Boletín 5 (parte 2): Potenciales Centrales

1] Una partícula de masa m y momento angular l que se mueve en un potencial de Kepler $U(r) = -\frac{k}{r}$, tiene como coordenadas polares

a)
$$\vec{r} = r\,\hat{u}_r = r\cos\theta\,\hat{i} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{j}$$
$$\hookrightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\hat{u}_r + r\,\dot{\hat{u}}_r = \dot{r}\,\hat{u}_r + r\dot{\theta}\,\hat{u}_\theta .$$

Luego, la energía cinética será

$$T = \frac{1}{2}m\,|\dot{\vec{r}}|^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2},$$

donde, de la conservación del momento angular, se obtiene la ecuación de movimiento $l \equiv mr^2\dot{\theta} = \text{const.}$ Finalmente, la energía total será

$$E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} = T_r - V(r), \quad ①$$

donde se han identificado la energía cinética radial $T_r = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$ y el potencial efectivo $V(r) = \frac{k}{r} - \frac{l^2}{2mr^2}$. ■

b) Cuando se conoce $U(r)$, Eq ① describe completamente el sistema, y la integración de esta ecuación proporciona la solución general del problema en términos de E y l. Despejando la ecuación para $\dot{r}$,

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-U) - \frac{l^2}{m^2r^2}} .$$

Esta ecuación puede resolverse para dt e integrarse para obtener $t = t(r)$. Inmediatamente, se encuentra la forma estándar para la ecuación de movimiento $r = r(t)$. Sin embargo, nos interesa la ecuación del camino en términos de θ y r. Escribiendo

$$d\theta = \frac{d\theta}{dt}\,\frac{dt}{dr}\,dr = \frac{\dot\theta}{\dot r}\,dr .$$

Así,

$$\theta(r) = \int \frac{\pm\left(\frac{l}{r^2}\right)dr}{\sqrt{2m\left(E - U - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}} .$$

Dado que l es constante en el tiempo, $\dot\theta$ no puede cambiar de signo y por lo tanto $\theta(t)$ debe aumentar o disminuir monotónicamente con el tiempo.

Para el potencial de Kepler $U(r) = -\frac{k}{r}$, y haciendo el cambio de variable $u \equiv \frac{l}{r}$ $\left(du = -\frac{l}{r^2}\,dr\right)$,

$$\theta = -\int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2mk}{l^2}u - u^2}} ,$$

que se puede integrar usando

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}}\,\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right) + \text{const.},$$

por lo que

$$\theta + \text{const} = \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{-\frac{2}{r} + \frac{2mk}{l^2}}{\sqrt{\left(\frac{2mk}{l^2}\right)^2 + 8\frac{mE}{l^2}}}\right] ,$$

O, equivalentemente,

$$\operatorname{sen}(\theta + \text{const.}) = \frac{\frac{2mK}{\ell^2} - \frac{2}{r}}{\sqrt{\left(\frac{2mK}{\ell^2}\right)^2 + 8\frac{mE}{\ell^2}}} .$$

Podemos escoger libremente el punto en el que θ se mide, por lo que la constante es $-\frac{\pi}{2}$. Luego,

$$\cos\theta = \frac{\frac{\ell^2}{mK}\frac{1}{r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mK^2}}} . \quad (2)$$

Definiendo ahora las constantes $\alpha \equiv \frac{\ell^2}{mK}$ y $\varepsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mK^2}}$, Eq. (2) se puede escribir como

$$\frac{\alpha}{r} = 1 + \varepsilon\cos\theta , \quad (3)$$

que es la ecuación de una sección cónica con uno de sus focos en el origen, siendo ε la excentricidad y 2α el lado recto de la órbita.

