# PRÁCTICAS DE MATEMÁTICAS
# LICENCIATURA DE QUÍMICAS

Departamento de Análisis Matemático

Curso 2009/2010

# Práctica 1
# Álgebra lineal

**Ejercicio 1.1**
*Aplicando el método de reducción estudiar y resolver los sistemas:*

*a)*

$$\begin{array}{c} x+2y-z=1 \\ -3x+y-2z=2 \\ -x+5y-4z=-2 \end{array}$$

*b)*

$$\begin{array}{c} 2x+4y-z=0 \\ x-y+4z=0 \\ 11x+7y+17z=0 \end{array}.$$

**Ejercicio 1.2**
*Discutir por el método de reducción los siguientes sistemas, según los valores de los parámetros:*

*a)*

$$\begin{array}{c} ax+3y-z=5 \\ x-(a-1)y+3z=8 \\ (a+1)x+y-2z=-1 \\ x+y+z=6 \end{array}$$

*b)*

$$\begin{array}{c} x+y=1 \\ ay+z=0 \\ x+(a+1)y+az=a+1 \end{array}.$$

**Ejercicio 1.3**
*Aplicando el método de reducción discutir y resolver (cuando tenga solución única) el sistema:*

$$\begin{array}{c} ax+y+z=a \\ x+ay+z=a^2 \\ x+y+az=a^3 \end{array}.$$

**Ejercicio 1.4**
*Aplicando el método de reducción hallar los valores de $a, b$ que hacen compatible y determinado al sistema:*

$$\begin{array}{c} (a+1)x+2y=a \\ x-2y=2 \\ bx-4y=4 \end{array}.$$

**Ejercicio 1.5**
*Resolver por el método de reducción*

$$\begin{array}{c} x+y+t=0 \\ x+2y+z=2 \\ 2z+t=1 \\ z+t=-1 \end{array}.$$

**Ejercicio 1.6**

*Resolver por el método de reducción*

$$\begin{array}{l} x+2y+3z=1 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+y+2z=1 \end{array} \ .$$

**Ejercicio 1.7**

*Si $a, b, c$ son números reales distintos, discutir y resolver, aplicando el método de reducción, el sistema*

$$\begin{array}{l} x+ay+a^2z=a^3 \\ x+by+b^2z=b^3 \\ x+cy+c^2z=c^3 \end{array} \ .$$

**Ejercicio 1.8**

*En $\mathbb{R}^3$, comprobar si los sistemas siguientes están formados por vectores linealmente independientes, hallando su relación de dependencia, si la hay:*

*a)* $S_1 = \{(1,0,-2);(-1,1,3);(1,2,0)\}$

*b)* $S_2 = \{(1,-1,3);(0,-1,2)\}$.

*c)* $S_3 = \{(0,0,0);(1,1,1);(2,2,2)\}$.

**Ejercicio 1.9**

*Estudiar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales:*

*a)* $H_1 = \{(1,x,y) : \ x,y \in \mathbb{R}\}$

*b)* $H_2 = \{(0,x,y) : \ x,y \in \mathbb{R}\}$

*c)* $H_3 = \{(x,x,y) : \ x,y \in \mathbb{R}\}$

*d)* $H_4 = \{(x,y,z) : \ x+y+z=1\}$

*e)* $H_5 = \{(x,y,z) : \ x+y+z=0\}$.

**Ejercicio 1.10**

*Encontrar la dimensión y una base de los subespacios:*

*a)* $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y=0 \ , \ z=y-x\}$

*b)* $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x-2y+z=0\}$

*c)* $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x=y=2z\}$

*d)* $E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x+y-z=0 \ , \ x-y+z=0 \ , \ -x+y+z=0\}$

*e)* $E_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x+y-z=0 \ , \ x+y=0 \ , z=0\}$

**Ejercicio 1.11**

*Determinar los valores de $a, b$ para que el vector $u = (1,0,a,b)$ pertenezca al subespacio generado por los vectores $(1,4,-5,2)$ y $(1,2,3,-1)$.*

**Ejercicio 1.12**

*Hallar una base y la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por*

$$(1,-1,-1);(2,0,-3);(-1,-3,3).$$

**Ejercicio 1.13**

*Dado el subespacio $H = \{(0,x,y) : \ x,y \in \mathbb{R}\}$.*

*a)* *Demostrar que los vectores $(0,1,2);(0,1,-1);(0,1,-3)$ generan $H$.*

*b)* *+Forman dichos vectores una base de $H$?*

**Ejercicio 1.14**

*Si* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, *calcular* $A^2 - 7A + 7I$.

**Ejercicio 1.15**

*Sea* $A$ *una matriz cuadrada tal que* $A^2 = A$. *Si* $B = 2A - I$, *comprobar que* $B^{-1} = B$.

**Ejercicio 1.16**

*Si* $A$ *es una matriz cuadrada cualquiera, demostrar que las matrices* $A + A^t$ *y* $AA^t$ *son siempre simétricas, mientras que* $A - A^t$ *es antisimétrica.*

**Ejercicio 1.17**

*Calcular el rango de las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 1.18**

*Sin desarrollar los siguientes determinantes, comprobar que valen cero:*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}; \; \begin{vmatrix} x+y & x-y & -x+5y \\ x-z & y+z & 2x-3y-5z \\ 2x+z & 3x+2z & -5x-4z \end{vmatrix}.$$

**Ejercicio 1.19**

*Demostrar que*

$$\begin{vmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1 \\ x & 2x+1 & x+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)^6.$$

**Ejercicio 1.20**

*Usando determinantes volver a calcular los rangos de las matrices del problema 1.17.*

**Ejercicio 1.21**

*Si* $A$ *es una matriz cuadrada, obtener los posibles valores de su determinante en cada uno de los casos siguientes:*

*a)* $3A^2 - 2A = 0$

*b)* $AA^t = I$.

**Ejercicio 1.22**

*Estudiar según los valores del parámetro* $x$ *la invertibilidad de la matriz* $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$, *hallando la matriz inversa cuando exista.*

**Ejercicio 1.23**

*Calcular, si existen, las inversas de las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 1.24**
*Indicar cuales de las siguientes aplicaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ son lineales:*
- a) $f(x,y) = (2x, y)$
- b) $g(x,y) = (x^2, y)$
- c) $h(x,y) = (2x+y, x-y)$
- d) $p(x,y) = (1, x+y)$
- e) $q(x,y) = (y,x)$.

