FENÓMENOS Y AJUSTES.
UN MODELO DE ENSEÑANZA DEL PROCESO DE MODELIZACIÓN Y LOS CONCEPTOS DE PARÁMETRO Y FAMILIA DE FUNCIONES

Luis Puig[1] y Onofre Monzó[2]
(1) Departamento de Didáctica de las Matemáticas / Departamento de Matemática Educativa
Universitat de València Estudi General / Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México
(2) IES Veles e Vents de Torrent / Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universitat de València Estudi General

Puig, L. y Monzó, O. (2013). Fenómenos y ajustes. Un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones. En T. Rojano (Ed.) *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas* (pp. 9-35) México: Trillas.

FENÓMENOS Y AJUSTES.
UN MODELO DE ENSEÑANZA DEL PROCESO DE MODELIZACIÓN Y LOS CONCEPTOS DE PARÁMETRO Y FAMILIA DE FUNCIONES[1].

Luis Puig[1] y Onofre Monzó[2]
(1) Departamento de Didáctica de las Matemáticas / Departamento de Matemática Educativa
Universidad de Valencia / Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México
(2) Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia

1.1. RESUMEN

En este capítulo, exponemos un modelo de enseñanza en el que se estudian el proceso de modelización, los conceptos de familia de funciones y forma canónica de una familia de funciones y el significado de los parámetros de las formas canónicas con respecto a la función y al fenómeno que se modeliza. Todo ello usando calculadoras gráficas simbólicas y realizando experimentos en los que se toman datos reales mediante sensores.

Este modelo de enseñanza se fundamenta en el análisis cualitativo como mecanismo de guía y control del conjunto del proceso de modelización, en dar sentido a las transformaciones algebraicas para la obtención de formas canónicas, y en el estudio de las transformaciones de las gráficas de las funciones expresadas por los cambios en los parámetros, en particular, los necesarios por las peculiaridades de la calculadora.

Examinamos además el proceso por el cual los alumnos se adaptan a analizar los conceptos involucrados tal y como aparecen en la calculadora, y el proceso por el cual los alumnos adaptan la calculadora para usarla en el análisis de los fenómenos.

1.2. INTRODUCCIÓN

En el currículo de secundaria, el álgebra ha de presentarse, al menos, desde tres puntos de vista: el álgebra como un sistema de signos en que realizar los procesos de generalización, abstracción y demostración; el álgebra como un instrumento para la resolución de problemas a través de la traducción de éstos a sistemas de ecuaciones o gráficas de funciones, y el álgebra como sistema de signos que permite que los fenómenos modelados mediante funciones se organicen en familias, cuyas características se establecen y se estudian en el plano de la expresión.

El primero de estos aspectos conduce a la elaboración de materiales de enseñanza en los que se estudien pautas en configuraciones geométricas o en conjuntos ordenados de números, se elaboren conjeturas expresadas en el lenguaje del álgebra, y se demuestren esas conjeturas por procedimientos en los que el dominio de las transformaciones de las expresiones algebraicas es importante. Las expresiones algebraicas pueden adquirir significado para los estudiantes al resolver estas situaciones de enseñanza en la medida en que permiten expresar de forma general relaciones que representan las configuraciones geométricas o las series de números. Y las transformaciones algebraicas tienen sentido en la medida en que pueden dar cuenta del hecho de que expresiones algebraicas distintas, obtenidas por ejemplo por alumnos distintos en una misma sesión de trabajo, representan la misma configuración geométrica o serie de

[1] Esta investigación es parte del proyecto EDU2009-10599 subvencionado por la Dirección General de Investigación Científica y Gestión del Plan Nacional I+D+I del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

números, lo que atestigua la posibilidad de pasar de una a otra a través de esas transformaciones.

El segundo de los aspectos corresponde a la resolución algebraica de problemas de enunciado verbal, es decir, a la resolución de problemas tal y como la establece el método cartesiano[2].

En este caso, las expresiones algebraicas son el resultado de un proceso de traducción vía una lectura analítica del enunciado que lo reduce a cantidades y relaciones entre ellas, y para los aprendices tienen el significado que traen de ese proceso de traducción (significado del que tendrán que desprenderse en algún momento, para realizar sin obstrucciones las transformaciones algebraicas, y al que habrán de saber volver, para llevar el resultado de la ecuación al resultado del problema[3]).

Las transformaciones algebraicas tienen sentido aquí en la medida en que garantizan que cualquier ecuación podrá llevarse a una forma canónica, y, por tanto, podrá resolverse, ya que las formas canónicas se saben resolver, con lo que, en consecuencia, cualquier problema puede resolverse.

El tercero de los aspectos es el que vamos a tratar en este texto. En este caso, las expresiones algebraicas representan relaciones funcionales y su significado está ligado a los procesos de traducción entre ellas, las tablas de datos numéricos y las representaciones gráficas cartesianas, que con el soporte de la calculadora gráfica simbólica se realizan de forma automática, mediando, en su caso, decisiones del usuario de la calculadora sobre la ventana con que se mira la gráfica, el tamaño del incremento y de la longitud de la tabla, o la expresión algebraica concreta elegida para representar la relación funcional. Las transformaciones algebraicas tienen sentido aquí de nuevo en la medida en que garantizan que cualquier expresión algebraica podrá llevarse a una forma canónica. Pero, en este caso, las formas canónicas están elegidas de manera que sus coeficientes (o parámetros) indiquen propiedades de los fenómenos modelados con esas expresiones.

En los tres casos, las transformaciones algebraicas tienen sentido, no en sí mismas, sino por la posibilidad que ofrecen de mostrar que expresiones distintas pueden representar una misma situación, y porque permiten obtener aquellas expresiones que son más convenientes para el tratamiento de la situación. Es harto conocido que los alumnos a menudo manipulan las expresiones algebraicas siguiendo reglas aprendidas de forma mecánica, sin que le vean sentido a lo que hacen. Esto puede atribuirse a su trabajo desligado de las situaciones que le dan sentido, en ejercicios en los que lo único que se plantea es la mera ejecución de las reglas de transformación. En el modelo de enseñanza que presentamos aquí pretendemos que los alumnos puedan aprender las transformaciones algebraicas con sentido, precisamente porque éstas aparecen en uno de los tres contextos que hemos indicado: el de la modelización de fenómenos.

Pero además, en este modelo de enseñanza, las relaciones funcionales se estudian realizando experimentos en los que se toman datos reales mediante los diversos sensores que se pueden acoplar a una calculadora gráfica simbólica. Una de las potencialidades de estas calculadoras es precisamente ésta: que permiten que sea posible que los datos reales sean obtenidos en experimentos realizados en las aulas. Y no sólo esto, sino que la calculadora gráfica simbólica permite que esos datos reales puedan ser presentados en tres sistemas de signos interrelacionados: tablas, gráficas cartesianas y expresiones algebraicas. En efecto, los datos del fenómeno observado en el

[2] Ver un análisis histórico del Método Cartesiano, y su presentación desglosado en pasos, que permiten considerar cuáles son los elementos que constituyen la competencia en la resolución algebraica de problemas verbales en Puig (2003, 2006a) y Puig & Rojano (2004).

[3] Sobre este asunto véase Filloy, Puig y Rojano (2008).

experimento, obtenidos mediante los sensores, se almacenan en tablas, donde están representados como listas de números. La calculadora gráfica simbólica permite representarlos también como nubes de puntos en el plano cartesiano con un trabajo mínimo por parte del usuario, y como gráficas cartesianas y expresiones algebraicas, mediando el ajuste de las nubes de puntos a alguna de las funciones incorporadas en la calculadora. Esto último exige del usuario de la calculadora un trabajo para el que precisa conocer el significado del ajuste de una función a una nube de puntos, no precisa conocer la técnica para realizar el ajuste, ya que la calculadora es la que realiza el cálculo, pero sí que precisa conocer la forma particular en que la calculadora realiza ese ajuste y las posibilidades que ofrece.

El modelo de enseñanza que presentamos tiene, pues, la virtud de permitir que los estudiantes tengan la oportunidad de dotar de sentido al uso de las transformaciones de las expresiones algebraicas, transformaciones que, en la enseñanza tradicional, a menudo se aprenden de forma mecánica y acaban ejecutándose sin sentido. Aquí las transformaciones adquieren sentido, ya que su finalidad es expresar las relaciones entre las cantidades que se han medido en el experimento que se ha realizado de modo que presenten directamente propiedades notables del fenómeno observado, y de modo que se pueda utilizar el instrumento "calculadora gráfica simbólica" para tratar esos datos.

