

**GUÍA DOCENTE**  
**AMPLIACIÓN DE MÉTODOS MATEMÁTICOS**

**Licenciatura en Física**

CURSO 2007-2008

Miquel Portilla Moll (Grupo Valenciano)  
DEPARTAMENTO DE ASTRONOMIA Y ASTROFISICA

José Navarro Salas (Grupo Castellano)  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA

<b>I.- DATOS INICIALES DE IDENTIFICACIÓN</b>
--

<b>Nombre de la asignatura:</b>	Ampliación de Métodos Matemáticos
<b>Carácter:</b>	Optativo
<b>Titulación:</b>	LICENCIADA/O EN FÍSICA
<b>Ciclo:</b>	1º
<b>Departamento:</b> <b>Página web:</b>	Astronomía y Astrofísica/ Física Teórica www.uv.es/daa y www.uv.es/fisteo/
<b>Profesor/a responsable:</b>	<p><b>Miquel Portilla Moll</b> Correo E.: <a href="mailto:miquel.portilla@uv.es">miquel.portilla@uv.es</a> Despacho: 4.13/Edifici Jeroni Muñoz</p> <p><b>José Navarro Salas</b> Correo E.: <a href="mailto:Jose.Navarro-Salas@uv.es">Jose.Navarro-Salas@uv.es</a> Despacho: Bloque D. 4º piso. 4422</p>

<b>II.- INTRODUCCIÓN A LA ASIGNATURA</b>
--

**Carácter de la asignatura:** Optativa

**Créditos ECTS asignados:** 6

**Duración temporal:** cuatrimestral

**Ubicación en la titulación:** 3er Curso.

**Descriptor:** Ampliación de Métodos Matemáticos.



Coordenadas curvilíneas. Tensores sobre un espacio vectorial y sobre una variedad. Geometría diferencial de curvas y superficies. Geometría riemanniana: derivación covariante y geodésicas.

### **Objetivos:**

El objetivo fundamental es que el estudiante adquiera conocimientos básicos de geometría diferencial y sus aplicaciones más importantes en la Física.

El dominio de los fundamentos de la geometría diferencial es muy importante para adquirir una sólida formación en muchos campos de la física, desde la estructura a gran escala del Universo (dominada por la interacción gravitatoria) hasta las escalas más microscópicas (descritas por la teoría cuántica).

### **Metodología docente:**

El hecho de ser una asignatura optativa y dividida en dos grupos (castellano y valenciano) presenta ventajas claras en su planteamiento docente. La mayor motivación de los estudiantes y su menor número, en relación a las asignaturas obligatorias, facilita el dinamismo de las clases. Las clases de tutorías grupales, que requieren un horario especial en las asignaturas obligatorias, se realizan de forma natural en esta asignatura. Una hora semanal, de las cuatro horas totales, se dedica a clases más interactivas que permiten un seguimiento más personalizado de la materia.

## III.- VOLUMEN DE TRABAJO

**Semanas de trabajo:** 15

**Horas de trabajo del alumno:** 27,5 por crédito ECTS.

**Horas Totales :** 165 horas totales

Distribuidas de la siguiente manera

TIPO DE ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN	HORAS
<b>Asistencia a clases</b>	Teóricas (magistrales) combinadas con ejemplos y Ejercicios. 3 horas/semana x 15 semanas	<b>45</b>
<b>Asistencia a tutorías</b>	1hora/semana x 15 semanas	<b>15</b>

<b>grupales o trabajos tutelados</b>		
<b>Estudio y preparación de contenidos</b>	Teoría: 4 horas/semana x 15 semanas	<b>60</b>
	Problemas/Trabajos: 2 horas/semana x 15 semanas	<b>30</b>
<b>Estudio para preparación de exámenes</b>	10 horas por examen x 1 examen	<b>10</b>
<b>Realización de exámenes</b>	4 horas por examen x 1 examen	<b>4</b>
<b>Actividades complementarias</b>	Asistencia a Conferencias	<b>1</b>
<b>TOTAL VOLUMEN DE TRABAJO</b>		<b>165</b>

#### IV.- OBJETIVOS GENERALES

El objetivo fundamental es que el estudiante adquiera conocimientos básicos de geometría diferencial y sus aplicaciones más importantes en la Física.

