

# LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

Luis Puig

Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València, España

Puig, L. (2006). La resolución de problemas en la historia de las matemáticas En Aymerich, José V. y Macario, Sergio (Eds.) *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 39-57) Castellón: Publicacions de la Universitat Jaume I. [ISBN: 84-8021-551-8]



# LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

Luis Puig

Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València, España

## 1. INTRODUCCIÓN

Desde el momento en que la organización de este simposio tuvo la deferencia de invitarme a dar una conferencia en él y supe que el simposio estaba ligado a la celebración en Castellón de la XIX Olimpiada Iberoamericana de Matemática, pensé que lo más natural era que mi conferencia tratara de algún aspecto de la resolución de problemas, asunto en el que vengo trabajando desde hace ya bastantes años<sup>1</sup>. Pero también decidí que, en esta ocasión, en vez de exponer algún planteamiento general sobre ello, iba a hacer algunas observaciones particulares al hilo de algunos ejemplos tomados de la historia, y eso es lo que voy a desarrollar aquí. Utilizaré algunos ejemplos históricos para que quede planteado cómo, si nos atenemos a los ejemplos que voy a poner, uno de los aspectos fundamentales de la resolución de problemas en la historia consiste no tanto en el ingenio de poder resolver problemas particulares como en el proyecto de poder resolver todos los problemas, y que esto tiene consecuencias sobre las cuestiones que los matemáticos se plantean con respecto a la resolución de problemas. Los ejemplos que utilizaré estarán todos ligados en algún sentido a la historia de la resolución aritmético-algebraica de problemas y serán del antiguo Egipto, de la época helenística, de la época paleobabilónica, de Descartes y del siglo IX en el islam medieval.

## 2. EGIPTO: CÁLCULO CON LO SUPUESTO VS CÁLCULO CON LO DESCONOCIDO

El primer ejemplo va a ser de un problema del papiro Rhind. El papiro Rhind está escrito probablemente en torno a 1650 antes de nuestra era por el escriba Ahmed, pero recopila conocimientos anteriores. Está escrito en escritura hierática, una de las escrituras existentes en el antiguo Egipto, que es la que en la figura 1 aparece en la parte de arriba. Esa figura la he tomado del libro que en 1979 publicó el National Council of Teachers of Mathematics, la federación de asociaciones de profesores de matemáticas de los USA, con una selección de problemas del papiro Rhind en facsímil, transliterados, traducidos y comentados, y corresponde al problema 24 del papiro. En la figura puede verse, además del facsímil del original del papiro en escritura hierática, una traducción a otra escritura también del antiguo Egipto, la escritura jeroglífica, y una segunda traducción al sistema de signos que usan los egiptólogos para transliterar ambas escrituras egipcias<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> Ver, sobre todo, Puig y Cerdán (1988), donde estudiamos la estructura de los problemas aritméticos de enunciado verbal (PAEV); Puig y Cerdán (1990), donde planteamos en qué sentido puede hablarse de si un PAEV es aritmético o algebraico, y Puig (1996), donde desarrollamos un modelo teórico local sobre el estilo heurístico de resolución de problemas.

<sup>2</sup> La escritura hierática es de hecho una escritura cursiva derivada de la escritura jeroglífica, que estiliza y abrevia los signos de ésta. El sistema de signos con que los egiptólogos transliteran estas escrituras utiliza las letras del alfabeto latino, las cifras que se usan actualmente en occidente y algunos signos especiales.

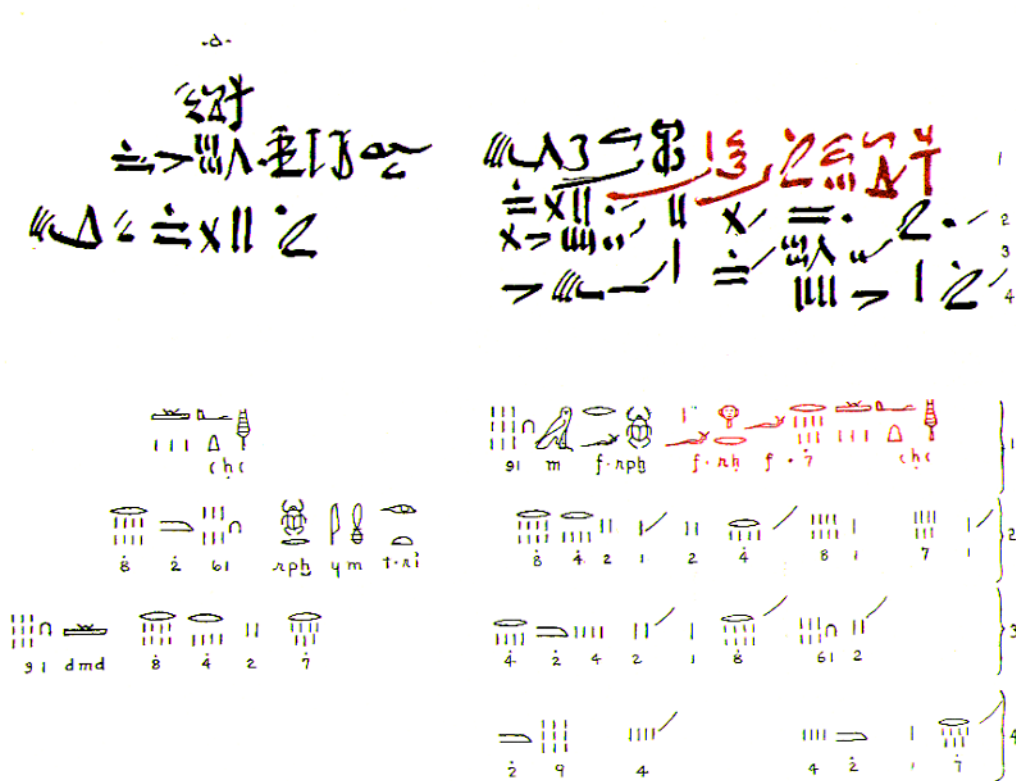


Figura 1

Éste es pues el aspecto original de un problema y su solución, ya con dos traducciones. Pero nada de esto lo entendemos porque no somos expertos egiptólogos, de manera que para poder entender algo de lo que hay aquí, aún voy a hacer una tercera traducción, en este caso al español, del enunciado del problema:

Una cantidad (<sup>h</sup>) y su séptimo sumados juntos resulta 19. ¿Cuál es la cantidad?