Pero además de proporcionar sentido al uso del sistema de signos del álgebra, el modelo de enseñanza también sustenta que los alumnos puedan adquirir una concepción de la naturaleza de las matemáticas, en la que sus conceptos se consideran como medios de organización de fenómenos de la experiencia (matemática). En Puig (1997) se presentan las características básicas de una concepción de la naturaleza de las matemáticas de ese estilo, basada en ideas de Freudenthal (1983), combinadas con otras de Lakatos (1976) y Kitcher (1984). Para lo que aquí nos interesa, señalaremos únicamente que concebir los conceptos matemáticos como medios de organización de fenómenos de nuestra experiencia no significa que se esté hablando simplemente de una experiencia directa con fenómenos del mundo real. Una característica fundamental de las matemáticas es que sus conceptos, elaborados para organizar fenómenos de la experiencia, son a su vez tomados como objetos de la experiencia matemática que piden nuevos medios de organización en un proceso de abstracción progresiva, y que en la objetivación desempeñan un papel fundamental los sistemas matemáticos de signos, también más abstractos, con los que se crean y se expresan conceptos matemáticos más abstractos. La elaboración de conceptos matemáticos puede imaginarse pues como una escalera en la que sobre cada par fenómenos / medios de organización (conceptos) se coloca un nuevo par fenómenos / medios de organización (conceptos).

En Treffers y Goffree (1985) o Treffers (1987) se usa una imagen similar para subrayar que el proceso de matematización no se limita a la organización de fenómenos de la experiencia, sino que en el proceso de matematización cabe distinguir dos direcciones: una matematización horizontal que va de los fenómenos a los conceptos, y una matematización vertical en la que se matematizan los propios conceptos matemáticos[4].

El currículo de matemáticas que bautizaron con el nombre de *Realistic Mathematics Education* se distingue de otros currículos precisamente por su énfasis en las dos direcciones, horizontal y vertical, de la matematización, mientras que otros currículos sólo se centran en una de las direcciones, la horizontal (el currículo que califican de "empirista") o la vertical (el "formalista"), o la matematización está ausente de ellos (el "mecanicista").

[4] Esta distinción la desarrolló Treffers años antes, en 1978, en su tesis doctoral, escrita en holandés. Treffers (1987) es la versión en libro y en inglés de esa tesis doctoral.

De Lange (1987) usó también la imagen de la escalera para indicar que en las actividades que los alumnos realizan cuando están inmersos en un currículo del estilo “realista” no se da una fase de matematización horizontal seguida de una de matematización vertical, sino que actividades como “describir relaciones”, “reconocer aspectos isomorfos de problemas diferentes” o “transferir un problema del mundo real a un modelo matemático conocido”, que son propias de la matematización horizontal, se presentan entremezcladas con actividades como “refinar y ajustar modelos” o “usar modelos diferentes”, que son propias de la matematización vertical, con lo que la imagen global de un proceso de matematización realizado por un alumno no es la de un ángulo recto, en el que hay primero un movimiento horizontal y luego un movimiento vertical, sino la de una escalera de escalones irregulares, es decir, una serie de movimientos horizontales y verticales de tamaños diversos, que se alternan.

El proceso de modelización contiene esos dos movimientos. Por el lado de la matematización horizontal, los fenómenos observados de los que se toman datos se organizan como relaciones funcionales entre cantidades, que se representan en tablas, gráficas y expresiones algebraicas. Por el lado de la matematización vertical, tablas, gráficas y expresiones algebraicas se estudian con el fin de organizarlas en familias funcionales cuya forma y cuyos parámetros describen características de las relaciones funcionales, y, por ende, al volver al movimiento horizontal, características de los fenómenos que se pretende resaltar.

Cuando está presente la calculadora gráfica simbólica, ésta interviene tanto en la matematización horizontal como en la matematización vertical. En la matematización horizontal, al tomar los datos del fenómeno observado mediante los sensores, y al presentarlos en forma de una tabla de datos y una nube de puntos, así como al realizar el ajuste de las nubes de puntos a un modelo funcional seleccionado por el usuario de la calculadora, de entre los modelos disponibles en esa calculadora y teniendo en cuenta las características concretas de la forma canónica que tiene en esa calculadora el modelo funcional elegido. En la matematización vertical, en la medida en que la calculadora permite estudiar de una forma peculiar la relación entre tablas, gráficas y ecuaciones, y el efecto de los cambios en la expresión de una relación funcional en uno de esos sistemas de signos en su expresión en otro de ellos, y, por tanto, hace posible estudiar el significado de los parámetros de las formas canónicas de las relaciones funcionales.

En la sección siguiente, indicamos las características fundamentales del proceso de modelización que componen la competencia en ese proceso, y apuntamos en qué sentido el uso de las calculadoras gráficas simbólicas modifica alguno de esos elementos e introduce otros nuevos.

1.3. Elementos del proceso de modelización

Maaß (2006) concluye, como resultado de un estudio empírico, que la competencia en el procesos de modelización incluye más componentes que el mero ser capaz de recorrer los pasos de un proceso de modelización, e indica algunos factores importantes que describe como “competencias metacognitivas de modelado, hechos estructurantes, competencias en argüir matemáticamente y una actitud positiva [hacia la modelización]” (Maaß, 2006, p. 139).

En el esbozo que presentamos de la competencia en el proceso de modelización, efectivamente ésta no se limita, como dice Maaß (2006), a “seguir los pasos” de un método. En efecto, expusimos Puig y Monzó (2008), de manera esquemática, que podemos decir que en cualquier proceso de modelización están presentes los elementos siguientes:

1. Un fenómeno que se describe mediante algunas medidas de algunas magnitudes.
2. Una regresión[5] entre las medidas.
3. Un tipo de función que se ajusta mediante esa regresión.
4. Una decisión sobre el tipo de función que se va a ajustar de entre un catálogo de funciones disponibles, basado en:
   4.1. Un conocimiento de propiedades cualitativas del fenómeno.
   4.2. Un conocimiento de propiedades cualitativas de los tipos de funciones disponibles.
5. La determinación de la función concreta de ese tipo, que describe los datos obtenidos de ese fenómeno concreto observado.
6. La expresión de la función en una forma canónica, elegida de manera que los parámetros expresen propiedades del fenómeno que interesa resaltar.

Un examen somero de esa relación nos permite avanzar que, para realizar un proceso de modelización, son necesarias competencias en:

1. Propiedades cualitativas de los tipos de funciones disponibles.
2. Análisis cualitativo del fenómeno que se va a observar, con respecto al mismo tipo de propiedades.
3. Formas canónicas de los tipos de funciones.
4. Significado de los parámetros en las formas canónicas.
5. Efecto de los cambios en los parámetros en las propiedades cualitativas.
6. Transformaciones algebraicas para llevar una expresión algebraica a una forma canónica.
7. Análisis cualitativo de las limitaciones del modelo.

Los puntos 1 y 2 muestran la importancia del conocimiento cualitativo tanto del fenómeno como de diversos tipos de funciones, ya que en el proceso de modelización desempeñan un papel muy importante esos conocimientos en la toma de decisiones sobre qué tipo (o tipos) de función va a ser el que se va a usar como modelo (o cuáles se van a comparar), y en la posterior adecuación de la función ya obtenida como modelo para predecir otros valores del fenómeno que no se han obtenido experimentalmente.

Los puntos 3, 4 y 5 muestran la importancia del conocimiento de las formas canónicas por el significado de sus parámetros y el efecto de los cambios de éstos en lo que ha permitido tomar la decisión de usar ese tipo de ecuación en la modelización, y dan paso al punto 6, que muestra la importancia de la competencia en la transformación algebraica de expresiones, pero no meramente en la transformación de expresiones en otras (equivalentes) cualesquiera, sino en su transformación con el fin de convertirlas en un caso de una forma canónica, el tipo de expresiones algebraicas que son especialmente importantes para la representación de propiedades de los fenómenos que se modelizan, y que, por ello, se han establecido como formas canónicas. Finalmente, el punto 7 apunta a la competencia en la crítica del modelo.

Descritas de esta manera las cosas, los análisis cualitativos, del fenómeno y del comportamiento de las familias de funciones, se revelan como el mecanismo de guía y

---

[5] El uso de la regresión no es necesario en situaciones simples, en las que quepa calcular los parámetros de la función que se va a proponer como modelo que da cuenta de la nube de puntos, directamente a partir de alguno de los datos. Así lo hacemos en Monzó y Puig (2007).

control del conjunto del proceso de modelización. Dicho de otra manera, y respondiendo de otra manera a la indicación de Maaß (2006) sobre que la competencia no se limita a "seguir los pasos" de un método, la competencia incluye ser un buen gestor del proceso de modelización, y el elemento clave de la buena gestión del proceso es el conocimiento cualitativo de los fenómenos y los modelos funcionales y el uso de ese conocimiento cualitativo para tomar decisiones, controlar y organizar el conjunto del proceso.

Pero además, esa competencia de gestión necesita la atención a los detalles del proceso y, cuando está en juego el uso de las calculadoras gráficas simbólicas, necesita el conocimiento de las peculiaridades que los conceptos y objetos matemáticos involucrados en el proceso tienen en ella.

