Formulario · Señales y Sistemas Lineales

TRIGONOMETRÍA

Desfases de $\frac{\pi}{2}$ y de π, y cambio de signo del ángulo:

$$\cos\left(A+\tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin A \qquad \sin\left(A+\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos A$$
$$\cos\left(A-\tfrac{\pi}{2}\right) = \sin A \qquad \sin\left(A-\tfrac{\pi}{2}\right) = -\cos A$$
$$\cos(A\pm\pi) = -\cos A \qquad \sin(A\pm\pi) = -\sin A$$
$$\cos(-A) = \cos A \qquad \sin(-A) = -\sin A$$

Con n entero:

$$\cos(\pi n) = (-1)^n \qquad \sin(\pi n) = 0$$

Suma y diferencia de ángulos:

$$\cos(A\pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B$$
$$\sin(A\pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$$

Sumas y diferencias a productos:

$$\cos A+\cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A-\cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$
$$\sin A+\sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\sin A-\sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

Productos a sumas:

$$\sin A\cos B = \tfrac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$
$$\cos A\cos B = \tfrac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$$
$$\sin A\sin B = \tfrac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$

Juntar *seno-más-coseno* en un solo coseno con fase ($a>0$):

$$a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t) = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos\left(\omega t-\arctan\frac{b}{a}\right)$$
$$a\cos(\Omega n)+b\sin(\Omega n) = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos\left(\Omega n-\arctan\frac{b}{a}\right)$$

INTEGRALES

Exponencial ($a\neq 0$):

$$\int_0^t e^{a(t-\theta)}\,d\theta = \int_0^t e^{a\theta}\,d\theta = \frac{e^{at}-1}{a}$$

Exponencial por coseno:

$$\int e^{a\theta}\cos(b\theta)\,d\theta = \frac{e^{a\theta}}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\left(b\theta-\arctan\frac{b}{a}\right) \qquad (a>0)$$
$$= \frac{e^{a\theta}}{a^2+b^2}(a\cos b\theta + b\sin b\theta)$$

Exponencial por seno:

$$\int e^{a\theta}\sin(b\theta)\,d\theta = \frac{e^{a\theta}}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\left(b\theta-\arctan\frac{b}{a}\right) \qquad (a>0)$$
$$= \frac{e^{a\theta}}{a^2+b^2}(a\sin b\theta - b\cos b\theta)$$

SERIES

Geométrica finita ($a\neq 1, n_1\leq n_2$):

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} a^k = \frac{a^{n_1}-a^{n_2+1}}{1-a}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \qquad (n_1=0,\ n_2=n)$$

Geométrica infinita ($|a|<1$):

$$\sum_{k=n_1}^{\infty} a^k = \frac{a^{n_1}}{1-a}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \qquad (n_1=0)$$

Exponencial por coseno ($|a|<1$):

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k\cos(\Omega k) = \frac{1-a\cos\Omega}{1-2a\cos\Omega+a^2}$$

Exponencial por seno ($|a|<1$):

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k\sin(\Omega k) = \frac{a\sin\Omega}{1-2a\cos\Omega+a^2}$$

Exponencial por coseno, suma finita (cualquier a que no anule el denominador):

$$\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}\cos(\Omega k) = \frac{\cos(\Omega n)-a\cos\big(\Omega(n+1)\big)-a^{n+1}(\cos\Omega-a)}{1-2a\cos\Omega+a^2}$$

Exponencial por seno, suma finita (cualquier a que no anule el denominador):

$$\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}\sin(\Omega k) = \frac{\sin(\Omega n)-a\sin\big(\Omega(n+1)\big)+a^{n+1}\sin\Omega}{1-2a\cos\Omega+a^2}$$

DELTA

Propiedad	**Continuo:** $\delta(t)$	**Discreto:** $\delta[n]$
Producto	$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)\,\delta(t-b)\,dt = \delta(a-b)$	$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n-a]\,\delta[n-b] = \delta[a-b]$
Muestreo	$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,\delta(t-a)\,dt = x(a)$	$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\,\delta[n-a] = x[a]$
Convolución	$x(t)*\delta(t-a) = x(t-a)$	$x[n]*\delta[n-a] = x[n-a]$

CORRELACIÓN Y CONVOLUCIÓN

	Continuo	Discreto
Correlación	$R_{x_1x_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\, x_2(t+\tau)\, dt$	$R_{x_1x_2}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]\, x_2[n+l]$
Autocorrelación	$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x(t+\tau)\, dt$	$R_{xx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, x[n+l]$
Convolución	$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\theta)\, x_2(t-\theta)\, d\theta$	$(x_1 * x_2)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]\, x_2[n-k]$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

$x(t)$	$X(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$t\,u(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n\,u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}\,u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$t\,e^{-at}\,u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\cos(\omega_0 t)\,u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
$\sin(\omega_0 t)\,u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
$e^{-at}\cos(\omega_0 t)\,u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
$e^{-at}\sin(\omega_0 t)\,u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$

Propiedad	$x(t)$	$X(s)$
Linealidad	$\alpha\, x_1(t) + \beta\, x_2(t)$	$\alpha\, X_1(s) + \beta\, X_2(s)$
Derivada	$\dot{x}(t)$	$s\,X(s) - x(0^-)$
Derivada segunda	$\ddot{x}(t)$	$s^2 X(s) - s\,x(0^-) - \dot{x}(0^-)$
Integral	$\int_0^t x(\tau)\, d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$
Retardo	$x(t-t_0)\,u(t-t_0)$	$e^{-st_0}\,X(s)$
Desplazamiento en s	$e^{-at}\,x(t)$	$X(s+a)$
Convolución	$x(t) * h(t)$	$X(s)\,H(s)$
Periódica	$\sum_k x_1(t-kT)$	$\frac{X_1(s)}{1-e^{-sT}}$

TRANSFORMADA Z

$x[n]$	$X(z)$
$\delta[n]$	1
$\delta[n-k],\, k \geq 0$	z^{-k}
$u[n]$	$\frac{z}{z-1}$
$n\,u[n]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$a^n\,u[n]$	$\frac{z}{z-a}$
$n\,a^n\,u[n]$	$\frac{a\,z}{(z-a)^2}$
$r^n\cos(\Omega_0 n)\,u[n]$	$\frac{z\,(z - r\cos\Omega_0)}{z^2 - 2r\cos\Omega_0\, z + r^2}$
$r^n\sin(\Omega_0 n)\,u[n]$	$\frac{r\sin\Omega_0\, z}{z^2 - 2r\cos\Omega_0\, z + r^2}$

Propiedad	$x[n]$	$X(z)$
Linealidad	$\alpha\, x_1[n] + \beta\, x_2[n]$	$\alpha\, X_1(z) + \beta\, X_2(z)$
Retardo (x causal)	$x[n-k]$	$z^{-k}\,X(z)$
Primera diferencia	$y[n-1]$	$z^{-1}\,Y(z) + y[-1]$
Segunda diferencia	$y[n-2]$	$z^{-2}\,Y(z) + z^{-1}\,y[-1] + y[-2]$
Convolución	$x[n] * h[n]$	$X(z)\,H(z)$
Escalado	$a^n\,x[n]$	$X(z/a)$