En la figura 1, el enunciado es lo escrito en la primera línea, y se lee de izquierda a derecha. He incluido en la traducción al español la transliteración de ‘cantidad’, porque este problema pertenece a la clase de problemas que solemos llamar “problemas de tipo ábaco”, cuyos enunciados se caracterizan porque hablan exclusivamente de números y relaciones aritméticas entre ellos, y entre los historiadores de la matemática egipcia se les suele denominar “problemas <sup>h</sup>”, precisamente por la transliteración de la palabra que se traduce por “cantidad”, y que es el nombre usado para mencionar lo desconocido, que, en realidad, quiere decir “montón”.

Ahora bien, aunque los matemáticos egipcios tuvieran una manera de *nombrar lo desconocido*, “un montón”, eso no quiere decir que tuvieran una manera de *calcular con lo desconocido*. Lo que hace el matemático egipcio es decir “supongamos que la cantidad es...”: la imposibilidad de calcular con lo desconocido para resolver el problema conduce a hacer una suposición sobre cuál es el resultado.

La suposición en el caso de este problema es 7, y entonces el matemático egipcio calcula

$$7 + \frac{1}{7} \text{ de } 7 \text{ es } 8$$

En la figura 1 podemos ver cómo están hechos efectivamente esos cálculos en la columna más a la derecha. Ahí se ve que  $1/7$  de 7 se hace sencillamente escribiendo el signo de  $1/7$  y un 1 a su lado. El signo para  $1/7$ , además, es el mismo que para 7, al que se le ha añadido encima un signo<sup>3</sup> con forma de lente (en la escritura jeroglífica) o con forma de punto (en la escritura hierática). Ese punto sobre el siete no es equivalente a nuestro 1 sin la raya de fracción, sino que indica que lo que se representa no es un número de unidades sino una parte, en este caso, un séptimo. De modo que en las escrituras egipcias las únicas fracciones que tienen una representación propia (un nombre) son las fracciones unitarias, los cuantavos. El resto de las fracciones han de expresarse mediante la yuxtaposición de los signos que representan las fracciones unitarias –yuxtaposición que indica adición, lo que es coherente con el hecho de que el sistema de numeración egipcio sea aditivo. (La única excepción es la fracción  $2/3$  para la que hay un signo específico, que consiste en el signo-palabra que significa “la parte” encima de dos trazos verticales desiguales y paralelos.)

También por ser el sistema de numeración egipcio aditivo, el algoritmo de la suma consiste simplemente en indicar que, para obtener la suma, hay que juntar los signos de los números que hay al lado de los signos del 1 y el  $1/7$ , indicación que se hace mediante una marca como la que puede verse en la figura.

Una vez hecho este cálculo con lo supuesto, el matemático egipcio dice:

Tantas veces haya de multiplicarse 8 para dar 19, esas veces habrá de multiplicarse 7 para dar la cantidad en cuestión.

Esta frase expresa el fundamento del procedimiento con el que va a encontrar la cantidad buscada a partir de la cantidad que ha resultado del cálculo con la cantidad supuesta, procedimiento que ha pasado a la tradición con el nombre de “método de falsa posición”. Si miramos el funcionamiento del método estrictamente como está aquí, lo que vemos que sucede es que, ante la imposibilidad de calcular con lo desconocido, se hace una suposición con un número con el que es fácil calcular. Por supuesto que subyace la hipótesis de que las relaciones entre las cantidades del problema tienen un componente de proporcionalidad, lo que garantiza que se pueda hacer lo que aquí se dice.

El matemático egipcio efectúa ahora los cálculos para ver cuántas veces ha de multiplicarse 8 para dar 19. La multiplicación egipcia se hace por duplicación y división por dos (o demediación), por lo que, como puede verse en las columnas segunda y tercera de la figura, se comienza duplicando 8, lo que resulta 16. Como si se volviera a duplicar el número resultante ya sería 32, que es superior a 19, y, por tanto, no serviría para completar lo que le falta a 16 para llegar a 19, se comienzan ahora las demediaciones sucesivas,  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$ , que se acaban al llegar a 1. Luego se marcan los resultados que sumados dan 19 y se lee el número resultante de yuxtaponer los marcados:

$$2 \dot{\bar{4}} \bar{8}$$

lo que en nuestra notación se escribe como suma de un número entero con fracciones unitarias

---

<sup>3</sup> Según Couchoud (1993), se trata de un signo-palabra que significa “la parte”. Ver Couchoud (1993), págs. 20-33, en donde la autora explica con detalle las peculiaridades de las fracciones egipcias, los signos que las representan y el cálculo con ellas.

$$2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

Ésas son las veces que hay que multiplicar 8 para obtener 19, de modo que ahora falta multiplicar 7 esas veces para obtener la cantidad buscada. Éste es el cálculo que aparece en la siguiente de las columnas de la figura, de nuevo efectuado por duplicación, usando el hecho de que  $7=1+2+4$ . El resultado que se obtiene está escrito algo más a la izquierda en la figura y es

$$16 \dot{2} \dot{8}$$

lo que en nuestra notación se escribe

$$16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}.$$

Podemos observar que este método de falsa posición, en su versión egipcia, está ligado a la manera en que están representadas las fracciones y a las dificultades del cálculo con esas fracciones. Eso queda bastante más patente si nos fijamos en que este problema es el primero en el papiro Rhind de una serie de problemas, todos del mismo estilo.

Problema 25.

Una cantidad ( $^c h^c$ ) y su mitad sumadas juntas resulta 16. ¿Cuál es la cantidad?

Problema 26.

Una cantidad ( $^c h^c$ ) y su cuarto sumados juntos resulta 15. ¿Cuál es la cantidad?

Problema 27.

Una cantidad ( $^c h^c$ ) y su quinto sumados juntos resulta 21. ¿Cuál es la cantidad?

Las cantidades supuestas son 2, 4 y 5, respectivamente. El calculista egipcio no hace las suposiciones con un número cualquiera sino que las hace en virtud de la dificultad que va a tener en los cálculos, esto es, en virtud de las fracciones particulares que aparecen en el problema. La manera de eludir el cálculo con lo desconocido, que luego se convierte en método, está ligada pues a las características específicas de la representación de los números en la matemática egipcia.

### 3. FRACCIONES DE LA VIDA DE DIOFANTO

Doy ahora un salto en el tiempo hasta la época helenística para tomar uno de los problemas que aparecen en la Antología Palatina y examinarlo a la luz de lo que acabamos de observar en unos problemas del papiro Rhind. La Antología Palatina es una colección de epigramas de muy diversa índole entre los que figuran una colección de enunciados de problemas, que podemos suponer que eran problemas que, como pasatiempos o desafíos, o como motivo para mostrar el ingenio, circulaban en medios no estrictamente matemáticos por la ruta de la seda, de Alejandría a la China.

