



UNIVERSIDAD DE VALENCIA
Máster en Física Avanzada 2009-2010
Facultad de Física

La aplicación logística: un laboratorio del caos

Tesis de Máster

José María Castelo Ares

Director: Prof. José Ángel Oteo
Departamento de Física Teórica

Valencia, 26 de mayo de 2010

“Dijo Tennyson que si pudiéramos comprender una sola flor sabríamos quienes somos y comprender el mundo. Tal vez quiso decir que no hay hecho, por humilde que sea, que no implique la historia universal y su infinita concatenación de efectos y causas. Tal vez quiso decir que el mundo visible se da entero en cada representación, de igual manera que la voluntad, según Schopenhauer, se da entera en cada sujeto. Los cabalistas entendieron que el hombre es un microcosmo, un simbólico espejo del universo; todo, según Tennyson, lo sería. Todo, hasta el intolerable Zahir.”

Jorge Luis Borges - El Zahir



Quiero agradecer a mi tutor J. A. Oteo su entusiasmo y su confianza en mí al encomendarme labor tras labor que ha cristalizado finalmente en un programa del que estamos muy satisfechos.

También quiero dar las gracias al profesor J. Ros por su lectura de esta memoria y sugerencias.

Más agradecimientos a Alberto por su aportación al diseñar el grafiti-logo del programa.

Gracias a Laura por ayudarme a probar la versión linux de *LogMap*.

Finalmente agradecimientos varios a toda la gente que nos echó una mano en diversos foros de programación en internet.

Índice general

1. Introducción	3
1.1. ¿Qué es un sistema iterado?	3
1.2. La aplicación logística	4
1.2.1. Definición	4
1.2.2. Aplicaciones prácticas	4
1.2.3. ¿Por qué es interesante?	5
1.2.4. Herramientas para el estudio de su dinámica	5
2. El caos a través de la aplicación logística	8
2.1. Diagrama de bifurcaciones	8
2.2. Descripción de la aplicación logística	9
2.2.1. Puntos fijos	10
2.2.2. Duplicación de periodo	11
2.2.3. Universalidad	13
2.2.4. Ventanas de regularidad	14
2.2.5. Bandas de caos	14
2.2.6. Intermitencia	16
2.3. Sensibilidad a las condiciones iniciales	17
2.4. Exponente de Lyapunov	18
2.5. Otras herramientas	20
2.5.1. Espectro de potencia	20
2.5.2. Perfil temporal	21
2.5.3. Autocorrelación	21
2.5.4. Curvas de Harter	21
2.5.5. Retraso temporal	22
3. Manual de <i>LogMap</i>	23
3.1. Introducción	23
3.2. Interactuando con las gráficas	23
3.3. Cálculos	24
3.3.1. Autocorrelación	24

3.3.2.	Bifurcaciones	24
3.3.3.	Diagramas 'cobweb'	25
3.3.4.	Curvas de Harter	25
3.3.5.	Histograma: densidad invariante	25
3.3.6.	Espectro de potencia	26
3.3.7.	Exponente de Lyapunov	26
3.3.8.	Perfil temporal	26
3.3.9.	Retraso temporal	27
3.3.10.	Trayectorias	27
3.4.	Gráficas múltiples	28

Capítulo 1

Introducción

1.1. ¿Qué es un sistema iterado?

Este trabajo trata de una clase de sistemas dinámicos en los que el tiempo es una variable discreta. Estos sistemas se conocen con los nombres de ecuaciones en diferencias finitas, relaciones de recurrencia o aplicaciones iteradas.

Los sistemas dinámicos discretos evolucionan en el tiempo por el proceso de iteración, en el que el siguiente estado del sistema viene determinado por su estado actual. En general esto se expresa como $x_{n+1} = f(x_n)$. El procedimiento típico de un sistema iterado es muy sencillo aunque su dinámica puede ser muy complicada. En el caso que nos ocupa, primero se escoge un valor inicial x_0 de la variable a iterar. Después se calcula el valor de la función en ese punto $f(x_0)$, que determina un nuevo punto $x_1 = f(x_0)$. Finalmente se usa el valor obtenido como input para empezar de nuevo el algoritmo. Repitiendo el algoritmo n veces se genera una trayectoria $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ donde $x_n = f^n(x_0) = f\left(f\left(\dots f(x_0)\dots\right)\right)$ con $n = 1, 2, 3, \dots$

Las aplicaciones iteradas surgen de varios modos [1]:

1. *Herramientas para analizar ecuaciones diferenciales.* Por ejemplo, los mapas de Poincaré [6] permiten probar la existencia de una solución periódica para el péndulo forzado y analizar la estabilidad de soluciones periódicas en general. El mapa de Lorenz proporciona fuerte evidencia de que el atractor de Lorenz es realmente extraño (en sentido matemático) y no es simplemente un ciclo límite de periodo largo.
2. *Modelos de fenómenos naturales.* En algunos contextos científicos es natural considerar el tiempo como discreto. Es el caso de la electrónica digital, en partes de la teoría económica y financiera, en sistemas

mecánicos forzados a impulsos y en el estudio de ciertas poblaciones de insectos en las que generaciones sucesivas no se superponen.

3. *Ejemplos simples de caos.* Las aplicaciones iteradas merecen un estudio por derecho propio, como laboratorios matemáticos del caos. De hecho son capaces de comportamientos mucho más complicados que las ecuaciones diferenciales porque los puntos x_n saltan en sus trayectorias en vez de fluir continuamente.

Las aplicaciones iteradas son fácil y rápidamente simuladas en ordenadores, en los que el tiempo es inherentemente discreto. Tales experimentos con ordenadores han revelado un número de patrones inesperados y bellos, que a su vez han estimulado nuevos desarrollos teóricos. Sorprendentemente, las aplicaciones iteradas han generado una cantidad de predicciones con éxito sobre las rutas al caos en semiconductores, fluidos convectivos, células cardíacas, láseres y oscilaciones químicas [1].

1.2. La aplicación logística

1.2.1. Definición

El presente estudio se centra en el caso de la aplicación logística. Ésta viene dada por la función unidimensional dependiente de un solo parámetro r

$$f(x) = rx(1 - x)$$

donde $x \in [0, 1]$ y $r \in [0, 4]$, de modo que al ser iterada a partir de un valor inicial x_0 se va generando una órbita o trayectoria $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ según el proceso

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

1.2.2. Aplicaciones prácticas

La aplicación fue introducida por primera vez por Pierre F. Verhulst en 1845. Fue popularizada en un artículo de 1976 del físico Robert May, como análoga en tiempo discreto a la ecuación diferencial logística para el crecimiento de una población. En su artículo, May enfatizó que incluso aplicaciones no lineales simples pueden presentar dinámicas muy complejas [1, 2, 3].

Una de sus aplicaciones, como ya se ha mencionado, es la de modelizar el crecimiento de una población en una área cerrada. La densidad de población x_{n+1} en la generación $n + 1$ es proporcional a la densidad en la generación

anterior x_n si $x_n \ll 1$ y por tanto la población crece. En cambio si $x_n \sim 1$, el término $(1 - x_n) \ll 1$ y la población disminuye. El efecto conjunto de ambos factores junto con el valor del parámetro son los que determinan la complejidad de la evolución de la población. El parámetro r representa la fertilidad y demás influencias externas.

Otro ejemplo es el de una cuenta bancaria con una tasa autolimitada de interés (Peitgen y Richter 1984). Considérese un depósito z_0 que crece con una tasa de interés ε como $z_{n+1} = (1 + \varepsilon)z_n = (1 + \varepsilon)^{n+1}z_0$. Para prohibir un enriquecimiento ilimitado, algún político podría sugerir que la tasa de interés debería ser reducida proporcionalmente a z_n , o sea $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 \left(1 - \frac{z_n}{z_{max}}\right)$. Entonces la cuenta evolucionaría conforme a $z_{n+1} = \left(1 + \varepsilon_0 \left(1 - \frac{z_n}{z_{max}}\right)\right) z_n$ que se convierte en la aplicación logística para $x_n = \frac{\varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0} \frac{z_n}{z_{max}}$ y $r = 1 + \varepsilon_0$ [3].