Weigand y Bichler (2010) presentan un modelo teórico de competencia del uso de las calculadoras simbólicas en las clases de matemáticas, ejemplificado en el caso de las funciones, organizado en niveles y aspectos, que siguen el esquema elaborado para los estudios PISA, pero sin el carácter de modelo empírico de competencia que tiene lo que se presenta en los informes PISA. En ese modelo teórico se combina la competencia en el dominio matemático, en este caso las funciones, con la competencia en el uso de la herramienta, estableciendo niveles a la manera de PISA en ambos y presentando la matriz de todas las posibilidades de combinación de los niveles.

En nuestra descripción de la competencia no presentamos "niveles de competencia"[6]. Pero además, nosotros no concebimos la competencia en un dominio matemático cuando se usa la calculadora gráfica simbólica como la mera yuxtaposición de los elementos de la competencia en el dominio en cuestión y los elementos de la competencia en el uso de la calculadora gráfica: la competencia en un dominio matemático, las familias de funciones, por ejemplo, se modifica por el hecho de que se esté usando la calculadora gráfica simbólica.

No se trata pues, como hacen Weigand y Bichler (2010), de combinar en una matriz, en una tabla de doble entrada, los elementos de una y otra, yuxtaponiéndolos en pares ordenados; lo que hay que hacer es analizar de forma específica en qué consiste la competencia en el dominio matemático en cuestión cuando la calculadora gráfica simbólica está presente.

Cuando está en juego el uso de una calculadora gráfica, alguna de las competencias del proceso de modelización se derivan del alumno a la propia calculadora, ya que, podemos considerar "a la calculadora como un ejecutante de reglas matemáticas de forma competente. Si la instrucción que se le da es pertinente, la realizará de manera competente y, así, ejecutará las nuevas tácticas necesarias para llevar a cabo una estrategia de resolución, ideada para resolver una situación problemática matemática" (Filloy, 2006, p. 131). En algún sentido, quedan como responsabilidad de la máquina las competencias tácticas y del humano las competencias estratégicas del proceso de modelización. Pero no sólo ésas, si bien al asumir la calculadora la competencia en los cálculos, en la representación gráfica de funciones o en la representación de tablas de datos como nubes de puntos, esa competencia no la precisa el humano, aparecen nuevos fenómenos por el uso de la calculadora, que exigen nuevas competencias. Veremos ejemplos de ello en lo que sigue.

---

[6] En Puig (2006b) exponemos las diferencias y semejanzas entre el uso que hacemos del término competencia cuando hablamos de modelo de competencia, como componente de un modelo teórico local (Filloy, Rojano & Puig, 2008), y el término competencia en PISA.

1.4. EL MODELO DE ENSEÑANZA

Los alumnos a los que va destinada la enseñanza son de 1º de Bachillerato de Ciencias, 16 a 17 años, es decir, del primer curso de la enseñanza postobligatoria en el sistema educativo de España. El material de enseñanza está estructurado en siete lecciones, que describiremos someramente a continuación. Una de las lecciones la describimos con más detalle en la sección 1.5, e incluimos el material para los alumnos en la sección 1.7.

La enseñanza la realizamos en aulas normales de centros públicos de enseñanza secundaria de la Comunidad Valenciana, España. Según el currículo en vigor en la Comunidad Valenciana en este momento, los alumnos ya han recibido enseñanza sobre las funciones lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa y la función exponencial a^x, aunque en ocasiones lo que sucede en realidad es que no han llegado a esta última función. Según el currículo en vigor en la Comunidad Valenciana, no han recibido enseñanza en el uso de la calculadora gráfica.

Describimos a continuación algunos aspectos relevantes de las siete lecciones y del orden en que se presentan.

Lección 1. Estudio de familias de funciones.

El objetivo general de esta lección es doble: por un lado, se pretende que los alumnos se familiaricen con la calculadora gráfica simbólica, y, por otro, se pretende introducir el concepto de familia de funciones y de forma canónica, y estudiar los efectos de los cambios de los parámetros de las formas canónicas en las gráficas de las funciones. Pero además se tratan algunas cuestiones que son propias de su presentación en la calculadora gráfica simbólica.

En términos generales, lo que se explora es que, si se pasa de una función

$y = f(x)$

a otra

$$y = af\left(\frac{x-c}{b}\right) + d$$

a dilata la gráfica en la dirección del eje OY, respecto de la recta $y = d$;
b dilata la gráfica en la dirección del eje OX, respecto de la recta $x = c$;
c traslada la gráfica en la dirección del eje OX hacia la derecha, si $c > 0$, o hacia la izquierda, si $c < 0$;
d traslada la gráfica en la dirección del eje OY hacia arriba, si $d > 0$, o hacia abajo, si $d < 0$;

Esta modificación de la gráfica en función de los cambios en los parámetros de la forma canónica se estudia atendiendo a las peculiaridades que presenta en el caso de las funciones elementales que son objeto de estas lecciones. Por ejemplo, en el caso de la función lineal, si se explora en la pantalla gráfica cómo cambia la recta $y = 2x$ al pasar a $y = 2x + 6$, y sólo se atiende a lo que se ve, la recta puede parecer que se desplaza 6 unidades hacia arriba o 3 unidades hacia la izquierda. Ese fenómeno tiene su correlato analítico en el hecho de que $2x + 6 = 2(x + 3)$, de modo que en la primera expresión aparece el parámetro d (= 6) y en la segunda el parámetro c(= –3), y tiene su explicación perceptiva en el hecho de que, si sólo se atiende a lo que se ve, la transformación que se ve es la transformación global de la gráfica, en este caso de la recta, mientras que la transformación de la que da cuenta la expresión analítica en su forma canónica es una transformación punto a punto. En la exploración visual en la pantalla de la calculadora gráfica no puede verse a dónde se desplaza cada uno de los punto de la recta, sino sólo el desplazamiento global de la recta.

En la lección, se exploran estos fenómenos en el caso de la función lineal, la función cuadrática, dos funciones racionales sencillas, funciones trigonométricas y la función exponencial. Además, la exploración se realiza recurriendo a tres de los procedimientos que permite realizar la calculadora gráfica simbólica: la modificación manual de los parámetros en la pantalla algebraica y su representación conjunta en la pantalla gráfica; la escritura conjunta en la pantalla algebraica de varios valores de un parámetro mediante el uso de listas en el lugar de los parámetros (lo que conlleva una competencia en el sistema de signos propio de la pantalla algebraica de la calculadora, que no coincide totalmente con el sistema de signos del álgebra simbólica, por ejemplo en esta existencia de listas); y el uso de la función de modificación manual o dinámica de valores numéricos.

Lección 2. Regresión y correlación

El objetivo general de esta lección también es doble: por un lado, se trata de familiarizarse con los menús de estadística de la calculadora gráfica; por otro, se trata de estudiar la idea de mejor ajuste de una nube de puntos, y de discutir la diferencia entre ajuste estadístico y modelización.

Para ello se presentan seis situaciones problemáticas con datos reales, obtenidos para la ocasión o tomados de fuentes de información pública (periódicos o informes oficiales publicados), y se discute en cada caso qué ajuste es conveniente y qué precauciones hay que tomar y para qué es válido el modelo de regresión o correlación elaborado.

Lección 3. La relación entre las escalas ºC y ºF

Esta lección está concebida como una introducción al proceso de modelización, y a la toma de datos reales mediante los sensores que se conectan a la calculadora gráfica simbólica.

Hemos elegido para ello un experimento sencillo de realizar, que permite estudiar los detalles técnicos de una toma de datos reales y de la gestión de los datos en listas en la calculadora. En efecto, la tarea que se plantea es la de tomar datos de temperatura con dos sensores, regulado uno en ºC y el otro en ºF, en varios ambientes (muy frío, frío, temperatura ambiente, caliente y muy caliente), para estudiar la relación entre las escalas Celsius y Farenheit. Una vez se han tomado los datos, se estudia qué hay que hacer para ordenarlos en las listas, y representarlos como una nube de puntos en la pantalla gráfica. Obtenida la representación gráfica de la nube de puntos, se hace un análisis cualitativo de la situación y se refiere éste al conocimiento cualitativo de las familias de funciones que se conocen, en concreto la función lineal.

La lección no plantea entonces que se haga una regresión lineal usando las herramientas estadísticas de la calculadora, sino que plantea la búsqueda de una recta que pase por dos de los puntos que se tienen representados, lo que ofrece la ocasión de estudiar cómo tomar datos de una gráfica y almacenarlos. Se calcula la pendiente de la recta, m, que pasa por esos puntos, y se representa la recta $y = mx$, que luego se desplaza hasta hacerla coincidir con los puntos, usando para ello el conocimiento del fenómeno que se está modelizando (en concreto, el conocimiento de que 0 ºC = 32 ºF, que proporciona el valor del desplazamiento).

Finalmente, la lección plantea hacer la regresión lineal usando las herramientas estadísticas de la calculadora y comparar las rectas obtenidas por uno y otro método, y termina con la pregunta "¿A qué se debe la pequeña variación de los resultados?", con el fin de que se discuta qué cabe esperar de la precisión de los resultados cuando se está trabajando con datos reales.

