Matemáticas (L. Químicas, grupos D y E) **Junio 09**

Escribir vuestro nombre en cada una de las hojas. Contestar a cada pregunta en una hoja diferente. Todas las preguntas valen lo mismo.

1. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Estudiar si A es diagonalizable y en caso afirmativo encontrar una matriz diagonal equivalente y una matriz de paso para tal diagonalización.

2. Una bola hueca cuya forma es $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ está formada por un material de densidad variable. Si la densidad en cada punto de la bola viene dada por la función $f(x, y, z) = 4 - 2x^2 - y^2 - z^2$. Obtener los puntos de la bola donde la densidad es máxima y los puntos donde la densidad es mínima.

3. Hallar el volumen del sólido limitado por arriba por el plano $z = y$ y por abajo por el plano xy sobre el cuadrante del disco $x^2 + y^2 \leq 1$ con $x, y \geq 0$.

4. Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas
$$F(x, y) = (e^x \sin(y) - y, e^x \cos(y) - x - 2),$$
para llevar una partícula desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto $(1, \frac{\pi}{2})$ siguiendo la trayectoria $\alpha(t) = (t^3 \sin(\frac{\pi t}{2}), -\frac{\pi}{2} \cos(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{2}))$.

5. Resolver el problema de valores iniciales $xy' + y = 3x^2, \quad y(1) = 2$.

6. Hallar una solución particular de la ecuación $y'' - y' - 6y = e^{-x}$.

7. Se depositan P euros en un banco que paga una tasa de interés de r por ciento anualmente. Usando que la variación del capital en cada instante de tiempo sea proporcional al capital (tasa de interés continuo):
a) hallar el tiempo T, en años, para doblar el capital en función de r;
b) hallar la tasa de interés necesaria para que el capital se duplique en 10 años.

TODO: Ejercicios 1,2,3,5
SEGUNDO PARCIAL: Ejercicios 3,4,5,6
CUARTO EXAMEN: Ejercicios 4,5,6,7

Transformada de Laplace: $\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt.$

$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$
$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0)$
$\mathcal{L}(f''')(s) = s^3\mathcal{L}(f)(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$
$\mathcal{L}(f^{IV})(s) = s^4\mathcal{L}(f)(s) - s^3f(0) - s^2f'(0) - sf''(0) - f'''(0)$

Transformadas de las funciones más corrientes

$\boxed{\text{I}}\ \mathcal{L}(1)(s) = \dfrac{1}{s}$

$\boxed{\text{II}}\ \mathcal{L}(x^n)(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{III}}\ \mathcal{L}(\mathrm{e}^{\alpha x})(s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$

$\boxed{\text{IV}}\ \mathcal{L}(\cos\beta x)(s) = \dfrac{s}{s^2+\beta^2}$

$\boxed{\text{V}}\ \mathcal{L}(\mathrm{sen}\beta x)(s) = \dfrac{\beta}{s^2+\beta^2}$

$\boxed{\text{VI}}\ \mathcal{L}(\mathrm{ch}\beta x)(s) = \dfrac{s}{s^2-\beta^2}$

$\boxed{\text{VII}}\ \mathcal{L}(\mathrm{sh}\beta x)(s) = \dfrac{\beta}{s^2-\beta^2}$

$\boxed{\text{VIII}}\ \mathcal{L}(x^n\mathrm{e}^{\alpha x})(s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{IX}}\ \mathcal{L}(\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x)(s) = \dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$

$\boxed{\text{X}}\ \mathcal{L}(\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{sen}\beta x)(s) = \dfrac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$

$\boxed{\text{XI}}\ \mathcal{L}(\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{ch}\beta x)(s) = \dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2-\beta^2}$

$\boxed{\text{XII}}\ \mathcal{L}(\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{sh}\beta x)(s) = \dfrac{\beta}{(s-\alpha)^2-\beta^2}$

$\boxed{\text{XIII}}\ \mathcal{L}(x\cos\beta x)(s) = \dfrac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$

$\boxed{\text{XIV}}\ \mathcal{L}(x\mathrm{sen}\beta x)(s) = \dfrac{2\beta s}{(s^2+\beta^2)^2}$