PROCESOS ESTOCÁSTICOS

INTEGRAL ESTOCÁSTICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCASTICAS:

LEMA DE ITO

Procesos estocásticos

- Un **proceso estocástico** describe la evolución temporal de una variable aleatoria.
- Tipos de procesos estocásticos:
  - *de tiempo discreto:* aquel en el que la variable puede cambiar de valor únicamente en instantes concretos del tiempo
  - *de tiempo continuo:* aquel en el que la variable puede cambiar de valor en cualquier instante del tiempo
  - *de variable discreta:* aquel en el que la variable sólo puede tomar determinados valores discretos
  - *de variable continua:* aquel en el que la variable puede tomar cualquier valor de la recta real

Nuestro objetivo será deducir un proceso estocástico de variable continua y en tiempo continuo adecuado para describir el comportamiento de variables económico financieras (precios de las acciones, rendimientos de activos, tipos de interés...)

Expresión analítica de un proceso estocástico

- Sabemos que el comportamiento de una variable aleatoria se describe mediante una adecuada distribución de probabilidad. En un proceso estocástico el comportamiento de la variable aleatoria considerada varía en el tiempo. Por tanto, la distribución de probabilidad utilizada para describirla también podrá variar en el tiempo.

- Para describir el proceso estocástico que sigue una variable aleatoria temporal x_t , deberemos indicar en cada instante t cual es la **distribución de probabilidad asociada a x_t.**

Ejemplo: Consideremos el procesos estocástico x_T dado por:

$$x_T \sim N(x_0 + \mu T, \sigma^2 T) \quad x_0\,,\ \mu\,,\ \sigma \text{ constantes conocidas}$$

En un instante final de tiempo T, x_T sigue una distribución de probabilidad de media $x_0+\mu T$ y de varianza $\sigma^2 T$

- Cuando se está modelizando un fenómeno real, resulta difícil establecer directamente cual va ser la distribución de probabilidad adecuada, asi como determinar cómo van a variar sus parámetros en el tiempo.

- Por ello es frecuente que los procesos estocásticos vengan dados mediante **ecuaciones,** similares a las de los modelos discretos en diferencias finitas que aparecían en el ejemplo del tema 1. En dichas ecuaciones se relaciona el valor de la variable aleatoria x_t en el instante t, con su valor en el instante anterior x_{t-1}.

- Ahora bien, para que una ecuación en diferencias sea estocástica es necesario que en su expresión intervenga una variable aleatoria estándar ξ_t. De este modo el valor de x_t no se deduce de forma determinista a partir del valor de x_{t-1}, sino que depende también del comportamiento de la variable aleatoria ξ_t.

- ξ_t inducirá en x_t una distribución de probabilidad variable en el tiempo. Es decir, x_t seguirá un proceso estocástico.

- *Ejemplos de procesos estocásticos definidos por ecuaciones*

$$\boxed{x_t = x_{t-1} + \xi_t}$$

(x_0 conocido)

- ***Caso 1***: ξ_t *sigue una distribución de probabilidad dada por:*

$$P(\xi_t = 1) = P(\xi_t = -1) = \frac{1}{2}$$

La distribución de probabilidad de x_t vendrá inducida a partir de la distribución binomial que sigue ξ_t . Este ejemplo se puede ilustrar mediante el experimento del lanzamiento de una moneda.

- ***Caso 2:*** ξ_t *sigue una distribución de probabilidad dada por:*

$$P(\xi_t = 1) = p$$

$$P(\xi_t = -1) = 1 - p$$

- ***Caso 3***: ξ_t *sigue una distribución de probabilidad N(0,σ)*

$$x_t = \delta + \rho\, x_{t-1} + \xi_t$$

- x_0 *conocido*
- δ *y* ρ *constantes, siendo* $-1 \le \rho \le 1$
- ξ_t *sigue una distribución de probabilidad* $N(0,\sigma)$

Proceso autoregresivo de primer orden

Nota: En muchos casos, es posible deducir a partir de la ecuación que define el proceso estocástico, cual sería la distribución de probabilidad de la variable aleatoria x_t . Veremos este procedimiento para la ecuación en diferencias estocástica que nos interesa estudiar en profundidad.

Simulación de procesos estocásticos

Procesos de Markov
Procesos de Wiener

- Un **proceso de Markov** es un tipo particular de proceso estocástico en el que únicamente el estado actual del proceso es relevante a la hora de predecir el estado futuro. Es decir, la historia pasada del proceso y la forma en que el ppresente ha emergido del pasado son irrelevantes.

