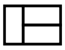
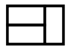
5.4.2. EL CASO DE C Y A CON EL PROBLEMA DEL PAVIMENTADO.

5.4.2.1. *Análisis del problema*.

Este problema forma parte de una colección de problemas propuestos en Engel (1971) y lo hemos utilizado en cursos subsiguientes como material de instrucción. La forma en que enunciamos el problema en la sesión con C y A fue la siguiente:

Se trata de pavimentar un rectángulo de $2 \times n$ con ladrillos de 2×1. Por ejemplo, el rectángulo 2×3 puede pavimentarse así:  o así: . El problema es: ¿de cuántas maneras distintas puede hacerse?

En el enunciado incluimos un caso para ilustrar qué es lo que significa “pavimentar”, y las dos disposiciones que presentamos informaban también implícitamente de que las disposiciones simétricas había que considerarlas distintas, pero no dibujamos todas las disposiciones correspondientes a propósito, para no dar ni siquiera el resultado de un caso. La ilustración con el caso la incluimos en el enunciado para no tener que dar explicaciones verbales a los resolutores y mantener nuestra neutralidad de observadores. Jugamos además con la adscripción de los objetos que aparecen en el enunciado a dos mundos: “pavimentar” y “ladrillos”, al mundo “real”; “rectángulo” y “$2 \times n$”, al de las matemáticas[24].

Como sucede con cualquier problema combinatorio, es preciso identificar claramente qué disposiciones van a considerarse iguales y cuáles distintas, y esa identificación podemos enunciarla como un problema e incluirla en el espacio de problemas, ya que tiene como resultado la modificación del problema original según cuál sea el resultado de la identificación. Así, las dos disposiciones que hemos presentado en el enunciado del problema pueden considerarse distintas o pueden considerarse iguales, si se identifican las disposiciones que son simétricas unas de otras, o bien puede tenerse presente la alternativa y formular explícitamente los dos problemas derivados. La figura 5.6 ilustra este hecho y puede considerarse como un esquema propio del espacio de problemas de un problema combinatorio.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "T_I"] \arrow[d] & P^1 \\ I \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P \arrow[r, "T_I^1"] \arrow[d] \arrow[dr, "T_I^2"] & P^1 \\ I \arrow[ur] \arrow[r] & P^2 \end{tikzcd}$$

Figura 5.6

---

[24] En otras ocasiones, hemos substituido “rectángulo” por “acera” o “ladrillo” por “rectángulo” y “pavimentar” por “formar”, para homogeneizar el enunciado.

Las soluciones y los resultados de los problemas P^i derivados de las distintas maneras de resolver el problema de identificación I están relacionadas y ésta es una de las razones por la que los problemas combinatorios como éste tienen potencial heurístico. Examinaremos aquí la solución del problema en que las disposiciones que son simétricas una de otra se toman como distintas, que es el que planteamos a C y A.

Una solución se basa en que el rectángulo $2\times n$ se termina de pavimentar o bien añadiendo a un rectángulo $2\times(n-1)$ un ladrillo colocado "verticalmente", , o añadiendo a un rectángulo $2\times(n-2)$ dos ladrillos, colocados "horizontalmente", . Así que el número, a_n, de maneras de pavimentar un rectángulo $2\times n$ se obtiene sumando el número de maneras de pavimentar un rectángulo $2\times(n-1)$ y el número de maneras de pavimentar un rectángulo $2\times(n-2)$; es decir, la sucesión a_n está definida por la misma regla de recurrencia que la sucesión de Fibonacci: $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$. Basta hallar los dos valores iniciales $a_1=1$ y $a_2=2$ para tener una expresión recurrente que permite calcular a_n.

Si el problema se aborda con la herramienta heurística "consideración de una serie de casos" y se compilan los resultados de los primeros casos, 1, 2, 3, 5, 8, 13…, puede observarse la regla de formación de la sucesión de Fibonacci como pauta en los resultados. El problema original se transforma entonces, como siempre que se usa esta herramienta heurística con esta intención, en el problema de probar correspondiente, P_P. Lo que cabe hacer es probar que la misma regla que rige la sucesión de los resultados, rige también la generación de las maneras de pavimentar, esto es, ir a buscar un modo de contar las maneras de pavimentar un rectángulo $2\times n$ a partir de las maneras de pavimentar un rectángulo $2\times(n-1)$ y las maneras de pavimentar un rectángulo $2\times(n-2)$. Esto puede hacerse con un razonamiento hecho sobre el rectángulo $2\times n$ como el que hemos expuesto en la solución anterior o con el mismo razonamiento realizado en un caso genérico, como el que ilustra la figura 5.7.

