1. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores con origen común formando un ángulo θ,

   (a) Demostrar geométricamente que

   $$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \ , \qquad \text{(Teorema del coseno).} \tag{1}$$

   (b) Escribir el producto escalar $\vec{a}\cdot\vec{b}$ en función de $\cos\theta$.

   (c) Obtener la relación del ángulo θ con los cosenos directores de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

2. Utilizando las definiciones

   $$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b} &= a_i b_i \ , \\ \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} &= \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k \ , \end{aligned} \tag{2}$$

   (donde existe una suma sobre i, j, k) y la relación $\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$, demostrar las siguientes identidades vectoriales:

   (a) Producto vectorial triple:

   $$\begin{aligned} \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} &= (\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b} - \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a} \ , \\ \vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) &= (\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a}\cdot b)\,\vec{c} \ . \end{aligned} \tag{3}$$

   (b) Producto escalar cuádruple:

   $$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right) - \left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right) \ . \tag{4}$$

   (c) Mostrar que

   $$|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin\theta \ , \qquad \forall\ 0 \le \theta < \pi \ . \tag{5}$$

   (d) Dado $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$, probar que

      i. $\vec{c}\cdot\vec{a} = \vec{c}\cdot\vec{b} = 0$,

      ii. $0 < (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$,

   lo que indica que $\vec{c}$ es perpendicular a $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

3. Sean los siguientes vectores ortonormales $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$ y $\vec{c} = (0,0,1)$, y sea $\mathbf{R}_{\hat{u},\phi}$ una rotación de ángulo ϕ alrededor del eje caracterizado por el vector unitario $\hat{u}$. Obtener $\hat{u}$ y ϕ en los siguientes casos:

   (a) $\mathbf{R}\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\} = \left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$.

   (b) $\mathbf{R}\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\} = \left\{\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right\}$.

   (c) $\mathbf{R}\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\} = \left\{\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right\}$.

   Use la relación $\mathrm{Tr}\mathbf{R}_{\hat{u},\phi} = 1 + 2\cos\phi$, donde $\mathrm{Tr}\mathbf{R}$ es la traza de la matriz $\mathbf{R}$.

4. Demostrar las siguientes propiedades bajo rotaciones:

   (a) Conservación del producto escalar

   $$\mathbf{R}\vec{a} \cdot \mathbf{R}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \ . \tag{6}$$

   (b) Transformación del producto vectorial

   $$\mathbf{R}\vec{c} = \mathbf{R}\vec{a} \times \mathbf{R}\vec{b} \ , \tag{7}$$

   donde $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

5. Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tres vectores constantes que unen el origen con los puntos A, B y C.

   (a) Calcular la distancia del origen al plano definido por A, B y C.

   (b) Calcular el área del triángulo ABC.