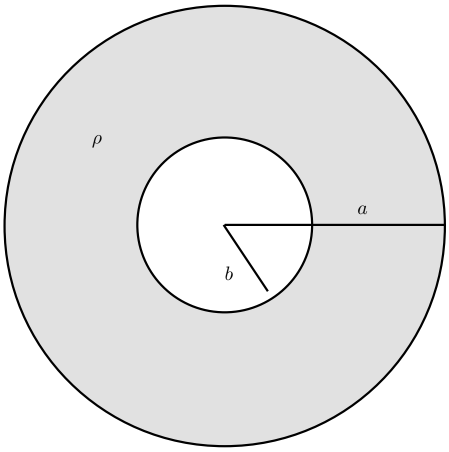
1. Considere una esfera sólida de radio a y densidad $\rho = k/r$ —siendo k una constante y r la distancia al centro de la esfera.

   (a) Obtener la masa de la esfera.
   (b) Obtener el potencial gravitatorio sobre la superficie de la esfera.
   (c) Obtener el potencial gravitatorio en el centro de la esfera.

   Solución: a) $M = 2\pi k a^2$; b) $\Phi_G(a) = -GM/a$; c) $\Phi_G(0) = -2GM/a$.

2. Considere un cascarón de densidad uniforme, con radio exterior a e interior b, como se muestra en la figura.

   (a) Calcular el potencial gravitatorio fuera, en medio y dentro del cascarón.
   (b) Calcular el campo gravitatorio fuera, en medio y dentro del cascarón.



   Solución: a) $\Phi_G(R > a) = -\frac{4}{3}\frac{\pi\rho G}{R}\left(a^3 - b^3\right)$, $\Phi_G(b < R < a) = -4\pi\rho G\left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^3}{3R} - \frac{R^2}{6}\right)$, $\Phi_G(R < b) = -2\pi\rho G\left(a^2 - b^2\right)$; b) $g(R > a) = -GM/R^2$, $g(b < R < a) = \frac{4\pi\rho G}{3}\left(\frac{b^3}{R^2} - R\right)$, $g(R < b) = 0$.

3. Considere el mismo cascarón del problema anterior con $a = 10$ cm, $b = 2$ cm y asumiendo que tiene una masa M de 10 kg. Calcule los valores para el campo gravitatorio para $R = 1$ cm, $R = 5$ cm y $R = 15$ cm.

   Solución: $g(R = 1\text{ cm}) = 0$, $g(R = 5\text{ cm}) = -(391/9920\pi)G$ kg/cm^2 , $g(R = 15\text{ cm}) = -(2/45)G$ kg/cm^2 .

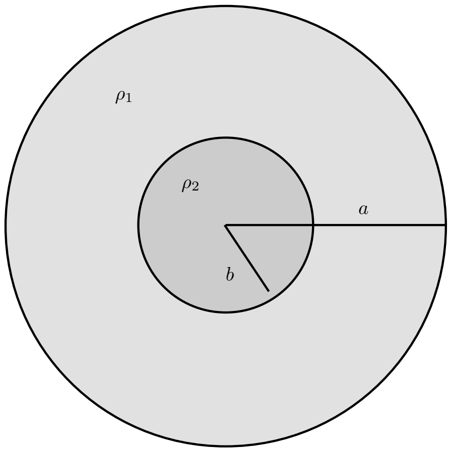
4. Repita el problema 2 pero ahora sabiendo ahora que la densidad varía como $\rho = k/r$.

   Solución: a) $\Phi_G(R > a) = -\frac{2\pi k G}{R}\left(a^2 - b^2\right)$, $\Phi_G(b < R < a) = -2\pi k G\left(-R - \frac{b^2}{R} + 2a\right)$, $\Phi_G(R < b) = -4\pi k G\,(a - b)$; b) $g(R > a) = -\frac{2\pi k G}{R^2}\left(a^2 - b^2\right)$, $g(b < R < a) = 2\pi k G\left(\frac{b^2}{R^2} - 1\right)$, $g(R < b) = 0$.

5. Calcule el campo gravitatorio para el mismo cascarón del problema 2 pero ahora sabiendo que la densidad varía como $\rho = kr$.

   Solución: $g(R > a) = -\frac{\pi k G}{R^2}\left(a^4 - b^4\right)$, $g(b < R < a) = -\pi k G\left(R^2 - \frac{b^4}{R^2}\right)$, $g(R < b) = 0$.

6. Considerar nuevamente una densidad uniforme para el cascarón del problema 2. Sin embargo, el hueco ahora se rellena con un material de densidad también uniforme y de la misma masa M que el cascarón. Calcular el campo gravitatorio fuera, en medio y dentro del cascarón.



   Solución: $g(R > a) = -\frac{2GM}{R^2}$, $g(b < R < a) = -\frac{GM}{R^2}\left(1 + \frac{R^3 - b^3}{a^3 - b^3}\right)$, $g(R < b) = -GMR/b^3$.

7. Considere un disco uniforme de masa M y radio a. Encuentre el potencial gravitacional y la fuerza que que éste ejerce sobre una masa m que se encuentra a lo largo del eje del disco a una distancia z.

   Solución: $\Phi_G(z) = -2\pi\rho G\left[\left(a^2 + z^2\right)^{1/2} - z\right]$, $F_z = 2\pi m\rho G\left[\frac{z}{(a^2+z^2)^{1/2}} - 1\right]$.

8. Calcule la velocidad mínima que una partícula debe tener sobre la superficie de la Tierra para que ésta escape del campo gravitatorio terrestre (desprecie la resistencia con el aire).

   Solución: *Velocidad de escape* $= 11.2$ km/s .

9. Una partícula se deja caer dentro de un agujero imaginario que pasa recto por el centro de la Tierra. Muestre que la partícula efectuaría un movimiento armónico simple si se asume que la Tierra tiene densidad uniforme (desprecie efectos rotacionales). Muestre también que el periodo de oscilación es de 84 min.

   Solución: $T = \sqrt{3\pi/G\rho}$.

10. En el interior de la Tierra hay una cavidad esférica de radio R cuyo centro está a una profundidad d. La cavidad está llena de un material de densidad ρ, distinta del valor normal para los materiales de la zona, ρ_0. Demostrar que, a una distancia horizontal x sobre la superficie, la diferencia entre la componente vertical de la aceleracíon de la gravedad y el valor normal g_0 es

$$\Delta g = \frac{4}{3}\pi R^3 G(\rho - \rho_0) d \left(d^2 + x^2\right)^{-3/2} \ . \tag{1}$$