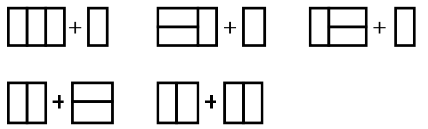


Figura 5.7

En la figura 5.8, damos una representación del espacio de problemas asociado a este uso de la consideración de una serie de casos y la resolución del problema P_P, mediante el traslado del modo de contar desde los casos particulares. Para ello, hemos combinado el esquema de la consideración de casos que conduce a la formulación de un problema de probar, con un esquema que muestra cómo un problema de recuento puede considerarse descompuesto en el problema L —"¿cuáles son los objetos distintos?"— y el problema M —"Hallar un modo de contar los objetos producidos por L"[25].

[25] También corresponde a este esquema la descomposición de Q en D y E en el espacio de problemas de la resolución de M y MJ del problema del número de divisores.

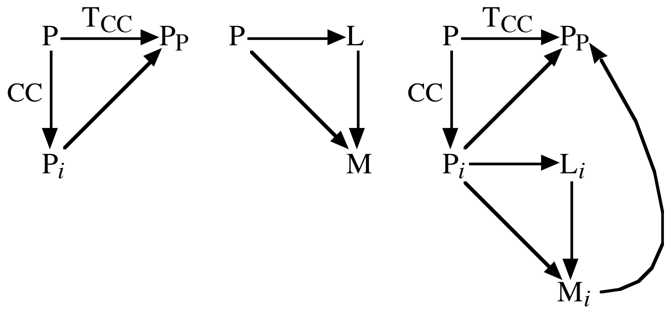


Figura 5.8

Por otro lado, el problema puede transformarse en el problema equivalente S, “De cuántas maneras distintas puede descomponerse n como suma de unos y doses”, como resultado de la observación de que la longitud n del rectángulo $2\times n$, una vez está pavimentado, está descompuesta en segmentos de longitud 1 o 2, que son los lados de los rectángulos 2×1, como muestra la figura 5.9 para el caso n=3.

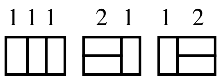


Figura 5.9

Una solución del problema S consiste en resolver el problema “qué tipos distintos de sumas de unos y doses dan n” y los problemas “cuántas sumas de cada tipo” y conduce al resultado

$$a_n = \sum_{\substack{p+q=n \\ p\geq q}} \binom{p}{q}$$

que es la suma de una diagonal del triángulo de Pascal. Como S es equivalente al problema original P, éste es también el resultado de P y P está resuelto[26].

[26] El análisis del problema no lo llevamos más adelante ya que lo expuesto es más que suficiente para dar cuenta del protocolo de C y A. Para el uso que hemos hecho de él como material de instrucción, aún sería pertinente examinar cómo se deriva de la regla de formación de los números combinatorios, que están en el resultado de S, la regla de formación de la sucesión de Fibonacci, que es el resultado de P. También, en la fase de revisión-extensión, cómo en los problemas obtenidos a partir de éste substituyendo $2\times n$ por $3\times n$, etc., los modos de contar las disposiciones, las sucesiones correspondientes, los problemas reformulados en términos de sumas de números, las sumas de números combinatorios y las diagonales correspondientes del triángulo de Pascal, son similares. Y, finalmente, cómo la solución de la versión del problema en que se consideran iguales las disposiciones que son simétricas unas de otras se puede obtener a partir de la que acabamos de resolver, por el intermedio del problema de cuántas disposiciones son simétricas, que, por su parte, se resuelve con un modo de contar similar al anterior. Esta riqueza de relaciones del espacio de problemas asociados es lo que

El espacio de problemas de la resolución de este problema está compuesto por la combinación de los esquemas que hemos presentado, que no elaboraremos aquí en detalle. Sólo señalaremos que el problema S es razonable que se aborde considerando casos y todas las transformaciones que hemos señalado para resolver el problema P hay que desdoblarlas en las correspondientes a los problemas P^1 y P^2.

5.4.2.2. *El espacio de problemas en la resolución de C y A.*

La resolución de C y A de este problema se caracteriza, sin embargo, por desarrollarse en una parte bastante reducida del espacio de problemas teórico que acabamos de esbozar y está enmarcada por el salto inmediato al plan "Podemos empezar considerando casos" (C, 2) y el estancamiento final "¿Qué hacemos?" (C, 207). La figura 5.10 lo representa:

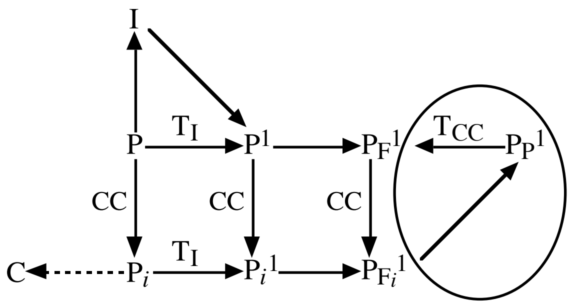


Figura 5.10

El paso al problema de probar $P^1{}_P$ no llega a producirse porque no se llega a encontrar nada en los casos como conjetura, y lo hemos representado separado del resto porque no hay pruebas en los ítem del protocolo de que C y A fueran a formularlo e intentar resolverlo. La cadena de problemas P, P^1 y $P^1{}_F$, acompañados por debajo de los problemas correspondientes producidos por la consideración de casos, dan cuenta de cómo del problema P se derivan los problemas P_i antes de haber resuelto el problema de identificar qué disposiciones van a considerarse iguales y cuáles distintas; de modo que, cuando I queda resuelto tras los ítem 73 a 88, los casos se reconsideran, pero ahora como casos del problema P^1. Esto muestra además, que el problema I no se genera por un análisis de la naturaleza del problema P, sino que aparece una vez iniciada la resolución de P porque forma parte integrante de las demandas de la estructura de la tarea, aunque no haya sido previsto por los resolutores.

El problema $P^1{}_F$ es el problema P^1 en el que se ha introducido la precisión de que el resultado que se persigue es una fórmula. La distinción entre P^1 y $P^1{}_F$ la hemos introducido para dar cuenta de que los ítem que componen el penúltimo episodio muestran que hasta ese momento tan avanzado del proceso de resolución no estaba establecido con claridad cuál era la forma del resultado del problema. A partir del momento en que se establece $P^1{}_F$, los casos se reconsideran de nuevo como casos de $P^1{}_F$.

---

constituye el enorme potencial heurístico de este problema. Este esbozo de análisis es una muestra de lo que llamamos *análisis del potencial heurístico* de un problema, que es el que hay que hacer para la instrucción.

Finalmente, el problema que hemos designado con C —“¿El cuadrado es un rectángulo?”— lo hemos señalado, pese a su presencia marginal y breve en la consideración del caso P_2, porque a) reaparece cuando en un episodio de verificación se duda de los resultados obtenidos en los casos; b) se nos ha presentado en numerosas ocasiones con otros alumnos[27], y c) su resultado influye en el resto del proceso.

5.4.2.3. *Un diagrama de episodios del proceso de resolución.*

El diagrama de episodios que presentamos lo hemos organizado en esta ocasión mostrando los episodios respecto al problema original P y los que le siguen en la cadena $P \rightarrow P^1 \rightarrow P^1{}_F$ y calificando las acciones respecto a ellos, con la indicación en los episodios de verificación de cuáles son los casos que se verifican.

Cada uno de los episodios está acompañado de una descripción somera de lo que lo constituye y de la indicación de los otros problemas del espacio de problemas que aparecen en el episodio y de los ítem en que aparecen. Además, hemos anotado también el resultado obtenido para cada P_i, y si es correcto o no. Finalmente, también hemos anotado algunos ítem en los que se gestiona la dirección del proceso. Estas observaciones constituyen el esqueleto de la reconstrucción racional del proceso.

E_1: Lectura 1	Sólo se repite la pregunta que aparece en el enunciado del problema.
E_2: Plan 2	C, 2: “Podemos empezar considerando casos.”
E_3: Ejecución 3-39	P_3: 3-12 (Resultado erróneo: 2.) P_4: 13-18 (Resultado erróneo: 1.) P_5: 19-39 (Resultado erróneo: 6.)
T: 40	
E_4: Verificación P_3 41-47	P_3 (Resultado correcto: 3.)

[27] El problema está ligado al significado que ‘rectángulo’ ha recibido en la tradición escolar o al sentido que le dan los alumnos como consecuencia de su experiencia con los objetos a los que se nombra habitualmente como rectángulos. En las ocasiones en que hemos substituido en el enunciado del problema “rectángulo” por “acera”, este problema no ha hecho aparición.