Lección 4. Alargamiento de un muelle.
Lección 5. La relación presión / volumen.
Lección 6. Enfriamiento de un cuerpo / Calentamiento de un cuerpo.
Lección 7. Movimiento de caída de un cuerpo.

Las lecciones 4 a 7 son el núcleo del modelo de enseñanza y todas ellas están organizadas de la misma manera. En la sección 1.5 presentamos la lección 6 y en la sección 1.7 incluimos los materiales de esta lección para los alumnos. Las cuatro lecciones contienen la realización de un experimento (o varios) en los que se toman datos reales y se modeliza el fenómeno que se pone en observación. Los modelos funcionales correspondientes a las lecciones son la función lineal, la función de proporcionalidad inversa (que es un caso particular de función potencial), la función exponencial, y la función cuadrática.

Para trabajar en las lecciones, los alumnos tienen una calculadora gráfica simbólica (Classpad 300 o Classpad 330) cada uno, y el profesor tiene un emulador de la calculadora gráfica en su ordenador, conectado a una pantalla de cristal líquido colocado sobre un retroproyector o a una pizarra digital.

La intervención del profesor en la organización del trabajo en el aula en las lecciones responde a dos estilos diferentes:

a) En las lecciones 1, 2 y 3, el profesor expone la lección, va poniendo tareas a los alumnos para realizarlas y lidera la discusión en el grupo.
b) En las lecciones 4, 5, 6 y 7, el profesor realiza los experimentos. Una vez realizados, o bien pasa los datos obtenidos a las calculadoras de los alumnos, o bien los alumnos realizan en grupo los experimentos (dependiendo el número de grupos de la disponibilidad de sensores). Los alumnos realizan las tareas de la lección y discuten en grupos de trabajo las tareas, con el profesor como consultante. Finalmente, el profesor lidera una discusión global de toda la clase en la que se comparan y se discuten los resultados de cada uno de los grupos.

1.5. La lección 6. Enfriamiento de un cuerpo / Calentamiento de un cuerpo.

En esta lección proponemos la realización de dos experimentos para modelizar que están relacionados. En el primer experimento se trata de tomar datos de la temperatura de un cuerpo que está más caliente que la temperatura ambiente y se va enfriando hasta llegar a la temperatura ambiente; los datos son pues de la temperatura en función del tiempo de un cuerpo que se enfría. En el segundo, el cuerpo está más frío que la temperatura ambiente y se va calentando; los datos son pues también de la temperatura en función del tiempo, pero ahora de un cuerpo que se calienta.

La intención de plantear este segundo experimento después del primero es doble. Por un lado, sabemos que hay alumnos que, al abordar el segundo experimento, piensan que el modelo funcional adecuado tiene que ser una función logarítmica, ya que en el primer experimento ha sido una función exponencial y los fenómenos son inversos. Esto permite discutir la fuente de ese error, que reside en una analogía entre la idea de funciones inversas una de otra (un concepto de significado preciso) y la idea de fenómenos inversos u opuestos, que es una idea imprecisa cuyo significado ha de ser perfilado examinando con respecto a qué son inversos u opuestos los fenómenos y en qué sentido. Por otro lado, la realización del segundo experimento después del primero permite estudiar las modificaciones de los parámetros de las formas canónicas de las familias funcionales que precisamente dan cuenta de lo que en el análisis cualitativo del fenómeno aparece como inverso u opuesto. Estos fenómenos, enfriamiento y calentamiento, que se ven como inversos u opuestos en el análisis cualitativo, no se modelizan con modelos funcionales que sean funciones inversas una de otra, sino con el mismo modelo funcional, correspondiendo a cada uno de los fenómenos valores inversos u opuestos de uno de los parámetros. Los fenómenos, que inicialmente se ven como distintos (e inversos), acaban viéndose como casos de un mismo fenómeno, el intercambio de calor, al que corresponde un modelo funcional único.

Además, la lección aún tiene otro objetivo crucial para la integración del uso de la calculadora gráfica simbólica en el proceso de modelización. En el experimento que se plantea es preciso no sólo determinar qué modelo funcional se va a utilizar para modelizar el fenómeno, sino también que la calculadora hace el ajuste a ese modelo funcional de una manera particular, que hay que tenerla en cuenta y que obliga a realizar operaciones que no serían necesarias si no se usara la calculadora. Lo que sucede es que la forma canónica que utiliza la calculadora (en concreto la Classpad 300 o Classpad 330) para la regresión exponencial es $y = ae^{bx}$, con $a > 0$, mientras que los datos que se obtienen en el primer experimento responden a una exponencial que no es asintótica al eje OX, sino a la recta $y = t_0$, siendo t_0 la temperatura ambiente, y los datos que se obtienen en el segundo experimento responden a una exponencial con el parámetro $a < 0$. La consecuencia que tiene esta peculiaridad de la calculadora es que es preciso adaptarse a lo que la calculadora hace y cómo lo hace; en concreto, hay que modificar los datos que se han tomado y están almacenados en listas para que la nube de puntos pueda ajustarse con la forma canónica disponible, y posteriormente modificar la función de regresión que proporciona la calculadora para que se ajuste a los datos iniciales. Todo ello requiere conocer el significado de los parámetros, por un lado, y requiere destrezas en el uso de la calculadora, es decir, hay que conocer la herramienta en sus detalles y convertirla en un instrumento[7] para el proceso de modelización.

En la sección 1.7 presentamos el material de trabajo para los alumnos de esta lección. Ahí puede verse, además de cómo están planteadas las cuestiones que ya hemos comentado en los párrafos anteriores, que los análisis cualitativos (y su crítica) están colocados en el material de trabajo de los alumnos de forma que organicen y guíen el conjunto del proceso.

En efecto, la primera tarea propuesta a los alumnos, antes de realizar el experimento y tomar los datos, consiste en que hagan un esbozo de cómo creen que deberá ser la gráfica. Es decir, se pide explícitamente un análisis cualitativo del fenómeno y su representación en una gráfica dibujada a mano alzada. Este análisis cualitativo inicial se plantea para guiar la observación de los datos que se obtengan, y así se pide explícitamente que se dibuje en el papel la nube de puntos obtenida experimentalmente con la calculadora.

[7] Éste es uno de los momentos en que en este modelo de enseñanza se trata de forma más explícita el proceso por el que una herramienta se convierte en un instrumento, que Trouche (2000) planteó para las calculadoras gráficas simbólicas.

Otros momentos claves en que, en el material de los alumnos, insistimos en el control del proceso son las preguntas que guían el análisis de la adecuación de la función de regresión obtenida con el análisis cualitativo del fenómeno, tales como "¿Cuál debería ser la tendencia de la función que describe la temperatura cuando el tiempo tiende a $+\infty$?", o la pregunta más general "¿Crees que las respuestas obtenidas muestran lo que verdaderamente ocurre?", que pide que los alumnos examinen si los valores que da la función de regresión les parecen razonables por su conocimiento cualitativo del fenómeno, habiendo incluido entre los valores que se pide calcular algunos que están fuera del rango de los valores obtenidos en el experimento, e incluso muy alejados. Esta última tarea de crítica del modelo se refuerza con una instrucción implícita de ver la nube de puntos y la función globalmente, "Modifica los valores de la ventana de tu calculadora para observar de lejos la nube de puntos y la función obtenida", que incluye una indicación asimismo explícita de gestión del proceso: "Si consideras que la forma de la gráfica no se ajusta al modelo que debería seguir, vuelve de nuevo a los mismos valores de la ventana y repite las cuestiones anteriores".

1.6. EJEMPLOS DE COMPORTAMIENTOS DE ALUMNOS

En este apartado presentamos unos ejemplos de comportamientos de alumnos trabajando con las lecciones del modelo de enseñanza, que ilustran algunas de las consideraciones que hemos hecho sobre el papel que desempeñan los análisis cualitativos, y sobre los conceptos de familia de funciones y forma canónica de una familia de funciones, el papel de los parámetros y la forma que adoptan cuando la calculadora está implicada.

Las lecciones las hemos experimentado en dos contextos distintos: el contexto para el que están diseñadas, es decir, el primer curso del Bachillerato, y el contexto de la formación de profesores de secundaria. En efecto, las lecciones las utilizamos también en un curso de formación de profesores, cuyos alumnos estaban cursando el último curso de la licenciatura de Matemáticas en la Universidad de Valencia, con el objeto de examinar cómo se comportaban ante las tareas unos alumnos a los que podía suponerse un buen nivel de conocimientos sobre los contenidos matemáticos implicados, pero que era la primera vez que veían una calculadora gráfica simbólica, con lo que las dificultades que encontraran podría suponerse que dependían fundamentalmente de las peculiaridades de la forma en que los conceptos, procesos y sistemas de signos matemáticos involucrados aparecen y se manejan en la calculadora.