También ha sido usada como generador de números pseudo-aleatorios. Para este fin S. C. Phatak y S. Suresh Rao [4] han realizado ciertos tests estadísticos sobre las series de números obtenidas de la aplicación logística. Han encontrado que la aplicación los pasa satisfactoriamente y por tanto posee muchas de las propiedades requeridas por un generador de números pseudo-aleatorios.

1.2.3. ¿Por qué es interesante?

La aplicación logística es interesante porque reúne, en un solo sistema unidimensional y dependiente sólo de un parámetro, un abanico de comportamientos diversos para las trayectorias x_n cuando se varía el valor de r y/o x_0 . Además estos comportamientos se encuentran en muchos otros sistemas discretos y continuos. Se dice que sus características dinámicas son universales en ese sentido. Ejemplos de estos rasgos son la sensibilidad a las condiciones iniciales, la ruta al caos por duplicación de periodo o el fenómeno de la intermitencia, de los que hablaremos en el capítulo 2.

1.2.4. Herramientas para el estudio de su dinámica

La aplicación logística presenta una dinámica muy rica. Dependiendo del valor del parámetro r se puede tener trayectorias que tienden a un punto fijo, o que son periódicas o bien caóticas. Un modo de visualizar estos comportamientos consiste en representar gráficamente la trayectoria, como los valores que va tomando sucesivamente el sistema en función del número de iteración (tiempo). Ésta es una manera elemental de analizar el sistema. Existen otras herramientas más cuantitativas.

El autor ha desarrollado bajo la supervisión de su tutor un programa que compendia algunas de estas herramientas y que pretende ser un laboratorio para el análisis de la dinámica caótica. Ha sido denominado *LogMap* [7]. Sus características pueden consultarse en el capítulo 3.

Se ha escrito en el lenguaje de programación C++ [8]. Usa las librerías gráficas OpenGL [9] y las wxWidgets [10] para gestión de ventanas. Para su elaboración se ha empleado el entorno integrado de desarrollo wxDevC++ [11] que hace muy sencilla la creación de aplicaciones en un entorno de ventanas. Se puede ver el aspecto que presenta el programa en la figura 1.1.

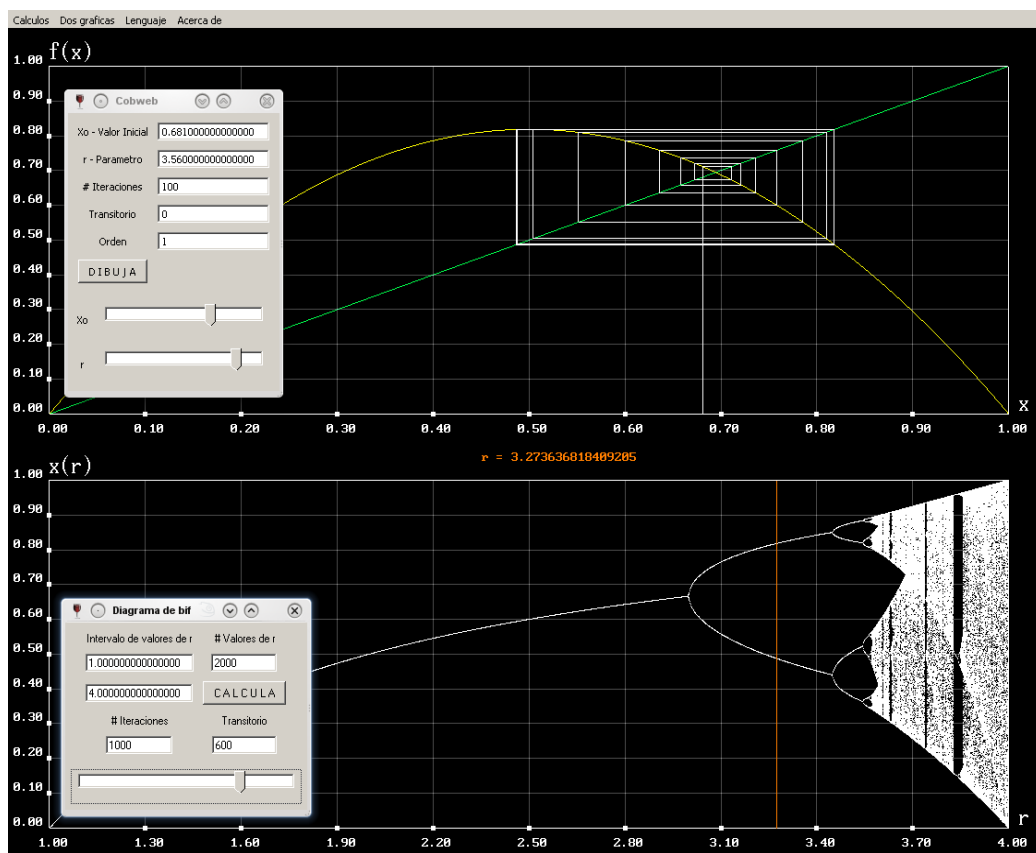


Figura 1.1: *LogMap* en su opción de doble gráfica.

Los cálculos realizados por *LogMap* tienen una precisión de aproximadamente 16 cifras decimales. Cada número ocupa un total de 64 bits de los que 1 bit indica su signo, 11 bits su exponente y 52 bits la mantisa [12]. Para un estudio del efecto que tiene una precisión finita de cálculo en el caso de la aplicación logística se puede consultar [13].

Entre las varias herramientas disponibles para el estudio de la dinámica de un sistema iterado se encuentran las detalladas en el capítulo 2. Ahí se explican algunas de estas herramientas y se dan ejemplos prácticos a llevar a cabo con *LogMap* para comprobar lo explicado. En resumen éstas son:

1. Autocorrelación.
2. Diagrama de bifurcaciones.
3. Diagrama 'cobweb'.
4. Curvas de Harter.
5. Histograma: densidad invariante.
6. Espectro de potencias.
7. Exponente de Lyapunov.
8. Perfil temporal.
9. Retraso temporal.
10. Representación gráfica de la trayectoria.

Capítulo 2

El caos a través de la aplicación logística

2.1. Diagrama de bifurcaciones

El diagrama de bifurcaciones, dado en la figura 2.1, es el modo más popular y eficiente de dar una visión de conjunto de los diferentes comportamientos asintóticos del sistema según el valor de r .

Para un valor de r fijo en abscisas, el diagrama de bifurcaciones nos dice los puntos x_n que son visitados en el intervalo unidad al iterar un gran número de veces y tras descartar un transitorio (una cantidad de iteraciones iniciales). Una característica destacada es que, excepto para $r = 4$, el sistema no accede al intervalo unidad completamente. Para una r dada el conjunto de puntos visitado por el sistema constituye su *atractor*. Para algunos valores de r se observan sólo unos pocos puntos en el diagrama de bifurcaciones. Corresponde a una órbita periódica y por tanto a un sistema que presenta comportamiento regular. De otro modo, el atractor está constituido por segmentos densamente poblados. Corresponde a sistemas caóticos.

El diagrama de bifurcaciones es un buen ejemplo de *autosemejanza*. Aumentando áreas pequeñas del diagrama obtenemos imágenes que semejan el diagrama completo. Repetir el proceso cualquier número de veces mantiene la mencionada característica. La autosemejanza requiere que el parecido ocurra a cualquier escala de magnificación.

