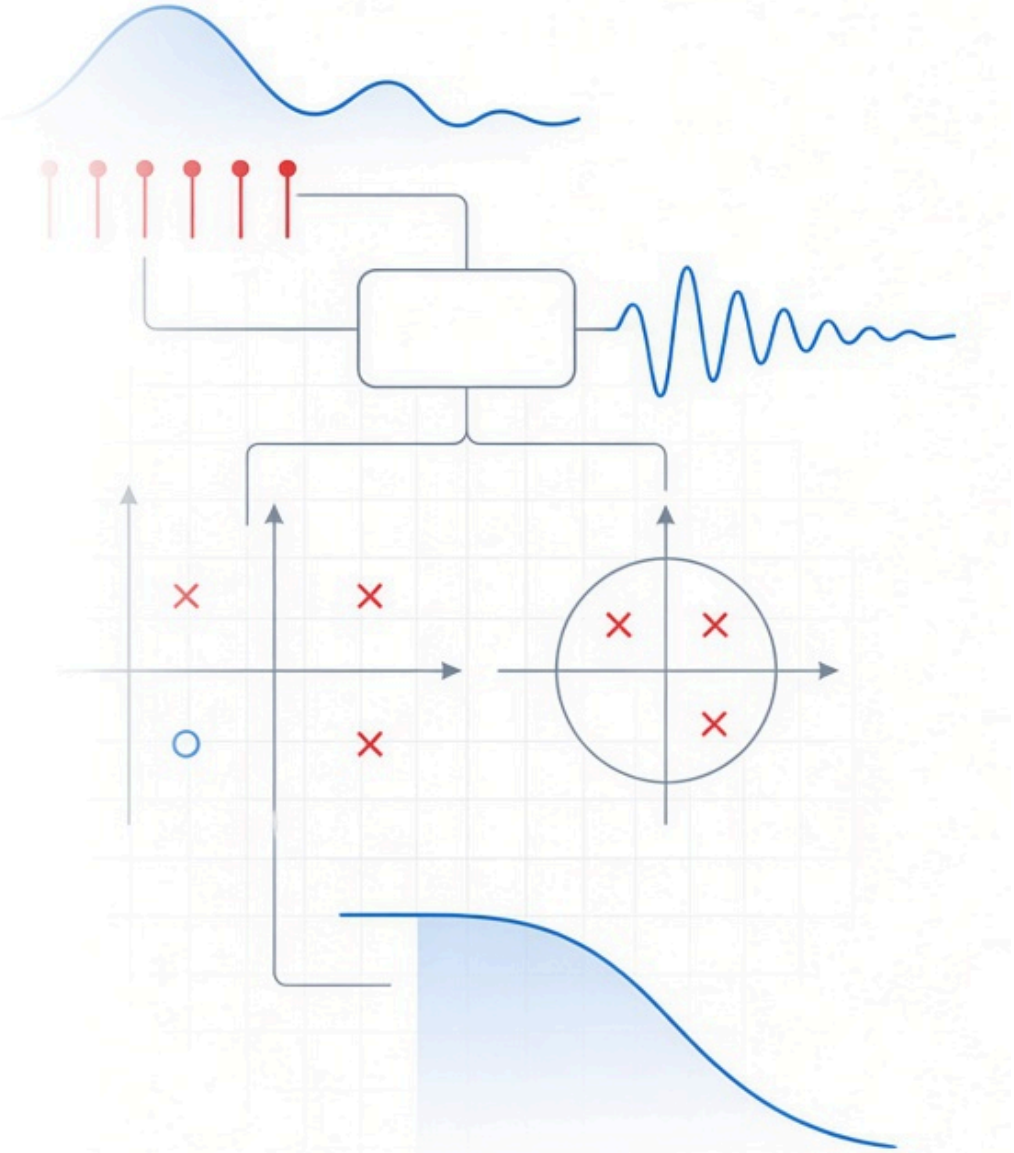
VNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Señales y Sistemas Lineales

Tema 5 · Transformada de Laplace

Grado en Ingeniería Electrónica de Telecomunicación (GIET)

Curso 2026/2027



Ricardo Sanz Díaz

ricardo.sanz@uv.es

Departament d'Enginyeria Electrònica

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria

Despatx 2.2.14

Contenidos

1. Definición y motivación
2. Transformadas y propiedades
3. Transformada inversa
4. Función de transferencia y polos
5. Resolución de circuitos

Prerrequisitos

- Temas 1, 3 y 4
- Integrales, derivadas
- Números complejos
- Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs)
- Resolución de circuitos (nudos, mallas)

Definición y motivación

La transformada de Laplace

La transformada de Laplace **convierte** una función de **variable real** en el **dominio del tiempo**, $x(t)$, a una función de **variable compleja** en el **dominio de Laplace**, $X(s)$:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt, \qquad s = \sigma + j\omega$$

> 📣 **La variable s**
>
> En el Tema 4, el **polinomio característico** de una EDO se escribía con s. No es casualidad: es la misma s.

> 📣 **Las condiciones iniciales**
>
> Fíjate que el límite inferior 0^- es importante: la transformada **incluye lo que sucede en $\mathbf{t = 0}$** (encendido de una fuente, conmutaciones, ...). A diferencia de las EDOs, **no necesitamos calcular** las condiciones en 0^+.