A estos alumnos se les pidió que después de la lección escribieran, por grupos, un informe de lo acontecido durante ella, de forma que se vieran obligados así a reflexionar sobre el conjunto del proceso que se había desarrollado en el aula. Lo que sigue está tomado del análisis de esos informes; los textos entrecomillados son citas textuales de ellos.

El peso de la práctica y el control cualitativo

En el informe de la lección 6, "Enfriamiento de un cuerpo / calentamiento de un cuerpo", un grupo muestra explícitamente cómo los alumnos tienen la tendencia a dejarse llevar por las tareas más cercanas que han resuelto, pero también cómo la introducción de la instrucción explícita en la necesidad de la gestión del proceso, usando para ello el análisis cualitativo, permite remediar esa tendencia: "Como la gráfica de la semana pasada era muy parecida, suponemos que es una regresión potencial. Nos hemos equivocado, no puede ser porque nuestra gráfica no tiene asíntota vertical.”

La adaptación a la calculadora y la adaptación de la calculadora

El mismo grupo de alumnos muestra en el informe de ese mismo experimento sus dificultades derivadas de cómo tiene la calculadora la regresión exponencial. En un primer momento, calculan la función de regresión exponencial con la calculadora y rechazan el resultado (“Hemos probado la exponencial y tampoco es”), pero, al examinar la forma de la regresión exponencial en la calculadora, dicen que “es una variante”. Ahora bien, como “es una variante”, no pueden calcularla directamente, y en consecuencia la calculadora no les suple el conocimiento de la realización de los cálculos correspondientes, que es como están acostumbrados a que intervenga la calculadora, por lo que no saben qué hacer. La manera como consiguen salir del atolladero muestra su adaptación a la calculadora y la adaptación de ésta para poder usarla para el proceso concreto que tienen que realizar (es decir, es un ejemplo concreto de los procesos de instrumentación y de instrumentalización, descritos por Trouche, 2000).

“Después de mucho discutir, como la calculadora tiene la fórmula $y = ae^{bx}$ y ésta no nos sirve la tenemos que modificar. La modificación será bajar los datos. Para ello creamos una lista nueva […] Luego le volvemos a dar a regresión exponencial. […] A la función obtenida le sumamos 23 ºC, que es la temperatura ambiente […].”

El informe de otro grupo de alumnos muestra una variante del mismo proceso. Tras hacer la regresión exponencial se percatan de que no se ajusta a los datos. Sin embargo, confían más en el análisis cualitativo que han hecho previamente, por lo que no rechazan que ése sea el modelo funcional adecuado, sino que ven el asunto como un problema que tienen que definir y resolver.

“¿El problema? Que la función obtenida no se ajusta a la realidad, ya que la exponencial tiende a cero, y nuestra gráfica debería tender a la temperatura ambiente, es decir, a 22,3 ºC. Para ajustar la función, debemos poner un término independiente a la verdadera función. Para ello crearemos una nueva lista, en la cual restamos a los términos la temperatura ambiente. Con ello sacaremos otra función que sí tiende realmente a cero y obtendremos su curvatura (es decir, b) que coincidirá con la curvatura de la función que estamos buscando en realidad. Así, la función final será de la forma $Y = a \cdot e^{bx} + c$, con b la curvatura de la función que tiende a 0, a la diferencia entre la temperatura inicial de la barra y la temperatura ambiente (59º – 22,3º = 36,7º) y un término independiente c de 22,3º (es decir, la temperatura ambiente). Así, esta función tiene un estado inicial de 59º y al tender x al infinito se aproxima asintóticamente a 22,3 ºC.”

En el informe, la forma de la “verdadera función” está analizada refiriendo cada uno de los parámetros a su significado en el fenómeno que describe el modelo, y el control de que esa función es la “verdadera función” viene garantizado porque los valores de los parámetros tienen sentido en el fenómeno que modeliza la función.

El informe concluye con una descripción de qué han tenido que hacer para adaptarse a la calculadora y adaptar la calculadora a ese proceso concreto de modelización: “Conclusión: Si bien la variación de temperatura es exponencial, esta función posee un término independiente el cual la calculadora no puede proporcionarnos. La solución es crear una función diferencia que nos dé la misma curvatura pero sin término independiente y trasladar este dato a la verdadera función.”

Fenómenos inversos, modelos funcionales inversos

Ya hemos indicado que plantear los dos experimentos de enfriamiento y calentamiento sucesivamente, pretendía examinar este conflicto. En los informes de los alumnos, esta confusión está efectivamente presente, pero se resuelve gracias al análisis cualitativo. Así, el informe de uno de los grupos indica que lo primero que piensan es en la regresión logarítmica, pero que abandonan ese modelo funcional, ante el análisis cualitativo. En este caso, el análisis cualitativo refuta no sólo la forma canónica que lleva la calculadora, sino el modelo funcional.

“Hacemos la regresión logarítmica, pero ésta no puede ser porque la función logarítmica no tiene asíntota horizontal”.

En el informe de otro de los grupos, también se observa la tendencia a pensar en el modelo funcional inverso cuando el fenómeno parece análogamente inverso, pero que se descarta por el análisis cualitativo. En este otro informe, se aprecia además que los fenómenos que se habían visto inicialmente como inversos acaban viéndose unificados en el mismo modelo como aspectos de un mismo fenómeno.

“Al buscar la regresión hemos descartado la regresión logarítmica, ya que los logaritmos negativos no existen y nosotros hemos obtenido temperaturas negativas. Además, los logaritmos tienden a infinito, no tienen asíntota, mientras que nuestra función tiene una asíntota al alcanzar la temperatura ambiente.

Hemos pensado que el modelo ha de ser el mismo que en el fenómeno contrario, el de calentamiento de una sonda, ya que tenemos un intercambio de calor, sin tener en cuenta si lo cedo o lo recibo. Por lo tanto debería ser una regresión exponencial.”

La dificultad de identificar algunas funciones especiales como miembros de una familia

En el experimento de la lección 5, “La relación presión / volumen”, se presenta un fenómeno que tiene que ver con la constitución del concepto de familia de funciones y la constitución en particular de familias concretas de funciones: el hecho de que algunas funciones no se identifican como pertenecientes a una familia de funciones a la que sí pertenecen.

Esto sucede al menos por dos causas de naturaleza muy distinta. Por un lado, la experiencia de los alumnos con algunas funciones en su trabajo en la escuela las singulariza o las relaciona con los contextos en los que se han estudiado. Éste es el caso de la función que es pertinente en el caso de la relación entre presión y volumen, que tiene nombre especial, “función de proporcionalidad inversa”, se estudia por sí misma habitualmente y no como un caso de las funciones potenciales, está presente en el contexto de la proporcionalidad (inversa), y además, como curva, su gráfica tiene nombre, “hipérbola equilátera”. Todo ello contribuye a que para los alumnos esa función se identifique como una función particular, o como una familia en sí misma, y no como miembro de la familia de las funciones potenciales.

La segunda causa reside en lo que Kirshner (1989) llamó la sintaxis visual del álgebra. En efecto, la función de proporcionalidad inversa no tiene el aspecto visual de una función potencial, ya que en su expresión usual el exponente no aparece, y está presente una raya de fracción, lo que le da un aspecto que no evoca la forma canónica de una potencial. En concreto, en la calculadora la regresión potencial aparece expresada con la forma canónica $y = ax^b$, cuya sintaxis visual no se corresponde a la de $y = \frac{a}{x}$. El hecho de que el parámetro b tome el valor –1 es el responsable de esa diferencia en la sintaxis visual. Este hecho se presenta en general para valores de los parámetros como 0, 1 y –1, que por lo común dificultan la identificación de las funciones correspondientes como miembros de la familia en cuestión.

En el informe de uno de los grupos hay indicaciones de este fenómeno. El análisis cualitativo de la nube de puntos conduce a pensar que se podría ajustar una hipérbola, pero se abandona por no aparecer como tal en la calculadora, por no ser la hipérbola una "función reconocida para realizar la regresión".

"Observando los datos decidimos que debería ser una hipérbola, el problema es que la calculadora no tiene la hipérbola como función reconocida para realizar una regresión por lo tanto tenemos que investigar con los tipos de regresiones que ofrece la calculadora y dar con la que mejor se ajuste a los datos."

Este grupo de alumnos fueron probando o considerando sucesivamente los tipos de regresiones presentes en la calculadora, descartando por razones cualitativas la regresión cuadrática, la exponencial y la logarítmica, y sólo después de estas pruebas, decidieron probar una regresión potencial:

"Después de estos errores probamos con una regresión potencial del tipo $y = ax^b$, pensando que si los datos no cortan a los ejes de coordenadas y además se comporta de forma asintótica respecto a los ejes podría funcionar una potencial inversa. Al calcular esta regresión observamos que se ciñe a las exigencias de nuestro experimento, obteniendo como valor de las constantes $a = 17{,}398729$ y $b = –0{,}920725$."

Sin embargo, no llegaron a identificar la función obtenida explícitamente con una hipérbola, pese a observar que "la constante b es prácticamente –1".