**Ejercicio 1.25**
*Dada la aplicación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$*

$$f(x,y,z) \ = \ (x+y+z, x+y-z).$$

- a) *Demostrar que es lineal.*
- b) *Hallar su matriz asociada.*
- c) *Calcular $f(1,2,3)$ y $f^{-1}(3,1)$.*

**Ejercicio 1.26**
*Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$
- a) *Hallar las ecuaciones de la aplicación lineal que $A$ define.*
- b) *Hallar su núcleo y rango.*
- c) *Clasificar la aplicación lineal.*

**Ejercicio 1.27**
*Dada la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que*

$$f(x,y) := (2x-y, x-2y)$$

- a) *Demostrar que define un isomorfismo (aplicación lineal y biyectiva).*
- b) *Hallar las ecuaciones del isomorfismo recíproco.*

**Ejercicio 1.28**
*Comprobar matricialmente lo hecho en el problema anterior.*

**Ejercicio 1.29**
*Dadas las aplicaciones*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & , & f(x,y,z) = (x+y-z, x+2y+3z) \\ g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4 & , & g(x,y)) = (x+y, x-y, x, y) \end{array} .$$

*Hallar las ecuaciones de la aplicación compuesta $g \circ f$.*

**Ejercicio 1.30**
*Comprobar matricialmente lo hecho en el problema anterior.*

**Ejercicio 1.31**
*Estudiar y resolver los sistemas del problema 1.1 aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius.*

**Ejercicio 1.32**
*Discutir los sistemas del problema 1.2 aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius.*

**Ejercicio 1.33**
*Resolver el problema 1.3 aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius.*

**Ejercicio 1.34**
*Resolver el problema 1.4 aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius.*

**Ejercicio 1.35**
*Resolver por la regla de Cramer el problema 1.5.*

**Ejercicio 1.36**
*+Existe alguna manera más rápida de resolver el sistema del problema anterior ?*

**Ejercicio 1.37**
*Resolver el problema 1.6 aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius.*

**Ejercicio 1.38**
*Resolver el problema 1.7 aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius.*

**Ejercicio 1.39**
*Dados los vectores* $\mathbf{u} = (1, -1, 1)$ ; $\mathbf{v} = (2, 0, 3)$ ; $\mathbf{w} = (-1, 1, 0)$, *calcular:*

*a) Un vector unitario en la dirección de* $\mathbf{u}$.
*b) El producto escalar de* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$.
*c) El coseno del ángulo que forman* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$.
*d) El ángulo que forman* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{w}$.
*e) El producto vectorial de* $\mathbf{v}$ *y* $\mathbf{w}$.

**Ejercicio 1.40**
*Hallar los valores y vectores propios de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 1.41**
*Idem. para*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 1.42**
*Hallar los valores de* $a, b, c, d$ *de tal modo que la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & d \\ 2 & b & -2 \\ 3 & c & 3 \end{pmatrix}$$

*admita como vectores propios a* $u = (1, 0, 1); v = (-1, 1, 0); w = (0, 1, -1)$.

**Ejercicio 1.43**
*+Son diagonalizables las matrices de los tres problemas anteriores?*

**Ejercicio 1.44**
*Estudiar la diagonalizabilidad de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*según los valores de* $a, b$.

**Ejercicio 1.45**
*Demostrar que la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*es diagonalizable y hallar la matriz diagonal equivalente, así como la matriz de paso.*

**Ejercicio 1.46**
*Idem. para*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 1.47**
*Comprobar los dos ejercicios anteriores con la matriz de paso.*

**Ejercicio 1.48**

*Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix}$ *se sabe que* $\lambda_1 = 1$ *es un valor propio de* $A$ *cuyo vector propio asociado es* $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ . *Se pide*

*a) Hallar* $a$, $b$ *y* $c$.
*b) Hallar todos los valores y vectores propios de* $A$.
*c) +Es diagonalizable* $A$*? Razonar la respuesta.*
*d) Calcular una matriz* $P$ *invertible tal que* $A = PDP^{-1}$ *siendo* $D$ *diagonal.*
*e) Calcular* $\det(A^{2003})$

**Ejercicio 1.49**
*Siendo* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, *calcular la potencia* $A^{10}$.

**Ejercicio 1.50**
*Hallar la potencia n-ésima de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

# Práctica 2
# Cálculo Diferencial

**Ejercicio 2.1**
*Describir geométricamente los conjuntos*

$$A := \{x \in \mathbb{R} \ : x = 5\}$$
$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x = 5\}$$
$$C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x = 5\}$$

**Ejercicio 2.2**
*Describir geométricamente el conjunto* $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y - 1 \leq 0 \ , \ y \geq x^2\}$.

**Ejercicio 2.3**
*Describir geométricamente el conjunto* $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y \geq 0 \ , \ x^2 + y^2 < 9\}$.

**Ejercicio 2.4**
*Describir geométricamente el conjunto* $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z > x^2 + y^2\}$.

**Ejercicio 2.5**
*Describir geométricamente el conjunto* $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 < z^2, x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$.

**Ejercicio 2.6**
*Describir geométricamente* $\rho = 4$ *y* $\theta = \frac{\pi}{4}$.

**Ejercicio 2.7**
*Describir geométricamente el conjunto* $A := \{(\rho,\theta) : \rho \leq 6\cos\theta\}$.

**Ejercicio 2.8**
*Describir geométricamente el conjunto* $A := \{(\rho,\theta) : \rho > 4\,\mathrm{sen}\,\theta\}$.

**Ejercicio 2.9**
*Describir geométricamente el conjunto* $A := \{(\rho,\theta,z) : 0 \leq \rho \leq 1 \ , \ \pi \leq \theta < 2\pi \ , \ 1 \leq z \leq 2\}$.

**Ejercicio 2.10**
*Describir geométricamente el conjunto* $A := \{(\rho,\theta,\varphi) : \rho \geq 1, \ \dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \ , \ \dfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi\}$.

**Ejercicio 2.11**
*Hallar el campo de existencia de la expresión* $f(x,y) := \sqrt{x+y}$

**Ejercicio 2.12**
*Hallar el campo de existencia de la expresión* $f(x,y) := \log(x^2 - y^2)$

**Ejercicio 2.13**
*Hallar el campo de existencia de la expresión* $f(x,y) := \sqrt{y\,\mathrm{sen}\,x}$

**Ejercicio 2.14**
*Hallar el campo de existencia de la expresión* $f(x,y) := \sqrt{5 - x^2 - 3y^2}$

**Ejercicio 2.15**
*Hallar el campo de existencia de la expresión* $f(x,y) := \sqrt{x^2 - 5x + 6 - y}$

**Ejercicio 2.16**
*Hallar las curvas de nivel y esbozar la gráfica de* $f(x,y) := x + y$

**Ejercicio 2.17**
*Hallar las curvas de nivel y esbozar la gráfica de* $f(x,y) := x^2 + 4y^2$

**Ejercicio 2.18**
*Hallar las curvas de nivel y esbozar la gráfica de* $f(x,y) := \sqrt{9 - 3x^2 - y^2}$

**Ejercicio 2.19**
*Hallar las curvas de nivel y esbozar la gráfica de* $f(x,y) := x^2 - y^2$

**Ejercicio 2.20**
*Hallar las curvas de nivel y esbozar la gráfica de* $f(x,y) := e^{-x}$

**Ejercicio 2.21**
*Usando la definición probar que*

1. *Si* $f(x) = 1$ *entonces* $f'(x) = 0$.
2. *Si* $f(x) = x$ *entonces* $f'(x) = 1$.
3. *Si* $f(x) = x^2$ *entonces* $f'(x) = 2x$.
4. *Si* $f : ]a,b[ \to I\!R$ *es constante, probar que* $f$ *es derivable en* $]a,b[$ *y que* $f'(x) = 0$ *para todo* $x \in ]a,b[$.