El estudiante debe comprender conceptos matemáticos imprescindibles en la física actual:

- Vectores y tensores
- Variedades diferenciables
- Espacios con Curvatura
- Geodésicas
- Derivadas covariantes
- Transformaciones infinitesimales y simetrías
- Propiedades locales/globales

#### V.- CONTENIDOS MÍNIMOS

La materia se puede dividir en tres grandes partes:

- Parte I: Geometría diferencial clásica: teoría de curvas y superficies.

Esta parte pretende desarrollar la intuición físico-matemática de los conceptos de curvatura, geodésicas, derivadas covariantes, etc en una situación donde su visualización es más sencilla y directa.

- Parte II: Geometría diferencial moderna: Variedades y cálculo tensorial.

Esta segunda parte pretende generalizar el concepto de “superficie en el espacio euclídeo tridimensional” e introducir a los estudiantes a la idea más abstracta y potente de “variedad”, que constituye la base de toda la geometría diferencial moderna. El concepto de “variedad” desempeña un papel análogo a las importantes estructuras de “grupo” y “espacio vectorial” del álgebra (vistas y desarrolladas en la asignatura de Metodos Matemáticos I) y conjuga

toda la potencia del cálculo diferencial (desarrollado en la asignatura de Métodos Matemáticos II). En este contexto se introducen los tensores y sus operaciones más importantes.

- Parte III: Aplicaciones fundamentales en física

Esta tercera parte puede estar insertada como secciones especiales dentro del desarrollo de los dos bloques anteriores o bien como un bloque específico, dependiendo del desarrollo del curso, preparación y motivación de los estudiantes, y del criterio del profesor.

Las aplicaciones tipo pueden ser:

- Geometrías no-euclídeas y el espacio-tiempo físico. Modelos cosmológicos.
- Formas diferenciales: ecuaciones de Maxwell y ecuaciones termodinámicas.
- Geometría Riemanniana y relatividad general.
- Geometría simpléctica y mecánica, etc

#### **VI.- DESTREZAS QUE TIENEN QUE ADQUIRIR.**

- Trabajar con distintos sistemas de coordenadas locales. Distinguir entre conceptos y propiedades locales y globales.
- Trabajar con distintos tipos de métricas.
- Entender el concepto de curvatura de Gauss y la distinción entre geometría intrínseca y extrínseca a una superficie.
- Entender y familiarizarse con el concepto de geodésica.
- Saber describir las geodésicas de las superficies más sencillas.
- Distinguir claramente entre curvatura positiva, negativa y nula.
- Desarrollar la idea intuitiva de derivada covariante.
- Familiarizarse y trabajar con espacios de muchas dimensiones.
- Concepto de campo de vectorial.
- Distinguir entre vectores covariantes y contravariantes.
- Comprender la generalización de vector a tensor.
- Familiarizarse con el manejo y contracción de índices.
- Entender el concepto de diferencial y su aplicación reiterada.
- Operadores diferenciales (divergencia, ...) en dimensiones superiores.
- Entender la potencia del teorema general de Stokes.

OPCIONALMENTE :

- Entender las bases físicas de las geometrías no-euclídeas
- Conexión entre la Relatividad y la Geometría.
- Ecuaciones de Maxwell en lenguaje tensorial.
- Diferencial exterior y ecuaciones termodinámicas.
- Espacios de curvatura constante y modelos cosmológicos.
- Geometría de la mecánica clásica.

#### **VII.- HABILIDADES SOCIALES.**



Las propias de las asignaturas de tipo físico-matemático:

- Desarrollar la capacidad de razonamiento crítico y la aplicación del método científico-matemático.
- Desarrollar la capacidad de modelización matemática de problemas diversos.
- Ser capaz de utilizar el razonamiento matemático en situaciones y problemas de alta complejidad.
- Ser capaz de identificar problemas, incluyendo las semejanzas con otros cuya solución es conocida, e idear estrategias para su solución.
- Desarrollar la capacidad de planificar y organizar el propio aprendizaje, basándose en el trabajo individual, a partir de la bibliografía y otras fuentes de información.
- Ser capaz de efectuar una puesta al día de la información existente sobre un problema concreto, ordenarla y analizarla críticamente.
- Fomentar la capacidad para trabajar en equipo a la hora de abordar problemas complejos que requieren colaboración con otras personas.
- Potenciar la adquisición de recursos de expresión oral y escrita para llevar a cabo una argumentación científica clara y coherente.
- Estimular la capacidad de comunicación de los conceptos físico-matemáticos involucrados en un problema mediante expresión oral y escrita.
- Potenciar la comprensión y el uso de las nuevas tecnologías de la información.

