SIMULACIÓN NUMÉRICA POR ORDENADOR EN ASTROFÍSICA
(CURSO DE DOCTORADO 2003–04)

PRÁCTICA 2. *Aspectos básicos de los métodos en diferencias finitas aplicados a los sistemas hiperbólicos de leyes de conservación. Métodos en diferencias finitas estándar*

**1.**– Introducción

- Consideremos la ley de conservación escalar en una dimensión espacial dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

con la condición inicial $u(x, t = 0) = u_0(x)$.

Si la ecuación es no lineal (i.e., $\partial f/\partial u \neq 0$), pueden generarse soluciones discontinuas en un tiempo finito a partir de un dato inicial continuo.

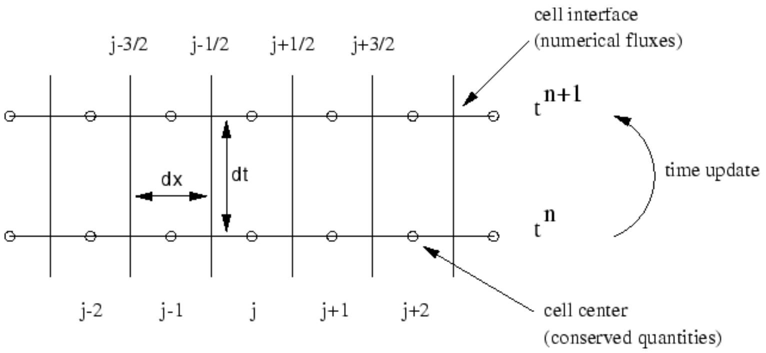
- Discretización espacio-temporal: En códigos hidrodinámicos basados en diferencias o volúmenes finitos, la ecuación (1) se resuelve sobre una malla numérica discreta $(x_j, t^n)$ con

$$x_j = (j - 1/2)\Delta x, \quad j = 1, 2, \dots , \tag{2}$$

y

$$t^n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots , \tag{3}$$

donde $\Delta t$ and $\Delta x$ representan el paso de tiempo y el tamaño de la celda numérica, respectivamente.




- Un esquema en diferencias finitas es un procedimiento por el que se obtiene una aproximación a la solución en un tiempo posterior, $u_j^{n+1}$, a partir de aproximaciones en instantes anteriores.

- La cantidad $u_j^n$ es una aproximación a $u(x_j, t^n)$. En el caso de leyes de conservación es preferible considerarla como una aproximación al valor medio de $u(x, t)$ en la celda $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$, donde $x_{j\pm1/2} = (x_j + x_{j\pm1})/2$:

$$\bar{u}_j^n = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t^n) dx. \tag{4}$$

- La convergencia de la solución numérica a la analítica al refinar la malla numérica implica que el error global, $||E_{\Delta x}||$, definido según

$$||E_{\Delta x}|| = \Delta x \sum_j |\bar{u}_j^n - u_j^n|, \tag{5}$$

tienda a cero conforme $\Delta x \to 0$.

En general, en un método es de orden $p$, $||E_{\Delta x}|| \propto \Delta x^p$.

- Métodos en forma conservativa: garantizan la convergencia (en caso de que ésta exista) a una de las soluciones discontinuas admisibles del sistema original de ecuaciones (teorema de Lax-Wendroff). Forma conservativa significa que el algoritmo puede escribirse en la forma

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\hat{f}(u_{j-r}^n, u_{j-r+1}^n, \ldots, u_{j+q}^n) - \hat{f}(u_{j-r-1}^n, u_{j-r}^n, \ldots, u_{j+q-1}^n)\right) \tag{6}$$

donde $q$ y $r$ son enteros positivos, y $\hat{f}$ es una función flujo numérico consistente (i.e., $\hat{f}(u, u, \ldots, u) = f(u)$).

- Ejemplos de métodos en diferencias finitas conservativos:

| Nombre | Algoritmo | Orden |
|---|---|---|
| Lax-Friedrichs | $u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n))$ | 1 |
| Godunov | $u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(f(u(0; u_j^n, u_{j+1}^n)) - f(u(0; u_{j-1}^n, u_j^n)))$ | 1 |
| Two-step Lax-Wendroff | $u_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n))$ | |
| | $u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(f(u_{j+1/2}^{n+1/2}) - f(u_{j-1/2}^{n+1/2}))$ | 2 |
| MacCormack | $u_j^* = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n))$ | |
| | $u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_j^n + u_j^*) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(u_j^*) - f(u_{j-1}^*))$ | 2 |

Los métodos de primer orden son estables (suponiendo que se satisface la condición de Courant: $\left|\frac{df}{du}\right| \frac{\Delta t}{\Delta x} (\equiv \mathrm{CFL}) \leq 1$) y, por tanto convergentes, aunque excesivamente difusivos.

Los métodos de segundo orden son menos disipativos pero oscilatorios en las proximidades de discontinuidades (y, por tanto, no convergentes).

- Referencias:

R.J. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhäuser, 1992. Parte II

**2.**– Desarrollo de la práctica:

- Conéctate a la página web `http://grape.c.u-tokyo.ac.jp/~hachisu/java.shtml`

- Seleccionando las opciones correspondientes, resuelve la ecuación de Burgers sin viscosidad

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2/2}{\partial x} = 0$$

  con dato inicial $u(t=0,x) = \sin(2\pi x)$ con los métodos de la tabla anterior.

- Para cada uno de los métodos rellena la siguiente tabla:

  Método:

| CFL | 0.1 | 0.5 | 0.9 | 1.0 | 1.1 | 1.5 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_{\text{dif}}$ | | | | | | | |
| $t_{\text{inst}}$ | | | | | | | |

  donde $t_{\text{dif}}$ es el instante de tiempo (aproximado) en el que se alcanza un estado homogéneo, y $t_{\text{inst}}$, el instante (también aproximado) en el que se hacen visibles las primeras oscilaciones numéricas.

  ¿Cómo evoluciona el estado inicial sinusoidal?

  ¿Qué diferencias observas entre los métodos de primer orden y los de segundo?

  ¿Qué métodos son más difusivos?

  ¿Qué métodos son más inestables?

  ¿Cómo cambia la difusión con la CFL en los métodos de primer orden?

  ¿Qué pasa con todos los métodos cuando se usa una CFL superior a la unidad?

- Repite todos los puntos anteriores pero resolviendo ahora las ecuaciones de Euler para un fluido perfecto con un dato inicial discontinuo (problema del *tubo de Sod*).