Como tarea práctica con *LogMap* podemos visualizar el diagrama de bifurcaciones eligiendo la opción “Bifurcaciones” en el menú de cálculos. También podemos comprobar la correspondencia entre trayectorias regulares y caóticas y el diagrama de bifurcaciones. Para ello vamos a la opción “Trayectorias y bifurcaciones” del menú “Dos gráficas” y movemos la barra que

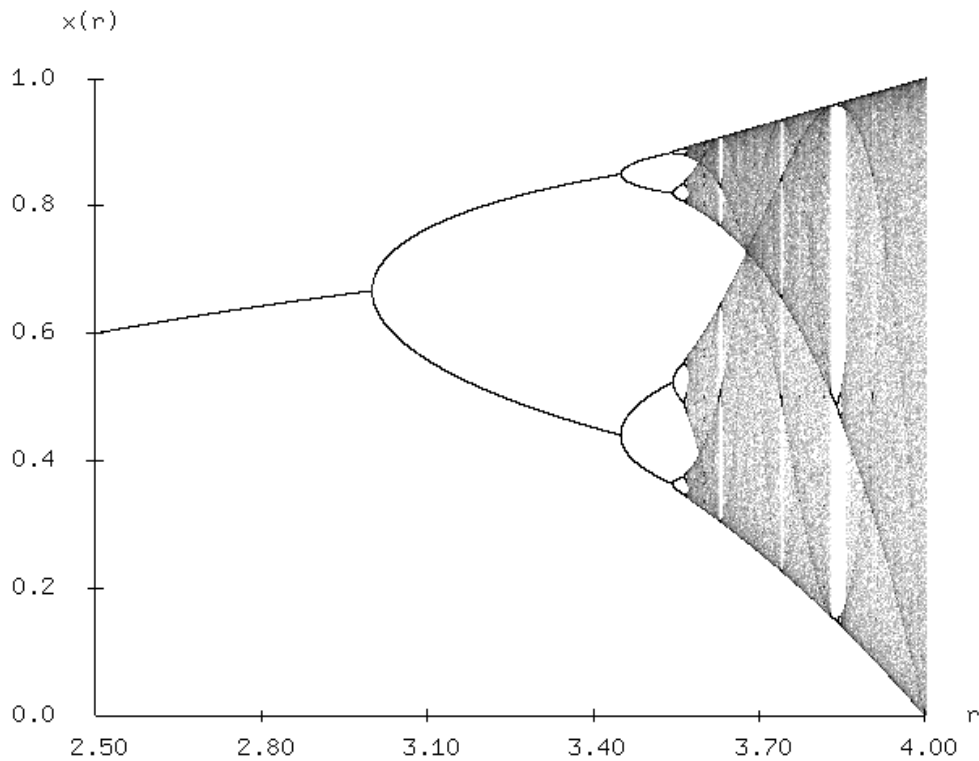


Figura 2.1: Diagrama de bifurcaciones de la logística.

controla el valor del parámetro r en la ventana de opciones del diagrama. Veremos trayectorias periódicas o caóticas en función del valor de r escogido. Si éste corresponde a una zona donde se observan ramas que se bifurcan, el comportamiento es regular. En cambio en zonas constituídas por segmentos densamente poblados es caótico.

2.2. Descripción de la aplicación logística

Vamos a describir más precisamente la naturaleza regular o caótica del sistema en función de su valor de r . El modo más simple consiste en incrementar el valor de r desde 0 hasta 4. Iremos dando sucesivos pasos que llevan del orden al caos.

2.2.1. Puntos fijos

El primer paso abarca el fenómeno de los puntos fijos estables. Empezamos nuestra discusión en el 'tronco' del diagrama de bifurcaciones, la parte comprendida entre $r = 1$ y $r = 3$. Esta parte presenta una dinámica más bien simple, una situación estable en la que el proceso de iteración conduce siempre a un mismo punto para un valor fijo de r . De hecho, empezando con cualquier valor inicial entre 0 y 1, se llega en todos los casos al mismo valor límite, como veremos en el apartado 2.3. A este punto fijo lo denotamos como x_r^* . ¿Qué observaríamos cuando iteramos tomando como condición inicial exactamente el valor del atractor $x_0 = x_r^*$? Tendríamos para todas las iteraciones $x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_r^*$. Es decir, x_r^* sería un *punto fijo* de f . Se puede obtener una expresión para los puntos fijos de f , basta resolver la ecuación $f(x) = x$.

$$rx(1-x) = x \quad \Rightarrow \quad \left\{ x_0^* = 0, x_r^* = \frac{r-1}{r} \right\}$$

Como todas las trayectorias que empiezan con un x_0 distinto a 0 ó 1 ($f(1) = 0$) se ven atraídas por x_r^* se dice que x_r^* es un *punto fijo estable*. En cambio $x_0^* = 0$ no lo es, pues por mucho que inicialmente nos acerquemos a su valor la trayectoria resulta atraída por x_r^* . Se dice que x_0^* es un *punto fijo inestable*. El modo de caracterizar la estabilidad de un punto fijo es mediante el análisis del valor de la derivada en ese punto [6]. En particular

$$x^* \text{ es estable si } |f'(x^*)| < 1$$

$$x^* \text{ es inestable si } |f'(x^*)| > 1$$

La derivada de la aplicación logística es $f'(x) = r(1-2x)$. Considerémosla en el punto fijo $x_0^* = 0$. Resulta ser $f'(0) = r$, por lo que

$$|f'(x_0^*)| < 1 \text{ para } 0 \leq r < 1$$

$$|f'(x_0^*)| = 1 \text{ para } r = 1$$

$$|f'(x_0^*)| > 1 \text{ para } r > 1$$

Vemos que tan pronto como el parámetro r pasa de $r < 1$ a $r > 1$ el punto fijo x_0^* pierde su estabilidad y se convierte en un punto fijo inestable.

Para discutir el otro punto fijo x_r^* calculamos la derivada $f'(x_r^*) = 2 - r$. Por tanto para este punto fijo obtenemos:

Parámetro	Derivada	Tipo de punto fijo
$0 < r < 1$	$2 > f'(x_r^*) > 1$	inestable
$1 < r < 2$	$1 > f'(x_r^*) > 0$	estable
$2 < r < 3$	$0 > f'(x_r^*) > -1$	estable
$3 < r \leq 4$	$-1 > f'(x_r^*) \geq -2$	inestable

Para visualizar estos comportamientos podemos hacer un ejercicio práctico con *LogMap*. Seleccionamos en el menú de cálculos la opción “Cobweb”. El *diagrama 'cobweb'* muestra de una forma gráfica el proceso de iterar. Se parte de un valor inicial x_0 y se calcula la primera iteración. Esto se representa mediante una recta vertical que parte del eje de abscisas y acaba en la gráfica de la función. Para la siguiente iteración se usa como valor de entrada el de salida de la anterior. Esto equivale a moverse horizontalmente desde el anterior punto en la gráfica de la función hasta la diagonal, para después moverse verticalmente de nuevo hasta la gráfica de la función. Repitiendo el proceso sucesivamente se va completando el camino que van definiendo las iteraciones.

Empezamos comprobando que el punto fijo $x_0^* = 0$ es estable para $r < 1$. Introducimos el valor $r = 0.9$ para el parámetro en la ventana de opciones y pulsamos el botón 'DIBUJA'. Moviendo la barra asociada al valor inicial x_0 vemos que, desde cualquier punto de que parta la trayectoria, siempre se ve atraída hacia x_0^* . Cambiemos ahora a $r = 1.5$ (bien introduciendo el valor a mano o mediante la barra asociada al parámetro). Descubrimos que la trayectoria ya no es atraída por x_0^* sino por el nuevo punto fijo $x_{r=1.5}^* = 0.333\dots$ para todo valor de x_0 . Incluso si hacemos x_0 todo lo cercano a x_0^* que queramos vemos que éste ya no es atractor sino inestable.

