

**C**abe poca duda hoy en día entre los historiadores de las matemáticas sobre el lugar central que ocupa en la historia del álgebra el libro de al-Khwārizmī *Kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala* (*Libro conciso de cálculo de restauración y oposición*). No sólo porque el nombre de la disciplina provenga de la decisión de Gerardo de Cremona de no traducir al latín la palabra al-jabr que designa una de las operaciones del cálculo, como ya conté en la segunda entrega de estas historias de al-Khwārizmī, sino también porque en ese libro de al-Khwārizmī está presente lo que podemos llamar el proyecto algebraico de resolución de problemas, y los objetos, los términos técnicos y el método que constituyen una nueva disciplina, así como su aplicación a otras disciplinas preexistentes. En esta entrega de las historias de al-Khwārizmī presentaré dos historias sobre el origen del libro y la originalidad de su contenido.



al-jabr wa'l-muqābala

### A todo libro famoso se le atribuye un origen mítico

El libro de al-Khwārizmī es un libro escrito por encargo. El mismo al-Khwārizmī narra en sus primeros párrafos, después de las habituales invocaciones a Dios y a su profeta, que lo escribe a petición del califa al-Ma'mūn, y que lo hace “para ayudar a aclarar lo que era impenetrable y a facilitar lo que era difícil” (Rashed, 2007, p. 94), sin atribuirse la invención de todo lo que va a presentar en él.

Djebbar (2005, pp. 41-42) cuenta que fue corriente entre los historiadores y comentaristas árabes medievales el atribuir un papel crucial en el origen del interés por el álgebra a uno de los personajes fundamentales en la historia de la fundación del Islam, ʿAlī, el yerno y primo del profeta, que a la muerte de éste sin que hubiera establecido ningún procedimiento para su sucesión fue considerado por sus seguidores como el único que legítimamente podía sucederle. El hecho de que ʿAlī no

**Luis Puig**

Universitat de València Estudi General  
historias@revistasuma.es

fuera el elegido como primer califa tras la muerte del profeta condujo a que sus seguidores no reconocieran la autoridad de ninguno de los tres primeros califas, y su asesinato, cuando finalmente fue nombrado califa, produjo la escisión chiíta del Islam, que persiste en nuestros días.

Según el origen legendario del álgebra, ‘Alī, el yerno y primo del profeta, mártir chiíta, habría sido el primer árabe en conocer el álgebra, una ciencia traída de Persia, que él habría aprendido en cinco días. Así se narra en el comentario al libro de al-Khwārizmī escrito por al-Khuzā‘ī en el siglo XIII y conservado en un manuscrito en Estambul (Yeni Cami 803), que cita y traduce Rashed (2007, p. 4):

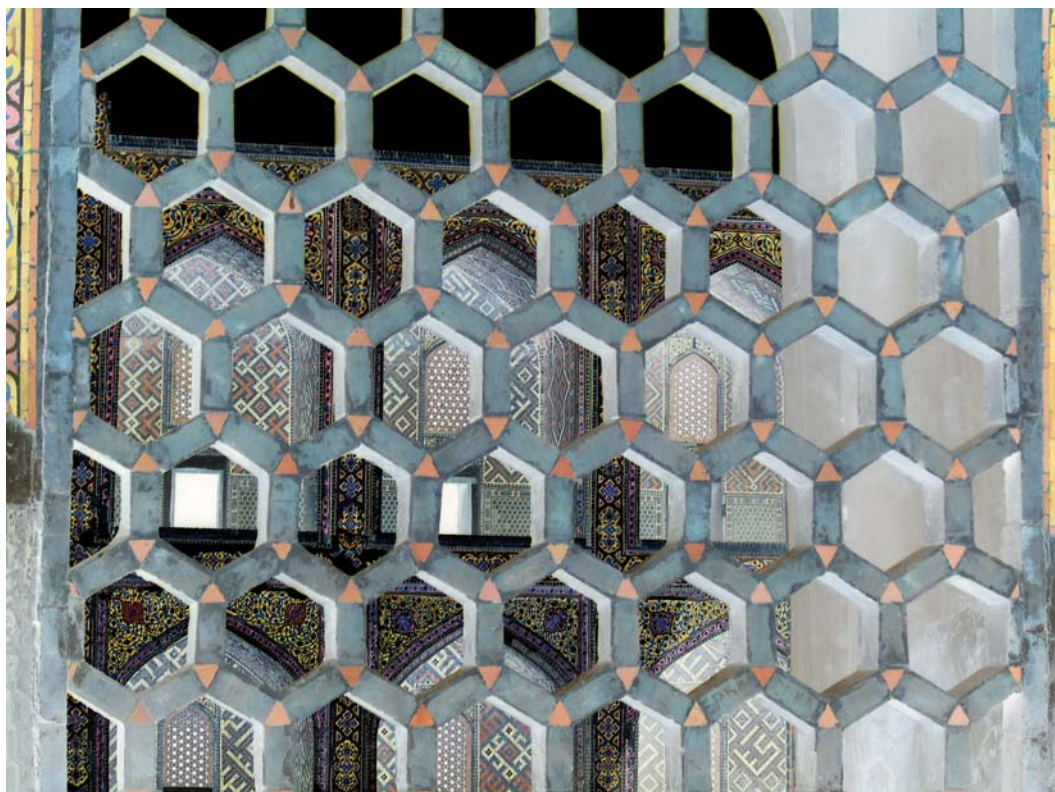
Se cuenta que, bajo el califato de ‘Umar ibn al Khattāb, unos persas trajeron la ciencia del álgebra y al-muqābala. ‘Alī ibn Abi Tālib –que Dios esté satisfecho de él– aconsejó a ‘Umar ibn al Khattāb –que Dios esté satisfecho de él– que les gratificara con una subvención de dinero público, para que la enseñaran. Se le concedió. Se cuenta que entonces ‘Alī comprendió en cinco días lo que poseían de álgebra y al-muqābala. Después de lo cual, se continuó intercambiando esta ciencia oralmente, sin consignarla en un libro, hasta que el califato recayó sobre al-Ma’mūn, cuando ya desaparecía. Se informó de ello a al-Ma’mūn, que inquirió por expertos en la materia. Se encontró que sólo el Shayk