El problema que voy a examinar es bastante conocido, porque su enunciado describe episodios de la vida de Diofanto, y, si se resuelve, proporciona fechas cruciales en su vida.

En esta tumba reposa Diofanto. La maravilla es que la tumba cuenta ingeniosamente la duración de su vida. Dios le concedió ser un niño durante una sexta parte de su vida. Añadió una doceava parte antes de vestir sus mejillas con vello. Le encendió la llama del matrimonio después de una séptima parte, y cinco años después de su matrimonio le concedió un hijo. ¡Ay desdichado

niño tardío!, tras alcanzar la medida de la mitad de la vida de su padre, la Parca helada se lo llevó. Y, tras consolar su herida con la ciencia de los números durante cuatro años, acabó su vida. (Antología Palatina<sup>4</sup>. Problema 126.)

En la Antología Palatina no hay más que este enunciado. Nosotros, con el poder que nos da el sistema de signos que enseñamos en la secundaria, podríamos inmediatamente traducir este problema a una ecuación

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + \frac{x}{2} + 5 + 4 = x$$

Es una ecuación simple, con una sola incógnita y de primer grado, pero que pertenece al tipo de ecuaciones que la investigación en didáctica de las matemáticas ha calificado de algebraicas porque para poderlas resolver es necesario operar la incógnita<sup>5</sup> en la medida en que tenemos la incógnita en los dos lados de la ecuación, y no se puede invertir el conjunto de operaciones para, por inversión de las operaciones y realizando por tanto únicamente operaciones aritméticas, resolver la ecuación.

Sin embargo, en el contexto en que este problema está planteado no cabe esperar que aquellas personas a las que el problema se les dirige vayan a escribir una ecuación. Sería anacrónico suponer que se va a resolver con el lenguaje del álgebra escolar actual, pero tampoco puede pensarse que se vaya a resolver con el lenguaje de otras álgebras anteriores.

Lo que cabe pensar es que aquí está subyacente la misma idea de las fracciones y el hacer una suposición que nos haga fácil el cálculo con las fracciones. Y eso se nota mucho más si uno se entretiene un momento en examinar cuáles son de hecho los números que quien ha escrito el enunciado del problema ha decidido poner. ¿Y esto por qué? Porque el común denominador de las fracciones resulta que es 84. Y sumadas esas fracciones resulta que el numerador es 75, y los números que ahora tenemos resulta que están relacionados de forma extraordinariamente simple: la diferencia entre el denominador y el numerador es precisamente el número entero.

$$\frac{75}{84}x + 9 = x$$

La elección de los datos del enunciado por quien lo ha redactado permite eludir con facilidad la operación de la incógnita. Se puede usar ahora el método de falsa posición y, siguiendo la elección natural que hemos visto hacer a los matemáticos egipcios, tomar como cantidad supuesta 84, el denominador, con lo que en este caso la cantidad supuesta resulta ser la solución del problema. Así que ni siquiera hace falta que este 84 sea la suposición propia del método de falsa posición, basta con que se piense en términos de ochenta y cuatroavos, y entonces la cantidad desconocida es la unidad, es decir, 84.

---

<sup>4</sup> Conozco dos ediciones del texto griego de la Antología Palatina, una hecha por W. R. Paton para la colección de clásicos Loeb, con traducción al inglés (*The Greek Anthology*); otra hecha por Félix Buffière para la colección en la que la editorial Les Belles Lettres se propone editar todos los textos clásicos griegos y latinos, con traducción al francés (*Anthologie Grecque. Anthologie Palatine*). En la primera, este problema aparece en las páginas 92-95; en la segunda, en las páginas 91-92.

<sup>5</sup> Esta afirmación apareció por primera vez en Filloy and Rojano (1984) y es uno de los aspectos centrales de la tesis doctoral Rojano (1985).

#### 4. BABILONIA: UN CÁLCULO DE CORTAR Y PEGAR

Saltamos ahora de nuevo hacia atrás en el tiempo y nos colocamos otra vez en torno al 1600 antes de nuestra era, pero ahora no a las orillas de un río, el Nilo, sino entre ríos, en Mesopotamia.

El grueso de lo que se conoce de la matemática babilónica ha sido interpretado tradicionalmente como enunciados disfrazados con terminología geométrica, pero que son de hecho enunciados algebraicos<sup>6</sup>. Una interpretación reciente hecha por Høyrup<sup>7</sup> pretende ver estos enunciados de una manera estrictamente literal y leer entonces un enunciado como

Lado y cuadrado acumulados, 110,

que en las interpretaciones anteriores se había visto como un enunciado aritmético porque un lado y un cuadrado no se pueden sumar, y entonces estaría representando algo similar a lo que en nuestras escrituras actuales es

$$x^2 + x = 110,$$

estrictamente como un enunciado sobre lados y cuadrados.

Para ello hace falta interpretar que las líneas, en la conceptualización babilónica, son gordas, son líneas que están dotadas de una anchura. Entonces podemos ver lo que hacen los escribas babilónicos para resolver este problema como un trabajo explícito y concreto con figuras geométricas que se cortan, se cambian de posición y se pegan.

Voy a mostrar ahora cómo, visto de esta forma, encontramos en los procedimientos que los babilonios usan para resolver estos problemas algunos procedimientos que conocemos actualmente para la resolución de ecuaciones como el procedimiento de completar el cuadrado, que en las tablillas babilónicas lleva el nombre de “el método akadio”. En las tablillas babilónicas no hay dibujos, de modo que los que yo voy a hacer no están en ellas, sino que son una representación de los cálculos que están escritos en las tablillas como solución del problema.

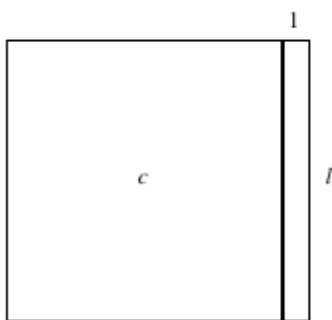


Figura 2

Representamos literalmente el enunciado del problema mediante un cuadrado con un rectángulo de anchura 1 pegado a él. Lo que el escriba babilónico hace en los cálculos se corresponde con las acciones de cortar el rectángulo por el medio y pegar medio rectángulo en otro lado, de manera que ahora se conoce el área del antiguo lado más

<sup>6</sup> Esta es la interpretación clásica de Neugebauer, de la que se puede encontrar una breve exposición en Neugebauer (1969).