2.2.2. Duplicación de periodo

Como hemos visto, el punto fijo x_r^* deja de ser estable a partir de $r = 3$. Lo que ocurre para valores $r > 3$ puede comprobarse mirando el diagrama de bifurcaciones. Vemos que en ese punto sucede una duplicación de periodo. De hecho observamos que el fenómeno se repite para valores mayores del parámetro, cada vez más próximos entre sí. Al sobrepasar cada uno de esos valores, los antiguos puntos fijos dejan de ser estables y aparece un nuevo atractor formado por el doble de puntos que en la situación anterior. Estos valores del parámetro se denominan *bifurcaciones* y ocurren para determinadas $r < r_\infty$. A partir de r_∞ el sistema deja de comportarse regularmente. Se dice que se ha llegado al *filo del caos*.

Podemos hallar expresiones para los valores del ciclo de periodo 2 sin más que resolver la ecuación de orden cuatro $f^2(x) = f(f(x)) = x$. Es decir, los

puntos correspondientes al periodo 2 son puntos fijos de la función compuesta dos veces. Esto nos lleva a la siguiente expresión:

$$-r^3x^4 + 2r^3x^3 - (r^2 + r^3)x^2 + (r^2 - 1)x = 0$$

A pesar de que puede parecer un cálculo complicado, no lo es tanto si tenemos en cuenta que los dos puntos fijos de $f(x)$ también lo son de $f(f(x))$, ya que $f(f(x^*)) = f(x^*) = x^*$. Las otras dos soluciones son [5]:

$$x_{1r}^{**} = \frac{r + 1 + \sqrt{r^2 - 2r - 3}}{2r} \quad x_{2r}^{**} = \frac{r + 1 - \sqrt{r^2 - 2r - 3}}{2r}$$

Considerando sólo parámetros entre 0 y 4 vemos que estas soluciones están definidas sólo para $r \geq 3$. De hecho en $r = 3$ obtenemos $x_{1r}^{**} = x_{2r}^{**} = x_r^* = \frac{r-1}{r}$, es decir, las dos soluciones se bifurcan a partir del punto fijo x_r^* .

La condición para la estabilidad de los dos nuevos puntos fijos es

$$|f^{2'}(x_{1r}^{**})| \leq 1$$

que por la regla de la cadena se puede escribir [6]

$$|f'(x_{1r}^{**})f'(x_{2r}^{**})| \leq 1$$

Si seguimos incrementando el valor de r los antiguos puntos fijos perderán su estabilidad, encontraremos nuevos puntos fijos de f^4 y se entrará en un régimen de periodo 4. Y así sucesivamente se va pasando a trayectorias de periodo 8, 16, 32... formando una *cascada de bifurcaciones por duplicación del periodo*, que encuentra su límite en cierto valor $r_\infty = 3.5699456\dots$ denominado *punto de Feigenbaum* [5].

Nuestro trabajo práctico con *LogMap* esta vez va a ser más sencillo. Mostremos por pantalla el diagrama de bifurcaciones. Nos fijamos en la zona de $r < r_\infty$ y vemos la cascada de duplicación de periodo. Ahora nos acercamos a una de las bifurcaciones de menor tamaño que podamos distinguir y, manteniendo pulsado el botón derecho del ratón, la seleccionamos con el recuadro azul que aparece sobre la gráfica. Hemos ampliado la zona y podemos comprobar que la cascada de duplicación de periodo sigue en escalas menores. Aquí vemos la autosemejanza mencionada en la sección 2.1. Nótese que a cada ampliación la nueva gráfica tiende a rarificarse. Es necesario reajustar apropiadamente el número de iteraciones, así como hacer más largo el transitorio para evitar este efecto.

Cambemos ahora a la opción de mostrar dos gráficas por pantalla: las trayectorias y el diagrama de bifurcaciones. Manteniéndonos por debajo de r_∞ vamos aumentando r desde un valor pequeño y vemos cómo las trayectorias van duplicando su periodo.

2.2.3. Universalidad

Una característica propia de todos los mapas unimodales y que exponemos en el caso de la aplicación logística es el ritmo de convergencia de las distancias entre los puntos donde ocurren las bifurcaciones. Esta cantidad es universal en el sentido de que aparece en todos aquellos casos en los que la función a iterar tiene un máximo y es monótonamente creciente y decreciente a su izquierda y derecha respectivamente (el mapa es unimodal). Se trata de una nueva constante matemática, tan básica en relación a la duplicación de periodo como π lo es a la circunferencia. Es conocida por el nombre de *constante de Feigenbaum* y fue descubierta en Octubre de 1975. Su definición y valor se dan a continuación:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.6692016091 \dots$$

donde r_n es el valor del parámetro para el que ocurre la n -ésima bifurcación. Se ha medido usando *LogMap* los siete primeros valores de r_n , lo que permite obtener las cinco primeras aproximaciones al valor de δ . Se muestran en la siguiente tabla:

n	r_n	$d_n = r_n - r_{n-1}$	d_n/d_{n+1}
1	3.0000000		
2	3.4494892	$4.49489 \cdot 10^{-1}$	4.7514334
3	3.5440900	$9.46008 \cdot 10^{-2}$	4.6562143
4	3.5644071	$2.03171 \cdot 10^{-2}$	4.6682131
5	3.5687594	$4.35222 \cdot 10^{-3}$	4.6687450
6	3.5696916	$9.32204 \cdot 10^{-4}$	4.6691368
7	3.5698912	$1.99652 \cdot 10^{-4}$	

Durante algún tiempo su universalidad pareció ser un misterio matemático. Sin embargo, se pensó que este número podría ser verificable en experimentos físicos reales. Esto parecía algo exagerado porque no hay razón alguna por la que un experimento físico real debiera tener algo en común con el sencillo proceso de iteración de una función. No obstante, la idea resultó acertada. Al principio de los años 80 los físicos llevaron a cabo una gran variedad de experimentos extremadamente sofisticados en hidrodinámica, electrónica, física de láseres y acústica y encontraron bifurcaciones de duplicación de periodo, con el sorprendente resultado de que los números d_k/d_{k+1} asociados mostraban de hecho numéricamente un gran grado de acuerdo con la constante de Feigenbaum. Se puede consultar [5] pág. 574 para ver una tabla con valores experimentales de δ .

2.2.4. Ventanas de regularidad

Al estudiar el sistema para r creciente podría esperarse que, una vez el sistema ha entrado en régimen caótico, un incremento de r no va a conducir de nuevo hacia un comportamiento periódico estable. Esta apariencia resulta ser falsa. Incrementando constantemente el valor de r nos encontramos con una gran cantidad de ventanas de regularidad, desde extremadamente estrechas hasta bastante anchas, desde periodo 3 hasta periodo de cualquier número entero, de tal forma que aparecen nuevas cascadas de duplicación de periodo. Éste es de nuevo el mecanismo por el que el sistema evoluciona de regular a caótico. El orden en que los diferentes periodos aparecen como función de r en las ventanas de regularidad obedece una ordenación curiosa de números enteros dada por Sarkovskii [6].

2.2.5. Bandas de caos

Si nos fijamos en la zona de caos en el diagrama de bifurcaciones descubrimos una estructura de bandas subyacente, resultante de puntos no uniformemente distribuidos en cada línea vertical. Los puntos se condensan en ciertas líneas que bordean bandas que encapsulan las dinámicas caóticas. Para $r = 4$ sólo hay una banda que abarca el intervalo unidad completamente. Mientras r decrece, esta banda se estrecha lentamente. Cuando se llega al parámetro etiquetado m_1 se divide en dos partes y en m_2 ambas se subdividen a su vez formando un total de cuatro partes. Véase la figura 2.2.