Abū Bakr Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī era experto en ella. Al-Ma’mūn le pidió entonces que compusiera un libro de álgebra y al-muqābala, para resucitar lo que había desaparecido. Éste consintió en escribir ese libro para fijar en él los principios del álgebra y al-muqābala, y para que sirviera de referencia.

La rapidez de aprendizaje de ‘Alī la envidiarían los escolares a lo largo de los siglos, pero esta leyenda no sólo proporciona un origen glorioso al álgebra, sino que establece la importancia del paso de la tradición oral, que siempre está en peligro de desvanecerse, a su fijación en un texto escrito. El gesto fundacional de al-Khwārizmī se presenta en esta leyenda como ese gesto de fijación y ordenación “para que sirva de referencia”, no muy distinto de la fijación de la palabra en los textos sagrados.

### A todo libro famoso se le discute la prioridad

Abandonando el terreno de lo legendario, de la historia sagrada, que convierte a al-Khwārizmī en el amanuense de lo que ‘Alī sabía, también en el terreno de los hombres vulgares se le ha discutido a al-Khwārizmī la originalidad de su libro de álgebra.





Portada del manuscrito de la biblioteca Bodleyan de Oxford del álgebra de al-Khwārizmī

No me refiero a quienes han atribuido a al-Khwārizmī, al igual que al conjunto de la ciencia árabe medieval, el papel de meros intermediarios entre el pasado glorioso de la matemática griega clásica y la matemática que renace en el occidente cristiano después de años oscuros. El competidor al que me refiero es el libro que Aydin Sayili ha editado y traducido al turco y al inglés con el título *Logical Necessities in Mixed Equations*, escrito por un ‘Abd al-Hamīd Ibn Turk en la misma época en que al-Khwārizmī escribió el suyo (Sayili, 1962), y que ya el nieto del autor del libro, que también era matemático, que vivió a finales del siglo IX y principios del siglo X, y a quien se conoce con el nombre de Abū Barza, habría afirmado que el libro de su abuelo era anterior al de al-Khwārizmī (Djebbar, 2005, pp. 44-45).

De hecho, al-Khwārizmī no reivindica que lo que presente en su libro no lo haya tratado nadie antes que él. Más bien se limita a colocarse en una estirpe:

Los sabios del tiempo pasado y de las naciones de antaño continuaban escribiendo libros que componían en los distintos tipos de ciencias y los diversos aspectos de la sabiduría, para que los que les sucedieran y en previsión de una recompensa, en la medida de su capacidad [...] (Rashed, 2007, p. 92).

Sabios que escribían libros para “elucidar los secretos de la ciencia y lo que encierra de obscuro”, de tres posibles maneras:

O bien es un hombre que ha llegado a <descubrir> el primero lo que no se había descubierto antes de él y lo ha legado después suyo; o un hombre que ha explicado lo que sus predecesores habían dejado inaccesible, para aclarar su método, allanar el camino y acercar el acceso; o un hombre que ha encontrado un fallo en ciertos libros, y que entonces ha reunido lo que estaba disperso, ha enderezado su porte teniendo una buena opinión de su autor, sin echarle en cara el fallo ni enorgullecerse de lo que él ha hecho. (Rashed, 2007, p. 94).