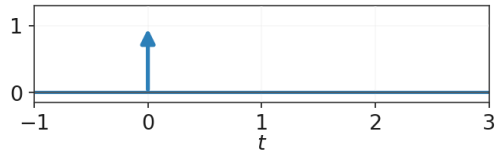
VNIVERSITAT DE VALÈNCIA Escola Tècnica Superior d'Enginyeria (ETSE-UV)

Transformadas básicas

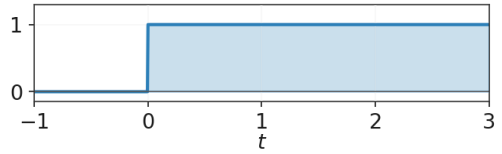
Ejemplo 5.1: Transformadas básicas

Calcula, con la definición, la transformada de Laplace de:

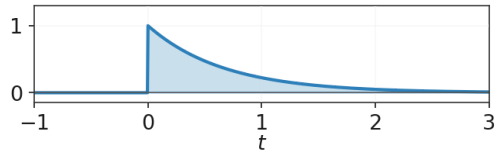
a) El impulso, $\delta(t)$



b) El escalón, $u(t)$



c) La exponencial, $e^{-at}\,u(t)$, con $a > 0$



▶ 💡 Solución a)

▶ 💡 Solución b)

▶ 💡 Solución c)

Propiedades básicas

Ejemplo 5.2: Derivadas, retardo y convolución

Demuestra, a partir de la definición, la transformada de Laplace de:

a) una señal retrasada $t_0 > 0$:

$$\mathcal{L}\{x(t-t_0)\,u(t-t_0)\} = e^{-st_0}\,X(s)$$

b) la convolución de dos señales causales:

$$\mathcal{L}\{x(t) * h(t)\} = X(s)\,H(s)$$

c) la derivada:

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = s\,X(s) - x(0^-)$$

d) la derivada segunda:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = s^2 X(s) - s\,x(0^-) - \dot{x}(0^-)$$

▶ 💡 Solución a)

▶ 💡 Solución b)

▶ 💡 Solución c)

▶ 💡 Solución d)

Tabla de transformadas y propiedades

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$t\,u(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n\,u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}\,u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$t\,e^{-at}\,u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\cos(\omega_0 t)\,u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
$\sin(\omega_0 t)\,u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
$e^{-at}\cos(\omega_0 t)\,u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
$e^{-at}\sin(\omega_0 t)\,u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$

Propiedad	$f(t)$	$F(s)$
Linealidad	$\alpha\,x_1(t)+\beta\,x_2(t)$	$\alpha\,X_1(s)+\beta\,X_2(s)$
Derivada	$\dot{x}(t)$	$s\,X(s)-x(0^-)$
Derivada segunda	$\ddot{x}(t)$	$s^2X(s)-s\,x(0^-)-\dot{x}(0^-)$
Integral	$\int_0^t x(\tau)\,d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$
Retardo	$x(t-t_0)\,u(t-t_0)$	$e^{-st_0}\,X(s)$
Desplazamiento en s	$e^{-at}\,x(t)$	$X(s+a)$
Convolución	$x(t)*h(t)$	$X(s)\,H(s)$
Periódica	$\sum_k x(t-kT)$	$\frac{X(s)}{1-e^{-sT}}$

> 📣 **Nota**
>
> A partir de ahora **usaremos siempre las tablas** para pasar del dominio del tiempo al de Laplace, y viceversa. No hace falta calcular integrales.

Función de transferencia (i)

Según lo que acabamos de ver, la transformada de Laplace nos permite **convertir derivadas temporales en polinomios** de s

> **Nota**
>
> Trabajar en el dominio de Laplace **convierte la física en álgebra**, y evita el cálculo de integrales de convolución.

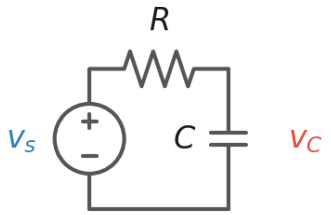
LLamamos **función de transferencia (f.d.t.)** al cociente entre la salida y la entrada:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a^n s^n + a^{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b^n s^n + b^{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$$

> **Nota**
>
> - LLamamos **polos** a las raíces del denominador de la función de transferencia
> - Llamamos **ceros** a las raíces del numerador.
> - Los polos determinan la **estabilidad** del sistema
> - La f.d.t. coincide con la transformada de la **respuesta al impulso** del sistema: $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$

- Por ejemplo, para un circuito RC:

$$RC\,\dot{v}_C(t) + v_C(t) = v_s(t)$$



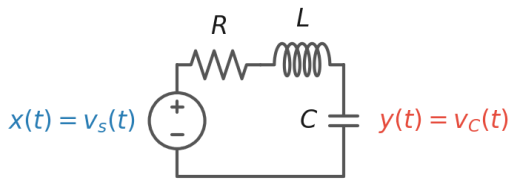
$$H(s) = \frac{V_C(s)}{V_s(s)} = \frac{1}{RC\,s + 1}$$

Función de transferencia (ii)