A partir de la ecuación (3), uno puede observar que los puntos de retorno se darán para los valores mínimo y máximo de $\cos\theta$: $r_{min} = \frac{\alpha}{1+\epsilon}$ y $r_{max} = \frac{\alpha}{1-\epsilon}$. Por otro lado, los tipos de movimiento posibles dependerán del valor de E y definirán aquél de ε, i.e. la forma de la sección cónica:

- $E > 0 \longleftrightarrow \varepsilon > 1 \longrightarrow$ hipérbola
- $E = 0 \longleftrightarrow \varepsilon = 1 \longrightarrow$ parábola
- $V_{min} = -\frac{mK^2}{2\ell^2} < E < 0 \longleftrightarrow 0 < \varepsilon < 1 \longrightarrow$ elipse
- $E = V_{min} \longleftrightarrow \varepsilon = 0 \longrightarrow$ círculo
- $E < V_{min} \longleftrightarrow \varepsilon^2 < 0 \longrightarrow$ no permitido

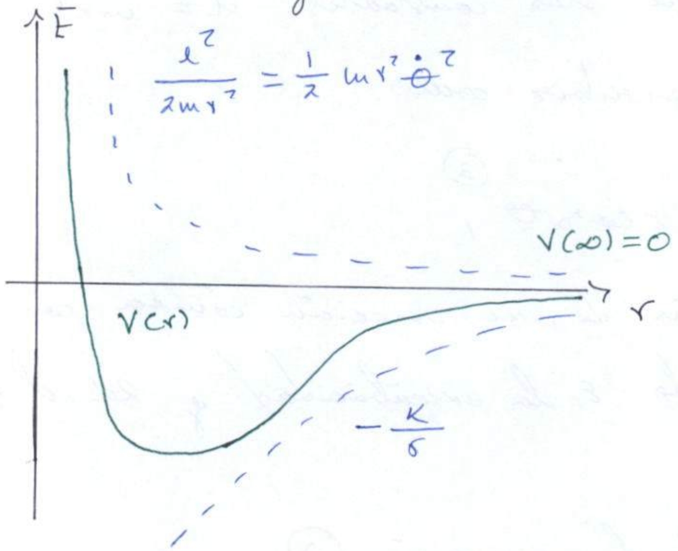
donde se ha definido V_{min} como el valor del potencial evaluado en el límite en el que la órbita tiende a una circunferencia:

$$\frac{dV(r)}{dr} = \frac{d}{dr}\left[\frac{l^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}\right] = \frac{K}{r^2} - \frac{l^2}{mr^3} = 0$$

$$\longleftrightarrow \quad r = r_c = \frac{l^2}{Km} \quad (4)$$

$$\Longrightarrow V_{min} = V(r_c) = -\frac{mK^2}{2l^2} \quad (5).$$

Por otro lado, se puede graficar el potencial efectivo como función de la energía:



Se confirma entonces que el movimiento es acotado únicamente para $E<0$.

c) La órbita circular se obtiene cuando $E=V_{min}$, que se calculó en (4) como $r_c = \frac{l^2}{Km}$.

d) Igualmente, de (5):

$$E_{circ} = V_{min} = -\frac{mK}{l^2}\frac{K}{2} = -\frac{1}{2}\frac{K}{r_c} = \frac{1}{2}U(r_c)$$

e) A partir de la energía total para órbitas circulares, asumimos que $\kappa \longrightarrow \kappa/2$, luego,

$$E(r_c) = \frac{\ell^2}{2mr_c^2} - \frac{\kappa'}{2r_c} = \frac{\ell^2}{2mr_c^2} - \frac{\ell^2}{2mr_c^2} = 0\,,$$

donde de ④ se usó que $\kappa = \frac{\ell^2}{m r_c}$. Por lo tanto, la órbita pasa de ser circular a ser parabólica ($E=0$). ∎