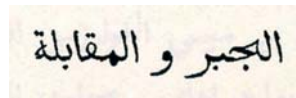
De las tareas de esos sabios, al-Khwārizmī parece que no pretenda situarse más que en la segunda, al decir que va

a aclarar lo que era impenetrable y a facilitar lo que era difícil [...] componer un libro conciso en el cálculo de al-jabr y al-muqābala (Rashed, 2007, p. 94).

El orgullo familiar del nieto de Ibn Turk estuvo probablemente detrás de su reivindicación de la prioridad del libro de su abuelo sobre el libro de al-Khwārizmī, que ya en ese momento se había convertido efectivamente, la propia protesta de Abū Barza se convierte en una prueba de ello, en el libro de referencia sobre el cálculo de al-jabr y al-muqābala.

Djebbar (2005) afirma que no sólo era el libro de referencia, sino que su prioridad prevaleció ya a partir del siglo X, como lo atestigua la reivindicación que hace de ello Abū Kāmil en la introducción de su libro de álgebra<sup>2</sup>:

Habiendo estudiado mucho los libros de los sabios <relativos> al cálculo y habiendo investigado sus afirmaciones y lo que hay de más precioso en lo que han escrito en sus libros, he constatado que el libro de Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī, que se conoce bajo <el título de> *La restauración y la comparación*, es aquel cuyo fundamento es el más preciso y cuya demostración es la más verdadera; lo que debería incitarnos, a nosotros especialistas en cálculo, a reconocer su ciencia y su preeminencia, porque él ha precedido <a los otros> en la realización del *Libro de al-jabr y al-muqābala*, que él es su iniciador y que él ha inventado los fundamentos que contiene. (Djebbar, 2005, p. 45)



al-jabr wa'l-muqābala





Primera página del manuscrito de la biblioteca Bodleian de Oxford del álgebra de al-Khwārizmī

Abū Kāmil va en su reivindicación mucho más lejos de lo que el propio al-Khwārizmī se atribuía, y probablemente barre para casa (aunque él fuera egipcio, como atestigua que se le conociera como al-Hāsib al-Misrī, el calculista egipcio).

Sayili, historiador turco como Ibn Turk, estira en la otra dirección, a pesar de que lo único que tiene para reivindicar la prioridad de Ibn Turk sea un texto muy breve, que ensalza:

El texto que existe de ‘Abd al-Hamīd Ibn Turk, que tiene unas mil cuatrocientas palabras, es probablemente un capítulo del *Álgebra* de ‘Abd al-Hamīd. Posiblemente es sólo una parte de un capítulo, pero en ese caso constituye un apartado bien definido, completo en sí mismo, con principio y fin (Sayili, 1962, p. 99).

Con tan poco material, Sayili concede no poder demostrar cuál de los dos textos, el de Ibn Turk o el de al-Khwārizmī,

está escrito antes, ni mucho menos que uno copiara del otro o se inspirara en él, pero sí que el texto de Ibn Turk es una prueba contra el que al-Khwārizmī iniciara, como dice Abū Kāmil, la ciencia del álgebra, inventando sus fundamentos.

El texto de ‘Abd al-Hamīd, sin embargo, puede decirse que corrobora la hipótesis contraria. El álgebra de ‘Abd al-Hamīd y al-Khwārizmī no parece estar en absoluto cerca del estado de su génesis. No tiene los rasgos de un álgebra que aún no ha terminado de recorrer un proceso inicial de desarrollo, sino un álgebra con reglas, tradiciones y puntos de vista bien establecidos (Sayili, 1962, p. 125).

Sayili, al no poder probar la prioridad de Ibn Turk, le quita la prioridad a ambos sobre la fundación del álgebra como disciplina independiente, colocándolos en un estadio desarrollado de la disciplina tras un pasado del que lamentablemente no quedan huellas.

Al-Khwārizmī no ha pretendido inventar gran cosa, sino partir de un conocimiento preexistente, el que el califa le ha pedido que explique. Jens Høyrup en un artículo que publicó en 1986 comparaba, tanto el libro de álgebra de al-Khwārizmī como el fragmento que se conserva de Ibn Turk, con otro libro de un tal Abū Bakr, que sólo se conoce por una traducción medieval latina del siglo XII hecha por Gerardo de Cremona, que lleva el título de *Liber Mensurationum*<sup>3</sup>. Una parte de ese libro contiene una serie de problemas que están resueltos de dos maneras: una que sigue una pauta similar a la de los textos paleobabilónicos y otra que Abū Bakr indica que está hecha “según *al-jabr*” y que es muy similar a la que aparece en el libro de al-Khwārizmī. Esta segunda técnica correspondería a una tradición, que Høyrup califica de subcientífica, propia de los que Thābit ibn Qurrah llama “gentes de *al-jabr*” o “seguidores de *al-jabr*”<sup>4</sup>, que según Høyrup probablemente eran algún tipo de contables.