Los límites de la gestión por análisis cualitativo y de la adaptación a la calculadora y de la calculadora

El análisis cualitativo permite controlar el proceso, orientando qué modelo funcional parece el más adecuado y cuál no parece adecuado para modelizar el fenómeno, pero no basta para obtener la función concreta que modeliza el fenómeno, si ésta no la proporciona directamente la calculadora. En el informe de uno de los grupos sobre su trabajo con el experimento del calentamiento, se da cuenta explícitamente de su imposibilidad para salir del atolladero sin la ayuda del profesor, que se convierte en un recurso también en el proceso.

Primero, constatan, gracias al análisis cualitativo, que la función que da la calculadora cuando se le pide que haga la regresión exponencial no es adecuada:

“Comprobamos que es la regresión exponencial. Nos ha dado una que no se parece en nada.”

Hacen un esbozo a mano de la forma que debería tener la función exponencial que sí que modelizaría la situación, pero no saben cómo transformar la lista de datos, cosa que ya han hecho en el caso del enfriamiento, pero que ahora es más complejo, así que: “Hacemos la regresión exponencial, no nos sale el ajuste y llamamos al profesor.”

Sirva esta llamada al profesor en el informe de estos alumnos como colofón de la presentación de este modelo de enseñanza del proceso de modelización, los conceptos de familia de funciones y forma canónica de una familia de funciones y el significado de los parámetros de las formas canónicas con respecto a la función y al fenómeno que se modeliza, usando calculadoras gráficas simbólicas y realizando experimentos en los que se toman datos reales mediante sensores. El uso de TIC no anula al profesor, sino que lo sitúa de otra manera en el papel central de organizador del trabajo de los alumnos.

1.7. MATERIAL DE TRABAJO PARA LA LECCIÓN 6

Enfriamiento de un cuerpo

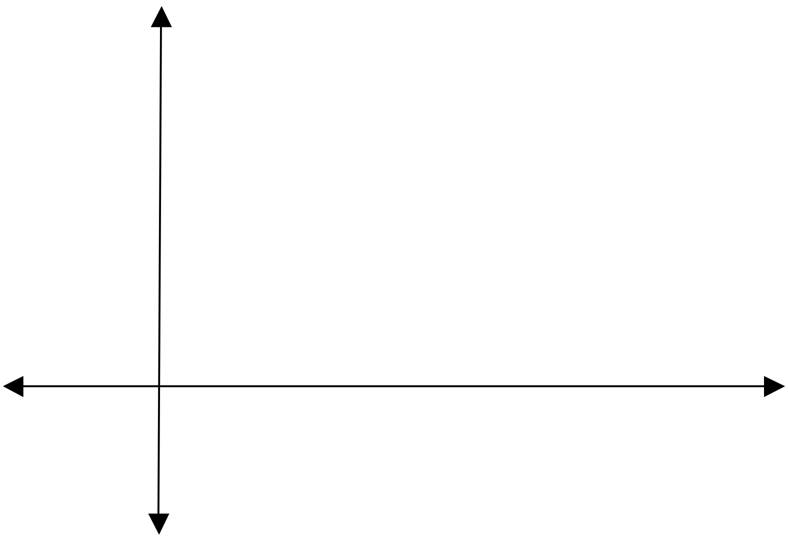
En esta experiencia vamos a analizar la función que describe el enfriamiento de un cuerpo a partir de una temperatura aproximada de unos 70 ºC. Para ello tomaremos datos durante cinco minutos, espaciados, cada uno del siguiente, un segundo (dos o tres segundos también será suficiente), a partir del momento en que el sensor sea separado de la fuente de calor. Posteriormente, repetiremos la experiencia comenzando a una temperatura menor. Ajustaremos ambas representaciones de datos a funciones. Compararemos dichas funciones y analizaremos sus diferencias.

Material necesario

- Unidad EA 200
- Calculadora gráfica ClassPad 300
- Sonda de temperatura
- Programa E-ConEA200
- Recipiente y líquido, en nuestro caso, agua.
- Fuente de calor
- Termómetro

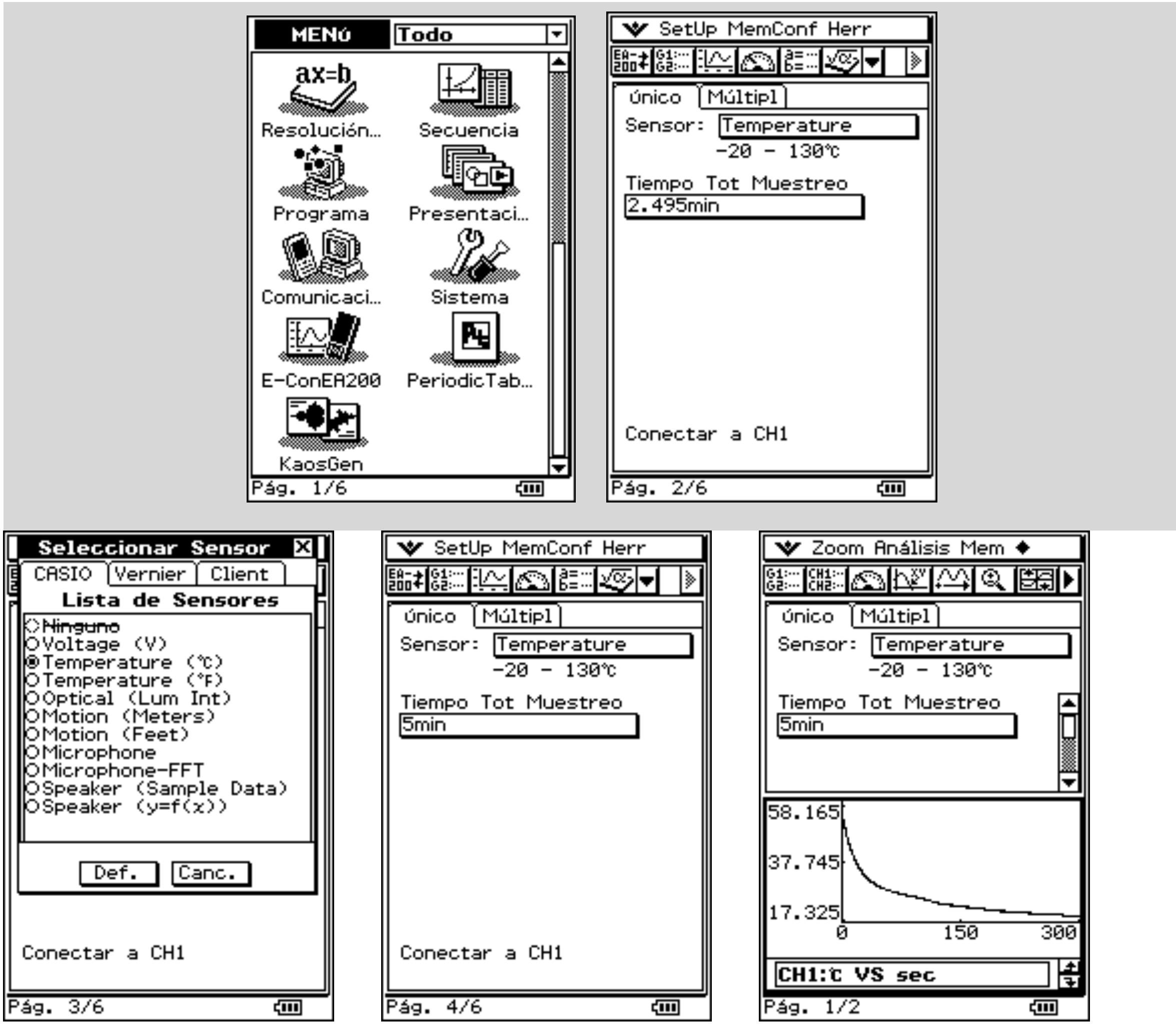
¿Sabemos cuál es el modelo que describe cómo se enfrían los cuerpos? O, dicho de otra manera, supongamos que tenemos un cuerpo muy caliente o con temperatura alta, y se le deja enfriar. ¿Cuál es la función que describe la temperatura del cuerpo en cualquier instante?

Haz un esbozo de cómo crees que deberá ser la gráfica que represente la temperatura del cuerpo en función del tiempo.