### VIII.- TEMARIO Y PLANIFICACIÓN TEMPORAL

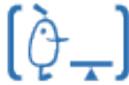
Es criterio de los profesores responsables de esta asignatura que no tenga por qué seguirse una misma distribución temporal, para los dos grupos, en el desarrollo de los contenidos mínimos de la asignatura. Es importante que el estilo y criterio personal de cada profesor pueda reflejarse en cada planteamiento concreto de desarrollo de los contenidos mínimos comunes.

**GRUPO A ( VALENCIANO)**  
**Profesor: Miquel Portilla Moll**

TEMA

Num. Semanas

1	<b>TEORIA DE CORBES</b> Corbes parametritzades en $\mathbb{R}^2$ . Punts singulars. Corbes regulars. Paràmetre longitud d'arc. Vectors tangent i normal unitaria. Curvatura. Índex d'una corba tancada. Corbes parametritzades en $\mathbb{R}^3$ . Vectors tangent, normal i binormal. Curvatura i torsió.	1
2	<b>SUPERFÍCIES REGULARS EN <math>\mathbb{R}^3</math></b> Funcions vectorials de varies variables. L'aplicació diferencial. Superfícies regulars en $\mathbb{R}^3$ . Pla tangent i vector normal. Diferencial d'una funció definida sobre una superfície regular.	2
3	<b>GEOMETRIA DE L'APLICACIÓ DE GAUSS</b> Tensor mètric i primera forma fonamental. Tensor curvatura extrínseca i segona forma fonamental. Curvatura. Curvatura de Gauss i curvatura mitjana. Classificació dels punts d'una superfície.	2
4	<b>GEOMETRIA INTRÍNSECA DE SUPERFÍCIES</b> Aplicacions local conformes. Isometries. Els símbols de Christoffel. Derivada covariant i transport paral·lel. Geodèsiques.	2
5	<b>ÀLGEBRA TENSORIAL SOBRE UN ESPAI VECTORIAL</b> Espai vectorial. Canvi de base. Dual d'un espai vectorial. Tensos r-contravariant, s-covariant. Producte tensorial. Operacions bàsiques. Tensor delta de Kronecker. Tensor mètric pseudo-Riemannià. Pullback i pushforward d'un tensor	2
6	<b>ÀLGEBRA EXTERIOR SOBRE UN ESPAI VECTORIAL</b> El grup de les permutacions de k elements. L'espai de les k-formes exteriors. Producte exterior. Pullback i pushforward de k-formes. L'element de volum d'un espai vectorial amb producte intern. L'operador dual de Hodge.	3
7	<b>VARIETATS DIFERENCIABLES</b> Varietat diferenciable n-dimensional. Espai tangent. Fibrat tangent. Aplicació tangent. Camps tensorials. Pullback d'un camp tensorial.	1



8	<b>DERIVADA DE LIE D'UN CAMP TENSORIAL</b> Flux local d'un camp vectorial. Derivada de Lie d'un camp tensorial.	1
9	<b>FORMES DIFERENCIALS</b> Formes diferencials. Producte exterior. Pullback de formes. L'element de volum d'una varietat pseudo-Riemanniana. L'Aplicació dual de Hodge. La derivada exterior.	1

**GRUPO B ( CASTELLANO)**

Profesor: José Navarro Salas

	TEMA	Num. Semanas
1	<b>SUPERFICIES: CURVATURA Y GEODÉSICAS.</b> Introducción histórica: geometría Euclídea. Curvas y superficies en	4