E_5: Plan-ejecución 48-136	C, 48: “Vamos a hacer una tabla.” P_2: C, 49-50 P_1: 51-55 (Resultado correcto: 1.) P_2: 56-71 (C: 56-59) (Resultado correcto: 2.) P_3, P^1_3: 72-90 (I: 73-88) (Resultado correcto: 3.) P^1_4: 91-102 (Resultado erróneo: 4.) P^1: A, 103: “¿Vemos otro caso?” P^1_5: 104-131 (Resultado correcto: 8.) P^1: 132-136 (Desánimo por la desaparición de la pauta.)
E_6: Verificación P^1_1-P^1_3 137-152	P^1_1: 137-138 P^1_2: 139-143 (A plantea C.) P^1_3: 144-152 (En 147-152, A plantea I, que C rechaza, y abandonan la verificación..)
E_7: Ejecución 153-181	A, 153: “Es que…, seguir ya con dos por seis.” C, 154: “¿Por qué no?” P^1_6: 155-178 (Resultado erróneo: 10.) P^1: 179-181 (desánimo porque no hay pauta que salte a la vista.)
E_8: Lectura-Formulación 182-190	P^1_F: La lectura conduce a establecer la forma que ha de tener el resultado: una fórmula en función de *n*.
E_9: Exploración 191-207	P^1_F: Los resultados de los casos se observan y se calculan sus primeras diferencias, sin obtener nada. C, 207: “¿Qué hacemos?”

5.4.2.4. *Observaciones*.

El espacio de problemas de la resolución de C y A y el diagrama de episodios muestran que éste es un proceso de resolución marcado decisivamente por el uso de la herramienta heurística “consideración de una serie de casos”. Nos interesa observar aquí cuál es la forma que adopta el uso de esta herramienta heurística en la actuación de C y A.

El episodio que hemos calificado como de plan está compuesto de un único ítem en que C define el plan como “considerar casos” y, cuando se reorganiza éste en el ítem 48, después de un episodio de verificación de los casos considerados hasta ese momento, lo que lo reorganiza es simplemente la indicación "Vamos a hacer una tabla", en la que se menciona la destreza que está asociada naturalmente a esa herramienta heurística. La mera mención de "considerar casos" y "hacer una tabla", que han sido los nombres precisos que se han utilizado en la instrucción que han recibido C y A, parece disparar en ellos una serie de acciones, cuya ejecución se emprende sin más preámbulo. La ejecución del plan organizado formalmente por la consideración de casos se acompaña de algunas acciones de gestión que conducen a episodios de verificación como el episodio 4, o a seguir con nuevos casos, como tras A, 103 o C, 154.

La herramienta heurística parece tratarse como si fuera un procedimiento rutinario de aplicación automática. La decisión de su uso no aparece fundada en ningún análisis del problema y seguramente se toma por la presencia de la *n* en el enunciado, que es el rasgo superficial de éste que indica que puede ser aplicable esta herramienta heurística. La intención de su uso, que en los episodios 2, 3 y 4 no aparece con claridad, parece ser, desde el momento en que comienza el episodio 5 con "Vamos a hacer una tabla", la de encontrar una pauta en los resultados. Entonces, cuando el resultado erróneo obtenido para P_4 da origen a una pauta que se desmorona con el resultado correcto del problema siguiente P_5, aunque el gestor indica que lo que hay que hacer es verificar los problemas resueltos y se pasa al episodio 6 de verificación, esta verificación no consiste en examinar el modo de obtener las disposiciones, ni se realiza para todos los problemas resueltos, lo que elimina incluso la posibilidad de detectar el error cometido. Además, ante la imposibilidad de encontrar una pauta en los resultados numéricos, no se tiene ninguna opción para substituir esta intención del uso de la consideración de casos y se persiste en considerar aún otro caso, P_6, con la misma intención, o, en el último episodio, se miran y se manipulan ligeramente los números de los resultados ya obtenidos.

Esta rigidez en el uso de la consideración de casos parece conducir a pensar que la garantía de que los problemas P_i han estado bien resueltos es que aparezca una pauta en los resultados: las verificaciones no consisten en *analizar las soluciones* de los problemas P_i, sino en volver a obtener resultados y ver si se presenta una pauta[28].

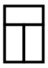
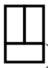
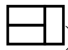
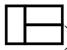
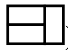
Otro hecho que queremos señalar está relacionado con la solución del problema I. La identificación de las disposiciones que se van a considerar como iguales no es simplemente un problema de decisión como lo hemos descrito en el análisis del problema[29], sino que aparece como un problema al que se dedica un subepisodio del proceso —los ítem 73 a 88—, y en las actuaciones de los sujetos puede contener opciones, como la que plantea A, que no parece que puedan aparecer en un análisis en el nivel I. La solución del problema I en este protocolo es el producto de la confrontación entre los argumentos de A y C, que mantienen posiciones distintas, confrontación que culmina con dos ítem en

---

28 Al final del protocolo también se admite que puedan estar los resultados bien, pero que la pauta no la ven: "[…] A lo mejor, ¡yo qué sé!, eso sí que está bien y hay alguna relación." (A, 200); "Y es lo que estoy pensando…, no la veo…" (C, 201).