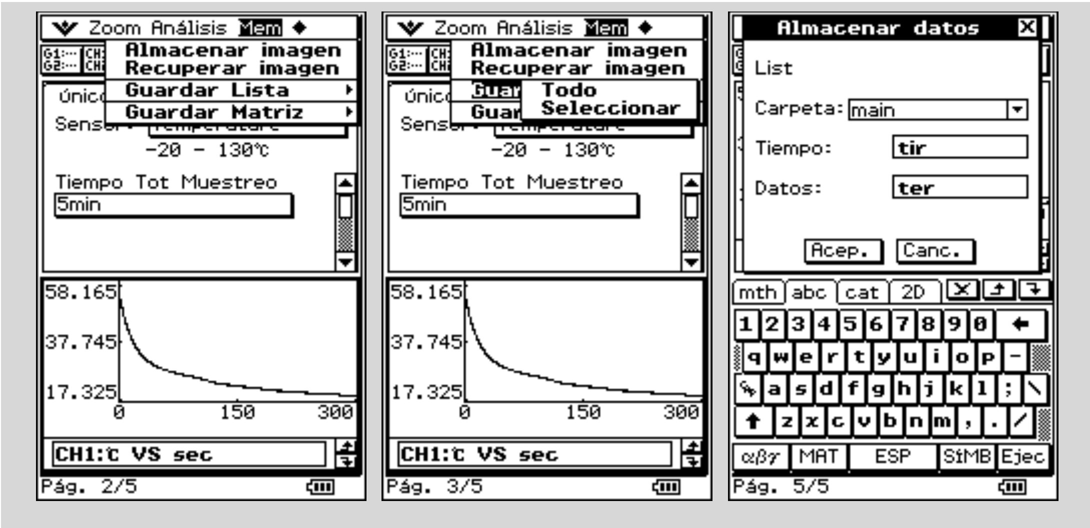
Vamos a mostrar algunas pantallas de la calculadora en el proceso de toma de datos y en el proceso de buscar un modelo matemático, una función, que se ajuste lo más posible a los datos.

Ejecutamos la aplicación  y, siguiendo las instrucciones del programa, indicamos que la toma de datos de temperatura sea cada dos o tres segundos como máximo. Después, sacamos el extremo de la sonda del vaso con agua caliente en el instante en el que la máquina empieza a tomar datos de temperatura.



En la pantalla se observa la nube de puntos que se genera por lo que se puede ratificar o desechar la tendencia y forma que antes se especuló.

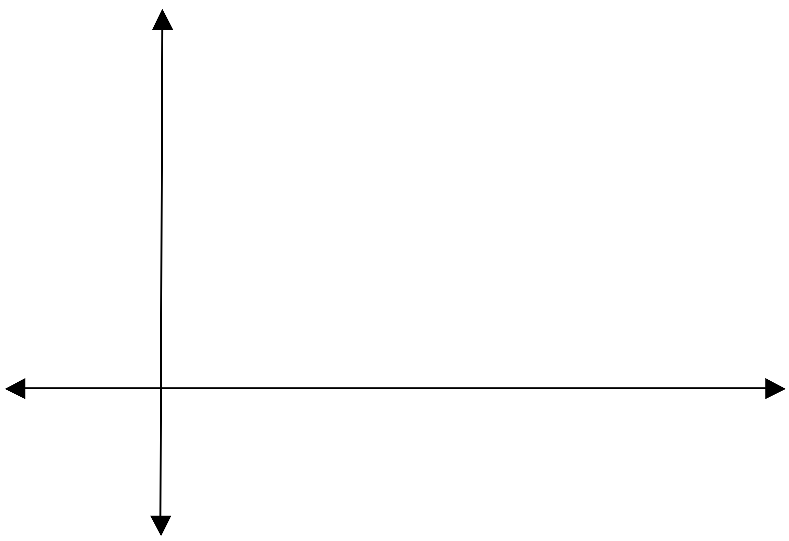
Necesitamos guardar los resultados obtenidos para su posterior manipulación. Para ello seleccionamos el menú *Mem* de la barra superior. Después elegiremos la opción *Todo* del submenú *Guardar lista*, y pondremos el nombre que queramos en las posibles opciones.



Una vez tenemos los datos y la gráfica de la nube de puntos correspondiente, se puede ajustar automáticamente a la nube aquella función que mejor describe la situación.

Describe en tu cuaderno el trabajo que estas realizando.

Dibuja en el siguiente sistema de ejes la nube de puntos obtenida experimentalmente en la calculadora.



Obtén en tu calculadora la función de regresión que mejor se ajuste a los datos obtenidos en la nube.

$$T = f(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

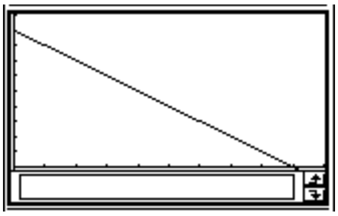
1. ¿Cuál sería entonces la presión de la sonda cuando $t = 5$? $f(5)$= ___
2. ¿Y cuando $t = 25$? $f(25)$= _________
3. ¿Y cuando $t = 150$? $f(150)$= _________
4. ¿Y cuando $t = 500$? $f(500)$= _________
5. ¿Cuál debería ser la tendencia de la función que describe la temperatura cuando el tiempo tiende a $+\infty$?
6. ¿Crees que las respuestas obtenidas muestran lo que verdaderamente ocurre?_______

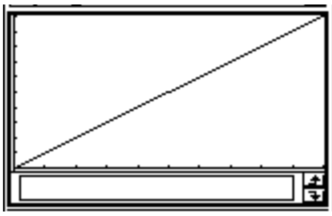
Modifica los valores de la ventana en tu calculadora para observar de lejos la nube de puntos y la función obtenida. Si consideras que la forma de la gráfica no se ajusta al modelo que debería seguir, vuelve de nuevo a los mismos valores de la ventana y repite las cuestiones anteriores.

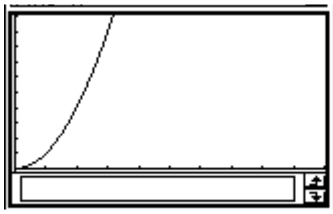
Recuerda que los modelos que tiene la calculadora según la descripción del manual son:

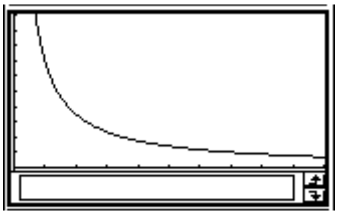
$y = ax + b$
$y = ax^2 + bx + c$
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
$y = a + b\cdot\ln(x)$
$y = a\cdot e^{bx}$
$y = a\cdot b^x$
$y = ax^b$
$y = a\cdot\sin(bx + c) + d$
$y = c/(1 + a\cdot e^{-bx})$

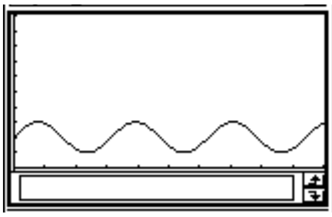
Indica qué tipo de gráfica es la que se ajusta mejor a nuestro problema.

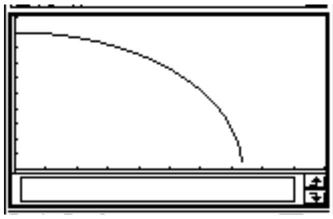

A

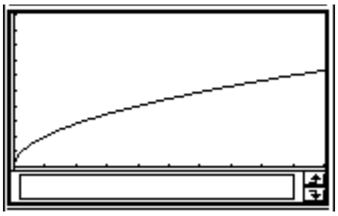

B

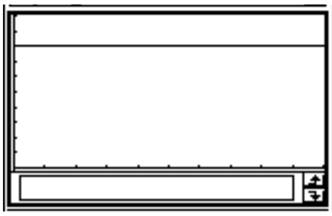

C

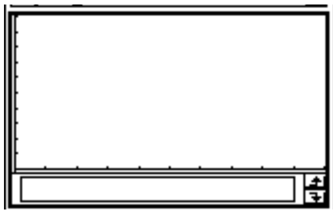

D


E


F


G


H


Ninguna de las anteriores

Escoge un modelo matemático que prediga la respuesta al problema y justifica la respuesta.

1) $y = ax^2$

2) $y = \dfrac{a}{x}$

3) $y = \dfrac{a}{x^2}$

4) $y = d$

5) $y = a\,\mathrm{sen}(bx + c) + d$

6) $y = mx + n,\ m > 0$

7) $y = -mx + n,\ m > 0$

8) $y = ax^{\frac{1}{2}}$

9) $y^2 = r^2 - ax^2$

Calentamiento de un cuerpo.

Ahora analizaremos el proceso contrario, es decir, el correspondiente al calentamiento de un cuerpo partiendo de una temperatura más baja que la del medio en que se encuentra. Esto se conseguirá aplicando a la sonda cloruro de etilo, y desarrollando el mismo proceso de obtención de los datos y exploración, hasta conseguir la función que proporcione el mejor modelo que muestre cómo evoluciona la temperatura de la sonda. Veremos que sustancialmente el problema es el mismo y, por tanto, el modelo funcional también.