**Ejercicio 2.22**
*Probar que* $f(x) = |x|$ *no es derivable en* $x = 0$*, aunque notemos que es continua en* $x = 0$.

**Ejercicio 2.23**
*1. Sea* $f(x) = x^2$*, probar usando las reglas de derivación que* $f'(x) = 2x$*. En general, si* $f(x) = x^n$, $n \in I\!N$*, entonces* $f'(x) = nx^{n-1}$*. Véase el Ejercicio 2.26 para el caso más general.*
*2. Sabemos que* $(\sin x)' = \cos x$ *y que* $(\cos x)' = -\sin x$*. Probar que la derivada de* $\tan(x)$ *es* $1 + \tan^2(x)$ *(es decir* $\frac{1}{\cos^2(x)}$*).*

**Ejercicio 2.24**
*Calcular la derivada de:*

1. $f(x) = \sin(x^2)$.
2. $f(x) = (x + \tan(x))^5$.
3. $f(x) = x^3 \cos^3(x^3)$.

**Ejercicio 2.25**
*1. Sea* $f(x) = \ln x$*, sabemos que* $f'(x) = 1/x$*. Su inversa es la función* $g(x) = e^x$*, la cual es derivable. Aplicando la regla de la cadena, probar que* $g'(x) = e^x$.
*2. Sea ahora* $f(x) = \arcsin x$*, inversa de* $\sin(x)$ *cuando éste está definido en* $]-\pi/2, \pi/2[$*. Sabiendo que* $f$ *es derivable probar que* $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

**Ejercicio 2.26**

*Sea $\alpha \in I\!R$, y sea $f(x) = x^\alpha$ definida en $]0, +\infty[$. Probar que $f$ es derivable y que*

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

**Ejercicio 2.27**

*Hallar la derivada de las funciones:*

1. $f(x) = x^x$.
2. $f(x) = 2^x$.

**Ejercicio 2.28**

*Hallar las derivadas de las funciones:*

1. $f(x) = e^{2x^2}$.
2. $f(x) = \log(x + \log(x))$.
3. $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

**Ejercicio 2.29**

*Si una función $f(x)$ es derivable, con derivada $f'(x)$, y esta a su vez es derivable, se denota su derivada como $f''(x)$ y se denomina derivada segunda de $f$, en general se puede definir así la derivada $n-$ésima de $f$, que denotaremos $f^{n)}(x)$.*

*Calcular las derivadas primera, segunda y tercera de*

1. $f(x) = \ln(kx)$, *donde $k$ es una constante.*
2. $f(x) = \sin(kx)$.
3. $f(x) = (3x^2 - 4)e^x$. *(Úsese la fórmula de Leibnitz:*

$$(f(x)g(x))^{n)} = \sum_{k=0}^{n} \left( \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) f^{k)}(x) g^{n-k)}(x).)$$

4. $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-1)}$. *(Descomponer previamente como suma de fracciones)*
5. $f(x) = \sin(4x)\cos(2x)$. *(Expresar previamente como una suma)*

**Ejercicio 2.30**

*Dadas las funciones hiperbólicas*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \textit{seno hiperbólico},$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \textit{coseno hiperbólico}.$$

*Probar que*

1. $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
2. $(\sinh(x))' = \cosh(x), \ (\cosh(x))' = \sinh(x)$.
3. *Hallar las derivadas de sus funciones inversas,* $\operatorname{argsinh}(x)$ *y* $\operatorname{argcosh}(x)$.

**Ejercicio 2.31**

*Calcula las derivadas parciales de las siguientes funciones:*

*i)* $f(x, y) = e^{xy}$

*ii)* $f(x, y) = (x^2 + y^2)\log(x^2 + y^2)$

*iii)* $f(u, v, w) = \log(u^2 + vw - v^2)$

*iv)* $f(\rho, \theta) = \rho^3 cos\theta$

*v)*$f(x, y, z) = sen(x + ycosz)$.

**Ejercicio 2.32**
*Calcula el vector gradiente de las siguientes funciones en el punto que se indica:*

*i)* $f(x,y,z) = 2x \log y - z^2y^2$ *en* $(1,1,0)$.
*ii)* $f(x,y,z) = \dfrac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *en* $(1,-1,1)$.
*iii)* $f(x,y) = x^2 + \log\sqrt{xy}$ *en* $(2,1)$.
*iv)* $f(x,y) = \log\dfrac{1}{xy}$ *en* $(5,\sqrt{2})$.
*v)* $f(x,y) = \log(x^2+2y+1) + \operatorname{sen}(x+y)$ *en* $(0,0)$.

**Ejercicio 2.33**
*Sean* $f(u,v) = (u+v, u, v^2)$ *y* $g(x,y) = (x^2+1, y^2)$. *Calcular la matriz jacobiana de* $fog$ *en el punto* $(1,1)$.

**Ejercicio 2.34**
*La temperatura en un punto* $(x,y,z)$ *viene dada por una función* $T(x,y,z)$. *Una partícula viaja por la hélice* $\sigma(t) = (cost, sent, t)$ *y denotamos por* $f(t)$ *la temperatura de la partícula en el instante* $t$. *Calcular* $f'(\frac{\pi}{2})$ *sabiendo que* $\nabla T(0,1,\frac{\pi}{2}) = (2,1,3)$.

**Ejercicio 2.35**
*Calcular las derivadas parciales de* $h(x,y) = f(x \operatorname{sen} y, x, e^y)$ *en el punto* $(1,0)$ *sabiendo que* $\nabla f(x,y,z) = (2x+y, x+z, y)$.

**Ejercicio 2.36**
*Dada la función* $f(u,v) = g(u-v, u+v, 2u)$ *se pide calcular las derivadas parciales de* $f$ *en términos de las derivadas parciales de* $g$.

**Ejercicio 2.37**
*Suponemos* $f(\dfrac{y}{x}, \dfrac{g(x,y)}{x}) = 0$ *para cualquier valor de* $x$ *e* $y$. *Si* $D_2f(x,y) \neq 0$ *en todos los puntos, se pide probar que* $xD_1g(x,y) + yD_2g(x,y) = g(x,y)$.

**Ejercicio 2.38**
*Sabemos que* $F(x,y,z)$ *y* $g(x,y)$ *son dos funciones de clase* $C^1$ *que cumplen que* $F(x,y,g(x,y)) = 0$ *en todos los puntos* $(x,y)$ *del plano. Calcular el vector gradiente de* $g$ *en el punto* $(1,0)$ *suponiendo conocido que* $g(1,0) = 0$ *y* $\nabla F(1,0,0) = (-1,1,2)$.

**Ejercicio 2.39**
*Sean* $f(x,y) = (e^{x+y}, x-y, x^2)$ *y* $g(u,v,w) = (uw, sen(v+w))$. *Calcula la matriz jacobiana de la función* $g \circ f$ *en el punto* $(0,0)$.

**Ejercicio 2.40**
*Calcular* $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ *y* $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ *siendo* $u = x^2 - xy$, $x = s\cos t$, $y = t \operatorname{sen} s$.