Ejemplo 5.3: Función de transferencia

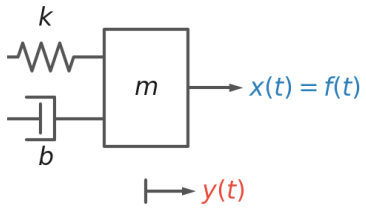
Obtén la función de transferencia $H(s) = Y(s)/X(s)$ y sus polos (asumiendo condiciones iniciales nulas):

a) RLC serie, con $R = 3\ \Omega$, $L = 1$ H y $C = 0{,}5$ F:



$$LC\,\ddot{v}_C + RC\,\dot{v}_C + v_C = v_s$$

b) Masa-muelle, con $m = 1$ kg, $b = 2$ N·s/m y $k = 5$ N/m:



$$m\,\ddot{y} + b\,\dot{y} + k\,y = f$$

▶ 💡 Solución a)

▶ 💡 Solución b)

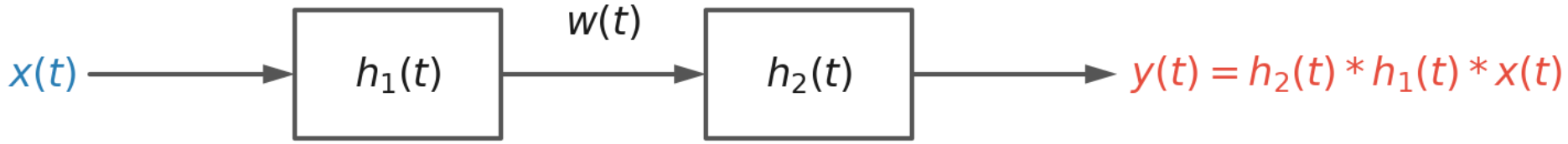
Nota

Fíjate que el **denominador** de la f.d.t. coincide con el **polinomio característico** de la EDO, y sus raíces son los **polos** del sistema, que determinan su **estabilidad**.

Cálculo de interconexiones y respuestas (i)

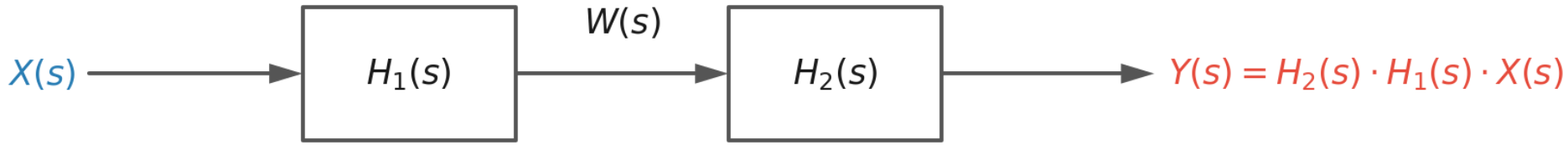
En el dominio del tiempo:

- dos sistemas en cascada equivalen a uno con $h(t) = h_1(t) * h_2(t) = \int_0^t h_1(\theta)\, h_2(t-\theta)\, d\theta$
- y la salida se calcula como $y(t) = x(t) * h(t) = \int_0^t x(\theta)\, h(t-\theta)\, d\theta$



En el dominio de Laplace:

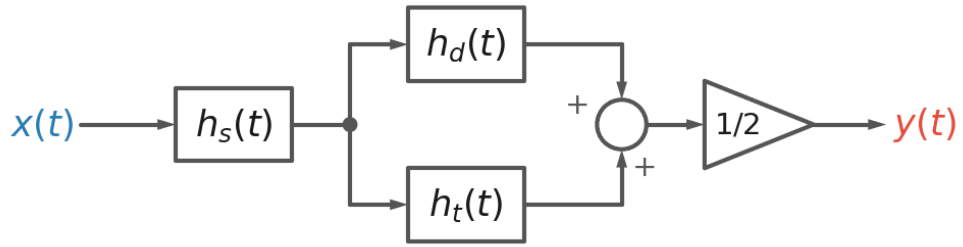
- dos sistemas en cascada equivalen a uno con $H(s) = H_1(s)\, H_2(s)$
- y la salida se calcula como $Y(s) = X(s)\, H(s)$



Cálculo de interconexiones y respuestas (ii)

Ejemplo 5.4: Sistema equivalente de un diagrama de bloques

El coche de la sesión 2 de problemas: la rueda trasera pisa el mismo punto de la carretera $\frac{\pi}{20}$ s después que la delantera, y el habitáculo sigue la media de las dos ruedas.



$$h_s(t) = 10\,e^{-10t}\,u(t), \quad h_d(t) = \delta(t), \quad h_t(t) = \delta\left(t - \tfrac{\pi}{20}\right)$$

Se pide:

a) Calcular el sistema equivalente $h(t)$, con integral de convolución.

b) Calcular el sistema equivalente $H(s)$, con Laplace.

c) Calcular la salida $y(t)$ cuando el coche sube un bordillo de 10 cm, $x(t) = 10\,u(t)$, por convolución y por Laplace.