29 En el nivel I.

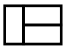
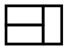
que C consigue vencer la última objeción de A, que apunta a que el resultado del argumento de C sería el problema P^2 y no el P^1:

"Entonces estos dos (señala  ) hemos quedado que son como éstos (señala  ). Entonces es que éste (señala ) también lo podemos considerar como éste (señala )." (A, 85)

"No, porque colocados de una misma forma, o sea, yo siempre coloco el rectángulo así, (hace un gesto indicando horizontal) lo considero siempre así y a partir de ahí lo puedo dividir..., dividir de distintas formas." (C, 86)[30]

Ahora bien, pese a que en los ítem siguientes trabajan en los problemas correspondientes a esa solución del problema I, tan pronto como desaparece la pauta y se entra en un episodio de verificación, A vuelve a argumentar, en los ítem 147 a 152, en favor de la posición que había mantenido. Esta vuelta a posiciones que se habían abandonado de forma argumentada cuando surgen dificultades es una tendencia cognitiva que se nos ha repetido en un buen número de protocolos.

5.4.2.5. *El protocolo escrito*.

Se trata de pavimentar un rectángulo de $2 \times n$ con ladrillos de 2×1. Por ejemplo, el rectángulo 2×3 puede pavimentarse así:  o así: .

El problema es: ¿de cuántas maneras distintas puede hacerse?

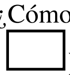
0:00 {1} A: Hemos de ver de cuántas maneras distintas puede hacerse.

0:10 {2} C: Podemos empezar considerando casos.

0:13 {3} A: Bueno, ahí tenemos uno, el de dos por tres se puede hacer de dos..., de dos formas: así o así; (señala las dos que están en el enunciado) ahora vamos a considerar...

0:26 {4} C: El de dos por tres se puede hacer de más formas.

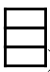
{5} A: ¿Más? ¿Cómo?

{6} C: (Dibuja )

{7} A: Son ladrillos de dos por uno.

{8} C: No, no se puede hacer. 

{9} C: Pues en vez de dos por tres...

{10} A: ¡Espera! ¿No se podría hacer así? (Dibuja )

---

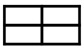
[30] Vale la pena aprovechar el haber citado el ítem 86 para, junto con los dibujos que acompañan a los ítem 108 y 156 que pueden verse en el texto completo del protocolo escrito, observar cómo influyen las representaciones de los objetos implicados en el problema, creadas durante la resolución, en el curso del proceso. Estos ítem muestran que C dibuja primero un rectángulo $2 \times n$ y que luego lo divide en rectángulos 2×1: por eso no le pueden aparecer las disposiciones que contempla A, pero a éste le aparecen naturalmente porque construye el rectángulo $2 \times n$ pegando ladrillos.

{11} C: No, eso son tres por uno.

{12} A: Sí.

1:06 {13} A: Otro rectángulo en vez de dos por tres sería...

{14} C: Dos por cuatro.

{15} A: Dos por cuatro. 

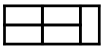
{16} C: Así y así. (Hace gestos que indican la posición horizontal.)

{17} A: Con dos por uno, ¿otra forma?

{18} A: Si son dos por uno, creo que no hay ninguna otra forma. ¿Tú ves alguna?

1:47 {19} C: A ver..., dos por cinco...

{20} A: Dos por cinco...

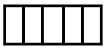
{21} C: Dos por dos y por uno. O al revés, poniendo aquí éste. 

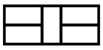
{22} C: ¿Cuántos casos son...?

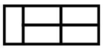
{23} A: Dos y dos y uno. (Cuenta el dibujo.)

{24} C: Sí.

{25} A: Al revés...

{26} C: O así. 

{27} A: Poniéndolo en medio..., ¿no? 

{28} A: Esto al revés, también es. 

{29} C: ¿Hay más formas?

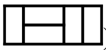
{30} A: Creo que no. ¿Cambiando éste? ¿Cambiando uno de éstos?

{31} A: Bueno, esta forma..., esta forma...

{32} A: No.

{33} C: Uno, dos..., no.

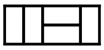
{34} A: Así.

{35} C: (Dibuja )

{36} A: No, ahí te saldrá seis.

{37} C: Sí que puede ser. ¿Por qué no va a poder ser así?

{38} A: Uno, dos, tres... ¡Ah, no...! ¡Sí, sí!

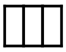
{39} C: O al revés, poniendo dos aquí y uno ahí. 

3:43 {40} C: ¿Los estamos...? El problema es si los estamos considerando todos. ¿Entiendes?, que..., tenemos el problema de que..., no sabemos si podemos dibujar más o no... Vamos a ver, tenemos que contarlos todos, ¿no?

4:06 {41} A: Pero es que si de éste no hemos... Tú dices que se puede dibujar de más formas.