**Ejercicio 2.41**
*Transformar la expresión* $x\dfrac{\partial z}{\partial y} - y\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *mediante un cambio a coordenadas polares.*

**Ejercicio 2.42**
*Si* $x = u - v$ , $y = u + 2v$, *siendo* $u := u(s,t)$ *y* $v := v(s,t)$, *expresar las derivadas parciales de* $u$ *y* $v$ *respecto de* $s$ *y* $t$ *en función de las de* $x$ *e* $y$ *respecto a las mismas variables.*

**Ejercicio 2.43**
*La temperatura de cada uno de los puntos de una placa cuadrada está determinada por la función $T(x,y)=(x-1)^3(y-2)^2$. Se desea conocer cuales son, en el punto $(0,0)$, las direcciones de mayor crecimiento y decrecimiento de la temperatura.*

**Ejercicio 2.44**
*Denotamos por $z=2e^{-x^2}+e^{-3y^2}$ la altura de una montaña en la posición $(x,y)$. ¿En qué dirección desde $(1,0)$ hay que comenzar a caminar para escalar lo más rápidamente posible?.*

**Ejercicio 2.45**
*Supongamos que una montaña tiene forma de paraboloide elíptico $z=1-x^2-2y^2$, donde $x,y$ son las coordenadas este-oeste y $z$ es la altitud sobre el nivel del mar. Si se suelta una canica en el punto $(1,1,-2)$ ¿en qué direción comenzará a rodar?.*

**Ejercicio 2.46**
*Un insecto se halla en un ambiente tóxico. El nivel de toxicidad viene dado por*

$$T(x,y,z)=2x^2-4y^2+\frac{1}{1+z^2}.$$

*Si este insecto está en $(-1,2,1)$, averigüar en qué dirección debe moverse para que la toxicidad disminuya lo más rápido posible.*

**Ejercicio 2.47**
*Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie $z=2xy^2+x^2y$ en el punto $(1,-1,1)$*

**Ejercicio 2.48**
*Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie $z=x^3+y^3-3x^2y+3xy^2$ en $(1,1,2)$*

**Ejercicio 2.49**
*Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie $z^2-2x^2-2y^2=12$ en $(1,-1,4)$*

**Ejercicio 2.50**
*Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie $x^2+y^2+z^2=1$ en $(0,0,1)$*

**Ejercicio 2.51**
*Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie $xy^2+3x-z^2=4$ en $(2,1,-2)$*

**Ejercicio 2.52**
*Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie $y=x(2z-1)$ en $(4,4,1)$*

**Ejercicio 2.53**
*Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie $xyz=12$ en $(2,-2,-3)$*

**Ejercicio 2.54**
*Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie $x^2+y^2-z^2=0$ en $(5,12,13)$*

**Ejercicio 2.55**
*Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie $xy-z=0$ en $(-2,-3,6)$*

**Ejercicio 2.56**
*Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie $x^2+y^2+z^2=9$ en $(1,2,2)$*

**Ejercicio 2.57**
*Hallar todos los puntos de la superficie* $z = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$ *en los que el plano tangente es horizontal.*

**Ejercicio 2.58**
*Si* $x = x(t)$ *es una función derivable calcular* $x(0)$ *y* $x'(0)$ *si*

$$\cos(xt) = xt + x.$$

**Ejercicio 2.59**
*Si en la ecuación* $xy = \log \dfrac{x}{y}$ *se puede despejar* $y = \varphi(x)$*, siendo* $\varphi$ *una función de de clase* $C^\infty$ *definida en un entorno de* $x_0 = \sqrt{e}$ *tal que* $\varphi(x_0) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$*, comprobar que* $\varphi$ *tiene un máximo local en* $x_0$*.*

**Ejercicio 2.60**
*Supongamos que el sistema:*

$$\begin{array}{l} x\cos y + y\cos z + z\cos x = \pi \\ x^2 + y^2 - xy = \pi^2 \end{array}$$

*define implícitamente a* $y$ *y* $z$ *como funciones de* $x$*,* $z = f_1(x)$*,* $y = f_2(x)$*, ambas de clase* $C^\infty$ *y definidas en un entorno de* $0$*, tales que* $f_1(0) = 0$*,* $f_2(0) = \pi$*. Probar que* $f_1'(0) = 0$*,* $f_2'(0) = \pi$*.*

**Ejercicio 2.61**
*(i) Si* $f(x,y) = e^x \cos y$*, calcular* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$*.*
*(ii) Si* $f(x,y) = 3x^2 + 5xy - 5y^2$*, calcular* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2)$*.*
*(iii) Si* $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2+y^2) - \cos(x^2-y^2)$*, calcular* $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(0,0)$*.*

**Ejercicio 2.62**
*Transformar la expresión* $x\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *en coordenadas polares.*

**Ejercicio 2.63**
*Transformar la expresión* $z\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *en coordenadas cilíndricas.*

**Ejercicio 2.64**
*Dada* $z = x^2 + y^2 + \dfrac{y}{x}$*, donde* $x = e^u \cos v$*,* $y = e^u \operatorname{sen} v$*, calcular* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$*.*

**Ejercicio 2.65**
*Sean* $u = x^2 - y^2$ *,* $v = 2x - 3y$ *siendo* $x$ *e* $y$ *funciones de* $s$ *y* $t$*. Hallar*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}$$

**Ejercicio 2.66**
*Calcular el polinomio de Taylor de grado* $n$ *en el origen de las funciones* $e^x$*,* $\operatorname{sen} x$*,* $\cos x$*.*

**Ejercicio 2.67**
*Hallar el polinomio de Taylor de orden 5 en el origen de*

$$f(x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x).$$

**Ejercicio 2.68**
*Hallar el polinomio de Taylor de orden 3 en el origen de la función* $f(x,y) = e^{x+y}$.

**Ejercicio 2.69**
*Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 para* $f(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ *en el* $(0,0)$.

**Ejercicio 2.70**
*Hallar el polinomio de Taylor de orden 3 en el origen de la función* $f(x,y) = e^{xy} \operatorname{sen}(x+y)$.

**Ejercicio 2.71**
*Calcular los extremos relativos de las siguientes funciones:*
(i) $f(x,y) = x^2y^2$
(ii) $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$
(iii) $f(x,y) = xye^{x+2y}$
(iv) $f(x,y) = (x-y^2)(x-2y^2)$
(v) $f(x,y) = xy^2(1-x-y)$.

**Ejercicio 2.72**
*Hallar tres números cuya suma sea 30 y su producto máximo.*

**Ejercicio 2.73**
*Calcular la distancia del punto* $(2,3,1)$ *al plano* $x+y+z=3$.

**Ejercicio 2.74**
*Calcular el máximo valor de la función* $f(x,y) = 4xy$ *en la parte de la elipse* $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ *que se encuentra en el primer cuadrante.*

**Ejercicio 2.75**
*Calcular la mínima distancia del punto* $(0,3)$ *a la parábola* $x^2 - 4y = 0$.

**Ejercicio 2.76**
*Determinar los extremos de la función* $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2 - 2x$ *en el conjunto* $K := \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 5\}$.

**Ejercicio 2.77**
*La temperatura en cada punto de la esfera* $x^2+y^2+z^2 = 50$ *es* $T(x,y,z) = 100 + x^2 + y^2$. *Hallar la temperatura máxima sobre la curva intersección de la esfera con el plano* $x - z = 0$.

