SIMULACIÓN NUMÉRICA POR ORDENADOR EN ASTROFÍSICA
(CURSO DE DOCTORADO 2003–04)

PRÁCTICA 1. *Resolución exacta del Problema de Riemann para las ecuaciones de Euler*

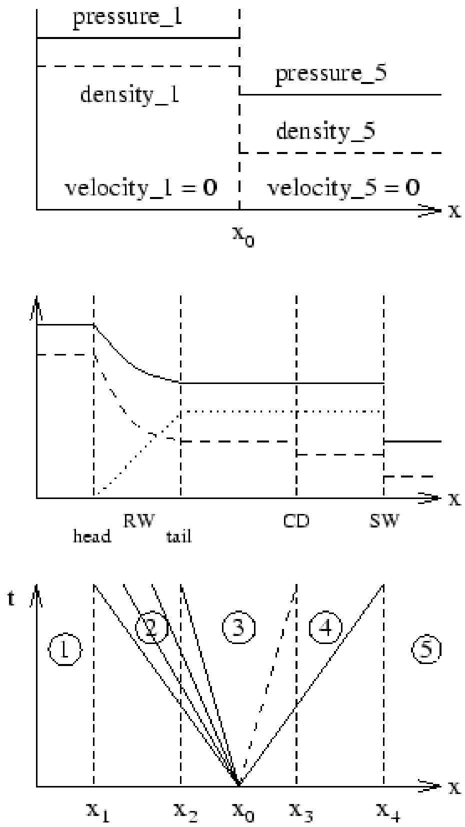
1.– Introducción

- El Problema de Riemann es un problema de valores iniciales discontinuos de la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E+p) \end{bmatrix}$$

con

$$\mathbf{u}(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} \mathbf{u}_{\mathrm{L}} & \text{si } x < x_0 \\ \mathbf{u}_{\mathrm{R}} & \text{si } x > x_0 \end{cases}$$



- El dato inicial no tiene escala espacial definida, por lo que su solución es autosemejante: $\mathbf{u}(x,t) = \mathbf{u}(x/t)$. La solución consiste en dos estados constantes (L_*, R_*) separados de los estados iniciales por ondas de choque ($\mathcal{S}$) y/o rarefacciones ($\mathcal{R}$) con una discontinuidad de contacto ($\mathcal{C}$) entre ellos:

$$I \ \rightarrow \ L\, \mathcal{W}_{\leftarrow}\, L_*\, \mathcal{C}\, R_*\, \mathcal{W}_{\rightarrow}\, R \tag{1}$$

($\mathcal{W} = \mathcal{S}, \mathcal{R}$; las flechas ($\leftarrow$ / $\rightarrow$) indican la dirección desde la que los elementos de fluido atraviesan la correspondiente onda).

- Ondas de choque: Soluciones discontinuas de las ecuaciones de Euler con flujo de masa a través de la discontinuidad. Los estados a izquierda y derecha de la onda de choque y su velocidad están relacionados mediante las condiciones de Rankine-Hugoniot. Las ondas de choque son compresivas (las partículas de fluido aumentan su presión al atravesarlas).

- Discontinuidades de contacto: Soluciones discontinuas de las ecuaciones de Euler. A diferencia de las ondas de choque, a través de la discontinuidades de contacto no hay flujo de masa. La presión y la velocidad del fluido son iguales a ambos lados de la discontinuidad de contacto.

- Ondas de rarefacción: Soluciones continuas autosemejantes de las ecuaciones de Euler que conectan estados constantes. Las partículas de fluido reducen su presión al atravesarlas.

- La solución para la presión en los estados intermedios, p_*, de un problema de Riemann con una ecuación de estado de gas ideal viene dada por la raíz de la ecuación algebraica

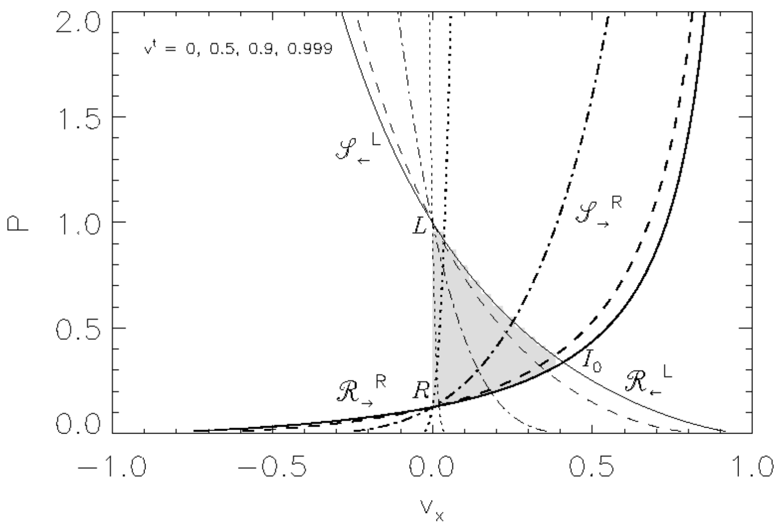
$$f(p;\mathbf{u}_\mathrm{L},\mathbf{u}_\mathrm{R}) = f_\mathrm{L}(p;\mathbf{u}_\mathrm{L}) + f_\mathrm{R}(p;\mathbf{u}_\mathrm{R}) + u_\mathrm{R} - u_\mathrm{L} = 0, \tag{2}$$