2) De la ecuación para $\dot{r}$, los puntos de retorno se darán cuando

a)
$$E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} = 0\,.$$

Luego, para el potencial dado por $U(r) = \frac{1}{2}r^2$,

$$E - \frac{r^2}{2} - \frac{\ell^2}{2mr^2} = 0$$

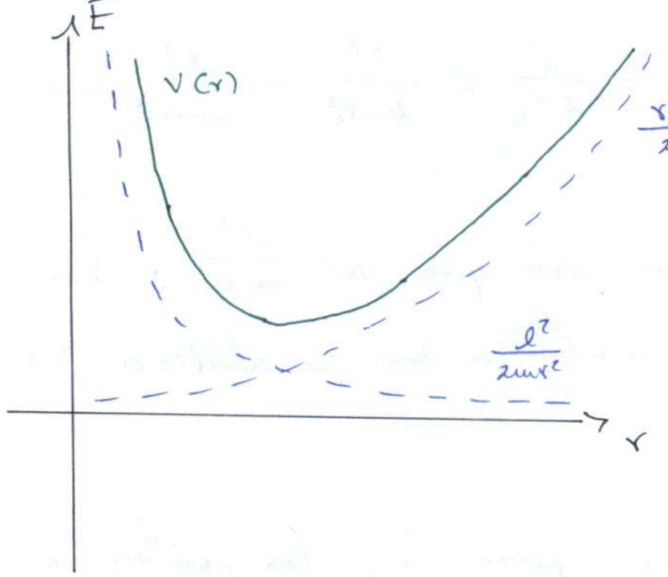
$$\Leftrightarrow \quad r^4 - 2Er^2 + \frac{\ell^2}{m} = 0$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = E \pm \sqrt{E^2 - \frac{\ell^2}{m}}\,, \quad ①$$

donde se observa de entrada que las dos soluciones con signo negativo global no son permitidas, quedando solo como soluciones

$$r_{min} = E - \sqrt{E^2 - \frac{\ell^2}{m}} \quad y \quad r_{max} = E + \sqrt{E^2 - \frac{\ell^2}{m}}\,.$$

Además, se observa que $E > 0$ es la única condición posible ya que para $E < 0$ r_{min} no está definido por un signo negativo global e igualmente para r_{max} ya que $|E| > \sqrt{E^2 - \frac{\ell^2}{m}}$ siempre se cumplirá. Por otro lado, es evidente que $E=0$ tampoco está permitido. De igual forma, se puede graficar el potencial efectivo:



Es evidente entonces que el movimiento solo es permitido para $E>0$ y que siempre está acotado. ■

b) La órbita circular se dará en $E=V_{min}$, por lo que

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{l^2}{mr_c^3} + r_c = 0 \longleftrightarrow r_c^2 = \frac{l}{\sqrt{m}}. ■$$

c) De la ecuación ①,

$$r_{min}^2 = E - \sqrt{E^2 - \frac{l^2}{m}} = \left[(5\,J) - \sqrt{25\,J^2 - 16\,J^2}\right] s^2/kg,$$

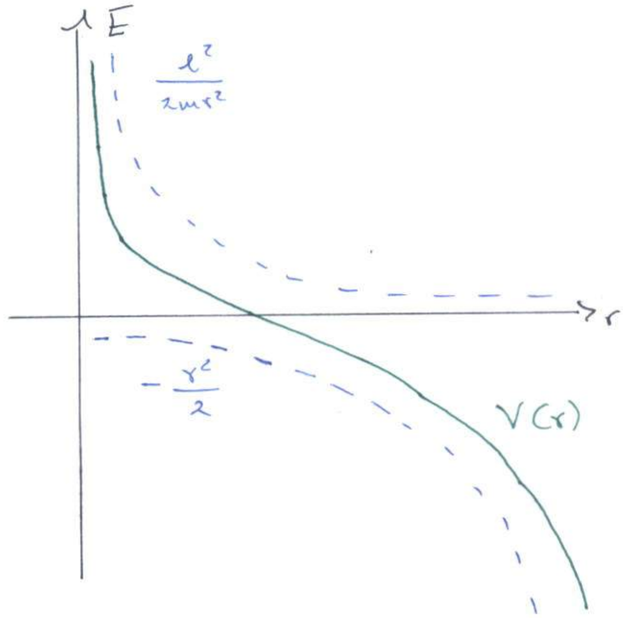
donde se introdujeron las unidades de $U(r) = \frac{r^2}{2}\,J$. Luego,

