15. Una partícula de masa $m$ está sometida a una fuerza dada por

$$F = B\left(\frac{a^2}{x^2} - 28\frac{a^5}{x^5} + 27\frac{a^8}{x^8}\right) \ , \qquad \forall \quad B > 0, a > 0 \ . \tag{1}$$

(a) Encontrar y representar la energía potencial.

(b) Esquematizar y describir los tipos de movimientos posibles. Localizar los puntos de equilibrio y determinar la frecuencia de las oscilaciones pequeñas alrededor de los que sean estables.

(c) Considérese que la partícula parte de $x_0 = 3a/2$ con una velocidad $v = -v_0 < 0$.

i. ¿Cuál es el valor mínimo de $v_0$ para el que la partícula acabará escapándose muy lejos?

ii. ¿Cuál es la velocidad máxima que tendrá la partícula?

iii. ¿Qué velocidad tendrá cuando se halle muy alejada del punto de partida?

*Solución:*

(a) La energía potencial está dada por

$$\begin{aligned} V(x) &= -\int F(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{Ba^2}{x^7}\left(x^6 - 7a^3x^3 + \frac{27}{7}a^6\right) \ , \end{aligned} \tag{2}$$

donde, dada la ausencia de condiciones iniciales, podemos igualar a 0 la constante de integración sin perder generalidad.

Para representar la energía potencial, necesitamos identificar su comportamiento incluyendo máximos, mínimos y sus raíces. Así, los puntos de equilibrio se dan cuando se satisfacen las condiciones

$$\frac{\mathrm{d}^2V(x)}{\mathrm{d}x^2} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad F(x) = 0 \ . \tag{3}$$

Igualando, entonces, la fuerza a 0,

$$\frac{Ba^2}{x^8}\left(x^6 - 28a^3x^3 + 27a^6\right) = 0 \ , \tag{4}$$

donde identificamos una solución cuadrática de la forma

$$x^3 = \frac{1}{2}\left[28a^3 \pm \sqrt{(28a^3)^2 - 4(27)a^6}\right] \ , \tag{5}$$

cuyas soluciones físicas son

$$x_1 = 3a \ , \qquad x_2 = a \ . \tag{6}$$

Observamos que los puntos de equilibrio son un máximo y un mínimo respectivamente:

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_1} = -\frac{26}{243}\frac{B}{a} < 0 \ ,$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_2} = 78\frac{B}{a} > 0 \ . \tag{7}$$

Por otro lado, las raíces del potencial se pueden obtener al igualarlo a 0:

$$\frac{Ba^2}{x^7}\left(x^6 - 7a^3x^3 + \frac{27}{7}a^6\right) = 0 \ , \tag{8}$$

donde identificamos otra vez solución cuadrática de la forma

$$x^3 = \frac{1}{14}\left[49a^3 \pm \sqrt{(49a^3)^2 - 4(7)(27)a^6}\right] \ , \tag{9}$$

cuyas soluciones físicas son

$$x'_1 = 1.86a \ , \qquad x'_2 = 0.84a \ . \tag{10}$$

Finalmente, observamos las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to 0} V(x) = \pm\infty \ , \qquad \lim_{x\to\pm\infty} V(x) = 0 \ , \qquad \forall\ x < 0 \to V(x) < 0 \ . \tag{11}$$

(b) Con los puntos de equilibrio, las raíces del potencial y su comportamiento para $|x|$ muy pequeño o muy grande, podemos finalmente esquematizar el potencial (Fig. 1).

Observando la figura 1, identificamos los siguientes casos posibles dada una cierta energía mecánica de la partícula:

- Para $x > 0$, existe una energía $E_1$ en la que la partícula vendrá desde $+\infty$, chocará con el potencial y volverá a $+\infty$. Por lo tanto es un movimiento acotado por un solo lado.
- Existe una energía $E_2$ para la que el movimiento está acotado a ambos lados para un rango de valores de $x$ y en un solo lado para los demás, siendo este último caso similar al de $E_1$.
- Existe una energía $E_3$ para la que la partícula solo puede estar atrapada dentro del pozo del potencial, por lo que es un movimiento acotado por ambos lados. Si $E_3$ es muy pequeña, la partícula se encotrará muy cerca del mínimo y el movimiento se puede aproximar como un movimiento armónico con pequeñas oscilaciones alrededor del mínimo.
- Para $x < 0$ cualquier movimiento (marcado por las líneas rojas) estará prohibido: Por un lado, la conservación de la energía mecánica implica que