**Ejercicio 2.78**
*Calcular los extremos absolutos de la función* $f(x,y) := x - y$ *en*

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x^2+y^2 \leq 1 \ , \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0\}.$$

**Ejercicio 2.79**
*Determinar los extremos absolutos de la función* $f(x,y) = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2) + xy$ *en el conjunto* $K := \{(x,y) : y - x^2 \geq -1, x \leq 0, y \leq 0\}$.

**Ejercicio 2.80**
*Determinar los máximos y mínimos de la función* $f(x,y) = x^2y^3(1-x-y)$ *en el conjunto* $K := \{(x,y) : |\, x \,| + |\, y \,| \leq 1\}$.

# Práctica 3
# Cálculo Integral

**Ejercicio 3.1**

*Calcular*

$$(i) \int (3x^2-5)^3 x\ dx \quad (ii) \int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}\ dx \quad (iii) \int \frac{\sqrt[6]{x} - 3\sqrt[5]{2x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\ dx \quad (iv) \int \frac{dx}{(x-1)^5}.$$

**Ejercicio 3.2**

*Calcular*

$$(i) \int \frac{dx}{\sqrt{4-5x^2}} \quad (ii) \int \frac{dx}{\sqrt{3+2x^2}} \quad (iii) \int \frac{e^x\ dx}{1+e^x} \quad (iv) \int \tan 3x\ dx.$$

**Ejercicio 3.3**

*Calcular*

$$(i) \int \tan^2 x\ dx \quad (ii) \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} \quad (iii) \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\ dx.$$

**Ejercicio 3.4**

*Calcular, con un cambio de variable,*

$$(i) \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} \quad (ii) \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x - \cos x + 1}\ dx \quad (iii) \int \frac{dx}{x \log x}$$

$$(iv) \int x\sqrt{3+4x}\ dx \quad (v) \int x^3\sqrt{2+7x^2}\ dx \quad (vi) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

*Sugerencia: en $(vi)$ usar el cambio $\dfrac{1}{x} = u$.*

**Ejercicio 3.5**

*Calcular, integrando por partes,*

$$(i) \int x\ e^x\ dx \quad (ii) \int e^x \operatorname{sen} x\ dx \quad (iii) \int e^x \cos x\ dx$$

$$(iv) \int \arctan x\ dx \quad (v) \int \operatorname{arg\,senh} x\ dx \quad (vi) \int x^p \log x\ dx \quad ; \quad p \neq -1.$$

**Ejercicio 3.6**

*Calcular*

$$(i) \int \operatorname{arcsen} x\ dx \quad (ii) \int (x^4+5x^3+x-3)\ e^x\ dx \quad (iii) \int \operatorname{sen}^2 x\ dx$$

$$(iv) \int \cos^2 x\ dx \quad (v) \int (2x^4-5x^3-x^2+x-1)\cos x\ dx.$$

**Ejercicio 3.7**

*Calcular*

$$(i) \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\ dx \quad (ii) \int \frac{x+2}{x^2+x-2}\ dx \quad (iii) \int \frac{dx}{x^3-5x^2+6x} \quad (iv) \int \frac{x^4}{x^3-2x^2-2x-3}\ dx.$$

**Ejercicio 3.8**
*Calcular*

$$(i) \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} \qquad (ii) \int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)^3}.$$

**Ejercicio 3.9**
*Calcular*

$$(i) \int \frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\, dx \quad (ii) \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\, dx \quad (iii) \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x-2}}\, dx$$

$$(iv) \int \frac{x^4+7x^3-x}{\sqrt{-x^2-2x}}\, dx \qquad (v) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**Ejercicio 3.10**
*Calcular*

$$(i) \int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} \quad (ii) \int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x+\cos x} \quad (iii) \int \cos^3 x\ \operatorname{sen}^2 x\ dx \quad (iv) \int \cos^2 x\ \operatorname{sen}^3 x\ dx.$$

**Ejercicio 3.11**
*Calcular*

$$(i) \int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}^2 x} \quad (ii) \int \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^3 x}\, dx \quad (iii) \int \operatorname{sen} 3x\ \cos 2x\ dx \quad (iv) \int \operatorname{sen} 5x\ \operatorname{sen} 3x\ \cos 2x\ dx.$$

**Ejercicio 3.12**
*Calcular, usando cambios trigonométricos o hiperbólicos,*

$$(i) \int \sqrt{a^2-x^2}\, dx \quad (ii) \int \sqrt{a^2+x^2}\, dx \quad (iii) \int \sqrt{x^2-a^2}\, dx$$

$$(iv) \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \qquad (v) \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

**Ejercicio 3.13**
*Calcular el área encerrada por las curvas*

*(i)* $y = x^2$ , $x = y^2$.
*(ii)* $y = x^2$ , $x + y = 2$.
*(iii)* $y = \operatorname{sen} x$ , $y = \cos x$ *entre* $x = 0$ *y* $x = \frac{\pi}{2}$.
*(iv)* $y = e^x$ , $y = 2$ , $x = 0$.
*(v)* $y = x$ , $y = x + \operatorname{sen}^2 x$, $x = 0$ *y* $x = \pi$.

**Ejercicio 3.14**
*Derivar las funciones:*

$(i)\ F(x) := \int_0^x \cos^3 t\ dt.$

$(ii)\ F(x) := \int_1^{x^2} \frac{e^t}{t}\ dt.$

$(iii)\ F(x) := \int_0^{\cos x} (t+3)\ dt.$

$(iv)\ F(x) := \int_x^3 (t+2)^2\ dt.$

$(v)\ F(x) := \int_x^{x^2} x \operatorname{sen} t^2\ dt.$

**Ejercicio 3.15**
*Calcular, si es posible, las integrales iteradas de la función* $f(x,y) := e^{x+y}$ *en el triángulo de vértices* $(0,0)$ , $(2,2)$ *y* $(4,0)$.

**Ejercicio 3.16**
*Calcular, si es posible, las integrales iteradas de la función* $f(x,y) := \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ *en la región del primer cuadrante limitada por su bisectriz y la parábola* $y = x^2$.

**Ejercicio 3.17**
*Calcular, si es posible, las integrales iteradas de la función* $f(x,y) := x$ *en la región, con ordenadas positivas, limitada por las circunferencias centradas en el origen y radio* $2$ *y* $3$ *respectívamente.*

**Ejercicio 3.18**
*Calcular, si es posible, las integrales iteradas de la función* $f(x,y) := x^2 e^y$ *en la región limitada por las curvas* $y^2 = x$ , $y^2 = -x$ *e* $y = 1$.

**Ejercicio 3.19**
*Calcular, si es posible, las integrales iteradas de la función* $f(x,y) := y$ *en la región del primer cuadrante limitada por la circunferencia* $x^2 + y^2 = 2$ *y la parábola* $y = x^2$.

**Ejercicio 3.20**
*Invertir el orden de integración en las siguientes integrales:*

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dydx,$

(b) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{\sqrt{6y-y^2}} f(x,y)\, dxdy,$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{2-x} f(x,y)\, dydx,$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{x^2+2} f(x,y)\, dydx,$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{9-(x-2)^2}} f(x,y)\, dydx + \int_0^1 \int_0^{\sqrt{9-(x+2)^2}} f(x,y)\, dydx.$

**Ejercicio 3.21**
*Escribir una integral iterada asociada a la región del primer octante en* $\mathbb{R}^3$ *limitada por los cilindros* $x^2 + y^2 = 4$ *y* $x^2 + z^2 = 4$.