donde la función f_I $(I = L, R)$ viene dada por:

$$f_\mathrm{I}(p;\mathbf{u}_\mathrm{I}) = \begin{cases} (p - p_\mathrm{I})\left[\frac{A_\mathrm{I}}{p+B_\mathrm{I}}\right]^{1/2} & \text{si } p > p_\mathrm{I} \text{ (onda de choque)} \\ \frac{2a}{(\gamma-1)}\left[\left(\frac{p}{p_\mathrm{I}}\right)^{(\gamma-1)/2\gamma} - 1\right] & \text{si } p < p_\mathrm{I} \text{ (onda de rarefacción)} \end{cases}$$

donde γ es el cociente de calores específicos del gas ideal, a la velocidad del sonido y las constantes A_I y B_I están dadas por

$$A_\mathrm{I} = \frac{2}{(\gamma+1)\rho_\mathrm{I}}, \quad B_\mathrm{I} = \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)}p_\mathrm{I} \tag{3}$$



- La solución para la velocidad del fluido en el estado intermedio, u_*, viene dada por

$$u_* = \frac{1}{2}(u_\mathrm{L} + u_\mathrm{R}) + \frac{1}{2}\left[f_\mathrm{R}(p_*) - f_\mathrm{L}(p_*)\right] \tag{4}$$

- Una vez obtenidas p_*, u_*, se pueden obtener los valores del resto de variables en los estados intermedios y las velocidades de propagación de las ondas de choque, los extremos de las rarefacciones y la discontinuidad de contacto, que separan los diferentes estados constantes. Por último se pueden obtener los valores de las variables en la rarefacción.

- Referencias:

E.F. Toro, *Riemann solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Springer, 1997. Capítulo 4

R. Courant, K.O. Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Springer, 1976. Epígrafes 80 y 81

L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Springer, 1987. Epígrafe 100

2.– Desarrollo de la práctica

- Usando el programa `e1rpex.f`, obtén la solución, en el dominio espacial $[0, 1]$, de los problemas de Riemann que aparecen en la siguiente tabla:

Test	ρ_L	u_L	p_L	ρ_R	u_R	p_R
1	1.0	0.75	1.0	0.125	0.0	0.1
2	1.0	−2.0	0.4	1.0	2.0	0.4
3	1.0	0.0	1000.0	1.0	0.0	0.01
4	6.0	20.	400.0	6.0	−6.0	40.0

- Para cada uno de los problemas anteriores, **1)** identifica las ondas de choque, discontinuidades de contacto y rarefacciones que aparecen separando los diferentes estados constantes, y **2)** calcula los flujos de masa, momento y energía por unidad de superficie en $x = 0.5$.

3.– Resumen del programa `e1rpex.f`

`program e1rpex`: resuelve el problema de Riemann exacto para las ecuaciones de Euler unidimensionales, dependientes del tiempo, de un gas ideal.

`subroutine starpu`: calcula, a partir de los datos iniciales del problema de Riemann, la presión y velocidad del fluido en el estado intermedio, p_*, u_*, resolviendo mediante un Newton-Raphson, una ecuación algebraica para la presión.

`subroutine guessp`: proporciona el valor inicial de la presión para el Newton-Raphson.

`subroutine prefun`: evalúa las funciones de la presión f_L y f_R y sus primeras derivadas.

`subroutine sample`: a partir de los valores de p_* y u_*, proporciona la solución completa (densidad, velocidad, presión) en todos los puntos de la malla numérica en un cierto instante.

4.– Representación gráfica

- Puedes representar gráficamente las variables hidrodinámicas usando el paquete `gnuplot`, suministrado con diversas distribuciones de *Linux*.
- Para representar una figura sencilla usa `plot` "*fichero*" `using` ($*col*):($*col*), donde *fichero* es el nombre del fichero en el que están almacenados los datos, *col* es el número de la columna que contiene los datos a representar (abcisas la primera, ordenadas la segunda).
- Usa el comando `replot` para representar otra función sobre la misma figura.
- Para guardar las figuras en un fichero, selecciona primero `set terminal postscript` y luego `set output` "*fichero*", donde *fichero* es el nombre del fichero en el que se van a guardar las figuras (extensión *.ps*).
- Usa `help` para acceder a un menú de ayuda.