▶ Solución a)

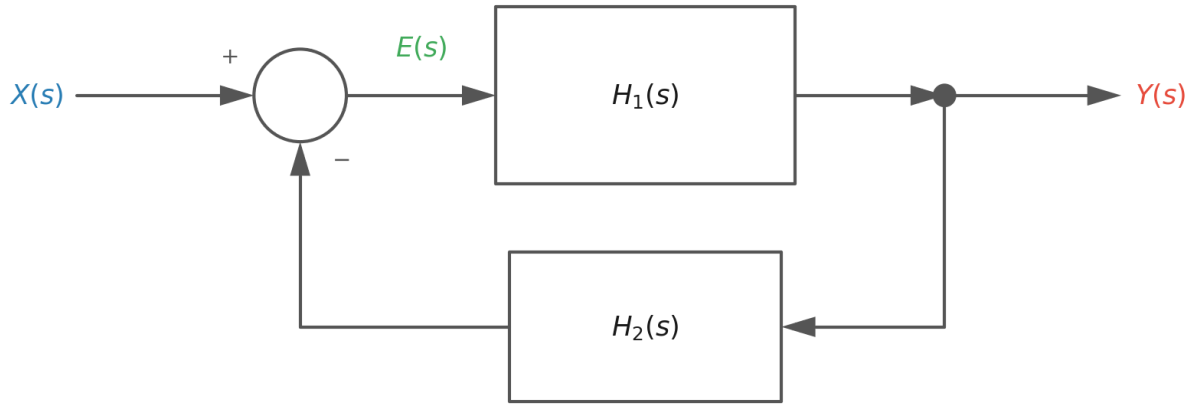
▶ Solución b)

▶ Solución c), por convolución

▶ Solución c), por Laplace

Cálculo de interconexiones y respuestas (iii)

La **realimentación** no se resolvió en el Tema 3. Con Laplace, es muy fácil:



- El diagrama se traduce a estas **ecuaciones algebraicas**:

$$E(s) = X(s) - H_2(s)\,Y(s) \qquad Y(s) = H_1(s)\,E(s)$$

- Sustituyendo $E(s)$ y despejando $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)\,H_2(s)}\,X(s)$$

Ejemplo 5.5: Realimentación unitaria

El sistema $H_1(s) = \dfrac{2}{s+1}$ se realimenta con $H_2(s) = 1$.

a) Calcula el sistema equivalente $H(s)$ y sus polos.

b) ¿Qué ha cambiado al cerrar el bucle?

▶ 💡 Solución a)

▶ 💡 Solución b)

Nota

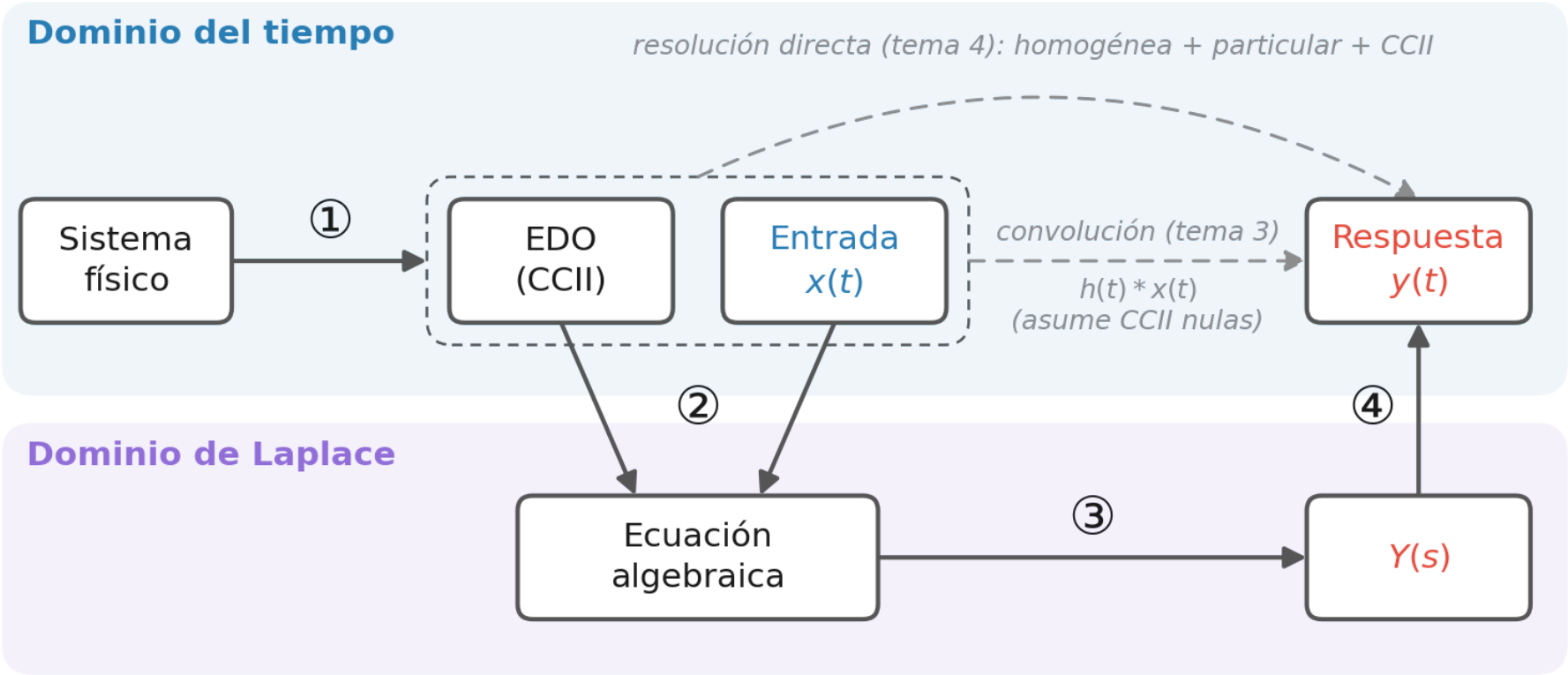
La realimentación **mueve los polos de un sistema**: es el fundamento de los sistemas de control.