**Ejercicio 3.22**
*Escribir una integral iterada para la región limitada por los planos coordenados y el plano* $x+y+z = 1$.

**Ejercicio 3.23**
*Escribir una integral iterada para la región limitada por* $x^2 + y^2 = 6z$ *y* $z = 6$.

**Ejercicio 3.24**
*Escribir una integral iterada para* $A := \{(x,y,z) \ : \ 0 \le z \le 2 - x^2 - y^2\}$.

**Ejercicio 3.25**
*Escribir una integral iterada para la región limitada por la esfera de centro* $(0,0,0)$ *y radio* $6$ *y el cilindro vertical de centro* $(0,3,0)$ *y radio* $3$.

**Ejercicio 3.26**
*Calcular las siguientes integrales*

(a) $\displaystyle\iint_A (x+y)\ dxdy$ *con* $A := \{(x,y)\ :\ 0 \le x \le 1\ ,\ x^2 \le y \le 2x^2\}$,

(b) $\displaystyle\iint_A |\ (x+y)\ |\ dxdy$ *con* $A := [-1,1] \times [-1,1]$,

(c) $\displaystyle\iint_A \operatorname{sen}(x+y)\ dxdy$ *con* $A$ *la región acotada limitada por las rectas* $x = 0$ , $y = 3\pi$ *e* $y = x$,

(d) $\displaystyle\iint_A |\cos(x+y)|\ dxdy$ *con* $A := [0,\pi] \times [0,\pi]$,

(e) $\displaystyle\iiint_A (x+y+z)x^2y^2z^2\ dxdydz$ *siendo* $A$ *la región del primer octante limitada por el plano* $x+y+z = 1$.

**Ejercicio 3.27**
*Aplicando la fórmula de cambio de variable calcular las siguientes integrales:*

(a) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\ dxdy$,

(b) $\displaystyle\iint_A \log(x^2+y^2)\ dxdy$ *, siendo* $A$ *la región del primer cuadrante comprendida entre las circunferencias de centro el origen y radio* 3 *y* 4,

(c) $\displaystyle\iint_A x\ dxdy$ *, siendo* $A := \{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \le 2x\}$,

(d) $\displaystyle\iint_A x^2y^2\ dxdy$ *, siendo* $A$ *la región acotada del primer cuadrante limitada por las hipérbolas* $xy = 1$ , $xy = 2$ *y las rectas* $y = x$ *e* $y = 4x$,

(e) $\displaystyle\iint_A \frac{(x^2+3y^2)(x^2+y^2)}{4xy^2}\ dxdy$ *, siendo* $A$ *la región comprendida entre las circunferencias* $x^2+y^2-4x = 0$ , $x^2+y^2-2x = 0$ *y las parábolas* $y = x^2$ *e* $2y = x^2$.

**Ejercicio 3.28**
*Aplicando la fórmula de cambio de variable calcular las siguientes integrales:*

(a) $\displaystyle\iiint_A (x^2+y^2+z^2)\ dxdydz$*, siendo* $A$ *la esfera de centro el origen y radio unidad,*

(b) $\displaystyle\iiint_A z\ dxdydz$ *, siendo* $A$ *la parte del primer octante limitada por el plano* $z = 1$ *y el paraboloide* $z = x^2+y^2$,

(c) $\displaystyle\iiint_A \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$ *, siendo* $A$ *la región descrita por la desigualdad* $x^2+y^2+z^2 \ge 1$,

(d) $\displaystyle\iiint_A \frac{1+x^3}{x}\ dxdydz$*, siendo* $A := \{(x,y,z)\ :\ x^2 \le 2y \le 4x^2\ ,\ y^2 \le z \le 3y^2\ ,\ 1 \le xy \le 2\}$,

(e) $\displaystyle\iiint_A (z+2)(x^2+y^2+1)\ dxdydz$ *, siendo* $A$ *la región limitada por las superficies* $z = 0$ , $z = 4$ *y* $x^2+y^2 = 4$.

**Ejercicio 3.29**
*Calcular el área limitada por las rectas* $y = x$ , $y = 4x$ , $x + 4y = 1$ , $x + 4y = 4$.

**Ejercicio 3.30**
*Calcular el volumen del sólido descrito por las desigualdades* $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ , $x^2 + y^2 \leq 3y$.

**Ejercicio 3.31**
*Calcular el área de una elipse y el volumen de un elipsoide.*

**Ejercicio 3.32**
*Calcular, por integración, el volumen de un cilindro y un cono, ambos de altura* $h$ *y radio de la base* $r$.

**Ejercicio 3.33**
*Aplicando el principio de Cavalieri calcular el área de un círculo y el volumen de una esfera.*

**Ejercicio 3.34**
*Aplicando el principio de Cavalieri calcular el volumen limitado por* $z = 4 - x^2$ *y los planos* $x = 0$ , $y = 6$ , $y = 0$ , $z = 0$.

**Ejercicio 3.35**
*Aplicando el principio de Cavalieri calcular el volumen del sólido que genera la curva* $y = 2 + \operatorname{sen} x$ *al girar alrededor del eje de abscisas entre* $x = 0$ *y* $x = 2\pi$.

**Ejercicio 3.36**
*Aplicando el principio de Cavalieri calcular el volumen de* $A := \{(x, y, z) \ : \ 0 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$.

**Ejercicio 3.37**
*Aplicando el principio de Cavalieri calcular el volumen de* $A := \{(x, y, z) \ : \ x + y + z \leq 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0\}$.

**Ejercicio 3.38**
*Calcular la longitud de la curva* $\gamma(t) := (t, t^2)$ *si* $t \in [0, 5]$.

**Ejercicio 3.39**
*Calcular la longitud de la curva* $\gamma(t) := (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$ *si* $t \in [0, 2\pi]$.

**Ejercicio 3.40**
*Calcular la longitud de la curva* $\gamma(t) := (|\ t\ |, |\ t - \frac{1}{2}\ |)$ *si* $t \in [-1, 1]$.

**Ejercicio 3.41**
*Calcular la longitud de la curva* $\gamma(t) := (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ *si* $t \in [0, 2\pi]$.

**Ejercicio 3.42**
*Calcular la integral* $\displaystyle\int_\gamma \frac{y^2 dx + x^2 dy}{1 + x^2 + y^2}$, *siendo* $\gamma$ *el triángulo de vértices* $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ *recorrido en sentido contrario a las agujas del reloj.*

**Ejercicio 3.43**
*Calcularla integral* $\displaystyle\int_\gamma (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, *siendo* $\gamma$ *la gráfica de* $y = x^2$ *recorrida de* $(-1, 1)$ *hasta* $(1, 1)$.