{42} C: Bueno, no lo sé.

{43} A: Sí.

{44} C: Como éste. Poniendo los tres verticales. 

{45} A: Pues ves... vamos poniendo: dos por tres hay tres formas. (Escribe 2×3——3)

{46} C: ¿Sólo?

{47} A: Yo no veo otra forma.

4:36 {48} C: Vamos a hacer una tabla.

4:40 {49} C: De dos por dos se pue..., de dos por dos también, o...

{50} A: Es un cuadrado. Si consideramos el cuadrado como...

4:49 {51} C: ¿Y de dos por uno?

{52} C: De dos por uno, uno.

{53} A: De dos por uno, uno.

{54} C: Ponemos aquí un uno. (Escribe 2×1——1, encima de 2×3——3.)

{55} A: Sí.

{56} C: ¿Dos por dos lo consideramos?

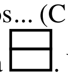
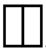
{57} A: Sí.

{58} C: ¿Por qué no va a ser..., un cuadrado?

{59} A: Sí, lo consideramos.

{60} C: De dos por dos se pueden hacer...

{61} A: De dos por dos... (C dibuja ) No tan grande.

{62} C: Así una forma . Y así otra .

{63} A: Así otra.

{64} C: Y ya está.

5:20 {65} A: No, es que puedes ponerlos así... O no, no sería...

{66} C: Sí.

{67} A: ... no sería dos por..., esto  no es un rectángulo de dos por...

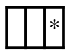
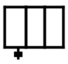
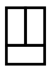
{68} C: ¿Es de uno por dos? ¿No es lo mismo?

{69} A: Es de uno por cuatro. Entonces no sería dos por algo.

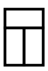
{70} C: O sea, que de dos por dos podemos hacer dos. (Escribe en la tabla 2×2——2)

{71} A: Dos.

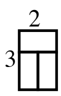
5:50 {72} C: De dos por tres...

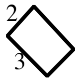
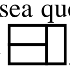
5:54 {73} A: Tenemos tres, porque éste..., (señala el tercer ladrillo del que tiene los tres verticales ) éste lo podríamos poner aquí (señala debajo de los dos primeros ) también porque seguiría siendo dos..., dos por tres, y también arriba, ¿lo ves? Éste es de dos por tres. 

{74} C: Y al revés también.

{75} A: Y el mismo al revés. 

{76} C: ¿Es dos por tres?

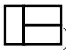
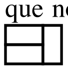
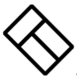
{77} A: Sí, el cuad..., el..., cada ladrillo es de dos por uno, ¿no? Cada ladrillo..., todos son de dos por uno, entonces, este lado de aquí es de dos y éste es uno y dos, tres,  es de dos por tres. Entonces éste también, igual que éste: dos por tres. Entonces de tres podríamos poner..., uno, dos, tres, cuatro y cinco.

6:59 {78} C: Pero eso es una tontería, si lo pongo así  me salen de otra forma, ¿son distintos entonces? ¿Por qué no voy a considerar éste? Es también de dos por tres. O sea que a lo mejor este caso es igual que éste, entonces estos otros dos son iguales. (Señala  y .)

{79} A: No.

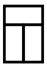
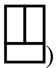
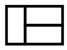
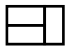
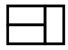
7:20 {80} C: Entiendes, yo estos casos no los consideraría, porque si no, podríamos colocar infinitas formas, y entonces...

{81} A: No sé..., pero si tú..., yo qué sé, consideras un lado horizontal..., a partir de ahí vas componiendo, ¿no?, no empiezas a buscar...

{82} C: No, pues si entonces tú puedes colocarlo así..., lo mismo que no puedes..., lo mismo que a partir de ése..., (señala ) lo puedes colocar así..., (señala ) también lo puedes colocar así. (Dibuja .)

{83} A: Sí, puede ser que puedo colocar éste y girar y es el mismo, ¿sí?

{84} C: Entonces, ¿cuántos ponemos?

7:51 {85} A: Entonces estos dos (señala ) hemos quedado que son como éstos. (Señala ) Entonces es que éste (señala ) también lo podemos considerar como éste. (Señala .)

{86} C: No, porque colocados de una misma forma, o sea, yo siempre coloco el rectángulo así, (hace un gesto indicando horizontal) lo considero siempre así y a partir de ahí lo puedo dividir..., dividir de distintas formas.

{87} A: Bien.

8:09 {88} C: Pero lo tenemos que considerar siempre de una misma..., porque si no, podemos hacer infinitos.

{89} A: Vale. Entonces de tres sólo consideramos estos tres.

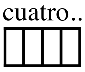
8:20 {90} C: Sí.

8:23 {91} A: ¿De cuatro? Bueno, éstos son de cinco.