  Más formalmente, el valor esperado de una variable aleatoria x_t en el instante t, depende únicamente del valor previo x_{t-1} . Generalizando, si poseemos información sobre x_r , con r < t , entonces a la hora de estimar x_t , la única información que necesitamos es la de x_r , para el mayor r para el que tengamos información.

Se supone habitualmente que los precios de las acciones siguen un proceso de Markov. Esta propiedad de Markov de los precios de las acciones se corresponde con la denominada "eficiencia débil del mercado". Dicha eficiencia débil establece que el precio actual de la acción encierra toda la información contenida en el registro de los precios del pasado. Si esta propiedad no fuese cierta, los analístas técnicos podrían obtener beneficios por encima de la media interpretando las bases de datos de la historia pasada de las acciones. Existe poca evidencia de que sean capaces de hacerlo.

- Un **proceso de Wiener** es un tipo especial de proceso estocástico de Markov. Una variable x_t se dice que sigue un proceso de Wiener si cumple la ecuación:

$$\boxed{x_t = x_{t-1} + \xi_t \sqrt{\Delta t}}$$

  - x_0 conocido
  - $t = t\text{-}1 + \Delta t$
  - ξ_t sigue una distribución de probabilidad N(0,1)
  - ξ_t es independiente de ξ_s para todo $t \neq s$

Propiedades de los procesos de Wiener

- Para un intervalo tempora Δt dado, el incremento de la variable aleatoria Δx se distribuye según una normal de media 0 y varianza Δt .

$$\boxed{\Delta x \sim N(0, \Delta t)}$$

$$x_t = x_{t-1} + \xi_t \sqrt{\Delta t} \quad \Longrightarrow \quad \Delta x = x_t - x_{t-1} = \xi_t \sqrt{\Delta t}$$

Como ξ_t sigue una distribución deprobabilidad normal, entonces $\xi_t \sqrt{\Delta t}$ sigue también una distribución normal. Veamos cual sería su media y su varianza:

$$\mu = E\left[\Delta x\right] = E\left[\xi_t \Delta t\right] = \Delta t * E\left[\xi_t\right] = \Delta t * 0 = 0$$

ξ_t sigue una N(0,1)

$$Var = E\left[(\Delta x - \mu)^2\right] = E\left[(\Delta x - 0)^2\right] = E\left[(\Delta x)^2\right] = E\left[\xi_t^{\,2} \Delta t\right] = \Delta t * E\left[\xi_t^{\,2}\right] = \Delta t * E\left[(\xi_t - 0)^2\right] = \Delta t * 1 = \Delta t$$

ξ_t sigue una N(0,1)

- Supongamos que queremos estudiar el comportamiento de Δx en un intervalo de tiempo relativamente amplio [0,T]. Procedemos como sigue:

  - Subdividimos el intervalo [0,T] en q subintervalos de longitud $\Delta t = T/q$
  - Aplicamos la fórmula del proceso de Wiener a cada subintervalo y sumamos miembro a miembro las ecuaciones obtenidas:

$$
\begin{array}{rcl}
x_T - x_{T-1} & = & \xi_{q-1}\sqrt{\Delta t} \\
x_{T-1} - x_{T-2} & = & \xi_{q-2}\sqrt{\Delta t} \\
\vdots & & \vdots \\
x_2 - x_1 & = & \xi_1\sqrt{\Delta t} \\
x_1 - x_0 & = & \xi_0\sqrt{\Delta t} \\
\hline
x_T - x_0 & = & \left(\sum_{i=0}^{q-1}\xi_i\right)\sqrt{\Delta t}
\end{array}
$$

• Como las variables aleatorias ξ_i son independientes y se distribuyen según una normal N(0,1), entonces $\sum \xi_i$ se distribuye según una normal de media la suma de las medias y de varianza la suma de las varianzas. Por tanto, x_T - x_0 sigue una distribución normal de media y varianza:

$$E\left[x_T - x_0\right] = E\left[\left(\sum_{i=0}^{q-1} \xi_i\right)\sqrt{\Delta t} \right] = \sqrt{\Delta t} * E\left[\sum_{i=0}^{q-1} \xi_i \right] = \sqrt{\Delta t} * 0 = 0$$

$$Var\left[x_T - x_0\right] = Var\left[\left(\sum_{i=0}^{q-1} \xi_i\right)\sqrt{\Delta t} \right] = \Delta t * Var\left[\sum_{i=0}^{q-1} \xi_i \right] = \Delta t * \sum_{i=0}^{q-1} 1 = \Delta t * q = \frac{T}{q} * q = T$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x_T - x_0 \sim N(0, T)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{x_T \sim N(x_0, T)}$$

Movimiento Browniano aritmético

- Un movimiento Browniano aritmético (MBA) es un proceso estocástico definido en términos de un proceso de Wiener del modo siguiente:

$$x_t - x_{t-1} = \Delta x = \mu\Delta t + \sigma\Delta z$$

- μ y σ constantes
- $\Delta z = \xi_t \sqrt{\Delta t}$ es un proceso de Wiener

La constante μ representa la tasa esperada de cambio de la variable x por unidad de tiempo. En efecto, si eliminasemos el segundo sumando tendríamos que $x_t = x_{t-1} + \mu\Delta t$.