En resumen

- La transformada de Laplace nos permite:
  - Transformar señales complejas en funciones racionales de s
  - Transformar ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas
  - Calcular convoluciones como simples multiplicaciones
  - No preocuparnos de las condiciones iniciales en $t = 0^+$ cuando hay saltos bruscos
  - Resolver diagramas de bloques complejos con realimentaciones de forma sencilla
- Pero...
  - Para volver al dominio del tiempo, necesitamos **descomponer** $Y(s)$ en fracciones más simples, que **estén en la tabla**
  - Vamos a ver cómo hacerlo de forma sistemática

VNIVERSITAT DE VALÈNCIA Escola Tècnica Superior d'Enginyeria (ETSE-UV)

Los diferentes caminos



📣 **¿Cómo volver al dominio del tiempo?**

Necsitamos un **método sistemático** para **volver al dominio del tiempo** a partir de $Y(s)$.

Fracciones simples

Al calcular respuestas de sistemas $Y(s)$ siempre tendremos un **cociente racional de polinomios**:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-p_1)\,(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

- Para **volver al dominio del tiempo**, necesitamos **descomponer** $Y(s)$ en fracciones más simples, que **estén en la tabla**
- Esto siempre es posible si el grado de $N(s)$ es menor que el de $D(s)$
- La forma de cada fracción **depende del tipo de polo** (lo mismo que sucedía al resolver EDOs):

Tipo de polos	**Polos**	**Fracciones en $Y(s)$**	**Términos en $y(t)$**
i) Reales distintos	$p_1 \neq p_2$	$\dfrac{A_1}{s-p_1} + \dfrac{A_2}{s-p_2}$	$A_1\, e^{p_1 t} + A_2\, e^{p_2 t}$
ii) Real doble	$p_{1,2} = p$	$\dfrac{A_1}{s-p} + \dfrac{A_2}{(s-p)^2}$	$(A_1 + A_2\, t)\, e^{pt}$
iii) Complejos	$p_{1,2} = \sigma \pm j\,\omega_d$	$\dfrac{B\,(s-\sigma) + C\,\omega_d}{(s-\sigma)^2 + \omega_d^2}$	$e^{\sigma t}\,(B\cos(\omega_d t) + C\sin(\omega_d t))$

Caso i: polos reales distintos

Ejemplo 5.6: Polos reales distintos

Calcula la transformada inversa de $Y(s) = \dfrac{6s+8}{2s^2+4s}$

▼ Solución

1) Simplificar: se divide entre 2, para que s^2 lleve coeficiente unitario:

$$Y(s) = \frac{3s+4}{s^2+2s}$$

2) Factorizar, resolviendo el denominador, $s^2+2s=0$:

$$Y(s) = \frac{3s+4}{s\,(s+2)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+2}$$

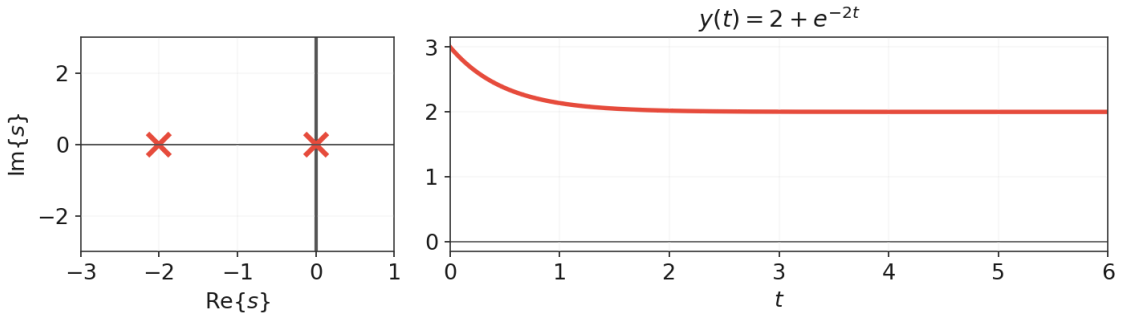
3) Multiplicar por $s\,(s+2)$ y **agrupar**:

$$3\,s + 4 = A_1\,(s+2) + A_2\,s = (A_1 + A_2)\,s + 2A_1$$

4) Igualar los coeficientes de s y los términos independientes:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 3 \\ 2A_1 = 4 \end{cases} \implies A_1 = 2, \quad A_2 = 1$$

5) Tabla: $y(t) = \left(2 + e^{-2t}\right) u(t)$



Caso ii: polos reales iguales

Ejemplo 5.7: Polos reales iguales

Calcula la transformada inversa de $Y(s) = \dfrac{2s+5}{3s^2+6s+3}$

▼ Solución

1) Simplificar: se divide entre 3, para que s^2 lleve coeficiente unitario:

$$Y(s) = \frac{\frac{2}{3}s + \frac{5}{3}}{s^2+2s+1}$$

2) Factorizar, resolviendo el denominador, $s^2+2s+1=0$:

$$Y(s) = \frac{\frac{2}{3}s + \frac{5}{3}}{(s+1)^2} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2}$$