Si ahora agrandamos el diagrama entre los parámetros r_∞ y m_1 encontramos más puntos en los que las bandas se dividen. De hecho hay una secuencia de valores del parámetro infinita y decreciente $m_1, m_2, m_3 \dots$ en los cuales se observa la división en 2, 4, 8... (en general 2^k) bandas. Esta secuencia conduce exactamente al límite $m_\infty = r_\infty$. De hecho los cocientes de las distancias consecutivas entre los puntos en los que las bandas se unen $d_k = m_{k+1} - m_k$ obedecen, conforme k se incrementa, la misma ley de convergencia que en el caso de la duplicación de periodo por bifurcación: tienden a la constante de Feigenbaum δ [5].

Como ejercicio de visualización de la duplicación de las bandas caóticas se propone analizar la *densidad invariante* del sistema para distintos valores del parámetro. La densidad invariante es una herramienta que permite analizar la distribución de las iteraciones en el intervalo de definición de la función que se itera. Zonas que son muy visitadas por la trayectoria presentan una alta densidad, mientras que en las menos visitadas la densidad es menor.

Abrimos *LogMap* y seleccionamos la opción “Densidad invariante y bifurcaciones” del menú “Dos gráficas”. Elegimos el intervalo del diagrama de

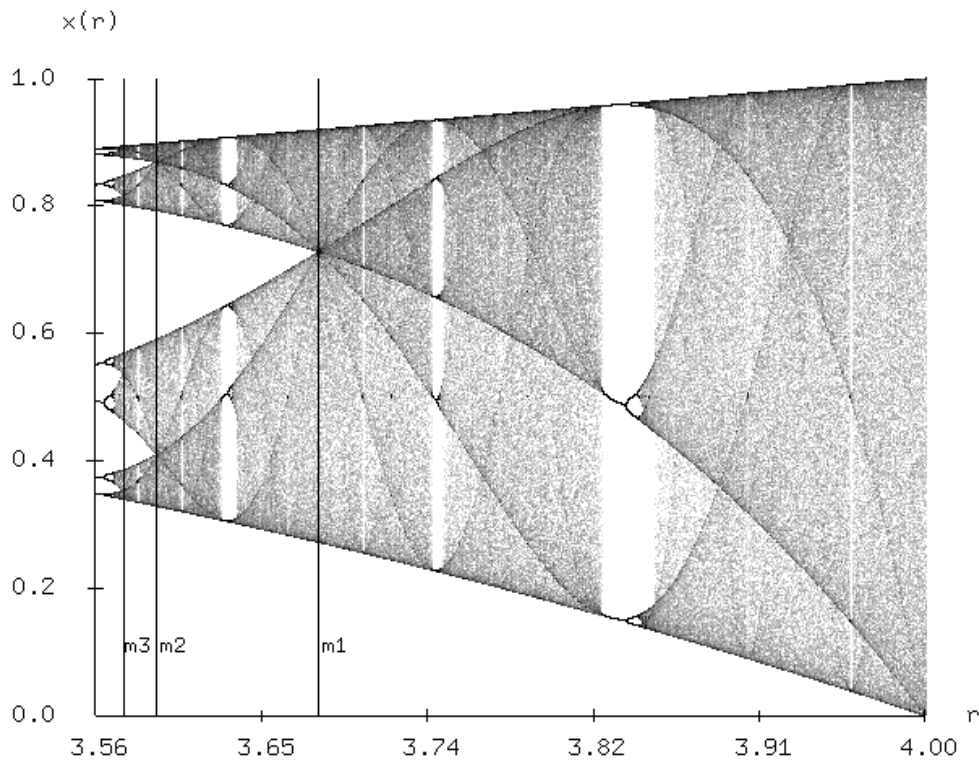


Figura 2.2: Las tres primeras divisiones de las bandas de caos.

bifurcaciones $r \in [3.56, 4]$. Nos situamos en $r = 4$ y vemos que la densidad invariante forma un continuo que abarca todo el intervalo unidad. Conforme disminuimos el valor del parámetro la banda se va estrechando. Al pasar por una ventana de regularidad (descritas en la sección 2.2.4) la banda se divide en varias bandas separadas. Obviemos este hecho y fijemos nuestra atención en las zonas caóticas. Cuando traspasamos el valor $m_1 = 3.6785$ vemos que la banda se ha dividido en dos. Cuando traspasamos el valor $m_2 = 3.5925$ la densidad invariante presenta cuatro zonas inconexas. Y así sucesivamente al ir disminuyendo r y dejando atrás $m_3, m_4 \dots$ comprobamos que se va duplicando el número de bandas. Se hará necesario ir ampliando cada vez el diagrama de bifurcaciones para poder acceder a valores m_k cada vez más cercanos a m_∞ .

2.2.6. Intermitencia

La ruta al caos por intermitencia fue descrita por primera vez por Pomeau y Manneville y es llamada en ocasiones el escenario de Pomeau-Manneville. La intermitencia ocurre cuando el comportamiento de un sistema parece ir y venir entre dos comportamientos cualitativamente diferentes, periódico y caótico, aun cuando los parámetros de control permanecen constantes y no hay presente ruido externo significativo. Estos cambios parecen ocurrir aleatoriamente incluso aunque el sistema esté descrito por ecuaciones deterministas. El comportamiento del sistema es aparentemente periódico para un valor del parámetro dado, con “erupciones” ocasionales de comportamiento caótico. La duración de estas fases caóticas varía con el valor del parámetro, ocurriendo una transición continua desde comportamiento completamente caótico hasta completamente regular. Las fases de regularidad se denominan *fases laminares*.

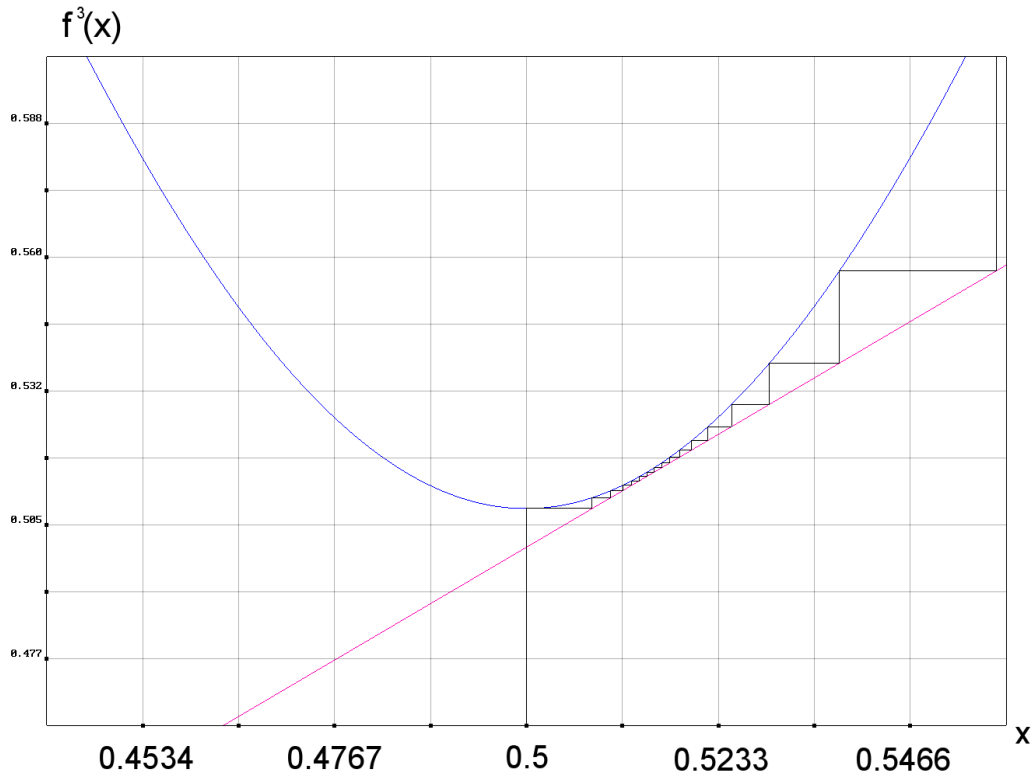


Figura 2.3: Visión ampliada de la región entre la gráfica de la función compuesta tres veces y la bisectriz cerca de $x = 0.5$ para $r = 3.8280$.