Høyrup se inclina por que el texto de Ibn Turk sea anterior al de al-Khwārizmī, pero eso no lo hace valorarlo como un iniciador del álgebra ya que, al compararlo con el *Liber Mensurationum*, Høyrup encuentra el texto de Ibn Turk más primitivo en las demostraciones por parecerse al *Liber Mensurationum* más que el texto de al-Khwārizmī.

En Ibn Turk encontramos [...] un paralelismo más patente con la tradición de geometría ingenua que está reflejada en el *Liber Mensurationum* que en el caso de al-Khwārizmī (Høyrup, 1986, p. 474).

El trasfondo sobre el que escriben tanto Ibn Turk como al-Khwārizmī sería, en opinión de Høyrup, tanto lo que podemos llamar el álgebra babilónica, como esas tradiciones que llama “subcientíficas” y que están representadas en el libro de Abū Bakr. Sobre ese trasfondo, al “aclarar lo que era impenetrable y [...] facilitar lo que era difícil” construye al-Khwārizmī, lo que se reconocerá a partir de él como una nueva disciplina.

Algo de la radical novedad que supone el paso del álgebra babilónica al álgebra de al-Khwārizmī examiné en mi texto *La resolución de problemas en la historia de las matemáticas* (Puig, 2006), y sobre lo que hay en general de radicalmente nuevo en el texto de al-Khwārizmī he escrito en varias ocasiones (p. e., Puig, 1998, 2008)<sup>5</sup>. Volveré sobre ello en la próxima entrega de estas historias.

HISTORIAS ■



Las fotografías que ilustran este artículo son de Marisa Fernández que las hizo en un viaje a Uzbekistán en 2007.

## NOTAS

- 1 Traduzco aquí de la traducción francesa de Roshdi Rashed.
- 2 Cito la introducción a partir de Djebbar (2005) porque no dispongo del manuscrito árabe que él cita, y en las ediciones publicadas de las versiones medievales latina (Sesiano, 1993) y hebrea con traducción al inglés (Levey, 1966) del libro de Abū Kāmil, la introducción no aparece.
- 3 Este libro ha sido editado por Busard (1968).

- 4 El texto de Thābit ibn Qurrah se titula *Proposiciones sobre la rectificación de los problemas del álgebra mediante demostraciones geométricas*, está escrito unos cincuenta años después de la aparición del de al-Khwārizmī y está editado en Luckey (1941).
- 5 Estos tres textos están disponibles en <http://www.uv.es/puigl/textos.htm> en formato pdf.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BUSARD, H. L. L. (1968). L'algèbre au Moyen Âge: Le 'Liber Mensurationum' d'Abu Bekr. *Journal des Savants*, avril-juin, pp. 65-125.
- DJEBBAR, A. (2005). *L'algèbre arabe. Genèse d'un art*. Paris: Vuibert / Adapt.
- HØYRUP, J. (1986). Al-Khwārizmī, Ibn Turk, and the Liber Mensurationum: On the Origins of Islamic Algebra, *ERDEM* 2, 445-484.
- LEVEY, M. (Ed.) (1966). *The Algebra of Abū Kāmil, in a Commentary by Mordecai Finzi*. Hebrew text and translation, and commentary. Madison, WI: The University of Wisconsin Press
- LUCKEY, P. (1941). Thābit b. Qurra über den geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflösung der quadratischen Gleichungen. *Sitzungsberichte des sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-physische Klasse*. Berichte 93, pp. 93-114.
- PUIG, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 109-131). México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.
- PUIG, L. (2006). La resolución de problemas en la historia de las matemáticas. En Aymerich, José V. y Macario, Sergio (Eds.) *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 39-57) Castellón: Publicacions de la Universitat Jaume I.
- PUIG, L. (2008). History of algebraic ideas and research on educational algebra. In M. Niss (Ed.) *Proceedings of the Tenth International Congress on Mathematical Education. CD-version*. Roskilde: IMFUFA, Department of Science, Systems and Models, Roskilde University.
- RASHED, R. (Ed.). (2007). *Al-Khwārizmī. Le commencement de l'algèbre*. Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.
- SAYILI, A. (Ed.). (1962). *Abdülhamid ibn Türk'ün Katışık denklemlerde Mantıkî Zururetler adlı yazısı ve Zamanın Cebri (Logical necessities in mixed equations by 'Abd al-Hamid Ibn Turk and the algebra of his time)*. Ankara: Türk Tarih Kurumu Basımevi.
- SESIANO, J. (1993). La version latine médiévale de l'Algèbre d'Abū Kāmil. In M.FOLKERTS, AND J. P. HOGENDIJK (Eds.) *Vestigia Mathematica. Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H. L. L. Busard* (pp. 315-452). Amsterdam and Atlanta, GA: Editions Rodopi B. V.