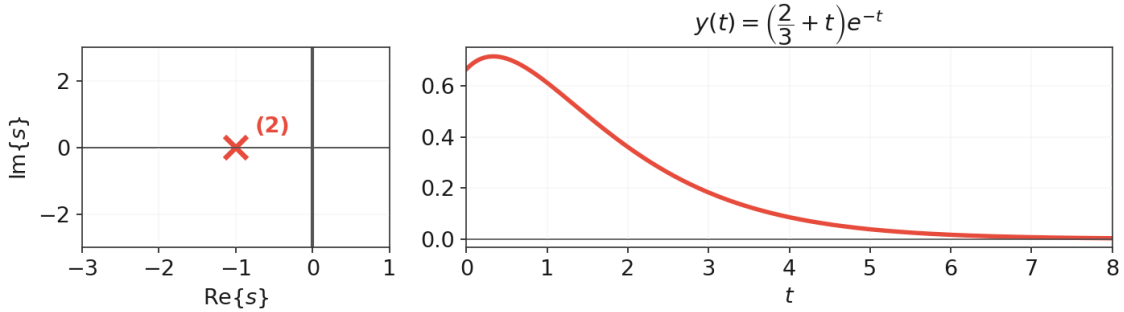
3) Multiplicar por $(s+1)^2$ y **agrupar**:

$$\tfrac{2}{3}s + \tfrac{5}{3} = A_1(s+1) + A_2 = A_1 s + (A_1 + A_2)$$

4) Igualar los coeficientes de s y los términos independientes:

$$\begin{cases} A_1 = \frac{2}{3} \\ A_1 + A_2 = \frac{5}{3} \end{cases} \Longrightarrow \quad A_1 = \tfrac{2}{3}, \quad A_2 = 1$$

5) Tabla: $y(t) = \left(\frac{2}{3} + t\right) e^{-t}\, u(t)$



Caso iii: polos complejos conjugados

Ejemplo 5.8: Polos complejos conjugados

Calcula la transformada inversa de $Y(s) = \dfrac{2s+8}{2s^2+4s+10}$

▼ Solución

1) Simplificar: se divide entre 2, para que s^2 lleve coeficiente unitario:

$$Y(s) = \frac{s+4}{s^2+2s+5}$$

2) Factorizar como los polos son $p_{1,2} = -1 \pm 2\,j$, escribimos:

$$Y(s) = \frac{s+4}{(s+1)^2+2^2} = \frac{B\,(s+1)+C\cdot 2}{(s+1)^2+2^2}$$

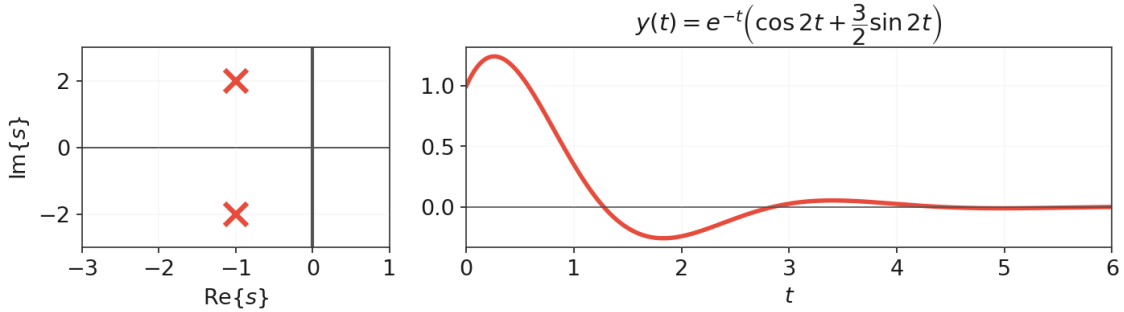
3) Igualar los numeradores y **agrupar**:

$$1\,s+4 = B\,(s+1)+2C = B\,s+(B+2C)$$

4) Igualar los coeficientes de s y los términos independientes:

$$\begin{cases} B = 1 \\ B+2C = 4 \end{cases} \implies B=1, \quad C=\tfrac{3}{2}$$

5) Tabla: $y(t) = e^{-t}\left(\cos(2t) + \tfrac{3}{2}\sin(2t)\right)u(t)$



Atajo: método de tapar fracciones (i)

Con polos **reales distintos** hay un atajo, cada coeficiente se obtiene:

- **tapando** en el denominador el factor de su polo; y **evaluando** lo que queda **en dicho polo**.

Ejemplo 5.9: El mismo ejemplo del caso i, tapando

Calcula la transformada inversa de $Y(s) = \dfrac{6s+8}{2s^2+4s} = \dfrac{3s+4}{s\,(s+2)} = \dfrac{A_1}{s} + \dfrac{A_2}{s+2}$

Solución

1) A_1**, el del polo** $s=0$: se tapa el factor s

$$Y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+2}$$

$$A_1 = \left.\frac{3s+4}{\cancel{s}\,(s+2)}\right|_{s=0} = \left.\frac{3s+4}{s+2}\right|_{s=0} = \frac{4}{2} = 2$$

2) A_2**, el del polo** $s=-2$: se tapa el factor $(s+2)$

$$Y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+2}$$

$$A_2 = \left.\frac{3s+4}{s\,\cancel{(s+2)}}\right|_{s=-2} = \left.\frac{3s+4}{s}\right|_{s=-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Atajo: método de tapar fracciones (ii)

