1. Dos cuerpos esféricos de radios r_1 y r_2, y masas m_1 y m_2, caen en el seno de un fluido que se opone al movimiento con una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad. ¿Cuál de los dos cuerpos alcanza mayor velocidad límite en los siguientes casos?:

   (a) $m_1 > m_2$ y $r_1 = r_2$.

   (b) $m_1 = m_2$ y $r_1 > r_2$.

   Solución: (a) $v_1^l > v_2^l$; (b) $v_2^l > v_1^l$.

2. Un objeto de 2 kg se impulsa sobre una superficie horizontal con velocidad inicial de $v_0 = 3$ m/s. Sabiendo que la fuerza de rozamiento con la superficie es de $0.5v$ N —donde v es la velocidad del objeto—,

   (a) Obtener el tiempo t_p que tarda el objeto en detenerse.

   (b) Obtener la distancia recorrida.

   Solución: (a) $t_p = \infty$; (b) 12 m .

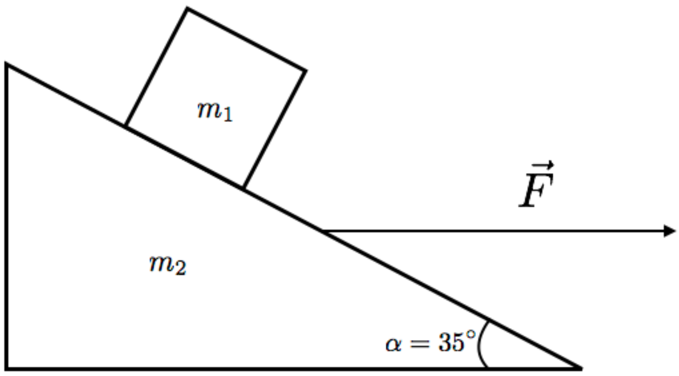
3. Un móvil de 1000 kg se desplaza por una pista circular de 100 m de radio. El coeficiente de fricción estática entre las ruedas y el firme es $\mu_e = 0.5$.

   (a) ¿Cuál es la velocidad máxima que puede alcanzar el móvil sin deslizar fuera de la pista?

   (b) ¿Qué ángulo habría que inclinar la pista, sobre la horizontal, para que la velocidad máxima fuese el doble?

   Solución: (a) 22.15 m/s ; (b) $2\sqrt{\mu_e} = \sqrt{(\mu_e \cos\alpha + \sin\alpha) / (\cos\alpha - \mu_e \sin\alpha)}$.

4. Un bloque de masa $m_1 = 0.5$ kg descansa sobre una superficie inclinada de una cuña de masa $m_2 = 2$ kg, como se muestra en la figura. Sobre la cuña actúa una fuerza horizontal $\vec{F}$ que la hace deslizar sobre una superficie sin rozamiento. El coeficiente de rozamiento estático entre la cuña y el bloque es $\mu = 0.4$. Determinar los valores mínimo y máximo de F para los que el bloque no desliza sobre la cuña.



   Solución: $F_{\min} = g\,(m_1 + m_2)\,(\sin\alpha - \mu_e \cos\alpha) / (\cos\alpha + \mu_e \sin\alpha) = 5.75$ N ,
   $F_{\max} = g\,(m_1 + m_2)\,(\sin\alpha + \mu_e \cos\alpha) / (\cos\alpha - \mu_e \sin\alpha) = 37.48$ N .

5. Dos esferas, partiendo del reposo, descienden en caída libre hacia el suelo. Sus masas y radios cumplen las relaciones $m_1 = m_2$ y $2r_1 = r_2$. La fuerza de rozamiento con el aire es $F_f = \alpha r v$, siendo α una constante, r el radio de cada esfera y v la velocidad.

   (a) ¿Cuál de las dos esferas alcanza mayor velocidad límite?
   (b) ¿Cuál de las dos esferas alcanza antes el 90% de sus velocidad límite?
   (c) ¿Cuál de las dos esferas llega antes al suelo?

   Solución: (a) La primera; (b) La segunda; (c) La primera.

6. Un objeto de 1 kg se lanza hacia arriba desde la superficie terrestre con velocidad inicial $v_0 = 3$ m/s. Sabiendo que la fuerza de rozamiento con el aire es de $F_f = v^2/10$ N —donde v es la velocidad del objeto—,

   (a) Obtener el tiempo que tarda el objeto en detenerse.
   (b) Obtener el tiempo que tardaría el objeto en detenerse si no hubiera rozamiento.

   Solución: (a) 0.296 s ; (b) 0.305 s .

7. Sea un objeto de 0,5 Kg que cae sujeto a un muelle de constante recuperadora $k = 10$ N/m,

   (a) Obtener la energía potencial tomando en el origen $V(x = 0) = 0$. ¿Cuál es la energía potencial mínima?
   (b) Si se suelta el objeto en $x = 0$ con $v_0 = 0$, ¿cuál es la velocidad máxima que alcanzará y en qué posición?

   Solución: (a) $V^{\min} = -(mg)^2/2k$; (b) $v^{\max} = 2.19$ m/s .

8. Considerar una partícula moviéndose en un campo de fuerzas dado por $\vec{F} = \eta r^3 \vec{r}$, donde $\vec{r}$ es el vector de posición.