<sup>7</sup> Høyrup lleva desarrollando esa interpretación en múltiples artículos desde hace años. Recientemente la ha expuesto de forma extensa y sistemática en su libro *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin* (Høyrup, 2002).



cuadrado acumulado, que tiene forma de rectángulo y aquí, en la figura transformada, tiene forma de lo que los griegos llamarán siglos después un gnomon.

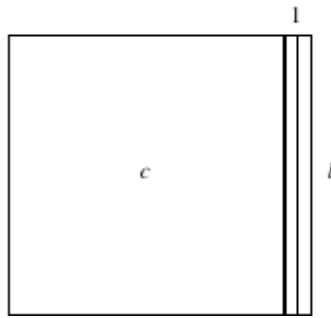


Figura 3

Pero hay un cuadradito de área conocida que completa el gnomon formando un cuadrado. El cuadradito es de área conocida porque el ancho de la línea gorda es 1, y, por tanto, el lado del cuadradito es 1/2.

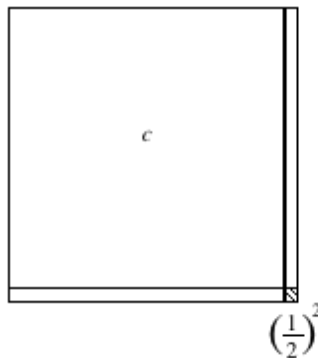


Figura 4

Se conoce el área del gnomon y como se conoce el área del cuadradito que se ha añadido se puede ahora calcular el lado del cuadrado nuevo y, por tanto, también calcular el lado del cuadrado original. Los cálculos del escriba, si no los efectuamos, sino que los dejamos indicados, nos recuperan una forma de la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$\sqrt{110 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2} = l$$

### 5. BABILONIA: REDUCIR A UNA CONFIGURACIÓN QUE SE SABE RESOLVER

Lo que acabamos de ver ya tiene interés como muestra del origen de algo que hacemos en el álgebra escolar: completar el cuadrado para resolver una ecuación de segundo grado. Pero aún es más interesante observar que, ante un problema que podemos parafrasear como

Un rectángulo, largo y ancho, dados área y diferencia de los lados<sup>8</sup>,

<sup>8</sup> Así como en el caso del problema anterior hemos conservamos la formulación original lo más posible, siguiendo la traducción de Høyrup, en este problema y en los que siguen presentamos el enunciado esquematizado: la figura de la que se habla (un rectángulo), las cantidades desconocidas (largo y ancho) y los datos (el área, que es el producto de las cantidades desconocidas, y la diferencia de los lados, es decir,

lo que el escriba babilónico hace podemos interpretarlo como representar ese rectángulo y buscar en él la configuración del problema anterior.

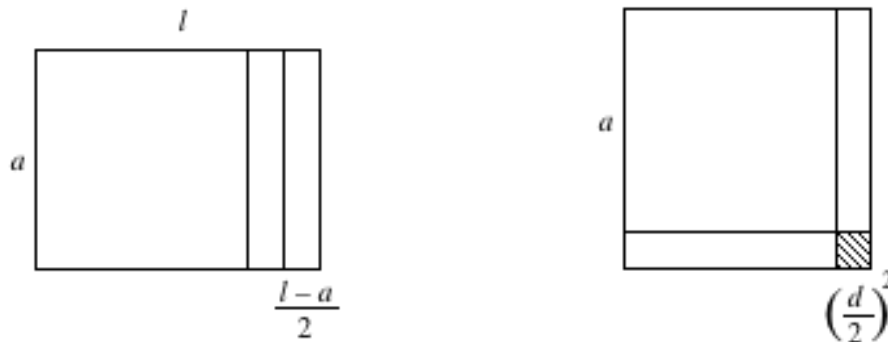


Figura 5

Si en este rectángulo se le quita el ancho a su largo y se divide por dos, la configuración que se obtiene es exactamente la misma que la del problema anterior. De nuevo conozco el área de todo el conjunto y conozco el trocito que me va a permitir completar el cuadrado. La configuración que representa las operaciones que se van a hacer es la de la figura 5. Las operaciones son las mismas de antes, con la diferencia de que donde tenía un 1 ahora he introducido un parámetro, que es la diferencia entre los lados. Puedo por tanto obtener tanto el ancho como el largo a partir de esta manipulación de áreas:

$$\sqrt{p + \left(\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{d}{2} = a \qquad \sqrt{p + \left(\frac{d}{2}\right)^2} + \frac{d}{2} = l$$

El problema pues se resuelve reduciéndolo al problema anterior.

Podría pensarse que aquí al fin y al cabo no se ha hecho más que volver a completar el cuadrado en una situación diferente. El problema se ha reducido al anterior porque se ha visto en la configuración la misma configuración del problema anterior, de modo que se han podido desencadenar las mismas acciones de cortar, mover y pegar, y las mismas operaciones aritméticas. Veamos ahora otro problema en el que la reducción a un problema anterior tiene otro carácter.

El problema es el siguiente, enunciado de forma esquemática:

Un rectángulo, largo y ancho  $(l, a)$ , dados área y suma de los lados  $(p, s)$ .

Este problema puede leerse aritméticamente, “hallar dos números, dados su producto y su suma”, pero si continuamos interpretándolo literalmente, podemos construir la configuración de la figura 6 en la que lo que ahora tengo es el rectángulo anterior al que le he añadido un cuadrado de lado el ancho, para que en la figura aparezca la suma del largo y el ancho, que es uno de los datos. Dentro de esa figura puedo volver a buscar la configuración anterior, cortando el rectángulo de la misma forma que antes. Pero ahora lo que aparece es la suma de los lados partido por dos, que es un dato, y la diferencia de los lados partido por dos, que ahora no es un dato.