$r_{min} = \sqrt{2}\,m$. ■

Si el potencial fuera atractivo, $V(r) = -\frac{r^2}{2}$, la ecuación ① se transforma a

$$r^2 = -E \pm \sqrt{E^2 + \frac{l^2}{m}} ,$$

donde está claro que la solución para el signo negativo no existe, luego entonces no existe movimiento acotado, i.e. movimiento circular. De igual forma, de la gráfica se observa que no existe mínimo:



Finalmente, si se busca el mínimo tomando la derivada de $V(r)$,

$$\frac{dV}{dr} = -r - \frac{l^2}{mr^3} = 0 \leftrightarrow r^4 = -\frac{l^2}{m} ,$$

que no tiene sentido físico. ∎

3| Dado el potencial de Yukawa, $U(r) = -\frac{\kappa}{r} e^{-\frac{r}{r_0}}$, el potencial efectivo está dado por

$$V(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\kappa}{r} e^{-\frac{r}{r_0}} ,$$

cuyo mínimo está dado por

$$\frac{dV(r)}{dr} = -\frac{l^2}{mr^3} + \frac{\kappa}{r^2} e^{-\frac{r}{r_0}} + \frac{\kappa}{r r_0} e^{-\frac{r}{r_0}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{l^2}{mr^3} + \frac{\kappa}{r^2} e^{-\frac{r}{r_0}} \left(1 + \frac{r}{r_0}\right) = 0$$

$$\overset{r=r_c}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{r_c}{r_0}\left(1 + \frac{r_c}{r_0}\right) e^{-\frac{r_c}{r_0}} = \frac{l^2}{m\kappa r_0} ,$$

que es la ecuación para el movimiento circular, i.e. cualquier solución a esta ecuación representa un tipo de movimiento circular.

Definiendo $x \equiv \frac{r_c}{r_0}$, $\beta \equiv \frac{l^2}{m\kappa r_0}$ y $f(x) \equiv x(1+x)e^{-x}$, todo se reduce a estudiar el comportamiento de la ecuación

$$f(x) = \beta .$$

Se observa que $f(x)$ tiene un extremo en

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = x e^{-x} + (1+x) e^{-x} - x(1+x) e^{-x}\Big|_{x=x_0}$$

$$= (1 + x_0 - x_0^2) e^{-x_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \simeq 1.62 ,$$

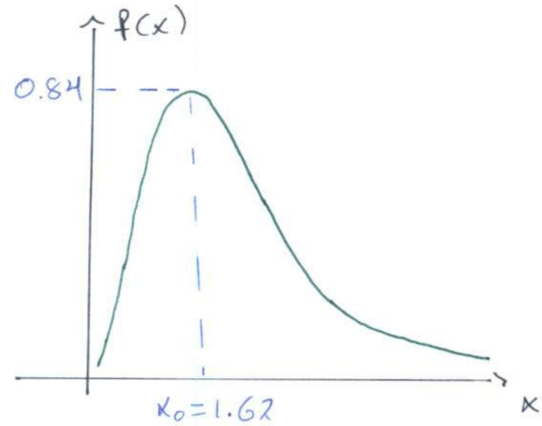
y que es un máximo

$$\left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} = -(1+x_0-x_0^2)\,e^{-x_0} + (1-2x_0)\,e^{-x_0}$$