El término $\sigma\Delta z$ "perturba" la tendencia marcada por $\mu\Delta t$. Dicha perturbación es σ veces un proceso de Wiener Δz .

Propiedades de los MBA

- Para un intervalo tempora Δt dado, el incremento de la variable aleatoria Δx se distribuye según una normal de media $\mu\Delta t$ y varianza $\sigma^2\Delta t$.

$$\boxed{\Delta x \sim N(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t)}$$

Como Δz es un proceso de Wiener, sabemos que sigue una distribución de probabilidad normal de media *0* y varianza Δt . Entonces Δx seguirá también una distribución normal. Veamos cual es su media y su varianza:

$$\mu = E\left[\Delta x\right] = E\left[\mu\Delta t + \sigma\Delta z\right] = \mu\Delta t + \sigma E\left[\Delta z\right] = \mu\Delta t + 0 = \mu\Delta t$$

$$Var = E\left[(\Delta x - \mu\Delta t)^2\right] = E\left[(\sigma\Delta z)^2\right] = \sigma^2 E\left[(\Delta z)^2\right] = \sigma^2 E\left[(\Delta z - 0)^2\right] = \sigma^2 Var\left[\Delta z\right] = \sigma^2\Delta t$$

- Supongamos que queremos estudiar el comportamiento de Δx en un intervalo de tiempo relativamente amplio [0,T]. Procedemos como sigue:
  - Subdividimos el intervalo [0,T] en q subintervalos de longitud $\Delta t = T/q$
  - Aplicamos la fórmula del MBA a cada subintervalo y sumamos miembro a miembro las ecuaciones obtenidas:

$$
\begin{array}{rcl}
x_T - x_{T-1} & = & \mu\Delta t + \sigma\xi_{q-1}\sqrt{\Delta t} \\
x_{T-1} - x_{T-2} & = & \mu\Delta t + \sigma\xi_{q-2}\sqrt{\Delta t} \\
\vdots & & \vdots \\
x_2 - x_1 & = & \mu\Delta t + \sigma\xi_1\sqrt{\Delta t} \\
x_1 - x_0 & = & \mu\Delta t + \sigma\xi_0\sqrt{\Delta t} \\
\hline
x_T - x_0 & = & q\mu\Delta t + \sigma\left(\sum_{i=0}^{q-1}\xi_i\right)\sqrt{\Delta t} = \mu T + \sigma\left(\sum_{i=0}^{q-1}\xi_i\right)\sqrt{\Delta t}
\end{array}
$$

• Como las variables aleatorias ξ_i son independientes y se distribuyen según una normal N(0,1), entonces $\sum \xi_i$ se distribuye según una normal de media la suma de las medias y de varianza la suma de las varianzas. Por tanto, x_T - x_0 sigue una distribución normal de media y varianza:

$$E\left[x_T - x_0\right] = E\left[\mu T + \sigma\left(\sum_{i=0}^{q-1}\xi_i\right)\sqrt{\Delta t}\right] = \mu T + \sigma\sqrt{\Delta t}\, E\left[\sum_{i=0}^{q-1}\xi_i\right] = \mu T + \sigma\sqrt{\Delta t} * 0 = \mu T$$

$$Var\left[x_T - x_0\right] = E\left[\left(\mu T + \sigma\left(\sum_{i=0}^{q-1}\xi_i\right)\sqrt{\Delta t} - \mu T\right)^2\right] = E\left[\left(\sigma\left(\sum_{i=0}^{q-1}\xi_i\right)\sqrt{\Delta t}\right)^2\right] = \sigma^2 \Delta t \sum_{i=0}^{q-1} 1 = \sigma^2 \Delta t q = \sigma^2 T$$