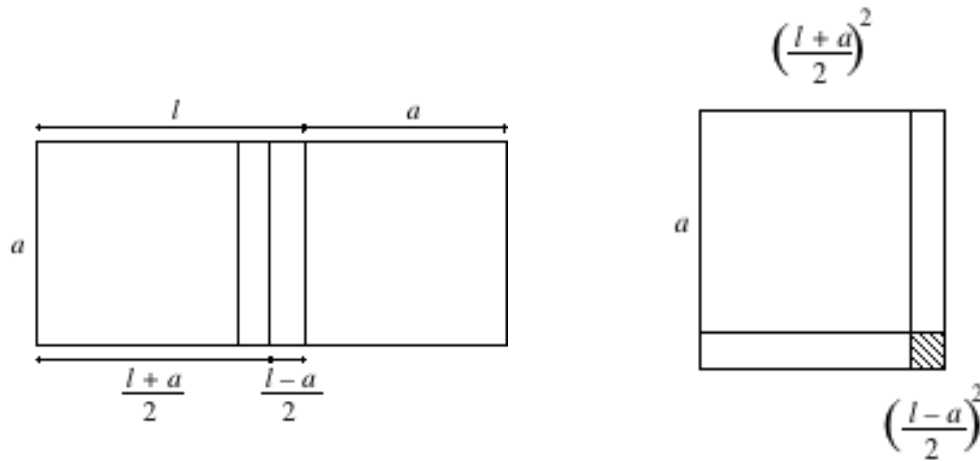


Figura 6

Si completamos el cuadrado, el cuadrado pequeñito que completa, no es conocido, es desconocido, pero el ingenio del escriba consiste en que ahora no busca una solución para esta situación que es distinta, sino que lo que hace es reducir este problema al problema anterior. Ahora bien, la forma de reducirlo al anterior es distinta, no es simplemente a través de la configuración, sino por la constatación de que, como ahora lo que conozco es la suma, y por tanto la semisuma al cuadrado me da el área de todo el cuadrado, puedo obtener el área del cuadrado pequeño a partir de la del grande. Esto no me resuelve el problema, pero me proporciona una manera de calcular la diferencia entre los lados.

$$\frac{d}{2} = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

De manera que a través de este cálculo, expresable también como la identidad algebraica

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy$$

he conseguido reducir las condiciones del problema a las condiciones del problema anterior: un rectángulo, largo y ancho, dados el área y la diferencia de los lados, problema que ya sé resolver.

La idea que pretendo subrayar con estos ejemplos es cómo lo que uno encuentra en ellos es que no se pretende encontrar un procedimiento para cada problema, sino que lo que se busca es reducir el problema a una configuración que ya se sabe resolver. De hecho se pueden encontrar en las tablillas babilónicas problemas con datos más complejos en los que la búsqueda de la configuración conocida es igualmente más compleja. Un buen ejemplo es el problema siguiente:

Un rectángulo, largo y ancho ( $l, a$ ), dados área más diferencia de los lados y suma de los lados ( $p + d, s$ ).

El escriba babilónico se las ingenia para colocar los dos datos de tal manera que el conjunto de la configuración sea ahora un nuevo rectángulo en el que lo conocido son el área y la suma de los lados.

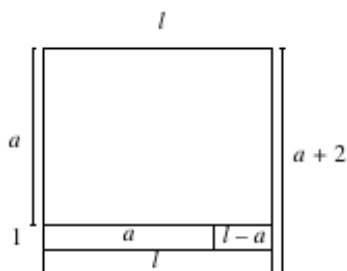


Figura 7

De manera que el problema queda reducido al problema anterior: Un rectángulo, largo y ancho, dados el área y la suma de los lados, siendo ahora el nuevo rectángulo,  $l$ ,  $a + 2$ , cuya área es conocida porque es la suma de los dos datos del problema ( $p + d + s$ ), y la suma de sus lados es conocida porque es  $s + 2$ .

## 6. BABILONIA: LA RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE PROBLEMAS

Lo que acabamos de ver tiene el interés extraordinario de su carácter analítico, la resolución de un problema buscando, a partir de la configuración que representa las cantidades presentes en el enunciado y las relaciones entre ellas, llegar a cantidades conocidas o a una configuración correspondiente a otro problema que ya se sabe resolver.

Pero aún más interesante es seguir examinando el corpus de la matemática babilónica y encontrar que, junto con estos problemas que hablan explícitamente de cuadrados, rectángulos, largo y ancho, es decir, de figuras geométricas, se encuentran problemas en cuyos enunciados las cantidades que aparecen ya no tienen que ver con cuestiones geométricas, sino que los problemas hablan de transacciones mercantiles u otras cuestiones que no pertenecen al contexto geométrico. Y descubrir que la resolución de esos problemas comienza con la asignación de nombre a las cantidades desconocidas mediante los términos que han sido utilizados en estos problemas geométricos, es decir, que a las cantidades desconocidas se les llama “largo” y “ancho”.

Es interesante saber que en los textos babilónicos, que están escritos en akadio, las palabras que se utilizan para decir “largo” y “ancho” están en sumerio, no son de la lengua en que se está escribiendo sino de una lengua hablada por quienes anteriormente dominaban Mesopotamia, que es una lengua de estructura totalmente distinta. De manera que esas palabras están funcionando como “términos funcionalmente abstractos”<sup>9</sup> que pueden adoptar otros significados distintos de los significados geométricos originales. Dicho de otra forma, en estos problemas hay elementos de lo que es la resolución de problemas utilizando el lenguaje del álgebra. En concreto: 1) hay un lenguaje de figuras geométricas en el que se pueden representar los problemas, 2) se pueden traducir los enunciados a ese lenguaje, 3) hay un cálculo en ese lenguaje (el cálculo en este caso es físico, de cortar, cambiar de posición y pegar), y 4) hay algunas configuraciones que, si se tiene esa configuración (esa expresión en ese lenguaje), entonces se sabe resolver. De manera que lo que se intenta cuando se tiene una expresión (configuración), resultado de la traducción de un problema, es transformarla en alguna expresión (configuración) que ya se sabe resolver. No hay un lenguaje simbólico como el del álgebra actual, pero sí que hay estos rasgos que son rasgos de una manera algebraica de resolver problemas.

<sup>9</sup> La expresión es de Høyrup.

## 7. EL MÉTODO CARTESIANO COMO PARADIGMA DE LA RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE PROBLEMAS

Acabamos de mencionar algunos elementos de la resolución algebraica de problemas tal y como hemos analizado que aparecen en la matemática babilónica. La descripción canónica del método algebraico de resolución de problemas se debe a Descartes. En las *Regulæ ad directionem ingenii* (*Reglas para la dirección del espíritu*), un texto que se publicó en 1701<sup>10</sup> tras la muerte de Descartes y que está inconcluso, se puede encontrar expuesto lo que hay que hacer para traducir un problema en ecuaciones. Así lo entendió Polya, quien en el capítulo “El patrón cartesiano” de su libro *Mathematical Discovery*, reescribió las reglas cartesianas pertinentes de tal forma que se pudieran ver como pautas de resolución de problemas que usan el sistema de signos del álgebra. La paráfrasis de Polya de las reglas de Descartes es la siguiente:

(1) En primer lugar, comprender bien el problema, luego convertirlo en la determinación de cierto número de cantidades desconocidas. (Reglas XIII a XVI)

[...]