   (a) Mostrar que el campo de fuerzas es conservativo.
   (b) Obtener la energía potencial.
   (c) Mostrar que el momento angular se conserva.

   Solución: (b) $V(r) = -\eta r^5/5$.

9. Considerar el campo de fuerzas $\vec{F} = 6r\vec{r}$ y el punto de coordenadas cartesianas $A(1, 1, 1)$.

   (a) Comprobar si $\vec{F}$ es un campo de fuerzas conservativo.
   (b) Obtener el trabajo del campo a lo largo del segmento $\overline{OA}$.
   (c) Obtener la diferencia de energía potencial entre el origen y el punto A.

   Solución: (b) $W|_{OA} = 6\sqrt{3}$; (c) $V_A - V_O = -6\sqrt{3}$.

10. Considerar una partícula moviéndose bajo la acción del campo de fuerzas $\vec{F} = -2x\ \hat{\imath} - 8y\ \hat{\jmath}$.

    (a) Comprobar si la fuerza es conservativa.

    (b) Obtener el movimiento oscilatorio en el plano xy.

    (c) ¿Las trayectorias son cerradas?

    (d) ¿Las trayectorias están acotadas?

    Solución: (b) $x(t) = x_0 + A_x \sin(\omega_x t - \varphi_x)$, $y(t) = y_0 + A_y \sin(\omega_y t - \varphi_y)$, $\omega_x = \sqrt{k_x/m}$, $\omega_y = \sqrt{k_y/m}$.

11. Sea el potencial $V(x) = (x-1)^2 - 2$. Partiendo del reposo en $x = 0$,

    (a) Calcular la energía potencial mínima.

    (b) ¿Cuál es la velocidad máxima que alcanza una partícula sometida a este potencial?

    (c) Esquematizar y describir los tipos de movimiento de la partícula.

    Solución: (a) $V(x^{\mathrm{min}}) = -2$; (b) $v^{\mathrm{max}} = \sqrt{2/m}$.

12. Considerar el movimiento de una masa de 8 kg en un potencial unidimencional $V(x) = (x-2)^4 + 4$. Partiendo del reposo en $x = 0$,

    (a) Obtener la energía potencial mínima.

    (b) Obtener la velocidad máxima que alcanza.

    (c) Obtener el punto en el que el movimiento retrocede.

    (d) Esquematizar y describir los tipos de movimiento de la partícula.

    Solución: (a) $V(x^{\mathrm{min}}) = 4$; (b) $v^{\mathrm{max}} = 2$; (c) $x_{\mathrm{r}_1} = 0$, $x_{\mathrm{r}_2} = 4$.

13. Una partícula se mueve en una dimensión con energía potencial $V(x) = x^2\,(x-2)^2$.

    (a) Obtener los puntos de equilibrio y las correspondientes energías.

    (b) Encontrar los puntos de retorno del movimiento si la energía cinética de la partícula es de 8 J en $x = 1$.

    (c) Esquematizar y describir los tipos de movimiento de la partícula.

    Solución: (a) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $V(x_1) = 0$, $V(x_2) = 1$, $V(x_3) = 0$; (b) $x_{\mathrm{r}_1} = -1$, $x_{\mathrm{r}_2} = 3$.

14. Sea el potencial unidimensional
$$V(x) = -\frac{e}{x} + e^{\frac{1}{x}} \ . \tag{1}$$
   (a) Determinar los puntos de equilibrio y el valor de la energía en dichos puntos.
   (b) Calcular el periodo de las pequeñas oscilaciones alrededor de los puntos de equilibrio estables.
   (c) Esquematizar y determinar los distintos tipos de órbitas que puede seguir una partícula sujeta a este potencial, dependiendo del valor de su energía total.

   Solución: (a) $x_1 = 1$, $V(x_1) = 0$; (b) $T = 2\pi\sqrt{m/e}$.

15. Una partícula de masa m está sometida a una fuerza dada por
$$F = B\left(\frac{a^2}{x^2} - 28\frac{a^5}{x^5} + 27\frac{a^8}{x^8}\right) \ , \qquad \forall \quad B > 0, a > 0 \ . \tag{2}$$
   (a) Encontrar y representar la energía potencial.
   (b) Esquematizar y describir los tipos de movimientos posibles. Localizar los puntos de equilibrio y determinar la frecuencia de las oscilaciones pequeñas alrededor de los que sean estables.
   (c) Considérese que la partícula parte de $x_0 = 3a/2$ con una velocidad $v = -v_0 < 0$.
      i. ¿Cuál es el valor mínimo de v_0 para el que la partícula acabará escapándose muy lejos?
      ii. ¿Cuál es la velocidad máxima que tendrá la partícula?
      iii. ¿Qué velocidad tendrá cuando se halle muy alejada del punto de partida?

   Solución: (a) $V(x) = Ba^2x^{-7}\left(x^6 - 7a^3x^3 + \frac{27}{7}a^6\right)$, $x^{\max} = 3a$, $x^{\min} = a$,
   Raíces: $(x_1 = 1.86a, x_2 = 0.84a)$, $\lim_{x\to 0} V(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to\infty} V(x) = 0$; (b) $\omega = \sqrt{78B/ma}$;
   (c) $v_0^{\min} = \sqrt{1.48aB/m}$, $v^{\max} = \sqrt{4.78aB/m}$, $v(\infty) = \sqrt{aB/2m}$.