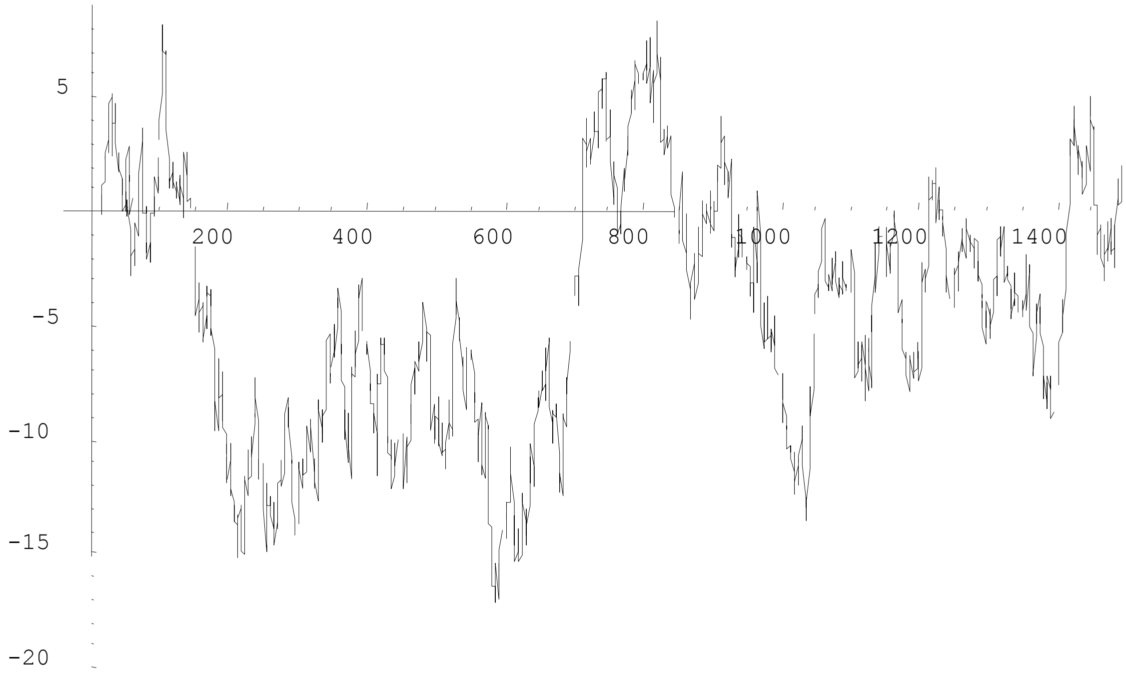
$$E\left[\left(\sum_{i=0}^{q-1}\xi_i\right)^2\right] = Var\left[\sum_{i=0}^{q-1}\xi_i\right] = \sum_{i=0}^{q-1} Var\left[\xi_i\right]$$

$$\boxed{x_T - x_0 \sim N(\mu T, \sigma^2 T)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{x_T \sim N(x_0 + \mu T, \sigma^2 T)}$$

Simulación de MBA



Intervalos de confianza para el MBA

- Teniendo en cuenta que:

$$x_T \sim N(x_0 + \mu T, \sigma^2 T)$$

y utilizando propiedades conocidas de la distribución normal, tenemos que los intervalos de confianza del 66%, 95% y 99% son respectivamente:

$$(x_0 + \mu T - \sigma\sqrt{T}, x_0 + \mu T + \sigma\sqrt{T})$$

$$(x_0 + \mu T - 2\sigma\sqrt{T}, x_0 + \mu T + 2\sigma\sqrt{T})$$

$$(x_0 + \mu T - 2.33\sigma\sqrt{T}, x_0 + \mu T + 2.33\sigma\sqrt{T})$$

Movimiento Browniano geométrico

- Un movimiento Browniano geométrico (MBG) es un proceso estocástico dado por:

$$x_t - x_{t-1} = \Delta x = \mu x_{t-1}\Delta t + \sigma x_{t-1}\Delta z$$

- μ y σ constantes
- $\Delta z = \xi_t \sqrt{\Delta t}$ es un proceso de Wiener

Notemos que:

$$\boxed{\frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} = \mu\Delta t + \sigma\Delta z}$$

Es decir, que el cociente del incremento de la variable dividido entre el valor anterior de la variable sigue un MBA. Este hecho será utilizado para estudiar la rentabilidad de una acción cuando *x* representa el precio de dicha acción.