El cambio a un comportamiento caótico vía intermitencia puede ser contrastado con la ruta al caos por duplicación de periodo. En este último escenario, el comportamiento a largo plazo del sistema es bien completamente periódico o completamente caótico, dependiendo del valor del parámetro. En el caso de la intermitencia aparentemente cambia de uno a otro. Decimos “aparentemente” porque en realidad se trata de un comportamiento aperiódico de por sí. Lo que necesita de una explicación es porqué parte del comportamiento es aparentemente periódico.

Se obtiene una visión más clara de la aparente periodicidad examinando el comportamiento de trayectorias en el diagrama ‘cobweb’, como en la figura 2.3. La técnica gráfica de iteración muestra que una trayectoria emplea una cantidad significativa de tiempo (muchas iteraciones sucesivas) donde la aplicación es casi tangente a la bisectriz. Eventualmente, sin embargo, la trayectoria es repelida de esta región y se aleja a otra zona.

Cuanto más nos acercamos a la situación de tangencia, la trayectoria queda más tiempo retenida. Ésta es una evidencia cualitativa de que transcurre más tiempo en comportamiento periódico cuanto más se acerca el parámetro al valor crítico para el que el hueco entre parábola y bisectriz desaparece y el comportamiento deviene exactamente periódico. Como la función (o su iterada apropiada) pasa a ser tangente a la diagonal para este valor crítico del parámetro, el comienzo de la intermitencia se denomina *bifurcación tangente*.

Para visualizar el tipo de trayectorias que se observa cuando ocurre el fenómeno de la intermitencia podemos realizar un sencillo ejercicio con *Log-Map*. Seleccionamos dos gráficas por pantalla: “Trayectorias y bifurcaciones”. Limitamos el diagrama de bifurcaciones al intervalo $r \in [3.8224, 3.8386]$ que detalla la transición entre caos y regularidad al inicio de la ventana de regularidad de periodo 3. Escogiendo un valor de $r \sim 3.8280$ y representando un número de iteraciones alrededor de 1000, veremos que la trayectoria esta compuesta por fases laminares en las que domina la regularidad y fases caóticas. Conforme nos movemos hacia valores menores de r las fases laminares se van haciendo menos frecuentes y más cortas, mientras que para valores mayores se hacen más numerosas y largas, hasta que por fin se entra en la ventana de periodo 3.

2.3. Sensibilidad a las condiciones iniciales

Una característica esencial de los sistemas caóticos es la extrema sensibilidad a las condiciones iniciales que exhiben. Dados dos puntos iniciales muy próximos el uno del otro, sus respectivas trayectorias divergen tan sólo tras unas pocas iteraciones. Se denomina *fenómeno de sensibilidad a las condi-*

ciones iniciales y se refiere al hecho de que cambios muy pequeños en las condiciones iniciales de sistemas caóticos son amplificados enormemente con el orden de la iteración.

Este fenómeno puede visualizarse usando *LogMap*. Primero consideraremos un caso que no presenta sensibilidad a las condiciones iniciales, por ejemplo $r = 3.5$. Para ciertos rangos de valores del parámetro r todas las trayectorias acaban convergiendo más o menos rápidamente a uno o un conjunto de valores, *independientemente de las condiciones iniciales elegidas*. El conjunto de puntos a los que converge la trayectoria se denomina *atractor*. Éste varía según el valor de r .

Abramos *LogMap* y seleccionemos la opción “Trayectorias” en el menú de cálculos. En la ventana que emerge introducimos los siguientes valores: cualesquiera dos condiciones iniciales entre 0 y 1 (sin incluir los extremos), parámetro $r = 2$ y número de iteraciones igual a 100. Nos aseguramos de que el intervalo de iteraciones que se dibujan es $[0, 100]$ escogiendo un transitorio nulo y un número de iteraciones igual a 100. Si lo deseamos marcamos el botón 'LINEAS' para mejor visualización. Una vez pulsado el botón 'ITERA' vemos que aparecen las trayectorias en la gráfica. Tras varias iteraciones iniciales, que constituyen el denominado *transitorio*, éstas convergen al valor $x^* = 0.5$. Para ambos valores de x_0 vemos que ocurre lo mismo: $x^* = 0.5$ es el atractor para el valor de r introducido, independientemente de x_0 .

Probemos ahora con otro valor de r . Por ejemplo $r = 3.5$. En este caso el atractor es una órbita de periodo cuatro. Y las trayectorias siguen convergiendo a los mismos cuatro valores para todo $x_0 \in]0, 1[$.

Ahora consideraremos un caso que presenta sensibilidad a las condiciones iniciales. Tomemos $r = 4$. Si escogemos una de las condiciones iniciales $x_0 = 0.6$ y la otra $x_0 = 0.6001$ veremos que las dos trayectorias sólo tienen en común aproximadamente las siete primeras iteraciones. En muy pocas iteraciones ambas trayectorias han divergido completamente, a pesar de que ambos valores de x_0 son muy próximos. Éste es el fenómeno de sensibilidad a las condiciones iniciales. Como vemos sólo ocurre para ciertos valores de r . En la figura 2.4 se puede ver las 25 primeras iteraciones del ejemplo que hemos estudiado.

2.4. Exponente de Lyapunov

Como se puede ver fácilmente, la diferencia máxima entre dos trayectorias en una iteración dada es la unidad, pues las trayectorias están confinadas al segmento $[0, 1]$. Sin embargo, el ritmo al que dos trayectorias inicialmente cercanas divergen es una información importante que viene dada por el de-

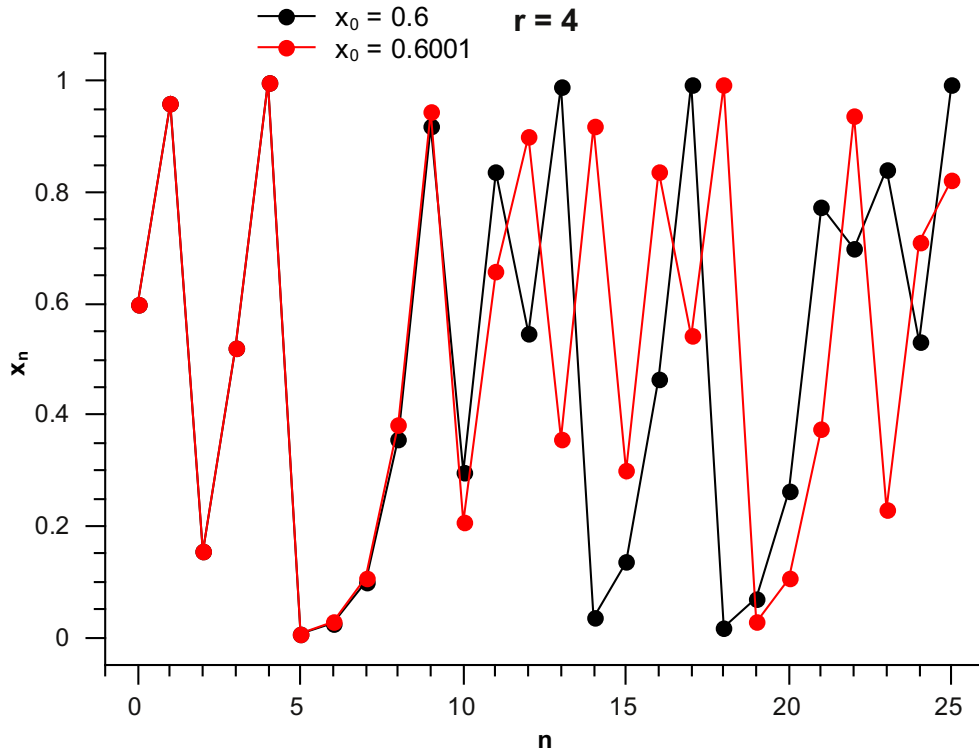


Figura 2.4: Sensibilidad a las condiciones iniciales.

nominado *exponente de Lyapunov*. Para sistemas no caóticos dos trayectorias inicialmente cercanas divergen, en promedio, linealmente con el número de iteración. Para un sistema caótico las trayectorias divergen exponencialmente, en promedio. Es decir, como $e^{\lambda N}$. El signo de λ determina el carácter caótico ($\lambda > 0$) o regular ($\lambda < 0$).

