1. Un cuerpo de 2 kg describe una trayectoria dada por $\vec{r}(t) = 3t\cos(\pi t/2)\,\hat{\imath} + 3t\sin(\pi t/2)\,\hat{\jmath} + t^2\hat{k}$. Calcular en el instante $t = 2$,

   (a) Sus coordenadas cilíndricas.

   (b) El vector de posición $\vec{r}(t=2)$ en la base local $\{\hat{u}_\rho, \hat{u}_\phi, \hat{u}_z\}$.

   (c) El vector velocidad $\vec{v}(t=2)$ en la base local $\{\hat{u}_\rho, \hat{u}_\phi, \hat{u}_z\}$.

   (d) La energía cinética $T(t=2)$.

   Solución: (a) $(\rho, \phi, z) = (6, \pi, 4)$; (b) $\vec{r}(t=2) = 6\hat{u}_\rho + 4\hat{u}_z$; (c) $\vec{v}(t=2) = 3\hat{u}_\rho + 3\pi\hat{u}_\phi + 4\hat{u}_z$; (d) $T(t=2) = 25 + 9\pi^2$.

2. Dada la trayectoria de un móvil $\vec{r}(t) = t\ \hat{\imath} + t^2/2\ \hat{\jmath} + t^3/3\ \hat{k}$, obtener en el instante t=1,

   (a) La velocidad y la celeridad.

   (b) La aceleración y sus componentes tangencial y normal.

   (c) El vector normal a la trayectoria.

   Solución: (a) $\vec{v}(t=1) = (1,1,1)$, $v(t=1) = \sqrt{3}$; (b) $\vec{a}(t=1) = (0,1,2)$, $\vec{a}_\tau(t=1) = (1,1,1)$, $\vec{a}_n(t=1) = (-1,0,1)$; (c) $\hat{n}(t=1) = (-1,0,1)/\sqrt{2}$.

3. Sea un cuerpo de masa m moviéndose en un plano. Escribir en coordenadas polares:

   (a) El cuadrado de la velocidad.

   (b) El momento angular.

   (c) El vector unitario radial $\hat{u}_r$.

   (d) La aceleración radial.

   Solución: (a) $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$, (b) $\vec{l} = mr^2\dot{\theta}\hat{k}$; (c) $\hat{u}_r = \cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}$; (d) $\vec{a}_r = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{u}_r$.

4. Dada la trayectoria $\vec{r}(t) = \sin t\ \hat{\imath} + t\ \hat{\jmath} + t^2\ \hat{k}$ de un móvil, obtener en el instante $t = \pi/2$:

   (a) La celeridad.

   (b) La aceleración.

   (c) La componente tangencial de la aceleración.

   (d) El radio de curvatura.

   Solución: (a) $v = \sqrt{1+\pi^2}$; (b) $\vec{a} = (-1,0,2)$; (c) $\vec{a}_\tau = (2\pi)\left(1+\pi^2\right)^{-1/2}\hat{u}_\tau$; (d) $R = \left(1+\pi^2\right)\sqrt{\left(1+\pi^2\right)/\left(5+\pi^2\right)}$.

5. Considérese la trayectoria de un móvil dada por $\vec{r}(t) = a\cos\omega t\ \hat{\imath} + a\sin\omega t\ \hat{\jmath} + h\omega t\hat{k}$, con a, ω y h constantes.

   (a) Hallar el vector tangente a la trayectoria.
   (b) Calcular el radio de curvatura y el vector normal usando la primera fórmula de Frenet.
   (c) Hallar el vector binormal y, usando la segunda fórmula de Frenet, la torsión.
   (d) Comprobar que se cumple la tercera fórmula de Frenet.

   Solución: (a) $\hat{\tau} = \frac{-a\sin\omega t\ \hat{\imath} + a\cos\omega t\ \hat{\jmath} + h\hat{k}}{\sqrt{a^2+h^2}}$; (b) $R = \left(a^2+h^2\right)/a$, $\hat{n} = -\cos\omega t\ \hat{\imath} - \sin\omega t\ \hat{\jmath}$; (c) $\hat{b} = \frac{h\sin\omega t\ \hat{\imath} - h\cos\omega t\ \hat{\jmath} + a\hat{k}}{\sqrt{a^2+h^2}}$, $\sigma = \left(a^2+h^2\right)/h$.

6. Se lanza un proyectil desde la superficie de la Tierra con velocidad inicial de 180 km/h, formando un ángulo de 30° con la horizontal. En el punto más alto de la trayectoria, obtener (despreciar el rozamiento con el aire):

   (a) La altura alcanzada.
   (b) La aceleración tangencial.
   (c) La celeridad.
   (d) El radio de curvatura.

   Solución: (a) 31,25 m ; (b) $\vec{0}$ m/s^2 ; (c) $v = 25\sqrt{3}$ m/s ; (d) R= 191,32 m.

7. Un punto se mueve en el plano XY, de forma que se cumple que $v_x = 4t^3 + 4t$ y $v_y = 4t$. Si para $t = 0$ la posición del punto es (1,2),

   (a) Encontrar $x = x(t)$, $y = y(t)$ y la ecuación de la trayectoria $y = y(x)$.
   (b) Hallar la aceleración tangencial y normal en $t = 0$.

   Solución: (a) $x = \left(t^2+1\right)^2$, $y = 2\left(t^2+1\right)$, $y = 2\sqrt{x}$; (b) $a_\tau = 4\sqrt{2}$ m/s^2 , $a_n = 0$ m/s^2 .

8. Considérese una masa puntual que se desplaza, con respecto a un sistema de referencia inercial O, en el plano XY con velocidad $\vec{v}$ que forma un ángulo θ con la horizontal. Considérese otro sistema de referencia inercial O' que se desplaza con velocidad constante $\vec{u} = u\hat{\imath}$ con respecto al anterior. Para dicha masa,

   (a) Obtener el módulo de la velocidad, v', en el sistema O'.
   (b) Obtener el ángulo θ' que forma con la horizontal el sistema O'.

   Solución: (a) $|v'| = \sqrt{v^2+u^2-2vu\cos\theta}$; (b) $\tan\theta' = \sin\theta/\left(\cos\theta - u/v\right)$.

9. Durante una tormenta, las trayectorias de las gotas de agua sobre la ventana de un tren forman un ángulo $\alpha_1 = 30°$ respecto a la vertical cuando el éste se desplaza a una velocidad $v_1 = 45$ km/h, mientras que forman un ángulo $\alpha_2 = 45°$ cuando su velocidad es $v_2 = 90$ km/h. Calcular la velocidad y el ángulo de las gotas de agua observadas desde el exterior del tren.

   Solución: $v = 108$ km/h , $\alpha = 9°$.