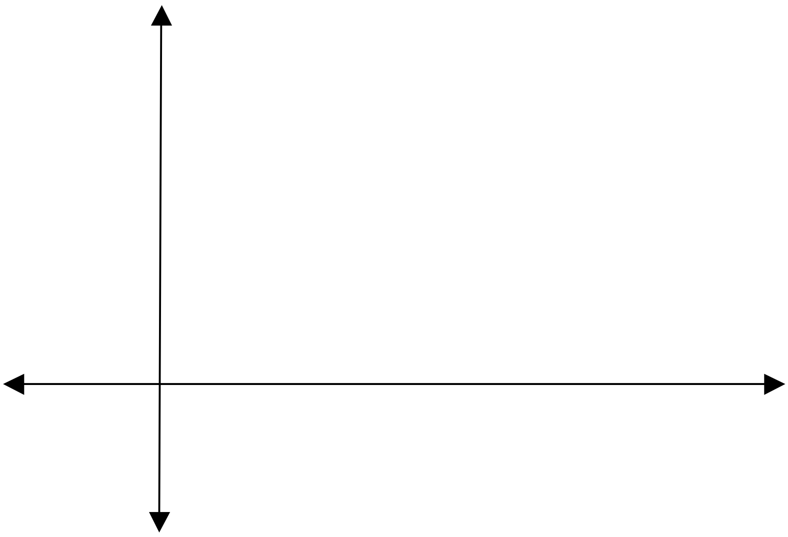
Material necesario:

- Calculadora ClassPad 300
- EA-200
- Sonda de temperatura
- Cloruro de etilo
- Aplicación E-conEA200

¿Sabemos cuál es el modelo que describe cómo se calientan los cuerpos? O, dicho de otra manera, supongamos que tenemos un cuerpo muy frío o con temperatura baja, y se le deja calentar. ¿Cuál es la función que describe la temperatura del cuerpo en cualquier instante?

Describe en tu cuaderno el trabajo que estas realizando.

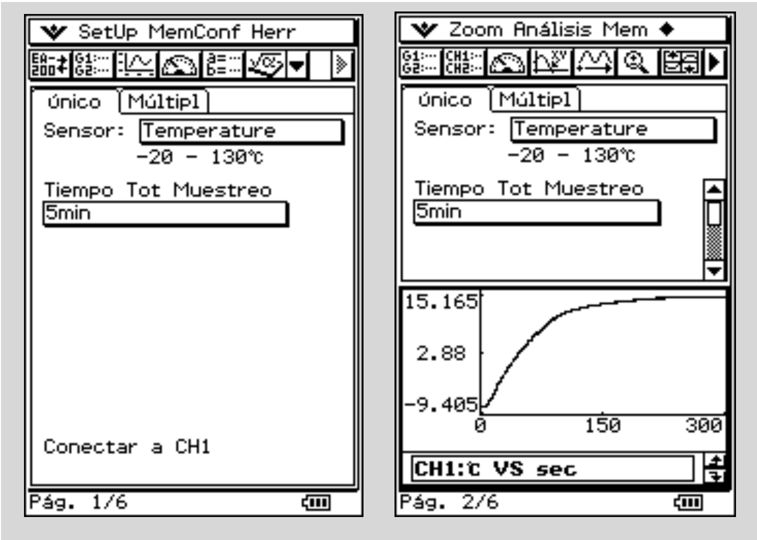
Haz un esbozo de cómo crees que deberá ser la gráfica que represente la temperatura del cuerpo en función del tiempo.



Se conecta el EA-200 a la calculadora gráfica y la sonda de temperatura al EA-200, y se activan.

Se activa el programa E-ConEA200 y se procede como en el experimento anterior, se pide que tome datos durante 5 minutos. El sensor de temperatura se rocía con cloruro de etilo, con lo que baja la temperatura, y se activa la toma de datos inmediatamente.

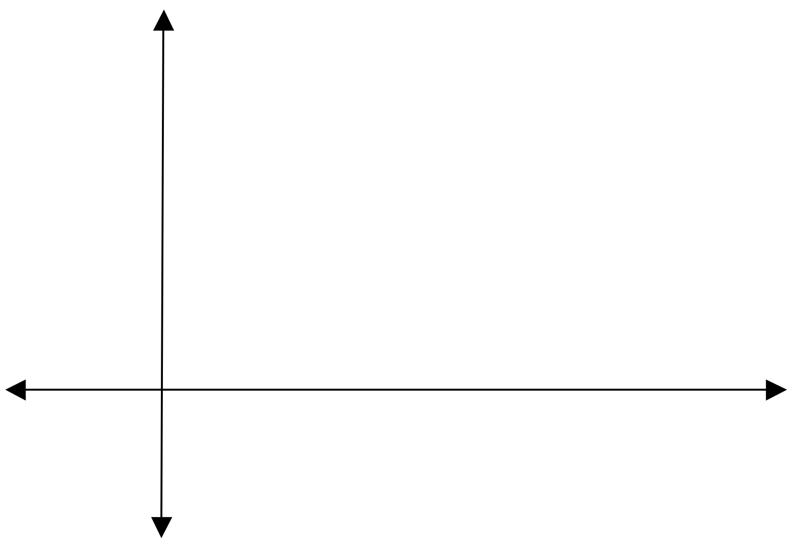
La gráfica que se obtiene es de la forma:



Los datos de tiempo y temperatura se han almacenado en las listas ti1 y te1 respectivamente.

Una vez tenemos los datos y la gráfica de la nube de puntos correspondiente, se puede ajustar automáticamente a la nube aquella función que mejor describe la situación.

Dibuja en el siguiente sistema de ejes la nube de puntos obtenida experimentalmente en la calculadora.



Obtén en tu calculadora la función de regresión que mejor se ajuste a los datos obtenidos en la nube.

$$T = f(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

1. ¿Cuál sería entonces la presión de la sonda cuando $t = 5$? $f(5)=$ ___
2. ¿Y cuando $t = 25$? $f(25)=$ _________
3. ¿Y cuando $t = 150$? $f(150)=$ _________
4. ¿Y cuando $t = 500$? $f(500)=$ _________
5. ¿Cuál debería ser la tendencia de la función que describe la temperatura cuando el tiempo tiende a $+\infty$?
6. ¿Crees que las respuestas obtenidas muestran lo que verdaderamente ocurre?_______

Modifica los valores de la ventana en tu calculadora para observar de lejos la nube de puntos y la función obtenida. Si consideras que la forma de la gráfica no se ajusta al modelo que debería seguir, vuelve de nuevo a los mismos valores de la ventana y repite las cuestiones anteriores.

Recuerda que los modelos que tiene la calculadora según la descripción del manual son:

$y = ax + b$
$y = ax^2 + bx + c$
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
$y = a + b\cdot\ln(x)$
$y = a\cdot e^{bx}$
$y = a\cdot b^x$
$y = ax^b$
$y = a\cdot\sin(bx + c) + d$
$y = c/(1 + a\cdot e^{-bx})$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

De Lange, J. (1987). *Mathematics, insight and meaning.* Utrecht: OW & OC.

Filloy, E. (2006). CAS en EFIT-EMAT. En T. Rojano (Ed.), *Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula* (pp. 130-137). México, DF: Secretaría de Educación Pública.

Filloy, E., Puig, L., y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *25*(3), pp. 327-342.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Kirshner, D. (1989). The visual syntax of algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(3), pp. 274-287.

Kitcher, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge*. New York & Oxford: Oxford University Press.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations.* Cambridge: Cambridge University Press. [Traducción castellana de Carlos Solís, *Pruebas y refutaciones*. Madrid: Alianza, 1978.]

Maaß, K. (2006). What are modelling competencias? *ZDM, 38*, pp. 113-142.

Monzó, O. y Puig, L. (2007). Modelización con la ClassPad 300, 1ª parte. *Veintidós Séptimos*, núm. 24, pp. 26-29.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori/ICE.

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico, y A. Vallecillos (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 97-108). Granada: Universidad de Granada.

Puig, L. (2006a). La resolución de problemas en la historia de las matemáticas. En J. V. Aymerich y S. Macario (Eds.) *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 39-57) Castellón: Publicacions de la Universitat Jaume I.

Puig, L. (2006b). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En P. Bolea, Mª. J. González y M. Moreno (Eds.) *Investigación en Educación Matemática 10. Actas del Décimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 107-126) Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses / Universidad de Zaragoza.

Puig, L. y Monzó, O. (2008). Competencias algebraicas en el proceso de modelización. En F. Gracia, A. Monedero, J. Palomo y Mª J. Peris (Eds.) *El discret encant de les matemàtiques. Actes de les VIII Jornades d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana* (pp. 142-158). Castellón: SEMCV.

Puig, L., y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Boston / Dordrecht / New York / London: Kluwer Academic Publishers.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions*. Dordrecht: Reidel.

Treffers, A. y Goffree, F. (1985). Rational analysis of Realistic Mathematics Education. In L. Streefland (Ed.) *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp 79-122). Utrecht: OW & OC.

Trouche, L. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur: Étude des processus d'apprentissage dans un environnment des calculatrices symboliques. *Educational Studies in Mathematics*, *41*, 239-264

Weigand, H.-G. y Bichler, E. (2010). Towards a competence model for the use of symbolic calculators in mathematics lessons: the case of functions. *ZDM 42*, 697-713.