1. Sea el punto P de coordenadas esféricas $r = 2$, $\theta = \pi/3$, $\phi = \pi/6$,

   (a) Escribir las coordenadas cartesianas de P .

   (b) Escribir las componentes cartesianas de los vectores de la base local $\{\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_\phi\}$ en el punto P .

   (c) Escribir el vector $\hat{\imath} + \sqrt{3}\hat{\jmath}$ en la base local anterior del punto P .

   Solución: (a) $P\,(x, y, z) = \left(3/2, \sqrt{3}/2, 1\right)$; (b) $\hat{u}_r = \left(3/4, \sqrt{3}/4, 1/2\right)$, $\hat{u}_\theta = \left(\sqrt{3}/4, 1/4, -\sqrt{3}/2\right)$, $\hat{u}_\phi = \left(-1/2, \sqrt{3}/2, 0\right)$; (c) $\hat{\imath} + \sqrt{3}\hat{\jmath} = (3/2)\hat{u}_r + (\sqrt{3}/2)\hat{u}_\theta + \hat{u}_\phi$.

2. Sea el punto P de coordenadas esféricas $r = 3$, $\theta = \pi/4$, $\phi = \pi/2$,

   (a) Escribir las coordenadas cartesianas de P .

   (b) Escribir las componentes cartesianas de los vectores de la base local $\{\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_\phi\}$ en el punto P .

   (c) Escribir el vector $\hat{\jmath}$ en la base local anterior del punto P .

   Solución: (a) $P\,(x, y, z) = \left(0, 3/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2}\right)$; (b) $\hat{u}_r = \left(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$, $\hat{u}_\theta = \left(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$, $\hat{u}_\phi = (-1, 0, 0)$; (c) $\hat{\jmath} = (1/\sqrt{2})\,(\hat{u}_r + \hat{u}_\theta)$.

3. Sean los puntos P y Q respectivamente dados por las coordenadas esféricas $(r, \theta, \phi) = \left(\sqrt{2}, \pi/4, \pi\right)$ y $(r, \theta, \phi) = (1, \pi/2, \pi/3)$, obtener

   (a) Las coordenadas cartesianas de P .

   (b) Las coordenadas cartesianas de Q .

   (c) El vector local $\hat{u}_\phi$ en P .

   (d) El vector local $\hat{u}_\theta$ en Q .

   Solución: (a) $P(x, y, z) = (-1, 0, 1)$; (b) $Q(x, y, z) = (1/2, \sqrt{3}/2, 0)$; (c) $\hat{u}_\phi|_P = (0, -1, 0)$; (d) $\hat{u}_\theta|_Q = (0, 0, -1)$.

4. Sea el punto P de coordenadas esféricas $(r, \theta, \phi) = (2, \pi/4, \pi/4)$ y la función potencial $\Phi\,(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta$,

   (a) Obtener las coordenadas cartesianas de P .

   (b) Obtener el vector local $\hat{u}_r$ en P .

   (c) Obtener el gradiente de Φ en P .

   Solución: (a) $P(x, y, z) = (1, 1, \sqrt{2})$; (b) $\hat{u}_r|_P = (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$; (c) $\vec{\nabla}\Phi|_P = \left(2\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right)_{\text{esf}} = \left(3/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2}, 1\right)_{\text{cart}}$.

5. Considerar el campo de fuerzas $\vec{F} = 6x^2\hat{\imath} + 2z\hat{\jmath} - 2y\hat{k}$ y el punto A de coordenadas cartesianas $(1, 0, 1)$.

   (a) Comprobar si $\vec{F}$ es un campo de fuerzas conservativo.

(b) Obtener el trabajo a lo largo del segmento $\overline{OA}$.

(c) Calcular la divergencia de $\vec{F}$ en un punto arbitrario del plano YZ .

Solución: (a) $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq \vec{0}$; (b) $W_{\overline{OA}} = 2$; (c) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}|_{x=0} = 0$.

6. Sea el potencial $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z$ y el punto P de coordenadas cartesianas $(1, 1, 0)$,

   (a) Calcular $\vec{\nabla}\Phi$ en el punto P de coordenadas cartesianas.

   (b) Calcular $\vec{\nabla}\Phi$ en el punto P de coordenadas cilíndricas.

   Solución: a) $\vec{\nabla}\Phi|_P = (2, 2, -2)_{\text{cart}}$; b) $\vec{\nabla}\Phi|_P = \left(2\sqrt{2}, 0, -2\right)_{\text{cil}}$.

7. Sea el potencial $V(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^3$ y el punto P de coordenadas cartesianas $(1, 2, 1)$,

   (a) Calcular $\vec{\nabla}V$ en el punto P .

   (b) Calcular el trabajo desarrollado por la fuerza $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ a lo largo de una recta con extremos en los puntos $(0, 1, 1)$ y $(1, 2, 1)$.

   (c) Desarrolle brevemente el por qué el gradiente de una función como V es perpendicular a toda superficie equipotencial.

   Solución: (a) $\vec{\nabla}V|_P = (2, -8, 3)$; (b) $W = 5$.

8. Sea el campo escalar $\Phi(x, y, z) = 2x^2y - y^2z + xz^2$ y el punto P de coordenadas cartesianas $(1, 2, 1)$,

   (a) Calcular $\vec{\nabla}\Phi$ en el punto P .

   (b) Calcular $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\Phi\right)$ en un punto arbitrario.

   Solución: (a)$\vec{\nabla}\Phi|_P = (9, -2, -2)$; (b) $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\Phi\right) = \vec{0}$.

9. Sea el punto P de coordenadas esféricas $(r, \theta, \phi) = (\sqrt{2}, \pi/4, 0)$ y la función potencial $\Phi(r, \theta, \phi) = r \sin\theta \sin\phi$,

   (a) Obtener las coordenadas cartesianas de P .

   (b) Calcular $\vec{\nabla}\Phi$ en el punto P .

   (c) Obtener el vector local $\hat{u}_\phi$ en P .

   Solución: (a) $P(x, y, z) = (1, 0, 1)$; (b) $\vec{\nabla}\Phi|_P = (0, 1, 0)_{\text{cart}}$; (c) $\hat{u}_\phi|_P = (0, 1, 0)$.

10. Sea el campo vectorial $\vec{A}(x, y, z) = 2x^2y\hat{\imath} - y^2z\hat{\jmath} + xz^2\hat{k}$ y los puntos $P_1(1, 1, 0)$ y $P_2(0, 0, 2)$,

    (a) Calcular la circulación de $\vec{A}(x, y, z)$ a lo largo del segmento $\overline{P_1P_2}$.

    (b) Calcular la circulación de $\vec{A}(x, y, z)$ a lo largo de la línea quebrada $\overline{P_1OP_2}$.

    Solución: (a) $W_{\overline{P_1P_2}} = 1/3$; (b) $W_{\overline{P_1OP_2}} = -1/2$.