Sean dos condiciones iniciales arbitrariamente próximas x_0 y $x_0 + \varepsilon$. Tras iterar N veces su separación ha variado exponencialmente

$$|f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)| = \varepsilon e^{N\lambda(x_0)}$$

que en el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ y $N \rightarrow \infty$ conduce a la expresión formal correcta de $\lambda(x_0)$

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \log \left| \frac{f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)}{\varepsilon} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left| \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \right|$$

La derivada de la función compuesta se puede escribir como

$$\frac{d}{dx}f^2(x_0) = \frac{d}{dx}f(f(x_0)) = f'(f(x_0))f'(x_0) = f'(x_1)f'(x_0)$$

y el exponente de Lyapunov obtiene su forma más útil

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left| \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log |f'(x_i)|$$

La derivada de la aplicación logística es $f'(x) = r(1 - 2x)$ por lo que su exponente de Lyapunov tiene la forma

$$\lambda(x_0) = \log(r) + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log |1 - 2x_i|$$

Podemos usar *LogMap* para observar la correspondencia entre el tipo de régimen dinámico y el signo del exponente de Lyapunov. Seleccionamos dos gráficas por pantalla: "Lyapunov y bifurcaciones". Nos aseguramos de que estamos representado el intervalo $r \in [1, 4]$. Por comparación entre ambas gráficas vemos fácilmente que las zonas de periodicidad en el diagrama de bifurcaciones corresponden a valores negativos del exponente de Lyapunov, mientras que zonas de caos tienen asociadas valores positivos. También podemos ver que a los puntos donde ocurren las bifurcaciones corresponden exponentes nulos.

2.5. Otras herramientas

2.5.1. Espectro de potencia

Otra herramienta para el estudio de las propiedades de la aplicación logística es el *espectro de potencia*. Éste se obtiene a través de la transformada de Fourier discreta y da una idea de los modos en los que se puede resolver la trayectoria del sistema. Cada modo tiene su frecuencia propia asociada. Se representa en el eje de abscisas la frecuencia y en el eje de ordenadas la importancia que tiene cada frecuencia en el movimiento (la potencia). En el caso de un comportamiento regular, el espectro de potencia será un conjunto de líneas verticales centradas en las frecuencias propias del sistema. Mientras que en el caso de que sea caótico se tendrá una curva más o menos continua, lo cual indica que no hay un conjunto de frecuencias predominantes. Para ver ejemplos de espectros puede consultarse [6], o bien usando *LogMap* en la opción de dos gráficas: "Espectro y bifurcaciones", comprobar lo anteriormente mencionado para varios valores del parámetro.

2.5.2. Perfil temporal

También podemos calcular un *perfil temporal* del sistema regular. Consiste en una distribución de medidas de cuantas iteraciones emplea el sistema en llegar al atractor para cada condición inicial. Una vez se examina un perfil temporal uno se da cuenta de que no todas las condiciones iniciales resultan en trayectorias que tarden el mismo tiempo en llegar al atractor. Las que coincidan con puntos del atractor van a tardar muchas menos iteraciones en llegar al mismo que el resto de condiciones iniciales. Se pueden ver ejemplos de perfiles temporales en [5]. Un ejercicio ilustrativo que se puede llevar a cabo con *LogMap* consiste en representar el perfil temporal junto con el diagrama 'cobweb'. Al ir variando x_0 para distintos valores de r es posible entender porqué unas trayectorias tardan más que otras en llegar al atractor.

2.5.3. Autocorrelación

La correlación es una herramienta matemática usada para el análisis de series temporales. Da idea de la relación mutua entre dos o mas señales. La *autocorrelación* es la correlación de una señal consigo misma. Su expresión para el caso de un sistema discreto es

$$C(i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(N-i)\sigma} \sum_{j=0}^{N-i} (x_j - \bar{x})(x_{j+i} - \bar{x})$$

donde \bar{x} es el valor medio de la trayectoria y σ es la varianza.

Un valor alto de la autocorrelación para un número de iteración i dado indica que la trayectoria posee muchos valores similares separados temporalmente por ese número. En cambio una autocorrelación cercana a cero quiere decir que no existe tal relación entre puntos de la trayectoria. La autocorrelación de una trayectoria periódica es periódica. La de una caótica es cercana a cero.

2.5.4. Curvas de Harter

Estas curvas se ajustan al diagrama de bifurcaciones. La n -ésima curva de Harter se construye tomando como condición inicial $x_0 = \frac{1}{2}$ e iterando n veces para cada valor de r . $x_0 = \frac{1}{2}$ es un punto *superestable* ya que $f'(\frac{1}{2}) = 0$. Las curvas coinciden con los picos de la densidad invariante.

2.5.5. Retraso temporal

Ésta es una representación de los valores iterados en la que el eje vertical representa el valor de la iteración número n y el eje horizontal representa el valor de la iteración número $n - i$, donde i es el valor de retraso. El hecho de que aparezca una figura geométrica bien definida indica que la dinámica es determinista.

Capítulo 3

Manual de *LogMap*

3.1. Introducción

LogMap es un programa que ilustra aspectos de la dinámica caótica. Todas las simulaciones están basadas en la ya introducida aplicación logística, definida mediante las iteraciones $x_{n+1} = f(x_n)$, siendo $f(x) = rx(1 - x)$. El parámetro $r \in [0, 4]$ y $x \in [0, 1]$. Se presenta en dos idiomas: inglés y español.

3.2. Interactuando con las gráficas

La interacción con las gráficas en pantalla se realiza mediante el ratón.

- Manteniendo pulsada la tecla 'control', pulsando el botón izquierdo del ratón y arrastrando se consigue trasladar las gráficas.
- Manteniendo pulsada la tecla 'shift', pulsando el botón izquierdo del ratón y arrastrando se consigue aumentar o disminuir el tamaño de la gráfica (hacer zoom).
- Con el botón derecho del ratón y arrastrando se despliega una región rectangular que permite seleccionar una región de la gráfica y ampliarla (hacer zoom a una región concreta).
- Haciendo doble click sobre cualquiera de los dos ejes de la gráfica se restituye la misma en la dirección del eje seleccionado.
- Haciéndolo sobre la esquina inferior izquierda de la gráfica se restituye en ambos ejes.

3.3. Cálculos

En la barra de menús se encuentra el menú de cálculos. Este contiene diez opciones que se describen a continuación.

3.3.1. Autocorrelación

La autocorrelación es la correlación de una señal consigo misma. Da cuenta de la similaridad entre los valores de la trayectoria como función de la separación temporal entre ellos. Da una idea de la 'memoria' que la trayectoria tiene de sí misma.

Opciones:

- *r - Parámetro*: valor del parámetro de la función. Su rango es $[0, 4]$.
- *Número de iteraciones*: la cantidad de iteraciones a emplear en el cálculo.
- *Transitorio*: número de iteraciones iniciales que se descartan.

3.3.2. Bifurcaciones

El diagrama de bifurcaciones muestra los distintos comportamientos del sistema en función del valor de su parámetro r . Está construido iterando una cantidad determinada de veces (eje vertical) para un intervalo de valores del parámetro (eje horizontal). El número de iteraciones efectivo es particularmente importante cerca de los puntos de bifurcación. Se ha de tener en cuenta que si la resolución del cálculo del diagrama supera a la de la propia pantalla no se va a añadir mucho más detalle.