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + V(x) \ . \tag{12}$$

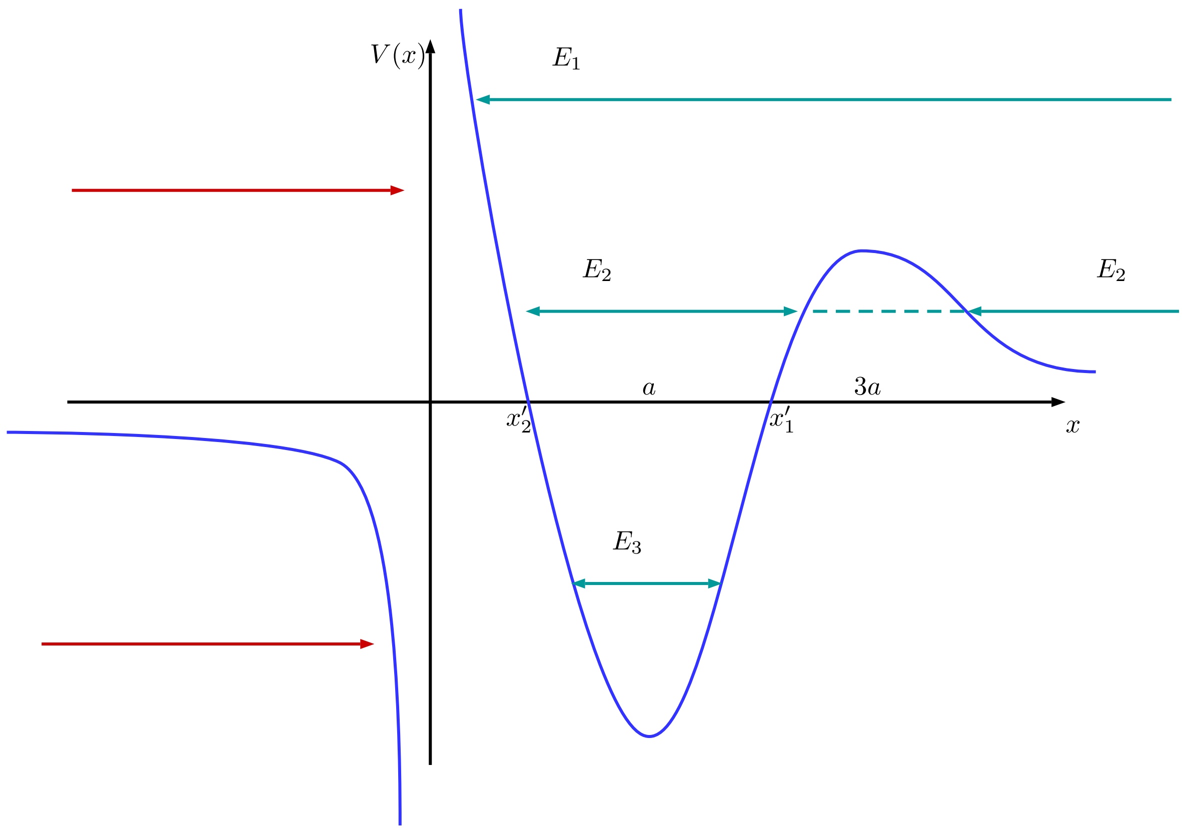


Figure 1: Potencial dado por Eq. (2).

Así, dado que $\frac{1}{2}mv^2 = T \geq 0$, entonces

$$T = E - V(x) \geq 0 \ , \qquad \longrightarrow \qquad E \geq V(x) \ , \tag{13}$$

para cualquier movimiento físico real. Por lo tanto la línea roja por debajo del potencial violaría la condición (13) (y entonces la conservación de la energía mecánica). Por otro lado, el potencial en $x = 0$ es infinito. Si una partícula se acercara por la izquierda con $E > 0$, la partícula tendría una energía $E = T - |V(x)|$ donde $|V(x)|$ tiende a infinito y por lo tanto la energía $E$ necesariamente debería ser infinita, cosa que no es real.

Finalmente, conociendo que

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_2} = k = m\omega^2 \ , \tag{14}$$

entonces

$$\omega = \sqrt{\frac{78B}{ma}} \ , \tag{15}$$

es la frecuencia de oscilación.

(c) Una partícula en $x_0 = 3a/2$ necesitará una velocidad $v_0^{\min}$ para escapar de $V(x)$. Luego, la energía total estará dada por

$$
\begin{aligned}
E &= T + V \\
&= \frac{1}{2} m \left(v_0^{\min}\right)^2 + V\left(\frac{3a}{2}\right) = V(3a) \ ,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

donde la última igualdad representa la energía total mínima necesaria para escapar del potencial. Así

$$
v_0^{\min} = \sqrt{\frac{2\left[V(3a) - V\left(\frac{3a}{2}\right)\right]}{m}} \simeq \sqrt{\frac{(1.48)aB}{m}} \ . \tag{17}
$$

Por otro lado, la velocidad máxima que tendrá la partícula se dará en $x_2 = a$ que es donde $T = E - V(x)$ es máximo. Así,

$$
v_0^{\max} = \sqrt{\frac{2\left[V(3a) - V(a)\right]}{m}} \simeq \sqrt{\frac{(4.78)aB}{m}} \ . \tag{18}
$$

Finalmente, la velocidad que tendrá cuando se halle muy alejada, $V(x \to \infty) = 0$, será

$$
v_0^{\max} = \sqrt{\frac{2\left[V(3a) - 0\right]}{m}} = \sqrt{\frac{aB}{2m}} \ . \tag{19}
$$