura que el árbol combina y hace las asunciones similares a las impuestas por el modelo de Black-Scholes

Árbol Binomial Alternativo

- En vez de establecer $u = 1/d$ podemos establecer cada una de las dos probabilidades en 0.5 y

$$u = e^{(r-\sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{(r-\sigma^2/2)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Árbol Trinomial

$$u = e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}} \qquad d = 1/u$$

$$p_u = \sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{6}$$

$$p_m = \frac{2}{3}$$

$$p_d = -\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{6}$$