Simulaciones de MBG

Integral estocástica. Procesos de difusión. Ecuaciones diferenciales estocásticas

- Los movimientos brownianos se basan en la definición del proceso de Wiener. Las trayectorias del proceso de Wiener son continuas pero no derivables. Por tanto el paso de un proceso estocástico de tiempo discreto a otro de tiempo continuo no es inmediato. Requiere de la construcción de una nueva herramienta matemática: **la integral estocástica**
- En general podemos definir procesos estocásticos cuyos incrementos dependen de un proceso de Wiener. Un proceso de Itô o **proceso de difusión** es un proceso de Wiener generalizado en el que los parámetros μ y σ son ahora funciones de la propia variable y del tiempo:

$$\boxed{x_{t+1} - x_t = f(x_t, t)\Delta t + g(x_t, t)\Delta z}$$

- Si en la ecuación anterior hacemos tender $\Delta t \to 0$, entonces, en tiempo continuo, se puede escribir formalmente:

$$\boxed{dx_t = f(x_t, t)dt + g(x_t, t)dz}$$

- La variable estocástica x_t está definida si en la ecuación integral siguiente las integrales que aparecen tienen sentido y son calculables:

$$\boxed{x_t = x_0 + \int_0^t f(x_t, t)ds + \int_0^t g(x_t, t)dz}$$

- La integral $\int_0^t f(x_t, t)ds$ es una integral Rieman
- La integral $\int_0^t g(x_t, t)dz$ no es Rieman ya que *dz* no existe. (Aunque z es continua no es de variación acotada y por tanto la integral tampoco es una integral de Rieman-Stieljes).

- Por tanto hay que definir un nuevo tipo de integral: **la integral estocástica**.

•**Bibliografía**: Malliaris, Broch: "Stochastic Methods in Economics and Finance"

Lema de Itô

Sea x_t un proceso de difusión cuya dinámica es:

$$dx_t = f(x_t, t)dt + g(x_t, t)dz$$

Supongamos que $y_t = F(x_t, t)$ es función del proceso anterior, siendo $F(x_t, t)$ una función de clase $C^2(\Re \times \Re^+)$.

Entonces y_t es un proceso de difusión cuya diferencial estocástica viene dada por :

$$\boxed{dy_t = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + f(x_t, t)\frac{\partial F}{\partial x_t} + \frac{1}{2} g(x_t, t)\frac{\partial^2 F}{\partial x_t^2} \right) dt + \left(g(x_t, t)\frac{\partial F}{\partial x_t} \right) dz}$$

Aplicación del Lema de Itô al estudio del MBG

- Consideramos el siguiente MBG en tiempo discreto:

$$x_{t+1} - x_t = \mu x_t \Delta t + \sigma x_t \xi_t \sqrt{\Delta t} = \mu x_t \Delta t + \sigma x_t \Delta z$$

y su generalización a tiempo continuo:

$$dx_t = \mu x_t dt + \sigma x_t dz$$

- Veamos que el proceso $y_t = ln\ x_t$ sigue un MBA en tiempo continuo:
  - Como $y_t = y(t, x_t)$, entonces podemos calcular:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 0, \frac{\partial y}{\partial x_t} = \frac{1}{x_t}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_t^2} = -\frac{1}{x_t^2}$$

  - Aplicando Itô:

$$dy_t = \left[\mu x_t \frac{1}{x_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x_t^2 \left(-\frac{1}{x_t^2}\right)\right] dt + \frac{1}{x_t}\sigma x_t dz = \left[\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right] dt + \sigma dz$$

- Luego y_t sigue un MBA de parámetros μ - $1/2\sigma^2$ y σ.

- Aplicando los resultados del MBA se tiene que:

$$\Delta y_t = \Delta\left(\ln x_t\right) \sim N(\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t, \sigma^2 \Delta t \right)$$

- Si suponemos $ln\ x_0$ conocido, entonces:

$$y_T = \ln x_T \sim N(\ln x_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T)$$

- Como $y_t = ln\ x_t$, entonces $x_t = e^{y_t}$

$\boxed{\text{Se dice que } \boldsymbol{x_t} \text{ sigue una } \textbf{distribución lognormal}}$

- Calculemos el valor esperado y la varianza:

- Sabemos que si y_t sigue una distribución normal, entonces:

$$E(e^{y_t}) = e^{E(y_t)+\frac{1}{2}Var(y_t)}$$

- Luego:

$$\boxed{E(x_t) = x_0 e^{\mu t}}$$

$$\boxed{Var(x_t) = x_0^2 e^{2\mu t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)}$$

Intervalos de confianza del MBG

- Sabemos que $\ln x_T \sim N(\ln x_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T)$

- Entonces el intervalo de confianza al 95% viene dado por:

$$\left(\ln x_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T - 2\sigma\sqrt{T}, \ln x_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + 2\sigma\sqrt{T}\right)$$

- Por tanto, como:

$$\ln x_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T - 2\sigma\sqrt{T} \leq \ln x_t \leq \ln x_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + 2\sigma\sqrt{T}$$

se concluye que:

$$\boxed{x_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T - 2\sigma\sqrt{T}} \leq x_T \leq x_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + 2\sigma\sqrt{T}}}$$