1. Bajo la acción de la gravedad, se lanza un proyectil de masa m_1 que explota en el punto más alto de su trayectoria —a una distancia horizontal de x_0— en dos fragmentos de masas m_2 y m_3, tal que $m_3 = 3m_2$. Calcule la distancia horizontal que alcanza m_3 sabiendo que m_2 vuelve al punto de lanzamiento (despreciar el rozamiento con el aire).

   Solución: $x = 8x_0/3$.

2. Demuestre que la variación con respecto del tiempo del momento angular de un sistema de partículas es debida exclusivamente a la existencia de un momento total de fuerzas externas al sistema.

3. Encuentre la expresión general para la energía cinética de un sistema de partículas en términos de la velocidad del centro de masas y la velocidad relativa de las partículas al sistema.

4. Un sistema de dos partículas se mueve en tres dimensiones bajo la acción del potencial

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = x_1^2 + 2y_2 - 3(z_1 - z_2)t \ . \tag{1}$$

   (a) Calcule la fuerza ejercida sobre la partícula 2 en un punto arbitrario.

   (b) Obtener la componente z de la fuerza total que actúa sobre el sistema. ¿Se conserva la componente del momento lineal?

   (c) ¿Se conserva la energía total?

   Solución: (a) $\vec{F}_2 = -2\ \hat{j} - 3t\ \hat{k}$; (b) $F_z = 0$.

5. Un sistema de dos partículas se mueve en tres dimensiones bajo la acción del potencial

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 3(z_1 + z_2) + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \ . \tag{2}$$

   (a) Calcule la fuerza total ejercida sobre el sistema cuando $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{0}$.

   (b) ¿Cómo cambia el potencial bajo un desplazamiento del sistema dado por $\vec{a} = (1, 1, 1)$?

   Solución: (a) $\vec{F} = -6\ \hat{k}$; (b) $V\left(\vec{r}_1 + \vec{a}, \vec{r}_2 + \vec{a}\right) = 6 + V\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2\right)$.

6. Un sistema de dos partículas se mueve en tres dimensiones bajo la acción del potencial

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = (x_1 - x_2)^2 + y_1^2 - z_2^2 \ . \tag{3}$$

   (a) Obtener las fuerzas sobre las partículas 1 y 2, y la fuerza total sobre el sistema. ¿Qué componentes de los momentos lineales se conservan?

   (b) ¿En qué dirección se puede desplzar el sistema para que el potencial no cambie?

   Solución: (a) $\vec{F}_1 = -2(x_1 - x_2)\ \hat{\imath} - 2y_1\ \hat{\jmath}$, $\vec{F}_2 = 2(x_1 - x_2)\ \hat{\imath} + 2z_2\ \hat{k}$.

7. Dos partículas de masas 2 y 3 kg, moviéndose en un campo de fuerzas, tienen posiciones dadas por $\vec{r}_1(t) = 3\,\hat{\imath} - 2t\,\hat{\jmath} + t^2\,\hat{k}$ y $\vec{r}_2(t) = 2t^2\,\hat{\jmath} - 2\,\hat{k}$ —en metros—. En el instante $t = 2$ s, determinar

   (a) La posición del centro de masas.

   (b) La energía cinética del sistema.

   (c) El momento angular del sistema.

   (d) La fuerza total sobre el sistema.

   Solución: (a) $\vec{R} = (6, 16, 2)/5$ m; (b) $T = 116$ J; (c) $\vec{L} = (32, -24, -12)$ kg m^2/s ; (d) $\vec{F} = (0, 12, 4)$ N .

8. Dos partículas aisladas de masas $m_1 = 1$ kg y $m_2 = 2$ kg, en un determinado instante están situadas en las coordenadas (0,-4) m y (2,0) m y tienen velocidades $\vec{v}_1 = 2\,\hat{\imath}$ m/s y $\vec{v}_2 = -2\,\hat{\imath}$ m/s, respectivamente. Calcule en ese instante,

   (a) La posición y el momento lineal del centro de masas.

   (b) El momento angular y la energía cinética del sistema.

   Solución: (a) $\vec{R} = 4(\hat{\imath} - \hat{\jmath})/3$ m, $\vec{P} = -2\,\hat{\imath}$ kg m/s; (b) $\vec{L} = 8\,\hat{k}$ kg m^2/s , $T = 6$ J .

9. Dos partículas, de 2 kg, se mueven dadas por los vectores $\vec{r}_1(t) = (1 + 2\cos(\omega t))\,\hat{\imath} - t^2\hat{\jmath}$ y $\vec{r}_2(t) = (1 - 2\cos(\omega t))\,\hat{\imath} - t^2\hat{\jmath}$. Calcule el momento lineal del centro de masas, la fuerza total que actúa sobre el sistema, las fuerzas que actúan sobre cada una de las parículas y la energía cinética del sistema.

   Solución: $\vec{P} = -8t\,\hat{\jmath}$ kg m/s, $\vec{F} = -8\,\hat{\jmath}$ N, $\vec{F}_1 = -4\omega^2\cos(\omega t)\;\hat{\imath} - 4\,\hat{\jmath}$ N, $\vec{F}_2 = 4\omega^2\cos(\omega t)\;\hat{\imath} - 4\,\hat{\jmath}$ N, $T = 8\omega^2\sin^2(\omega t) + 8t^2$ J.

10. Sea un sistema de dos masas con $m_2 > m_1$, colgadas cada una de un lado de una polea de radio R —donde las masas de la polea y el cable son despreciables. Tomando en cuenta que en el instante inicial las dos masas están a la misma altura,

    (a) Calcular la posición, velocidad y aceleración del centro de masas.

    (b) Comprobar explícitamente la relación entre la fuerza total aplicada y la aceleración del centro de masas.

    (c) Calcular la energía cinética en el sistema laboratorio y también en el sistema de referencia del centro de masas.

    (d) Calcular el momento angular total en el sistema laboratorio y también en el sistema de referencia del centro de masas.

    Solución: (a) $\vec{R} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\left(R\,\hat{\jmath} - \frac{1}{2}\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g t^2\,\hat{k}\right)$, $\vec{v}_{\rm CM} = -\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 g t\,\hat{k}$, $\vec{a}_{\rm CM} = -\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 g\,\hat{k}$; (b) $\vec{F} = -M\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 g\,\hat{k}$; (c) $T = \frac{1}{2}\frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} g^2 t^2$; (d) $\vec{L} = (m_1 - m_2)\,Rgt\;\hat{\imath}$.