En la ventana asociada a este cálculo encontramos las siguientes opciones:

- *Intervalo de valores del parámetro*: intervalo de r para el cual se van a calcular las iteraciones.
- *Número de valores del parámetro* que se toman en el intervalo.
- *Número de iteraciones*: iteraciones que se calcularán para cada valor de r .
- *Transitorio*: número de iteraciones que se descartarán contando desde la primera iteración.
- *Barra de desplazamiento*: mueve un cursor sobre la gráfica para seleccionar un valor concreto del parámetro.

3.3.3. Diagramas 'cobweb'

Representan gráficamente el proceso de iteración.

Sus opciones son:

- x_0 - *Valor inicial*: valor sobre el cual se empieza a iterar. Su rango es $[0, 1]$.
- r - *Parámetro*: valor del parámetro de la función. Su rango es $[0, 4]$.
- *Número de iteraciones*: la cantidad de iteraciones a calcular.
- *Transitorio*: número de iteraciones iniciales que se descartan.
- *Orden*: el orden de la función compuesta que se representa.
- *Barras de desplazamiento asociadas a x_0 y r* : varían estas magnitudes de manera continua.

3.3.4. Curvas de Harter

Estas curvas teóricas representan iteraciones de $x_0 = \frac{1}{2}$ en función de r . Es posible dibujar una sola curva o bien una cantidad de curvas seleccionando el botón de 'varias' y eligiendo el intervalo de número de curva desde los controles de la ventana asociada a este cálculo.

3.3.5. Histograma: densidad invariante

Determina el número de veces que se visita un pequeño intervalo del dominio de definición de la función. El histograma se construye dividiendo el intervalo $x \in [0, 1]$ en celdas del mismo tamaño y contando cuántas veces son visitadas en el proceso de iteración. En el caso de trayectorias periódicas es simplemente un conjunto de barras verticales coincidentes con el atractor del sistema. Para trayectorias caóticas el histograma presenta un perfil más disperso.

Se tienen tres opciones para este cálculo:

- El valor del *parámetro*.
- *Número de intervalos*: cantidad de intervalos en la partición del intervalo de definición de la función (resolución de cálculo).
- *Número de iteraciones*: cantidad de iteraciones de la función para un valor del parámetro dado.

3.3.6. Espectro de potencia

Calcula y representa el espectro de potencia de Fourier de una trayectoria para un valor del parámetro r fijo. Es recomendable que se escoja un transitorio suficientemente grande, de modo que el espectro refleje las propiedades del atractor. Se representa el eje vertical en escala logarítmica.

Opciones:

- *r - Parámetro*: valor del parámetro de la función. Su rango es $[0, 4]$.
- *Número de iteraciones*: este número ha de ser una potencia de 2. Se puede escoger el exponente de la potencia de 2 que determina la cantidad de iteraciones a calcular.
- *Transitorio*: número de iteraciones iniciales que se descartan.

3.3.7. Exponente de Lyapunov

Calcula el exponente de Lyapunov. Es una herramienta útil para determinar si el comportamiento de la función iterada es periódico o caótico. Cuando un exponente de Lyapunov es positivo el sistema es caótico para el valor del parámetro dado, mientras que si es negativo el sistema es regular. En la gráfica se representan los exponentes en función del valor del parámetro.

Las opciones en este caso son:

- *Intervalo de valores del parámetro*.
- *Número de valores del parámetro*.
- *Número de iteraciones* utilizadas para realizar el cálculo.

3.3.8. Perfil temporal

En el caso de que el sistema sea periódico, el número de iteraciones que se emplea en alcanzar el atractor depende del valor inicial escogido. Si se representa este número en función del valor inicial se construye un perfil temporal para un valor del parámetro fijo.

Para este cálculo las opciones son las siguientes:

- *r - Parámetro*: valor del parámetro de la función. Su rango es $[0, 4]$.
- *Número de iteraciones*: número máximo de iteraciones que se considerarán para realizar el perfil. El sistema debe converger antes de alcanzar este número. Si no lo hace puede ser debido a que el número de iteraciones es insuficiente o a que el sistema es caótico.

3.3.9. Retraso temporal

Esta es una representación de los valores iterados en la que el eje vertical representa el valor de la iteración número n y el eje horizontal representa el valor de la iteración número $n - i$, donde i es el valor de retraso.

Sus opciones son:

- *r - Parámetro*: valor del parámetro de la función. Su rango es $[0, 4]$.
- *Transitorio*: número de iteraciones iniciales que se descartan.
- *Número de iteraciones* que se usan en el cálculo.
- *Retraso*: número de iteraciones hacia atrás respecto de la n -ésima.

3.3.10. Trayectorias

Calcula y muestra un número de iteraciones de la aplicación logística. Se abre una ventana en la que se pueden modificar los distintos parámetros que intervienen en la iteración y la representación:

- *x_0 - Valor inicial*: valor sobre el cual se empieza a iterar. Su rango es $[0, 1]$.
- *x_0 - Valor inicial*: otra condición inicial, útil para visualizar el fenómeno de sensibilidad a las condiciones iniciales.
- *r - Parámetro*: valor del parámetro de la función. El comportamiento de la función iterada depende enormemente de este valor. Su rango es $[0, 4]$.
- *Transitorio*: número de iteraciones iniciales que se descartan.
- *Número de iteraciones*: la cantidad de iteraciones a calcular.
- *Graba en archivo*: existe la opción de guardar en un archivo ASCII los valores numéricos de la trayectoria. El archivo se localiza en el mismo directorio desde el que ha sido ejecutado el programa.
- Existe la opción de dibujar la gráfica con puntos separados o unidos con *líneas*.

3.4. Gráficas múltiples

Una opción interesante del programa consiste en la posibilidad de mostrar en pantalla dos gráficas simultáneas, permitiendo estudiar el sistema mediante dos cálculos distintos. Las opciones de cálculo y representación siguen siendo las mismas que en el caso de una gráfica por pantalla. Las posibles combinaciones de gráficas, accesibles desde el menú 'Dos gráficas', son las siguientes:

- Autocorrelación y bifurcaciones.
- Cobweb y bifurcaciones.
- Cobweb y perfil temporal.
- Cobweb y trayectorias.
- Curvas de Harter y bifurcaciones.
- Densidad invariante y bifurcaciones.
- Espectro y bifurcaciones.
- Lyapunov y bifurcaciones.
- Trayectorias y bifurcaciones.

Bibliografía

- [1] Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Perseus Books, 1994.
- [2] Wikipedia: Logistic map, http://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map
- [3] Heinz G. Schuster, *Deterministic Chaos: An Introduction*, Mir, 1998.
- [4] S. C. Phatak, S. Suresh Rao, *Logistic Map: A Possible Random Number Generator*, 1993, <http://arXiv.org/abs/cond-mat/9310004v1>
- [5] Peitgen, Jürgens, Saupe, *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science*, Second Edition, Springer, 2004.
- [6] Pierre Collet, Jean-Pierre Eckmann, *Iterated maps on the interval as dynamical systems*, Birkhäuser, 1980.
- [7] En la siguiente página se puede encontrar la versión más actualizada de *LogMap*: <http://www.uv.es/oteo/logmap>
- [8] <http://www.cplusplus.com>
- [9] <http://www.opengl.org>
- [10] <http://www.wxwidgets.org>
- [11] <http://wxdsgn.sourceforge.net>
- [12] Wikipedia: Double precision floating-point format, http://en.wikipedia.org/wiki/Double_precision
- [13] J. A. Oteo, J. Ros, *Double precision errors in the logistic map: Statistical study and dynamical interpretation*, Phys. Rev. E 76, 036214 (2007)