(2) Examinar el problema de la manera más natural considerándolo como resuelto y presentando en un orden conveniente todas las relaciones que deben verificarse entre las incógnitas y los datos según la condición planteada. (Regla XVII)

[...]

(3) Separar una parte de la condición que permita expresar una misma cantidad de dos maneras diferentes y obtener así una ecuación entre las incógnitas. Descomponer eventualmente la condición en varias partes. Obtendréis así un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas. (Regla XIX)

[...]

(4) Transformar el sistema de ecuaciones en una única ecuación. (Regla XXI) (Polya, 1966, pp. 27-28)

El método cartesiano también puede enunciarse en forma de pasos que describan la conducta del sujeto ideal, es decir, de un usuario competente, de manera que cada uno de los pasos muestra cada una de las acciones clave del método, como ya he hecho en otras ocasiones (Puig, 2003; Puig y Rojano, 2004):

- 1) Una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.
- 2) Elección de una cantidad que se va a representar con una letra (o de unas cuantas cantidades que se van a representar con letras distintas).
- 3) Representación de otras cantidades mediante expresiones algebraicas que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tienen con otras que ya han sido previamente representadas por una letra o una expresión algebraica.
- 4) Establecimiento de una ecuación (o tantas como letras distintas se haya decidido introducir en el segundo paso), igualando dos expresiones, de las que se han escrito en el tercer paso, que representen la misma cantidad.

Estos cuatro pasos ideales, sin embargo, no describen más que la parte del método que consiste en la traducción al sistema de signos del álgebra. Pero para resolver el

---

<sup>10</sup> En una recopilación de inéditos hecha en Holanda en 1701, bajo el título de *Opuscula posthuma physica et mathematica*.

problema no basta con traducirlo al sistema de signos del álgebra. Hace falta ser capaz de resolver el problema en el sistema de signos al que se ha traducido. En la serie de problemas babilónicos he subrayado que lo que se hace no es resolver cada problema de nuevo sino intentar transformar la configuración en otra que ya se sabe resolver. Con el sistema de signos del álgebra esta idea alcanza su absoluto apogeo y su culminación. Pero para ello hacen falta dos cambios fundamentales en la propia idea de las configuraciones que se saben resolver y las transformaciones para obtenerlas.

El primero es pensar en tener no un catálogo de aquellas configuraciones que ya se sabe resolver, como los babilónicos, y entonces llegar a una de ellas, sino un catálogo de *todas* las configuraciones *posibles*. Este cambio de perspectiva de catalogar lo que uno sabe resolver a catalogar todo lo posible, va a ser fundamental en la evolución de lo que luego vamos a llamar el álgebra. Además, va a ser necesario entonces tener un cálculo que nos permita llevar cualquier expresión que se tenga en el sistema de signos (del álgebra) a aquellas expresiones que se ha decidido que son todas las posibles. Ahora bien, *todas* las expresiones posibles tiene que interpretarse de alguna manera como *todos los tipos* de expresiones posibles, so pena de tener que lidiar con un número infinito de posibilidades; de modo que ha de aparecer la idea de constituir formas canónicas. Es decir, tiene que aparecer la idea de que dentro de ese sistema de signos hay algunas configuraciones que son especiales y que agotan todas las posibilidades de configuraciones.

En segundo lugar, una vez ha aparecido la idea de encontrar todas las formas canónicas posibles, ya no se trata de catalogar las expresiones que se sabe resolver, sino de tener un algoritmo para cada una de esas formas canónicas.

Ése el proyecto de la resolución algebraica de problemas que está definido y terminado en la obra de Descartes, si examinamos además de las *Regulæ* lo que Descartes trató en la *Geometría*. Porque, como ya hemos dicho, en las *Regulæ* sólo está la traducción al sistema de signos del álgebra, los primeros cuatro pasos del método, y el siguiente paso, la resolución de la ecuación, está estudiado en el libro que se titula *Geometría*. Descartes mismo dice que su álgebra esta desarrollada en la *Geometría*, libro que publicó en francés como apéndice al *Discurso del método*<sup>11</sup>, y en él puede verse que las formas canónicas de Descartes son los polinomios (con ligeras variantes respecto a los polinomios actuales, que no trataremos aquí –ver Puig, 2003 o Puig y Rojano, 2004).

Establecido pues en forma de método la traducción de los enunciados de los problemas al sistema de signos del álgebra, la idea de forma canónica en ese sistema de signos, que las formas canónicas son los polinomios y un cálculo con las expresiones cuyo objetivo es reducirlas a esas formas canónicas, el proyecto algebraico ha de ser encontrar un algoritmo para resolver cualquier ecuación polinómica. Sabemos que la historia de este proyecto se salda con la demostración de la imposibilidad de encontrar algoritmos para todos los polinomios y que esto conduce al estudio de las condiciones de resolubilidad y al álgebra moderna, gracias a los trabajos de Lagrange, Abel y Galois. No vamos a seguir ese hilo de la historia, sino que vamos a saltar de nuevo hacia atrás en el tiempo.

---

<sup>11</sup> Hay una buena traducción castellana del *Discurso del Método* que contiene los apéndices, en particular, la *Geometría* (Descartes, 1981) y una edición en facsímil del original francés de la *Geometría*, acompañada de su traducción al inglés (Descartes, 1925).

## 8. AL-KHWÂRIZMÎ: EL NACIMIENTO DEL ÁLGEBRA EN EL SIGLO IX

El salto lo hacemos al siglo IX en el Islam medieval, para examinar *El libro conciso del cálculo de al-jabr y al-muqâbala*<sup>12</sup>, que escribe al-Khwârizmî por encargo del califa al-Ma'mûn, y ver que en él al-Khwârizmî ya ha puesto en marcha el proyecto algebraico que acabamos de describir, pero sin un sistema de signos como el del actual álgebra simbólica.

Lo que al-Khwârizmî hace en el libro es comenzar examinando las *especies* de números que aparecen en los cálculos y para ello parece estar considerando el mundo de los problemas comerciales y de herencias. Este mundo es lineal o cuadrático, y, en el curso de los cálculos, hay números que se multiplican por sí mismos, entonces son “raíces” de otros números, y los números que resultan de un número que se ha multiplicado por sí mismo son *mâl*, literalmente, “posesión” o “tesoro”; otros números no se multiplican por sí mismos, ni son el resultado de un número que se ha multiplicado por sí mismo, no son, por tanto, ni raíces, ni tesoros, son “simples números” o *dirhams* (la unidad monetaria). Tesoros, raíces y simples números son pues las especies de números que al-Khwârizmî va a considerar. Dicho de otra forma, al-Khwârizmî va a hablar de cosas que están conceptualizadas en el contexto del cálculo mercantil y con palabras cargadas con los significados propios de ese contexto va a construir el conjunto de las posibilidades que nosotros construiríamos como los polinomios de grado menor o igual que dos. Se puede buscar antecedentes de ello en la *Aritmética* de Diofanto, en donde también hay especies de números, pero en el libro de Diofanto está ausente la voluntad de agotar posibilidades.