**Ejercicio 3.44**
*Calcular la integral* $\displaystyle\int_\gamma \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$*, siendo* $\gamma$ *la circunferencia de centro* $(0,0)$ *y radia* $a>0$ *orientada positivamente.*

**Ejercicio 3.45**
*Hallar el trabajo realizado por la fuerza* $F(x,y)=(x^2-y^2,2xy)$ *al mover la partícula en sentido contrario a las agujas del reloj recorriendo una vez el contorno del cuadrado limitado por los ejes coordenados y las rectas* $x=a$*,* $y=a$ *(*$a>0$*).*

**Ejercicio 3.46**
*Probar que los siguientes campos de fuerzas son conservativos y calcular el correspondiente potencial:*
*(a)* $F(x,y)=(2yx+3,x^2+7y)$*.*
*(b)* $F(x,y)=(e^x\cos y,-e^x\operatorname{sen} y)$
*(c)* $F(x,y,z)=(y^3z^2+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2y},3xy^2z^2+3e^y-\frac{8}{xy^2},2xy^3z)$*.*
*(d)* $F(x,y,z)=(yz,xz,xy)$*.*
*(e)* $F(x,y,z)=(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z},\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2},\frac{-xy}{z^2})$*.*

**Ejercicio 3.47**
*Calcular* $\int_\gamma F$ *siendo* $F(x,y,z)=(yz\cos xz,\operatorname{sen} xz,xy\cos xz)$ *y* $\gamma$ *una curva con punto inicial* $(0,1,0)$ *y punto final* $(1,1,\frac{\pi}{2})$*.*

**Ejercicio 3.48**
*Calcular el área encerrada por una elipse utilizando el teorema de Green.*

**Ejercicio 3.49**
*Aplicando el teorema de Green calcular* $\displaystyle\int_\gamma (y+3x)dx+(9y-x)dy$ *, siendo* $\gamma$ *la elipse* $4x^2+y^2=1$ *orientada positivamente.*

**Ejercicio 3.50**
*Aplicando el teorema de Green calcular* $\displaystyle\int\int_D (2x-y^2)\,dxdy$ *, siendo* $D$ *el recinto encerrado por la curva* $x^2+y^2=4$*.*

# Práctica 4
# Ecuaciones Diferenciales

**Ejercicio 4.1**

*Clasificar cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales según su orden y comprobar que la función que se ofrece es una solución.*

| | | |
|---|---|---|
| $(a)$ | $1 + y^2 + y^2y' = 0,$ | $x + y = \arctan y$ |
| $(b)$ | $y' - y\tan x = 0,$ | $y = 5\sec x$ |
| $(c)$ | $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0,$ | $y = \sqrt{x^2 - x}$ |
| $(d)$ | $y = xy' + y^2 \operatorname{sen} x^2,$ | $x = y\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} t^2\ dt$ |
| $(e)$ | $(\dfrac{y''}{y'})^2 + 1 = \dfrac{1}{(y''')^2},$ | $y = \operatorname{sen} x$ |

**Ejercicio 4.2**

*Comprobar que las ecuaciones diferenciales siguientes tienen como solución general la que se plantea y calcular la solución particular que cumple las condiciones iniciales dadas:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(a)$ | $y'' + y = 0,$ | $y = A\operatorname{sen} x + B\cos x$ | $y(0) = 1; y'(0) = 0$ |
| $(b)$ | $y' + 2y = 0,$ | $y = Ae^{-2x}$ | $y(0) = 3$ |
| $(c)$ | $xy'' + y' = 0,$ | $y = A + B\log x$ | $y(2) = 0; y'(2) = \frac{1}{2}$ |
| $(d)$ | $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0,$ | $y = Ax + Bx^3$ | $y(2) = 0; y'(2) = 4$ |
| $(e)$ | $4yy' - x = 0,$ | $4y^2 - x^2 = A$ | $y(0) = 0$ |

**Ejercicio 4.3**

*Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas:*

(a) $y = ax^2$

(b) Circunferencias centradas en un punto del eje de abcisas y que pasan por el origen de coordenadas.

(c) $y = ae^{\frac{x}{a}}$.

(d) Elipses centradas en el origen con semiejes $a$ y $b$.

(e) $y = ax + \dfrac{b}{x} + c$

**Ejercicio 4.4**

*Integrar las ecuaciones diferenciales con variables separables:*

(a) $x^2(y+1)dx + y^2(x-1)dy = 0$

(b) $4xy' - y = x^2y'$

(c) $x\cos xdx + y^3\log ydy = 0$

(d) $3e^x\tan ydx + \sec^2 y\sqrt{1 - e^{2x}}dy = 0$

(e) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$

**Ejercicio 4.5**

*Integrar las ecuaciones diferenciales homogéneas:*

(a) $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$

(b) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

(c) $4x^2 - xy + y^2 + y'(x^2 - xy + 4y^2) = 0$

(d) $y' = \dfrac{2xy}{3x^2 - y^2}$

(e) $(y - xy')^2 = x^2 + y^2$

**Ejercicio 4.6**

*Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales reduciéndolas, por un cambio, a homogéneas o a variables separables:*

(a) $(x + y + 1)dx + (2x + 2y + 1)dy = 0$
(b) $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$
(c) $(3x + y - 2)dx + (x - 1)dy = 0$
(d) $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$
(e) $4xy^2dx + (3x^2y - 1)dy = 0$

**Ejercicio 4.7**

*Integrar las ecuaciones diferenciales exactas:*

(a) $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$
(b) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$
(c) $(2xy^2 + 3y - 1)dx + (2x^2y + 3x - 1)dy$
(d) $(\sin y + y \sin x + \dfrac{1}{x})dx + (x \cos y - \cos x + \dfrac{1}{y})dy = 0$
(e) $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{xdy - ydx}{x^2} = 0$

**Ejercicio 4.8**

*Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales encontrando un factor integrante dependiente de una sola variable:*

(a) $2xy \log y dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2 + 1})dy = 0$
(b) $(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0$
(c) $(x^2 + y)dx - xdy = 0$
(d) $(2x^2y + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2x)dy = 0$
(e) $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$

**Ejercicio 4.9**

*Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:*

(a) $(x^2 + 2x - 1)y' - (x + 1)y = x - 1$
(b) $y' + y \cot x = 5e^{\cos x}$
(c) $xdy + 2ydx = (x - 2)e^x dx$
(d) $ydx + (xy + x - 3y)dy = 0$
(e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x \cos y + \sin 2y}$

**Ejercicio 4.10**

*Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales de tipo Bernouilli:*

(a) $y' + xy = xe^{-x^2}y^{-3}$
(b) $y' + 3x^2y = x^2y^3$
(c) $y' + \dfrac{y}{x} = xy^2$
(d) $yy' - 2y^2 = e^x$
(e) $(1 + x^2)y' = xy + x^2y^2$

**Ejercicio 4.11**
*Calcular y dibujar las trayectorias ortogonales de las siguientes familias de curvas:*

(a) *Las parábolas* $y = Cx^2$

(b) *Las circunferencias centradas en el origen.*

(c) *Las circunferencias con centro en el eje de abcisas y que son tangentes al eje de ordenadas en el origen.*

(d) *Las hipérbolas con asíntotas los ejes de coordenadas.*

(e) *Las parábolas* $y^2 = 4C(x + C)$.

**Ejercicio 4.12**
*Hallar las curvas que cumplan:*

(a) *La pendiente de la tangente en todo punto es el doble de la de la recta que une dicho punto con el origen.*

(b) *La subtangente es constante.*

(c) *La relación entre la abcisa y la subnormal en cada punto es constante.*

(d) *El volumen engendrado al girar el arco de* $y = f(x)$ *entre* $0$ *y* $x$ *alrededor del eje de abcisas es igual al del cilindro engendrado por el rectángulo de base* $x$ *y altura* $\frac{f(x)}{2}$.