Si además hay otros polos, **se tapan solo los reales distintos**, y después, **obtenemos el resto por igualación**

Ejemplo 5.10: Dos polos reales distintos y un par imaginario puro

Calcula la transformada inversa de $Y(s) = \dfrac{10}{(s+1)(s+2)\,(s^2+1)} = \dfrac{A_1}{s+1} + \dfrac{A_2}{s+2} + \dfrac{B\,s+C}{s^2+1}$

▼ 💡 Solución

1) A_1**, el del polo** $s=-1$: se tapa $(s+1)$

$$A_1 = \left.\frac{10}{\cancel{(s+1)}\,(s+2)\,(s^2+1)}\right|_{s=-1} = \frac{10}{(1)(2)} = 5$$

2) A_2**, el del polo** $s=-2$: se tapa $(s+2)$

$$A_2 = \left.\frac{10}{(s+1)\,\cancel{(s+2)}\,(s^2+1)}\right|_{s=-2} = \frac{10}{(-1)(5)} = -2$$

3) Igualar: como A_1 y A_2 ya se conocen, aplicamos igualación para calcular B y C:

$$10 = \cancel{A_1}^{\,5}\,(s+2)\,(s^2+1) + \cancel{A_2}^{\,-2}\,(s+1)\,(s^2+1) + (B\,s+C)(s+1)(s+2)$$

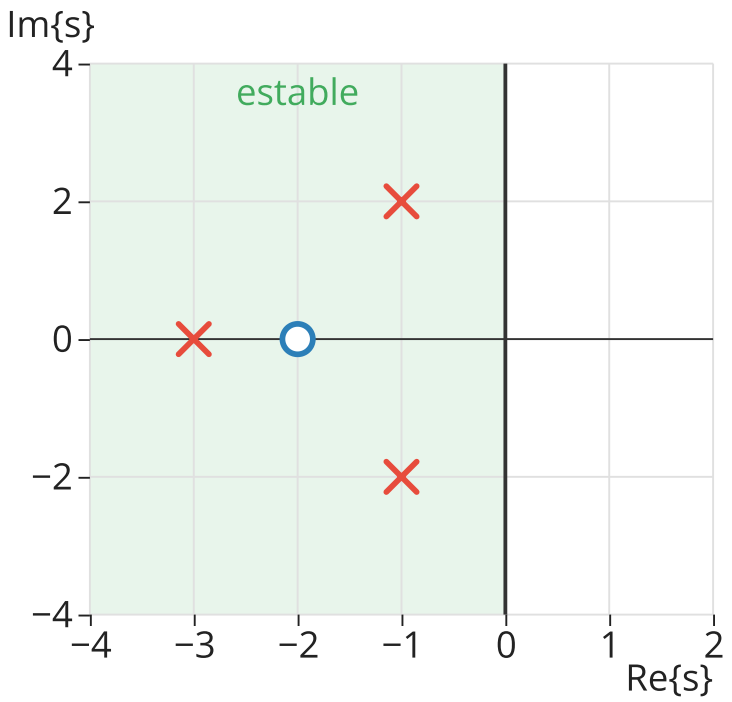
$$\begin{cases} s^3: & A_1 + A_2 + B = 0 \\ s^0: & 2A_1 + A_2 + 2C = 10 \end{cases} \implies B=-3, \quad C=1$$

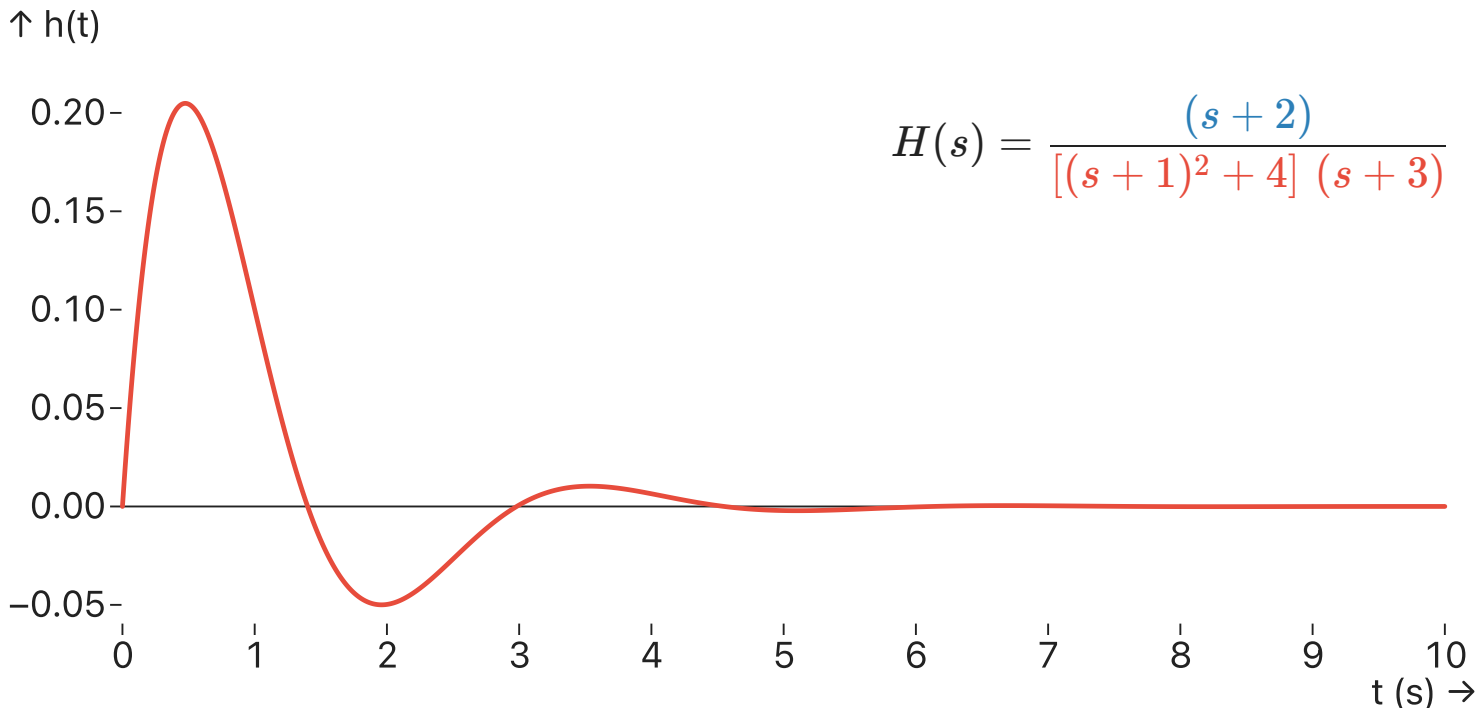
5) Tabla:

$$y(t) = \left(5\,e^{-t} - 2\,e^{-2t} - 3\cos t + \sin t\right) u(t)$$

Diagrama de polos y ceros

- Los polos (**X**) determinan la **estabilidad** del sistema
- Los ceros (**O**) modifican la respuesta pero **no afectan a la estabilidad**





$$H(s) = \frac{(s+2)}{[(s+1)^2+4]\,(s+3)}$$

Añadir polo | Añadir cero | Reiniciar

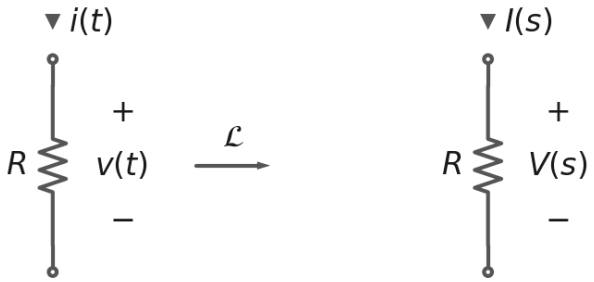
Arrastra los polos (×) y los ceros (○); doble clic para quitar uno.

Circuitos en el dominio de Laplace

Aplicando la transformada de Laplace a las ecuaciones de los componentes, se obtiene:

Resistencia

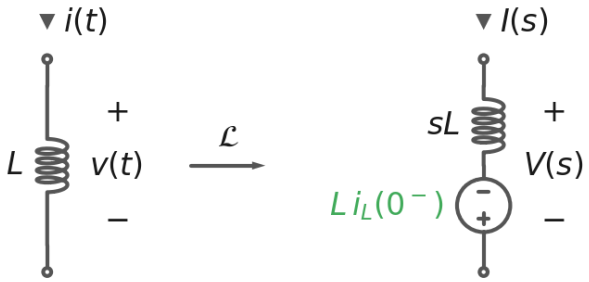
$$v(t) = R\,i(t)$$



$$V(s) = R\,I(s)$$

Bobina

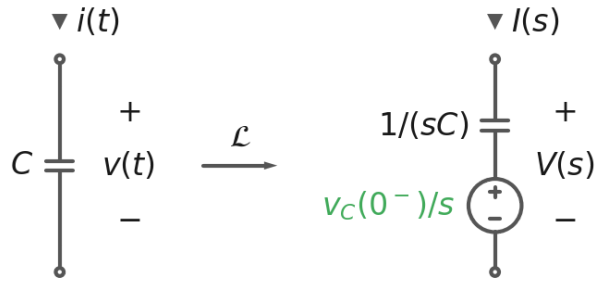
$$v(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}$$



$$V(s) = sL\,I(s) - L\,i_L(0^-)$$

Condensador

$$i(t) = C\,\frac{dv(t)}{dt}$$



$$V(s) = \frac{1}{sC}\,I(s) + \frac{v_C(0^-)}{s}$$

- **Basta con reemplazar cada elemento** por su equivalencia en Laplace
- Después, **se puede aplicar cualquier técnica** de circuitos (divisores, mallas, nudos, Thévenin...)

Ejemplo: circuito RLC con entrada escalón

Ejemplo 5.11: Circuito RLC serie con Laplace

Es el circuito RLC serie del Tema 4: $R = 3\ \Omega$, $L = 1$ H y $C = 0{,}5$ F, en reposo.

a) Dibuja el circuito equivalente en Laplace

Calcula $v_C(t)$ con la transformada de Laplace si en $t = 0$ se conecta:

b) $v_s(t) = 10\,u(t)$ V

c) $v_s(t) = 10\cos(t)\,u(t)$ V

▶ 💡 Solución a)

▶ 💡 Solución b)

▶ 💡 Solución c)

Para terminar

Vaya a wooclap.com

Ingrese el código de evento en el banner superior

Código de evento

DPFMXKK

Esperando a los participantes…