1. **Teorema** (Teorema de Bertrand). *Las únicas fuerzas centrales, para las que todas las órbitas acotadas son órbitas cerradas, son la fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia y la Ley de Hooke.*

   (a) Pruebe el teorema anterior.

Ayuda:

- Parta de la ecuación de la órbita

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = J\left(u\right) \ , \tag{1}$$

  donde $u \equiv 1/r$ y

$$J\left(u\right) = -\frac{\mu}{l^2 u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) \ , \tag{2}$$

  y aplique (y explique) las condiciones para órbitas circulares.

- Asuma pequeñas perturbaciones en el movimiento circular y, entonces, expanda $J(u)$ alrededor de u_0 (órbitas circulares) y, bajo ciertas condiciones para $J(u)$, reescriba la ecuación de la órbita en la proximidad de las condiciones de circularidad, llegando a

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\theta^2} + \beta^2 x = 0 \ , \tag{3}$$

  donde $x = u - u_0$. Defina β en función de u_0. ¿Qué condiciones debe cumplir β^2?

- Resuelva la ecuación de β para $f(r)$. Esta ecuación para $f(r)$ permite aún una amplia variedad de comportamientos para la fuerza. Aplique condiciones más restrictivas conservando más términos en el desarrollo de Taylor para $J(u)$ del punto anterior.

- Encuentre la ecuación (3) modificada a partir de la nueva expansión para $J(u)$ y escriba la solución general de la parte homogénea (solución de órbita cerrada) manteniendo varios términos en el desarrollo. Explique los términos relevantes de la solición dependiendo de las condiciones de circularidad.

- Sustituya la solución anterior en la ecuación (3) modificada y encuentre las condiciones

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{a_1^2 J''}{4\beta^2} \ , \qquad a_2 = -\frac{a_1^2 J''}{12\beta^2} \ , \\ a_3 &= -\frac{1}{8\beta^3}\left[\frac{a_1 a_2}{2} J'' + \frac{J''' a_1^3}{24}\right] \ , \qquad 0 = \frac{2a_1 a_0 + a_1 a_2}{2} J'' + \frac{J''' a_1^3}{8} \ , \end{aligned} \tag{4}$$

  donde los a_i son los coeficientes de la solución general encontrada en el punto anterior.

- Resuelva el sistema (4) sustituyendo las primeras tres formulas en la cuarta y también las expresiones de J'' y J''' obtenidas de diferenciar la ecuación (2) tomando en cuenta la expresión obtenida para $f(r)$ en el punto 4 (básicamente escribir $J(u)$ en función de β y diferenciar). La expresión a encontrar es

$$\beta^2(1-\beta^2)(4-\beta^2)=0. \tag{5}$$

  Encuentre las soluciones de (5) y explique sus consecuencias.

Nota: Existen varios procedimientos para demostrar este teorema. El procedimiento sugerido aquí es el estándar. A cada punto descrito en la *ayuda* se le asignará una fracción del valor del total del trabajo. Otros procedimientos son aceptados, sin embargo deberán ser desarrollados al mismo nivel de detalle.

Fecha de entrega: 17 de diciembre del 2018