	<p>el espacio euclídeo tridimensional. Ejemplos. Coordenadas locales. El plano tangente. Primera forma fundamental. Aplicación de Gauss. Segunda forma fundamental. Curvaturas y direcciones principales. Curvatura de Gauss. Símbolos de Christoffel. Geodésicas. Derivadas covariantes. Superficies de curvatura constante. Geometría no Euclídea. Teorema de Gauss-Bonnet. Espacio físico y geometrías no Euclídeas. Modelos cosmológicos.</p>	
2	<p><b>VARIEDADES DIFERENCIBLES</b>                  Variedades diferenciables. Ejemplos. Aplicaciones diferenciables. Concepto de vector y espacio tangente. Aplicación diferencial. Campos de vectores. Álgebra de Lie. Campos de vectores y flujos. Transformaciones infinitesimales. Derivada de Lie. Simetrías en física. Analogías en mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana.</p>	3
3	<p><b>CALCULO TENSORIAL</b>                  Concepto de covector y espacio cotangente. Tensor métrico. Tensores generales en el espacio tangente. Operaciones con tensores. Ejemplos. Campos de tensores. Formas diferenciales. Diferencial exterior. Ecuaciones de Maxwell en lenguaje tensorial. Integración de formas diferenciales. Teorema general de Stokes. Teorema de Gauss en dimensión arbitraria.</p>	4
4	<p><b>GEOMETRÍA RIEMANNIANA Y ESPACIOTIEMPO: INTRODUCCIÓN A LA RELATIVIDAD GENERAL</b>                  Relatividad Especial y espacio de Minkowski. El Principio de Equivalencia de Einstein. Relojes en un campo gravitatorio: "redshift". La idea de Einstein: gravedad es geometría. Referenciales inerciales locales. Geodésicas. Derivadas covariantes y transporte paralelo. Desviación geodésica. Tensor de curvatura de Riemann. Tensores de Ricci y de Einstein. Ecuaciones de Einstein del campo gravitatorio. Geometría exterior a una estrella esférica. Agujeros negros. La expansión del Universo.</p>	4

**IX.- BIBLIOGRAFIA DE REFERENCIA**

**a) Bibliografía básica:**

1. M.P. do Carmo, *Geometría diferencial de curvas y superficies*, New Jersey, 1976
2. B. Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge, 1980
3. M. Spivak, *Cálculo en variedades*, 1972
4. B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko and S.P. Novikov, *Modern Geometry-Methods and Applications I,II* Springer-Verlag, 1984

**b) Bibliografía complementaria:**

1. Y. Choquet-Bruhat and C. De Witt-Morette, *Analysis, Manifolds and Physics*, North Holland, 1989
2. R. Abraham. J. E. Marsden, T. Ratiu, *Tensor analysis and applications*,
3. J. B. Hartle, *Gravity, an introduction to Einstein's General Relativity*, Addison Wesley, 2003.

**c) Otro material complementario:**

1. Aula virtual.

**X.- CONOCIMIENTOS PREVIOS**

Para el desarrollo de esta asignatura se requieren, necesariamente, los conocimientos previos de las asignaturas de Métodos Matemáticos I y II. Es fundamental haber cursado también las asignaturas de Métodos matemáticos III y Mecánica y Ondas (ambas de segundo curso). Es muy aconsejable que el estudiante haya completado también el resto de asignaturas del segundo curso de la licenciatura.

**XI.- METODOLOGÍA**

Como hemos comentado ya el carácter optativo de la signatura y su división en dos grupos (valenciano y castellano) facilita enormemente la pedagogía de las clases. La no masificación natural de los grupos permite desarrollar trabajo tutorizado sin subdivisiones extra de los grupos.

De las cuatro horas semanales de que dispone la asignatura una hora se dedicará a la discusión participativa de los temas teóricos, ejemplos, cuestiones y ejercicios desarrollados o planteados en el resto de las clases. A cada estudiante (o grupo reducido) se le encomendará una de dichas tareas con antelación a la sesión y se promoverá la explicación oral de las soluciones en las sesiones semanales.

**XII.- EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE**

La evaluación de los conocimientos adquiridos por el estudiante constará de tres partes:

**1. Exámenes**

Se realizará único examen por convocatoria. El examen constará de una parte teórica y de una parte práctica.

**2. Trabajo personal.** Se valorará la participación de los estudiantes en las clases autorizadas, su trabajo en la resolución de los ejercicios y cuestiones planteadas, y los posibles trabajos extra que puedan realizarse.

Las partes 1 y 2 contarán, al menos, para el 95% de la nota. La parte 1 será la más importante, pero la parte 2 servirá para modelar y fijar la nota final.

**3. Actividades complementarias.**

Consistirá en la asistencia a las conferencias organizadas por la Facultat de Física. Se valorará positivamente.