(e) *El área comprendida entre ellas, el eje de abcisas y dos verticales, una fija y otra constante, es igual a la longitud del arco de la curva comprendida entre dichas abcisas.*

**Ejercicio 4.13**
*Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden:*

(a) $y'' - 2y' - 3y = 2\sin x$

(b) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

(c) $y'' - 3y' + 2y = 2x$

(d) $y'' + y = x^3$

(e) $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x$

**Ejercicio 4.14**
*Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de orden superior:*

(a) $y''' - 2y'' - 3y' = -6x - 7$

(b) $y^{IV} - y = 15e^{2x}$

(c) $y^{IV} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$

(d) $y^{IV} - 10y''' + 37y'' - 60y' + 36y = 36x^4 - 204x^3 + 264x^2 - 18x - 36$

(e) $y^{IV} - 6y''' + 16y'' - 18y' + 7y = 8\,\mathrm{sen}\,x + 12\cos x$

**Ejercicio 4.15**
*Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales:*

(a) $y' = \dfrac{2x\cos y - y^2\cos x}{x^2\,\mathrm{sen}\,y + 2y\,\mathrm{sen}\,x}$

(b) $xy' = y + x^2\,\mathrm{sen}\,x$

(c) $y'' - 6y' + 9y = 5\,\mathrm{sen}\,2x - 12\cos 2x$

(d) $(x^4\log x - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$

(e) $(x^2 + 4y^2)dx - 3xydy = 0$

**Ejercicio 4.16**
*Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales:*

(a) $y' = \dfrac{4y}{x(y-3)}$
(b) $(y^2 - x^2)dx + xydy = 0$
(c) $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$
(d) $y'' + 3y' = 3$
(e) $y' + 2xy + xy^4 = 0$

**Ejercicio 4.17**
*Integrar, usando la transformada de Laplace, las siguientes ecuaciones diferenciales:*

(a) $y'' - 5y' + 4y = 4,\qquad y(0) = 0;\ y'(0) = 2.$
(b) $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x},\qquad y(0) = 1;\ y'(0) = 1.$
(c) $y'' + 4y = 2\cos^2 x,\qquad y(0) = y'(0) = 0.$
(d) $y'' - 3y' + 2y = e^x,\qquad y(0) = y'(0) = 0.$
(e) $y''' - y'' = 0,\qquad y(0) = 1;\ y'(0) = 3;\ y''(0) = 2.$

**Ejercicio 4.18**
*Integrar la ecuación diferencial*

$$y'' - 4y = -5\operatorname{sen} x$$

*por el método habitual y por la transformada de Laplace.*

**Ejercicio 4.19**
*Integrar los sistemas de ecuaciones diferenciales siguientes:*

(a) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} + z = 0 \\ \dfrac{dz}{dx} + 4y = 0 \end{array}\right\}$ (b) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2y}{dt^2} = x \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = y \end{array}\right\}$

(c) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} + 2y + z = \operatorname{sen} x \\ \dfrac{dz}{dx} - 4y - 2z = \cos x \end{array}\right\}$ (d) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = y + 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 1 \end{array}\right\}$

(e) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = y - t^2 + 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = t - y \end{array}\right\}$

**Ejercicio 4.20**
*Calcular, usando la transformada de Laplace, las soluciones particulares que se proponen de los sistemas de ecuaciones diferenciales siguientes (las derivadas lo son respecto de $t$):*

(a) $\left.\begin{array}{l} x' + 4y + 2x = 4t + 1 \\ y' + x - y = \dfrac{3}{2}t^2 \end{array}\right\} x(0) = y(0) = 0$

(b) $\left.\begin{array}{l} x' + x = y + e^t \\ y' + y = x + e^t \end{array}\right\} x(0) = y(0) = 1$

(c) $\left.\begin{array}{l} x' + 2y = 3t \\ y' - 2x = 4 \end{array}\right\} x(0) = 2; y(0) = 3$

(d) $\left.\begin{array}{l} x' + y - 2x = 0 \\ y' + x - 2y = -5e^t \operatorname{sen} t \end{array}\right\} x(0) = 2; y(0) = 3$

(e) $\left.\begin{array}{l} x' = -7x + y + 5 \\ y' = -2x - 5y - 37t \end{array}\right\} x(0) = y(0) = 0$

# Transformada de Laplace

$$\boxed{\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt}$$

**(1) Linealidad** $\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{L}(f) + \beta\mathcal{L}(g)$

**(2) Semejanza** $\mathcal{L}(f(\lambda x))(s) = \dfrac{1}{\lambda}\mathcal{L}(f)\left(\dfrac{s}{\lambda}\right)$

**(3) Desplazamiento** $\mathcal{L}(e^{\lambda x} f(x))(s) = \mathcal{L}(f)(s-\lambda)$

**(4)** $\mathcal{L}(x^n f(x))(s) = (-1)^n f^{(n)}(s)$

**(5) Derivación**

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)\\
&\mathcal{L}(f'')(s) = s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0)\\
&\mathcal{L}(f''')(s) = s^3\mathcal{L}(f)(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)\\
&\mathcal{L}(f^{IV})(s) = s^4\mathcal{L}(f)(s) - s^3 f(0) - s^2 f'(0) - sf''(0) - f'''(0)\\
&\qquad\qquad\vdots
\end{aligned}$$

**(6) Transformadas de las funciones más corrientes**

$\boxed{\text{I}}$ $\mathcal{L}(1)(s) = \dfrac{1}{s}$

$\boxed{\text{II}}$ $\mathcal{L}(x^n)(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{III}}$ $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\alpha x})(s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$

$\boxed{\text{IV}}$ $\mathcal{L}(\cos\beta x)(s) = \dfrac{s}{s^2+\beta^2}$

$\boxed{\text{V}}$ $\mathcal{L}(\mathrm{sen}\beta x)(s) = \dfrac{\beta}{s^2+\beta^2}$

$\boxed{\text{VI}}$ $\mathcal{L}(\mathrm{ch}\beta x)(s) = \dfrac{s}{s^2-\beta^2}$

$\boxed{\text{VII}}$ $\mathcal{L}(\mathrm{sh}\beta x)(s) = \dfrac{\beta}{s^2-\beta^2}$

$\boxed{\text{VIII}}$ $\mathcal{L}(x^n\mathrm{e}^{\alpha x})(s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{IX}}$ $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x)(s) = \dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$

$\boxed{\text{X}}$ $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{sen}\beta x)(s) = \dfrac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$

$\boxed{\text{XI}}$ $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{ch}\beta x)(s) = \dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2-\beta^2}$

$\boxed{\text{XII}}$ $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{sh}\beta x)(s) = \dfrac{\beta}{(s-\alpha)^2-\beta^2}$

$\boxed{\text{XIII}}$ $\mathcal{L}(x\cos\beta x)(s) = \dfrac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$

$\boxed{\text{XIV}}$ $\mathcal{L}(x\mathrm{sen}\beta x)(s) = \dfrac{2\beta s}{(s^2+\beta^2)^2}$