Una expresión algebraica, en el libro de al-Khwârizmî tiene este aspecto

اربعة اتاع مال وتسعة دراهم الأربعة اجذار يعدل جذرا

lo que literalmente significa “cuatro novenos de tesoro y nueve dirhams menos cuatro raíces, igual a una raíz”, y en ella todo escrito en lenguaje natural (incluso los números, pese a que al-Khwârizmî había escrito un libro en el que explicaba el sistema de numeración decimal posicional hindú y el cálculo con él<sup>13</sup>). Esta expresión equivale a nuestra expresión algebraica

$$\frac{4}{9}x^2 + 9 - 4x = x$$

y al-Khwârizmî va a tratarla de la misma manera que tratamos las actuales expresiones algebraicas, con la excepción de que su cálculo con las expresiones no va a poder ser sintáctico.

Lo que en el siglo IX constituye una radical novedad en el libro de al-Khwârizmî y permite decir que con él comienza el álgebra es:

<sup>12</sup> He utilizado la edición de Rosen (1831) del único manuscrito existente del libro de al-Khwârizmî, en la que junto al texto árabe hay también una traducción al inglés. La traducción de Rosen moderniza el lenguaje de al-Khwârizmî, mi versión castellana pretende ser más literal y está construida comparando el texto árabe con la traducción de Rosen y con la versión latina de Gerardo de Cremona, editada por Hughes (1986).

<sup>13</sup> No se ha encontrado hasta la fecha ningún manuscrito del texto árabe, sino sólo de sus traducciones medievales al latín. Hay una edición reciente de ellas de André Allard (al-Khwârizmî, 1992).

- 1) Se plantea tener un *conjunto completo de posibilidades* de combinación de las diferentes especies de números (formas canónicas).
- 2) Se propone tener una regla algorítmica para resolver *cada una* de las formas canónicas, y
- 3) establecer un conjunto de operaciones de cálculo con las expresiones que hagan posible *reducir cualquier ecuación* formada con esas especies de números a una de las formas canónicas.

De modo que *todas las ecuaciones posibles serán entonces resolubles en ese cálculo.*

Pero además, al-Khwârizmî establece un método para traducir cualquier problema (cuadrático) a una ecuación expresada en términos de esas especies, de manera que *todos los problemas cuadráticos serán resolubles en ese cálculo.*

El proyecto de resolución de problemas de al-Khwârizmî es algebraico pues, porque lo que se plantea es reducir los problemas a familias y resolver familias de problemas.

En Puig (1998) he examinado el libro de al-Khwârizmî con un cierto grado de detalle, aquí me limitaré a mostrar, para terminar, cómo resuelve al-Khwârizmî un problema.

#### 9. LA VERSIÓN DE AL-KHWÂRIZMÎ DEL MÉTODO CARTESIANO EN ACCIÓN

Al-Khwârizmî presenta siempre la solución de los problemas de la misma manera, que podemos dividir en los pasos siguientes:

- 1) Enunciado.
- 2) Construcción de la ecuación.
- 3) Reducción a una forma canónica.
- 4) Aplicación de la regla algorítmica.
- 5) Enunciado del resultado.
- 6) Comentario.

Veámoslo con un ejemplo:

- 1) Enunciado:

He dividido diez en dos partes; luego he multiplicado cada parte por sí misma y sumadas resulta cincuenta y ocho dirhams.

Con el sistema de signos del álgebra actual, el problema lo resolveríamos, por ejemplo, como sigue:

- 1) Traducción del enunciado al sistema de signos del álgebra:

$$x^2 + (10 - x)^2 = 58$$

- 2) Reducción a una forma canónica:

$$x^2 + 100 - 20x + x^2 = 58$$

$$2x^2 - 20x + 42 = 0$$

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$



3) Aplicación de la regla algorítmica:

$$\frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 21}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{10 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{14}{2} = 7 \\ \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

Lo que al-Khwârizmî hace es lo siguiente:

2) Construcción de la ecuación:

Procedimiento. Haces una de las partes cosa y la otra diez menos cosa.

$$c, 10 - c$$

Multiplica luego diez menos cosa por sí mismo, resulta cien y un tesoro menos veinte cosas.

$$(10 - c)(10 - c) \text{ es } 100 + t - 20c$$

Multiplica luego cosa por cosa, resulta tesoro.

$$c \cdot c \text{ es } t$$

Suma luego ambos, resulta la suma cien y dos tesoros menos veinte cosas igual a cincuenta y ocho dirhams.

$$100 + 2t - 20c = 58$$

La palabra “cosa” del lenguaje natural la utiliza al-Khwârizmî como un nombre para designar con él lo desconocido, pero “cosa” es un nombre común para representar cualquier cantidad desconocida, no el nombre propio de una cantidad desconocida determinada, a diferencia de lo que establece el método cartesiano; de hecho, al-Khwârizmî no dice “la cosa”, sino “cosa”, es decir, “una cosa”, cuando se refiere a la cantidad desconocida a la que denomina “cosa”. Este hecho será causa de dificultades porque, al haber sólo una palabra para designar lo desconocido, si tengo dos cantidades desconocidas, no tengo manera de nombrarlas en este sistema de signos con dos nombres propios distintos. Lo que puedo hacer es nombrar una de ellas con “cosa” y la otra con un nombre compuesto como “diez menos cosa”. En este problema no es difícil nombrar así todas las cantidades desconocidas, pero en otros problemas en que las relaciones sean más intrincadas, el hecho de no tener más nombre que “cosa” hace que el sistema de signos de al-Khwârizmî no sea muy eficiente.