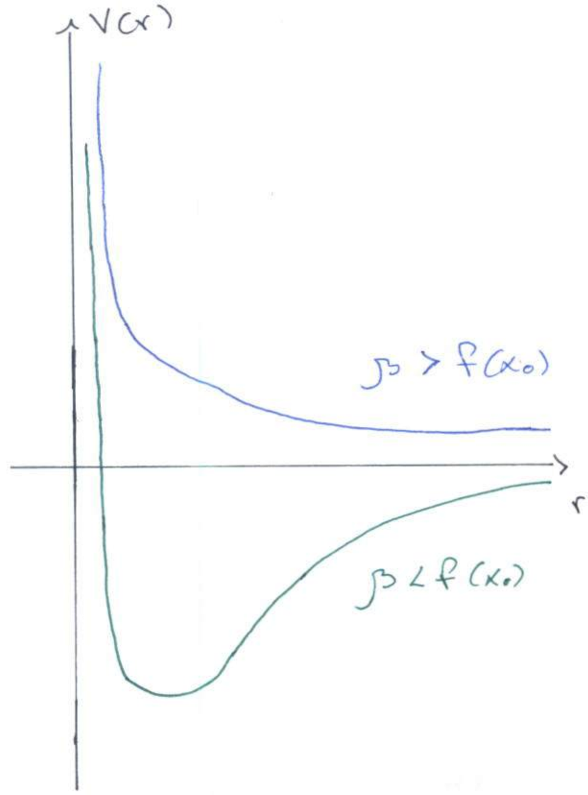
$$= (-3x_0 + x_0^2)\,e^{-x_0} \simeq -0.44 < 0,$$

por lo que $f(x)$ tiene un máximo en $f(x_0) \simeq 0.84$.

Luego,



- Si el momento angular es grande, $\beta > 0.84$, no existe solución a $f(x) = \beta$ y, por lo tanto, no existe movimiento circular y el término $\frac{l^2}{2mr^2}$ domina. Luego entonces solo existe un punto de retorno para $E > 0$.



- Para $\beta < 0.84$, $V(r)$ tiene un mínimo V_{min} que permite órbitas circulares. En general, existirán movimientos acotados para $V_{min} < E < 0$. ∎

4| Para el potencial de Kepler, $U = -\frac{\kappa}{r}$, donde $\kappa = GMm$, el radio de la órbita circular se sabe que está dado por

a)
$$r_c = \frac{l^2}{\kappa m} = \frac{l^2}{GMm^2},$$

donde $l^2 = m^2 r_c^4 \dot{\theta} = m^2 r_c^2 V_\theta^2$. Así,

$$r_c = \frac{r_c^2 V_\theta^2}{GM} \longleftrightarrow V_\theta = \sqrt{\frac{GM}{D}},$$

donde D es la distancia de la Tierra a la órbita. ■

b) La órbita será elíptica cuando

$$V_{min} < E < 0,$$

donde $E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{D}$. Luego, por un lado,

$$V_{min} = \frac{1}{2} U(r_c) = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{D} < \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{D},$$

donde despejando para v,

$$v > \sqrt{\frac{GM}{D}} = V_\theta.$$

Por otro lado,

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{D} < 0 \longleftrightarrow v < \sqrt{\frac{2GM}{D}} = V_{esc}.$$

Por lo tanto,

$$V_{min} < E < 0 \longleftrightarrow V_\theta < v < V_{esc}.$$ ■

5| Del Teorema del Virial para la interacción gravitacional, se sabe que $T = -\frac{1}{2}U$, donde $T = \frac{1}{2} m_e \omega^2 r_c^2$ —siendo m_e la masa de la Tierra— y $U = -\frac{G M_s m_e}{r_c}$. Luego, si la masa del Sol cambiara, solo cambiaría la energía potencial. Así,

$$E' = T' + U' = T + \frac{1}{2}U = -\frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U = 0 \,,$$

donde para $M_s \longrightarrow \frac{1}{2}M_s$, se tomó que $U' = \frac{1}{2}U$.

Finalmente, se sabe que para el potencial de Kepler, $E = 0$ describe un movimiento parabólico, por lo que si la masa del Sol se redujera a la mitad, la Tierra se saldría de órbita. ∎