{92} C: De dos por cuatro...

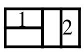
{93} A: Éstos no, éstos son de cinco.

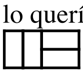
{94} A: De dos por cuatro..., es que..., no sé..., no sé más.

{95} C: Sí. (Dibuja )

{96} A: Y así. (Dibuja )

{97} C: No, no, es igual.

{98} A: No así no, lo quería hacer de otra forma: así y así... (Traza las líneas 1 y 2 .)

{99} C: Y al revés .

{100} A: ...y al revés. ¿Algún otro caso?

{101} A: No, porque éstos están horizontal, vertical y luego la mitad.

9:30 {102} C: O sea que de dos por cuatro, cuatro. Uno, dos, tres, cuatro. (Escribe en la tabla 2×4——4.)

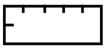
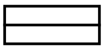
9:39 {103} A: ¿Vemos otro caso?

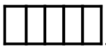
9:41 {104} C: ¿El dos por cinco?

{105} A: O...

{106} C: Sí...

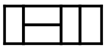
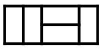
{107} A: Dos por cinco.

{108} C: (Dibuja  .)

{109} A: Serán dos, tres, cuatro y cinco. Una forma . Otra sería todas verticales. Dos, tres, cuatro y cinco .

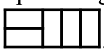
{110} C: Ya los habíamos dibujado antes.

{111} A: Sí.

{112} A: Sí, aquí faltan dos, ¿no?  

{113} C: Sí.

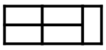
{114} A: Habíamos cambiado estos dos aquí. Luego...

{115} C: Ahora éste lo voy a poner aquí .

{116} A: Sí, ése ya...

{117} A: Y horizontales todos no podría ser, porque sería dos..., (cuenta los ladrillos en el dibujo)

{118} C: No.

{119} A: ...otros dos... 

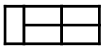
{120} C: ¡Ah, sí!

{121} A: Dos..., ¿sí?, uno, dos, tres, cuatro, cinco..., por dos.

{122} C: Sí, también.

{123} A: Entonces éste también lo podríamos cambiar de lugar.

{124} A: Lo ponemos en medio. 

{125} C: Y al otro lado. 

{126} A: Y al otro.

{127} C: Ahora nos salen muchos.

{128} A: Ahora nos salen más.

{129} C: ¿Hay más?

11:51 {130} A: Yo creo que no. Ocho de dos por cinco. Yo creo que no hay ninguno más. ¿Tú ves algún otro?

12:07 {131} C: (Escribe 2×5——8)

12:12 {132} A: Ahora..., no sé, es que más o menos ahí (se refiere a lo que hay en la tabla, excepto lo que acaba de escribir) había una relación.

12:17 {133} C: Pero a lo mejor nos hemos olvidado alguno.

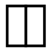
12:22 {134} A: Es que los hemos borrado.

12:38 {135} A: Es que el rectángulo este dos por ene sería dos por lo que fuese, con ladrillos de dos por uno. Entonces, no sé, yo pienso que es..., por ejemplo, esto que hemos hecho aquí de ir cambiando los dos horizontales, como es dos por ene, cada vez que aumentásemos uno podríamos cambiarlo una vez más de lugar, pero es que allí, por ejemplo, en dos por cuatro sólo cuatro y luego dos por cinco ya nos da ocho.

{136} C: Luego, también se pueden poner dos horizontales y cada vez...

13:21 {137} C: Primero es así y nos sale uno, ¿no? 

{138} A: Hum.

{139} C: Si ahora aumentamos esto, ya son dos por dos... 

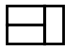
13:29 {140} A: A lo mejor es que el cuadrado...

{141} C: ...y así..., no sabemos...

{142} A: ...no lo consideramos.

{143} C: Hemos dicho así y así (gestos horizontal y vertical)

{144} C: Si aumentamos esto...

{145} A: Nos sale ése  , el otro al revés  y los tres horiz..., y los tres verticales, que los tenemos aquí. Es que hemos hecho ya los pasos hasta el cinco, luego el cinco nos da ocho.

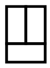
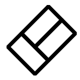
14:17 {146} C: ¿De otra forma podríamos hacerlo...?

14:25 {147} A: A lo mejor es que tenemos que considerar los que yo te he dicho.

{148} C: ¿Cuáles?

{149} A: Los de verticales. No sé, a lo mejor me empeño en eso y no. Y puede ser, como tú dices, que sean iguales que ésos.

{150} A: Lo intentamos a ver...

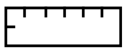
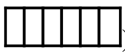
{151} C: Es que si los colocamos así (señala ), también los podemos colocar así (dibuja ). Lo puedo colocar de la forma que quiera.