3) Reducción a la forma canónica:

Restaura luego esos cien y dos tesoros de las veinte cosas substraídas y súmalas a los cincuenta y ocho,

$$100 + 2t - 20c = 58 \\ + 20c \quad + 20c$$

resulta cien y dos tesoros igual a cincuenta y ocho dirhams y veinte cosas.

$$100 + 2t = 58 + 20c$$

Para hacer la reducción a la forma canónica, al-Khwârizmî aplica las operaciones del cálculo. “Restaura” es el verbo correspondiente al nombre de la operación que aparece en el título del libro: *al-jabr*, restauración. “Restaura [...] de las 20 cosas substraídas”. ¿Por qué “restaura”? Porque en la conceptualización de la época, si yo tengo una cantidad a la que se le subtrae algo, esa cantidad, en la medida en que no son concebibles las cantidades negativas, se concibe como algo a lo que le falta algo, y, como le falta algo, lo que hay que hacer es *restaurarlo*. Literalmente, el término es éste porque las relaciones entre las cantidades están concebidas de esa manera. Así que lo que hace al-Khwârizmî es algo que se parece pero no es nuestra transposición de términos, porque a él nunca se le ocurriría pasar una cantidad positiva al otro término haciéndola negativa: eso iría contra la naturaleza de la operación.

Reduce luego eso a un solo tesoro tomando la mitad del conjunto,

$$\frac{1}{2}(100 + 2t = 58 + 20c)$$

resulta cincuenta dirhams y un tesoro igual a veintinueve dirhams y diez cosas.

$$50 + t = 29 + 10c$$

Opón luego con ése el otro, quitando veintinueve de cincuenta,

$$50 + t = 29 + 10c$$

$$-29$$

queda veintiún y tesoro igual a diez cosas.

$$21 + t = 10c$$

Al-Khwârizmî continúa aplicando otras operaciones del cálculo hasta que obtiene una forma canónica. En este caso las operaciones que necesita son otras dos: “reducir” y “oponer”. “Reducir”, para que sólo haya un tesoro, ya que en las formas canónicas es así, para lo cual calcula la mitad de la ecuación *considerada como un todo*. “Oponer”, porque en las formas canónicas ninguna de las especies de números aparece repetida y aquí hay una que está repetida, los “simples números”.

#### 4) Aplicación de la regla algorítmica:

Entonces halla la mitad de las raíces, resulta cinco;

$$\frac{10}{2} = 5$$

multiplicalo por sí mismo, resulta veinticinco.

$$\left(\frac{10}{2}\right)^2 = 25$$

Quita luego de esto los veintiuno añadidos al tesoro, queda cuatro.

$$\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21 = 4$$

Extrae su raíz, resulta dos

$$\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 2$$

Quítala luego de la mitad de las raíces, que es cinco, queda tres.

$$\frac{10}{2} - \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 3$$

La regla algorítmica de al-Khwârizmî no es sino la que los babilonios habían establecido, en esa misma tierra entre ríos, milenios antes. De hecho la comprobación de que la regla algorítmica es correcta la hace al-Khwârizmî representando la ecuación mediante una figura y realizando un razonamiento que responde como el de los babilonios a un procedimiento de cortar, mover y pegar<sup>14</sup>.

#### 5) Resultado.

Es una de las dos partes, y la otra es siete.

#### 6) Comentario.

Este problema se refiere a uno de los seis tipos, que es “tesoro y números igual a raíces”.

Al-Khwârizmî mismo pues subraya en su comentario que lo que importa es que no ha tenido que ingeniar un procedimiento particular para resolver este problema, sino que

<sup>14</sup> Ver mi análisis de la demostración de al-Khwârizmî del algoritmo de solución de la quinta forma canónica en Puig (1998).

lo que ha hecho, gracias a su sistema de signos y su cálculo, es determinar que este problema pertenece a una familia de problemas que ya se sabe resolver. Éste es el corazón de la resolución algebraica de problemas.

#### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- al-Khwârizmî, M. b. M. (1992). *Le calcul indien (Algorismus)*, ed. A. Allard. Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.
- Anthologie Grecque. Première partie. Anthologie Palatine. Tome XII (Livres XIII-XV)*. Texte établi et traduit par Félix Buffière. Paris: Les Belles Lettres. 1970.
- Chace, A. B. (1979). *The Rhind Mathematical Papyrus*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Couchoud, S. (1993). *Mathématiques égyptiennes. Recherches sur les connaissances mathématiques de l'Égypte pharaonique*. Paris: Éditions Le Léopard d'Or.
- Descartes, R. (1701). *Opuscula posthuma physica et mathematica*. Amsterdam: Typographia P. & Blaev J.
- Descartes, R. (1925). *The Geometry of René Descartes with a facsimile of the first edition, translated from French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham*. Chicago, Ill: Open Court Publishing Co. [Reprinted New York, NY: Dover, 1954.]
- Descartes, R. (1981). *Discurso del método, Dióptrica, Meteoros y Geometría*. Prólogo, traducción y notas de Guillermo Quintás. Madrid: Alfaguara.
- Filloy, E. y Rojano, T. (1984). From an Arithmetical to an Algebraic Thought (A clinical study with 12-13 year olds). In J. Moser (Ed.) *Proceedings of the Sixth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (pp. 51-56). Madison, WI.
- Høyrup, J. (1994). The Antecedents of Algebra. *Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetcenter. 3. Række: Preprint og Reprints 1994* nr. 1.
- Høyrup, J. (2002). *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*. New York: Springer Verlag.
- Hughes, B. (1986). Gerard of Cremona's translation of al-Khwârizmî's al-jabr: A critical edition. *Mediaeval Studies* 48, 211-263.
- Neugebauer, O. (1969). *The exact sciences in antiquity*. New York: Dover.
- Polya, G. (1966). *Mathematical Discovery. 2 vols*. New York: John Wiley and Sons.
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares, col. Mathema.
- Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwârizmî restaurado. En F. Hitt (Ed.). *Investigaciones en matemática educativa II* (pp. 109-131). México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En Castro, E.; Flores, P.; Ortega, T.; Rico, L. y Vallecillos, A., (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 97-108). Granada: Universidad de Granada.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Ed. Síntesis.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. In E. Filloy y T. Rojano (Eds.) *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (pp. 35-48). Cuernavaca, Morelos: PNFAPM.
- Puig, L. y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In K. Stacey, H. Chick, and M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Boston / Dordrecht / New York / London: Kluwer Academic Publishers.
- Rojano, T. (1985). *De la aritmética al álgebra (un estudio clínico con niños de 12 a 13 años de edad)*. Tesis doctoral. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Rosen, F. (1831). *The algebra of Mohammed Ben Musa*. London: Oriental Translation Fund.
- The Greek Anthology, with an English translation by W. R. Paton, in five volumes. Vol. V*. Cambridge, Mass: Harvard University Press y London: William Heinemann, ltd. 1918.