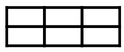
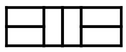
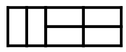
14:56 {152} A: No lo sé.

15:00 {153} A: Es que... seguir ya con dos por seis...

{154} C: ¿Por qué no?

{155} A: Bien, a ver. Borro.

15:23 {156} C: Vete tú haciendo. (Dibuja  )

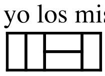
{157} A: Yo los he hecho horizontales.    

{158} A: Con dos..., con éste se puede hacer más. Cambian..., ir cambiando una pieza. 

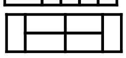
{159} C: Ahora éste lo pongo aquí, éste... 

{160} A: Sí, si vas cambiando...

{161} A: ¡A ver si vamos a repetir tú y yo los mismos!

{162} C: Entonces vamos a hacer así... 

{163} A: Yo lo he puesto al principio. 

{164} A: En medio está en algún sitio. 

{165} C: En medio puede ser así y así, como los he puesto.

{166} A: Y con los tres... Falta con los tres a ese lado, a la izquierda, ¿no? Éstos, si los corres a un lado, aquí, que queden dos y tres...

{167} C: Tienen que quedar uno, dos, tres, éste y uno. Uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis. 

{168} A: Sí... Es que así nos salen diez.

{169} C: Y, ¿no hay más?

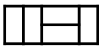
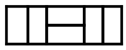
{170} A: Sí.

{171} C: ¿Cuál?

{172} A: Hemos cambiado..., hemos puesto aquí uno. En el segundo lugar ahí y luego con tres y con cuatro, ¿no? Y luego con cuatro horizontales tenemos uno, dos, tres. Ya no se pueden poner más..., horizontales, ¿no? Están los dos a este lado, uno en cada lado y dos...

{173} C: Éste está mal.

{174} A: ¿Cuál?

{175} C: Éste es por seis. (Añade un rectángulo a  para corregirlo .)

{176} A: ...y los dos a éste.

{177} C: Salen diez.

18:30 {178} A: Sí.

18:32 {179} C: Pero es que no..., no..., no encontramos nada para que...

{180} A: ...relacionar.

{181} C: Sí.

18:40 {182} C: O sea que... ¿Tenemos que encontrar una fórmula? ¿Es lo que hay que encontrar?

{183} A: Sí, mira, es que...

{184} C: ...según...

{185} A: ...lo que te piden es de cuántas maneras distintas...

{186} C: ...puede hacerse.

{187} A: De cuántas.

{188} C: Y eso qué es, ¿una fórmula? Según aumente ene o disminuya..., tener cuántas formas distintas...

{189} A: Más o menos como lo hemos estado haciendo ahí: dos por uno, una vez; dos por dos, dos veces... Va aumentando, pero lo que tenemos que encontrar es la relación para saber...

19:13 {190} C: Y es que no podemos contar... Yo no sé si nos hemos olvidado alguno aquí. El problema es que no podemos contarlos.

19:40 {191} C: Tenemos que encontrar una fórmula entre..., que hay..., que hay una relación entre esto y esto, o sea, según aumente esto, cómo aumenta esto. (Se refiere a lo que está escrito en la tabla.)

2×1——1

2×2——2

2×3——3

2×4——4

2×5——8

{192} A: Pero es que ahí no encontramos nada, porque hasta el cuatro va aumentando de uno en uno, pero ya pasa al cinco y luego al seis ya nos da diez.

20:10 {193} C: No sé.

20:13 {194} A: A lo mejor tiene alguna relación que sea dos por ene y dos por uno. Que no lo hemos tenido en cuenta.

20:21 {195} C: No, no entiendo, cómo.

{196} A: Que si el rectángulo tiene que ser precisamente dos por..., luego el número que sea, si son ladrillos de dos por uno... Debemos estar haciendo esa relación mal.

20:44 {197} A: O considerando casos que no son. Es que todos estos rectángulos son de dos por seis, por ejemplo.

20:54 {198} C: (Escribe 2×6——10.)

{199} A: Uno, dos, tres...

{200} A: No si parece muy sencillo, pero... A lo mejor, ¡yo qué sé!, eso sí que está bien y hay alguna relación.

{201} C: Y es lo que estoy pensando..., no la veo...

{202} A: Cada... Estos tres (señala los tres primeros de la tabla) aumenta uno. Y hasta aquí y luego aquí..., (señala el paso de 2×4 a 2×5 en la tabla) dos.

{203} C: Aumenta cuatro.

{204} A: Aquí cuatro.

{205} C: Y ahí dos.

21:54 {206} A: Y ahí dos.

22:20 {207} C: ¿Qué hacemos?